土木試驗所報告

第五十六號

基礎微分方程式を羃級數に展開して解き之に依つて變斷面壓縮材の限界荷重を求むる方法……內務技師 橫田周平…1

中空壓縮材の挫屈に關する理論的研究(第1報)……內務技師 橫田周平…17

鐵筋コンクリートロツカーの設計並びにその設計荷重に對する安全性に關すも試驗……內務技師 一木保夫…45

自動車重量係數に關する調査……內務技師 兵藤直吉…61

昭和十五年九月

內務省土木試驗所

建設省沼津支所圖書

分類	Ⅱ－K	番号	1－46
購入年月日	年 月 日		

局築建
15.10.7
受接

基礎微分方程式を冪級數に展開して解き之に依つて變斷面壓縮材の限界荷重を求むる方法

內務技師　橫　田　周　平

目　次

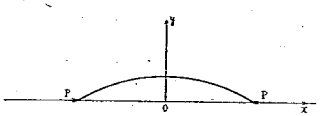
I. 緒　言……（1）
II. 慣性モーメントの取り方……（2）
III. 級數に展開して基礎方程式を解く事……（2）
IV. 數値計算……（9）
V. 結　言……（16）

I. 緒　言

著者は曩に"勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法"を土木試驗所報告第 44 號（昭和 14 年 2 月）に發表して，長柱が挫屈しない爲には長柱の中央の慣性モーメントを何の程度に大きく取つたならば良いかを近似的ではあるが端的に求むる方法を述べた．

茲に再び變斷面長柱の挫屈荷重を求むる一方法を提出するのであるが，前者とは全然異つた手段に依るものである．然しながら目的とする處は前者と同樣に挫屈しない樣な柱を造るにはどうしたならば良いかを目指してゐる．計算例も前者と同樣な場合を選び前者の結果が何の程度に近似してゐるかをも明らかにして見る事にした．

圖—1



長柱の基礎方程式は良く知られて居る樣に次の式で表はされる．座標は圖の如く取る．

$$EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}=-Py \quad \cdots\cdots(1)$$

但し E は柱の材料の彈性係數，P は軸荷重 I は柱の斷面の慣性モーメントで一般に x の函數である．

基礎方程式 (1) の取扱に關する根本的な事項は別に論ずる事として此處では通常の方法に從つて (1) 式より柱の限界荷重を求める事とする．

(1) の微分方程式を解けば 2 つの積分常數を有する一般解を得る．此れを定むべき 2 つの境界條件がある譯であるが，其の內 1 つの條件で 1 つの積分常數が定まり，殘餘の條件は他の積分常數を決定せずに基礎微分方程式中の 3 つの量 E, I, P と柱の長さ L とを關係づけて仕舞ふ．微分方程式の解としては之は變則であるけれども，之に依つて求むる挫屈荷重が得られるので此の便宜的な方法を昔しから採用してゐる．解として此の曖昧なる點は別に詳論するであらう（中空壓縮材の挫屈に關する理論的研究第 I 篇參照）．

兎に角挫屈荷重を求むる手掛りは (1) の基礎方程式中に含まれてゐる．從つて (1) 式は級數の形で解いても必ずその中に挫屈荷重を決定すべき手掛りがある筈である．從來變斷面長柱の挫屈に關しては (1) 式が簡單な既知の函數で解ける樣な $I(x)$ に就てのみ論ぜられた．任意に $I(x)$ を與へて挫屈荷重を求め樣とする努力は餘り

行はれなかつた様である.

著者は計算が相當複雜になるのを覺悟の前で (1) 式を級數に展開して解いて挫屈荷重を求めて見た. 實際に數値計算を行つた計算例は $I(x)$ の最も實用的と思はれる形に就てのみであるが, 之等の計算に依つて見れば $I(x)$ の一般の形に就て級數に展開して挫屈荷重を求むる事が何の程度の勞力を要するかが大體解るであらう.

II. 慣性モーメントの取り方

$I(x)$ が收斂する級數で表し得る様な形であれば, (1) 式を級數で解く事が可能であらう. 又實用的な柱の場合には必ず $I(x)$ は收斂する級數で表し得る様な形である. $I(x)$ が收斂級數で表されゝば (1) 式が收斂級數で解き得る見込が着けられる. 收斂級數で解き得てから挫屈荷重を求むる迄の手續は以後の計算例に依つて見て戴き度い.

$I(x)$ の一般的な形に就て (1) 式を解く事は徒らに複雜になるだけであるから; 最も實用的で簡單な $I(x)$ の形を先づ考へて見よう.

實際に長柱を設計する場合支ふべき高さと荷重が與へられるのが通常である. 與へられた荷重に對しては兩端の斷面が先づ第一に決定される. 從つて次に此の荷重を挫屈しない様に支へる爲には斷面の慣性モーメントを中央部で何の程度に大きく採らなければならないかを解決すれば良いのである. 柱の自重を考へないとすれば柱の中央の斷面の慣性モーメントを最大に取るのが最も無駄の無い形である事は明瞭である. 從つて挫屈しない爲には兩端から中央に向つて慣性モーメントの大きくなつて行き方を決めれば良い事になる. 柱の中央を座標の原點に取り上記の如き慣性モーメントの變化を最も簡單な式で表せば次の形となるであらう.

$$I(x)=I_c-(I_c-I_e)\left(\frac{2x}{L}\right)^n \quad \cdots\cdots (2)$$

但し I_c : 柱の中央斷面の慣性モーメント

I_e : 柱の兩端の斷面の慣性モーメント

L : 柱の長さ

n : 正の整數

$I(x)$ の形には此の外無數に考へられるが實用的には此の形で充分と考へる. 又此の形であれば基礎方程式 (1) を級數で解く事が非常に簡單となる.

I_e が基準で I_e を定むべきものであるが式の取扱ひの上からは假りに I_c を基準に取つて計算を進め最後に I_e 基準に換算し直す事とする. "勢方式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法" に於ても, 斷面の慣性モーメントを (2) 式の如く假定して $n=1, 2, 3, 4$ の場合に就き數値計算を行つた. 此の小論に於ても前の結果と比較する意味もあり同じ形を踏襲し様と思ふ.

斯くして實際に計算した結果變斷面對稱長柱の挫屈荷重は E, L, I_c 又は $I_c, I_e/I_c, n$ の函數として求められる. 但し最初の 3 つの量は限界荷重を與へる式に常に現れて來る様に $\frac{EI_c}{L^2}$ 又は $\frac{EI_e}{L^2}$ の形で現れるので問題外となる. 從つて挫屈荷重は I_e/I_c と n との 2 つの量の函數となる. 此れで計算して求めた結果が 1 つの圖表の內に收められるので非常に便利である.

III. 級數に展開して基礎方程式を解く事

$$\frac{2x}{L}=\lambda,\ \frac{PL^2}{4EI_c}=a^2,\ 0\leqq p^n=\frac{I_e-I_e}{I_e}\leqq 1 \quad\cdots\cdots(3)$$

と置き換へて (2) 式を (1) 式に代入すれば基礎方程式は次の如くなる.

$$(1-p^n\lambda^n)\frac{d^2y}{d\lambda^2}=-a^2y \quad\cdots\cdots(4)$$

此の解を次の如き級數

$$y=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu\lambda^\mu \quad\cdots\cdots(5)$$

で求められると假定して之を (4) 式に代入すれば

$$(1-p^n\lambda^n)\sum_{\mu=2}^{\infty}A_\mu\mu(\mu-1)\lambda^{\mu-2}+a^2\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu\lambda^\mu=0$$

和の形を適當に組換へて整理すれば

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}\{A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)+a^2A_\mu\}\lambda^\mu+\sum_{\mu=0}^{\infty}\{A_{n+\mu+2}(n+\mu+2)(n+\mu+1)$$
$$+a^2A_{n+\mu}-p^nA_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)\}\lambda^{n+\mu}=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

對稱な柱の半分を考へる事とすれば $0\leqq\lambda\leqq 1$ であるが此の範圍の λ の全ての値に對して (6) 式が恒等的に成立する爲には λ の各冪の級數は零でなければならない. 卽ち

λ^{n-1} の項迄の係數に對しては

$$A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)+a^2A\mu=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

λ^n 以下の項の係數に對しては

$$A_{n+\mu+2}(n+\mu+2)(n+\mu+1)+a^2A_{n+\mu}-p^nA_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

微分方程式の本來の性質から謂へば 2 つの境界の條件より (5) 式に於ける係數 A_0, A_1 が決定され A_2 以下は (7) 乃至 (8) 式に依り順次決定される筈であるが, 此の場合に於ては基礎方程式 (1) を既知の函數で解き得た場合と同樣に 1 つの積分常數 A_0 は未決定の儘殘され, 級數の中から挫屈荷重が決定される事になる.

卽ち圖—1 の如く長柱が張出したとすれば境界條件は

$\lambda=0$ に於て $\dfrac{dy}{d\lambda}=0$

$\lambda=1$ に於て $y=0$

の 2 つである. 前者より直ちに

$$A_1=0$$

なる事が解る. 後者より强ひて A_0 を決定し樣とすれば $A_0=0$ となる. $A_0=A_1=0$ とすれば (7) 乃至 (8) 式に依つて A_2 以下の各係數は全て零となる. 卽ち函數は消滅し挫屈は起らない事になる. $A_0\neq 0$ とすれば後者の條件は級數中に現れる a^2, p^n, n の間に 1 つの關係を作り上げるのであつて之が挫屈荷重を決定する手掛りとなるのである.

(i) $n=1$ の場合

先づ $n=1$ の場合に就て係數を決定して見よう. 此の場合 (7) 式は成立せず (8) 式より係數の間の關係は次の如く定められる.

$$A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)-pA_{\mu+1}(\mu+1)\mu+a^2A_\mu=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

$A_1=0$, A_0 は未定の儘とし (9) 式に於て $\mu=0, 1, 2$ ……と置き A_2 以下を計算すれば次の如くなる.

$$A_2=-\frac{1}{2!}a^2A_0$$

$$A_3=-\frac{1}{3!}a^2pA_0$$

$$A_4=\left(-\frac{2!}{4!}a^2p^2+\frac{1}{4!}a^4\right)A_0$$

$$A_5=\left(-\frac{3!}{5!}a^3p^3+\frac{2^2}{5!}a^4p\right)A_0$$

$$A_6=\left(-\frac{4!}{6!}a^2p^4+\frac{3^2\cdot 2!}{6!}a^4p^2-\frac{1}{6!}a^6\right)A_0$$

$$A_7=\left(-\frac{5!}{7!}a^2p^5+\frac{4^2\cdot 3!}{7!}a^4p^3-\frac{3^2}{7!}a^6p\right)A_0$$

$$A_8=\left(-\frac{6!}{8!}a^2p^6+\frac{5^2\cdot 4!}{8!}a^4p^4-\frac{3^2\cdot 2^2\cdot 2!}{8!}a^6p^2+\frac{1}{8!}a^8\right)A_0$$

$$A_9=\left(-\frac{7!}{9!}a^2p^7+\frac{6^2\cdot 5!}{9!}a^4p^5-\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 3!}{9!}a^6p^3+\frac{4^2}{9!}a^8p\right)A_0$$

$$A_{10}=\left(-\frac{8!}{10!}a^2p^8+\frac{7^2\cdot 6!}{10!}a^4p^6-\frac{5^2\cdot 3^2\cdot 4!}{10!}a^6p^4+\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 2!}{10!}a^8p^2-\frac{1}{10!}a^{10}\right)A_0$$

$$A_{11}=\left(-\frac{9!}{11!}a^2p^9+\frac{8^2\cdot 7!}{11!}a^4p^7-\frac{7^2\cdot 3^2\cdot 5!}{11!}a^6p^5+\frac{5^2\cdot 4^2\cdot 3!}{11!}a^8p^3-\frac{5^2}{11!}a^{10}p\right)A_0$$

$$A_{12}=\left(-\frac{10!}{12!}a^2p^{10}+\frac{9^2\cdot 8!}{12!}a^4p^8-\frac{7^2\cdot 4^2\cdot 6!}{12!}a^6p^6+\frac{7^2\cdot 5^2\cdot 4!}{12!}a^8p^4-\frac{5^2\cdot 3^2\cdot 2!}{12!}a^{10}p^2+\frac{1}{12!}a^{12}\right)A_0$$

……

之等の値を (5) 式に代入して $\lambda=1$ に於て $y=0$ と謂ふ條件を入れれば a^2 と p に關する複級數の總和が零に等しいと謂ふ事になる. 卽ち a^2 と p との函數關係が求められたのである. 卽ち挫屈荷重が決定せられる事になる. 此の式を a^2 に就て整理し直せば次の樣になる.

$$0=1-\phi_{1,2}(p)a^2+\phi_{1,4}(p)a^4-\phi_{1,6}(p)a^6+\phi_{1,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

但し

$$\phi_{1,2}(p)=\frac{1}{2!}+\frac{1!}{3!}p+\frac{2!}{4!}p^2+\cdots\cdots+\frac{m!}{(m+2)!}p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{2^2\cdot 1!}{5!}p+\frac{3^2\cdot 2!}{6!}p^2+\cdots\cdots+\frac{(m+1)^2\cdot m!}{(m+4)!}p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{3^2\cdot 1!}{7!}p+\frac{3^2\cdot 2^2\cdot 2!}{8!}p^2+\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 3!}{9!}p^3+\frac{5^2\cdot 3^2\cdot 4!}{10!}p^4+\frac{7^2\cdot 3^2\cdot 5!}{11!}p^5+\frac{7^2\cdot 4^2\cdot 6!}{12!}p^6+\frac{9^2\cdot 4^2\cdot 7!}{13!}p^7+\frac{9^2\cdot 5^2\cdot 8!}{14!}p^8+\frac{11^2\cdot 5^2\cdot 9!}{15!}p^9+\frac{11^2\cdot 6^2\cdot 10!}{16!}p^{10}+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{4^2\cdot 1!}{9!}p+\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 2!}{10!}p_2+\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 3!}{11!}p_3$$

$$+\frac{7^2\cdot5^2\cdot4!}{12!}p^4+\frac{7^2\cdot4^2\cdot2^2\cdot5!}{13!}p^5+\frac{7^2\cdot4^2\cdot3^2\cdot6!}{14!}p^6+\frac{8^2\cdot5^2\cdot3^2\cdot7!}{15!}p^7+\frac{11^2\cdot5^2\cdot3^2\cdot8!}{16!}p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{5^2\cdot1!}{11!}p+\frac{5^2\cdot3^2\cdot2!}{12!}p^2+\frac{7^2\cdot5^2\cdot2!}{13!}p^3+\frac{7^2\cdot5^2\cdot2^2\cdot4!}{14!}p^4+\cdots\cdots$$

……

之等の式に依つて p の各値（但し $0\leqq p\leqq1$）に對して a^2 の値を (10) 式に於て求むれば良い．$\phi(p)$ は全て收斂する級數である事は直ちに明瞭である．a^2 と p との關係の近似的數値は前報告圖−6（土木試驗所報告第 44 號 11 頁）より求められるので非常に便利である．但し前報告圖−6 は $4a^2$ と $1-p^n$ の關係を圖示したものである．

函數 $\phi(p)$ の各係數は全て機械的な手續で簡單に求められるのであつて必ず自乘と階乘の形で表はされるのがその著しい特徴である．

之等の各係數間の關係を見る爲には式は長くなるが次の如く書き直す方が便利である．又 $n=2,\ 3,\ 4\cdots\cdots$ の場合は次の形を基本として機械的に導き出せる事は後に示す通りである．

$$\phi_{1,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}p+\frac{1}{3\cdot4}p^2+\cdots\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{4\cdot5}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}\right)p+\frac{1}{5\cdot6}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}\right)p^2$$
$$+\frac{1}{6\cdot7}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}\right)p^3+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{6\cdot7}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4\cdot5}\right)p$$
$$+\frac{1}{7\cdot8}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right)p^2+\frac{1}{8\cdot9}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\right)p^3+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{8\cdot9}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\right)p+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right)p^2+\frac{1}{10\cdot11}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\right)p^3+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{10\cdot11}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\right.$$
$$+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}$$
$$\left.+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\right)p+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^2+\cdots\cdots$$

……

一般に

$$\phi_{1,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,1}p+B_{\nu,2}p^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+B_{\nu,m}p^m+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とすれば

$$B_{2,m}=\frac{1}{(m+1)(m+2)},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

であり其の他の係數に就ては順次次の關係式が成立する.

$$B_{4,m}=\frac{1}{(m+3)(m+4)}(B_{2,0}+B_{2,1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+B_{2,m})=\frac{1}{(m+3)(m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,m}$$

$$B_{6,m}=\frac{1}{(m+5)(m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,m}$$

$$B_{8,m}=\frac{1}{(m+7)(m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

從つて $\phi_{1,4}(p)$, $\phi_{1,6}(p)$,$\cdots\cdots\cdots\cdots$の係數は $\phi_{1,2}(p)$ の係數より全く機械的に求められるのであつて, $n=2$, 3, 4 の場合に於ても係數間に同樣の關係式を見出す事が出來る.

(ii) $n=2$ の場合

A_2, A_3 に對しては (7) 式, A_4 以下に對しては (8) 式に依つて $n=1$ の場合と同樣に各係數を計算すれば次の通りである.

$$A_1=A_2=A_3=\cdots\cdots\cdots=A_{2n+1}=\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

$$A_2=-\frac{1}{2!}a^2A_0$$

$$A_4=\frac{1}{4!}a^2(a^2-1\cdot2\cdot p^2)A_0$$

$$A_6=-\frac{1}{6!}a^2(a^2-1\cdot2\cdot p^2)(a^2-3\cdot4\cdot p^2)A_0$$

$$A_8=\frac{1}{8!}a^2(a^2-1\cdot2\cdot p^2)(a^2-3\cdot4\cdot p^2)(a^2-5\cdot6\cdot p^2)A_0$$

$$A_{10}=-\frac{1}{10!}a^2(a^2-1\cdot2\cdot p^2)(a^2-3\cdot4\cdot p^2)(a^2-5\cdot6\cdot p^2)(a^2-7\cdot8\cdot p^2)A_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之等の値を (5) 式に代入して $\lambda=1$ に於て $y=0$ と置き a^2 に就て整頓し直せば (10) 式と同樣な形で次の (11) 式を得る.

$$0=1-\phi_{2,2}(p)a^2+\phi_{2,4}(p)a^4-\phi_{2,6}(p)a^6+\phi_{2,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

玆に

$$\phi_{2,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}p^2+\frac{1}{5\cdot6}p^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}p^{2m}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{5\cdot6}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}\right)p^2+\frac{1}{7\cdot8}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}\right)p^4$$

$$+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8}\right)p^6+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{7\cdot8}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right)p^2$$

$$+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right)p^4+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^6$$

$$+\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right)p^2+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^4+\frac{1}{13\cdot14}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right)p^6+\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right.$$

$$+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}$$

$$\left.+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^2+\frac{1}{13\cdot14}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right)p^4\cdots\cdots$$

……

$n=1$ の場合と同樣に各係數の間には次の關係式を見出し得る.

$$\phi_{2,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,2}p^2+B_{\nu,4}p^4+\cdots\cdots+B_{\nu,2m}p^{2m}+\cdots\cdots$$

と置けば

$$B_{2,2m}=\frac{1}{(2m+1)(2m+2)},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$$

$$B_{4,2m}=\frac{1}{(2m+3)(2m+4)}(B_{2,0}+B_{2,2}+B_{2,4}+\cdots\cdots+B_{2,2m})$$

$$=\frac{1}{(2m+3)(2m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,2m}$$

$$B_{6,2m}=\frac{1}{(2m+5)(2m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,2m}$$

$$B_{8,2m}=\frac{1}{(2m+7)(2m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,2m}$$

……

(iii) $n=3$ の場合

$n=1,\ 2$ の場合と同樣の手續きに依つて $n=3$ の場合の $\phi(p)$ を求むれば次の如くである.

$$0=1-\phi_{3,2}(p)\alpha^2+\phi_{3,4}(p)\alpha^4-\phi_{3,6}(p)\alpha^6+\phi_{3,8}(p)\alpha^8-\cdots\cdots(12)$$

$$\phi_{3,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}p^3+\frac{1}{7\cdot8}p^6+\cdots\cdots+\frac{1}{(3m+1)(3m+2)}p^{3m}\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{6\cdot7}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}\right)p^3+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{7\cdot8}\right)p^6$$

$$+\frac{1}{12\cdot13}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{10\cdot11}\right)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{8\cdot9}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\right)p^3$$
$$+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^6+\frac{1}{14\cdot15}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{10\cdot11}\cdot\frac{1}{12\cdot13}\right)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{10\cdot11}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\right)p^3+\frac{1}{13\cdot14}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right)p^6+\frac{1}{16\cdot17}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{10\cdot11}\cdot\frac{1}{12\cdot13}\cdot\frac{1}{14\cdot15}\right)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{12\cdot13}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{10\cdot11}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\cdot\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\cdot\frac{1}{10\cdot11}\right)p^3+\cdots\cdots$$

……

各係數の間には次の關係がある.

$$\phi_{3,v}(p)=B_{v,0}+B_{v,3}p^3+B_{v,6}p^6+\cdots\cdots+B_{v,3m}p^{3m}+\cdots\cdots$$

と置けば

$$B_{2,3m}=\frac{1}{(3m+1)(3m+2)},\quad m=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

$$B_{4,3m}=\frac{1}{(3m+3)(3m+4)}(B_{2,0}+B_{2,3}+B_{2,6}+\cdots\cdots+B_{2,3m})$$
$$=\frac{1}{(3m+3)(3m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,3m}$$

$$B_{6,3m}=\frac{1}{(3m+5)(3m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,3m}$$

$$B_{8,3m}=\frac{1}{(3m+7)(3m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,3m}$$

……

(iv) $n=4$ の場合

$$0=1-\phi_{4,2}(p)a^2+\phi_{4,4}(p)a^4-\phi_{4,6}(p)a^6+\phi_{4,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\phi_{4,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}p^4+\frac{1}{9\cdot10}p^8+\cdots\cdots+\frac{1}{(4m+1)(4m+2)}p^{4m}+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{7\cdot8}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}\right)p^4+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}\right.$$

$$+\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{9\cdot10}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\Big)p^4$$
$$+\frac{1}{13\cdot14}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}$$
$$+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\Big)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{11\cdot12}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{9\cdot10}$$
$$+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^4+\frac{1}{15\cdot16}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\cdot\frac{1}{13\cdot14}\Big)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{13\cdot14}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\Big)p^4+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,4}p^4+B_{\nu,8}p^8+\cdots\cdots+B_{\nu,4m}p^{4m}+\cdots\cdots$$

と置けば各係數の間には次の關係がある.

$$B_{2,4m}=\frac{1}{(4m+1)(4m+2)},\quad m=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

$$B_{4,4m}=\frac{1}{(4m+3)(4m+4)}(B_{2,0}+B_{2,4}+\cdots\cdots+B_{2,4m})$$
$$=\frac{1}{(4m+3)(4m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,4m}$$

$$B_{6,4m}=\frac{1}{(4m+5)(4m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,4m}$$

$$B_{8,4m}=\frac{1}{(4m+7)(4m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,4m}$$

$$\cdots\cdots$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の各場合の結果を通觀すれば $n=5$ 以下の場合も容易に導かれる事が判るであらう.

IV. 數　値　計　算

$\phi_{n,\nu}(p)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \nu=2,\ 4,\ 6,\cdots\cdots)$ は $0\leqq p^n\leqq 1$ の範圍で p^n の收斂級數である. p^n の各値に對して $\phi_{n,\nu}(p)$ を計算し之等の數値を (10), (11), (12), (13) の各式に入れ之等を滿足する a^2 の値を求むれば問題は解決される.

本計算に於ては $p^n=0.1,\ 0.2,\cdots\cdots 0.8$ の場合を取扱つた. $p^n=0.9,\ 1.0$ の場合は收斂が遲いので放棄した. $p^n=0.8$ の場合に於ては $\nu=2$ 及び 4 に對しては小數第 6 位迄正確に求むる爲に 30 項程度を取らなければならなかつた.

$\phi_{n,\nu}(p)$ の計算値を表示すれば表—1 の如くである.

表—1 $\phi_{n,\nu}(p)$ の数値

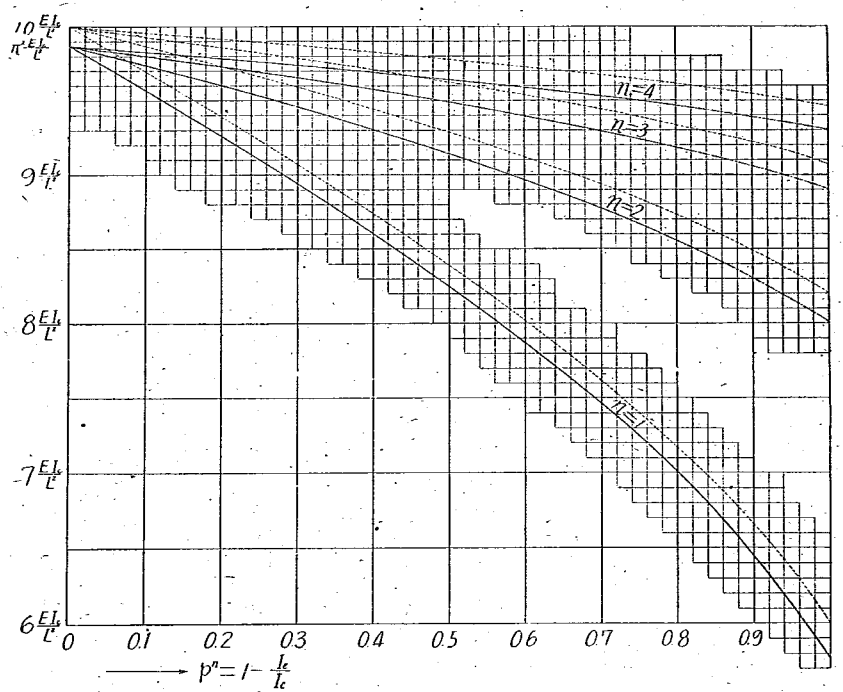
p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\phi_{1,2}(p)$	0.517,554	0.537,129	0.559,195	0.584,404	0.613,706	0.648,566	0.691,445	0.747,050
$\phi_{1,4}(p)$	0.045,271	0.049,514	0.054,590	0.060,782	0.068,527	0.078,552	0.092,166	0.112,118
$\phi_{1,6}(p)$	0.001,587,1	0.001,833,6	0.002,146,4	0.002,553,9	0.003,102,6	0.003,874,8	0.005,032,8	0.006,950,2
$\phi_{1,8}(p)$	0.000,029,8	0.000,036,4	0.000,045,3	0.000,057,7	0.000,075,6	0.000,103,0	0.000,148,4	0.000,233,2
$\phi_{1,10}(p)$	0.000,000,35	0.000,000,45	0.000,000,60	0.000,000,81	0.000,001,15	0.000,001,71	0.000,002,73	0.000,004,90
$\phi_{1,12}(p)$	0.000,000,002,7	0.000,000,003,8	0.000,000,005,3	0.000,000,007,8	0.000,000,011,9	0.000,000,019,3	0.000,000,034,0	
$\phi_{2,2}(p)$	0.508,686	0.518,163	0.528,596	0.540,204	0.553,303	0.568,367	0.586,168	0.608,095
$\phi_{2,4}(p)$	0.043,729	0.046,062	0.048,732	0.051,836	0.055,513	0.059,981	0.065,617	0.073,151
$\phi_{2,6}(p)$	0.001,506,7	0.001,644,9	0.001,809,5	0.002,009,4	0.002,258,0	0.002,577,6	0.003,008,0	0.003,631,5
$\phi_{2,8}(p)$	0.000,027,8	0.000,031,5	0.000,036,1	0.000,041,9	0.000,049,4	0.000,059,7	0.000,074,4	0.000,097,5
$\phi_{2,10}(p)$	0.000,000,32	0.000,000,38	0.000,000,45	0.000,000,54	0.000,000,67	0.000,000,87	0.000,001,15	0.000,001,63
$\phi_{3,2}(p)$	0.505,188	0.510,797	0.516,909	0.523,633	0.531,126	0.539,619	0.549,486	0.561,412
$\phi_{3,4}(p)$	0.043,043	0.044,572	0.046,288	0.048,238	0.050,492	0.053,155	0.056,404	0.060,572
$\phi_{3,6}(p)$	0.001,469,9	0.001,562,4	0.001,669,3	0.001,795,0	0.001,945,6	0.002,131,2	0.002,369,1	0.002,693,5
$\phi_{3,8}(p)$	0.000,026,9	0.000,029,4	0.000,032,3	0.000,035,9	0.000,041,3	0.000,046,0	0.000,053,7	0.000,064,9
$\phi_{3,10}(p)$	0.000,000,31	0.000,000,34	0.000,000,39	0.000,000,45	0.000,000,52	0.000,000,62	0.000,000,76	0.000,000,96
$\phi_{4,2}(p)$	0.503,450	0.507,161	0.511,182	0.515,578	0.520,442	0.525,912	0.532,207	0.539,725
$\phi_{4,4}(p)$	0.042,663	0.043,757	0.044,972	0.046,335	0.047,887	0.049,692	0.051,853	0.054,560
$\phi_{4,6}(p)$	0.001,449,0	0.001,516,5	0.001,593,3	0.001,681,7	0.001,785,5	0.001,910,3	0.002,065,6	0.002,270,1
$\phi_{4,8}(p)$	0.000,026,4	0.000,028,2	0.000,030,3	0.000,032,8	0.000,035,9	0.000,039,6	0.000,044,5	0.000,051,2
$\phi_{4,10}(p)$	0.000,000,30	0.000,000,33	0.000,000,36	0.000,000,40	0.000,000,45	0.000,000,51	0.000,000,60	0.000,000,72

以上で $\phi_{n,\nu}(p)$ の値が決定されたから (10) 乃至 (13) 式に依つて $n=1\sim4$ の場合の a^2 の値が決定される筈である．小數第 6 位迄を問題とする時 $\phi_{n,12}(p)a^{12}$ 以下の項は省略され結局 a^2 に關して 5 次の代數方程式を解く事になるが，之は代數的には解き得ないので，試算法に依り (10)～(13) 式を滿足する a^2 の値を充分細かく夾み比例部分の法則に依つて a^2 の値を決定した．

a^2 の近似値は前に發表した "勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法" (所報第 44 號) に於て求めた圖—6 より得られる．圖—6 を再錄せるものは圖—2 破線で示せるものであるが，此れは $4a^2$ (挫屈荷重を $\alpha\frac{EI_c}{L^2}$ で表はした時の α に相當する數値) と $p^n=1-\frac{I_e}{I_c}$ の關係を示す曲線である．

圖—2　$p^n=1-\frac{I_e}{I_c}$ と $4a^2=\frac{PL^2}{EI_c}$ の關係

破線は　近似計算法に依るもの
實線は　本計算法に依るもの



$n=1$ の場合に於ける a^2 の數値の推定の仕方を說明すれば，$n=1$ の場合の $p=0$, $p=1$ に對しては基礎方程式が簡單な兩數で解かれて挫屈荷重が夫々 $9{,}8696\frac{EI_c}{L^2}$, $5{,}764\frac{EI_c}{L^2}$ となる事は既に知られてゐる．之に對して著者の近似計算法に依る計算値は夫々 $10\frac{EI_c}{L^2}$, $6\frac{EI_c}{L^2}$ となる．$p=0$, $p=1$ の兩極限に於ける之等の誤差を $p=0.1\sim0.8$ の間に直線的に配分し斯くして第 1 次的に a^2 の値を推定した．此の推定値は充分正確であ

つて試算を3回以上繰返す必要はなかつた.

$n=1$ の場合に就て計算の經過を示せば次の如くである. $n=2$, 3, 4 の場合をも附記して置く.

第 1 次 試 算 ($n=1$)

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.57	9.26	8.94	8.61	8.25	7.88	7.47	7.00
a^2	2.3925	2.3150	2.2350	2.1525	2.0625	1.9700	1.8675	1.7500
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{1,2}(p)a^2$	−1.238,249	−1.243,454	−1.249,801	−1.257,930	−1.265,769	−1.277,675	−1.291,274	−1.307,338
$+\phi_{1,4}(p)a^4$	+0.259,134	+0.265,358	+0.272,689	+0.281,619	+0.291,507	+0.304,852	+0.321,434	+0.343,361
$-\phi_{1,6}(p)a^6$	−0.021,735	−0.022,749	−0.023,963	−0.025,470	−0.027,221	−0.029,624	−0.032,778	−0.037,248
$+\phi_{1,8}(p)a^8$	+0.000,976	+0.001,046	+0.001,130	+0.001,238	+0.001,368	+0.001,551	+0.001,805	+0.002,187
$-\phi_{1,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,030	−0.000,033	−0.000,037	−0.000,043	−0.000,051	−0.000,062	−0.000,080
$+\phi_{1,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,002
計	+0.000,100	+0.000,172	+0.000,023	−0.000,579	−0.000,157	−0.000,946	−0.000,874	+0.000,884

第 2 次 試 算 ($n=1$)

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.58	9.27	8.95	8.60	8.24	7.87	7.46	7.01
a^2	2.3950	2.3175	2.2375	2.1500	2.0600	1.9675	1.8650	1.8650
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{1,2}(p)a^2$	−1.239,542	−1.244,796	−1.251,120	−1.256,469	−1.264,234	−1.276,054	−1.289,545	−1.309,205
$+\phi_{1,4}(p)a^4$	+0.259,676	+0 265,930	+0.273,300	+0.280,965	+0.290,801	+0.304,079	+0.320,574	+0.344,343
$-\phi_{1,6}(p)a^6$	−0.021,803	−0.022,823	−0.024,044	−0.025,382	−0.027,122	−0.029,512	−0.032,647	−0.037,409
$+\phi_{1,8}(p)a^8$	+0.000,980	+0.001,050	+0.001,135	+0.001,233	+0.001,361	+0.001,543	+0.001,795	+0.002,200
$-\phi_{1,10}(p)a^{10}$	−0.000,028	−0.000,030	−0.000,034	−0.000,037	−0.000,043	−0.000,050	−0.000,062	−0.000,081
$+\phi_{1,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	−0.000,001	+0.000,001	+0.000,002
計	−0.000,716	−0.000,668	−0.000,762	+0.000,311	+0.000,764	+0.000,007	+0.000,116	−0.000,150

第 1 次 試 算 ($n=2$)

p^2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.74	9.61	9.46	9.31	9.15	8.97	8.78	8.57
a^2	2.4350	2.4025	3.3650	2.3275	2.2875	2.2425	2.1925	2.1425
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{2,2}(p)a^2$	−1.238,650	−1.244,887	−1.250,130	−1.257,325	−1.265,681	−1.274,563	−1.286,639	−1.302,844
$+\phi_{2,4}(p)a^4$	+0.259,279	+0.265,870	+0.272,569	+0.280,809	+0.290,480	+0.301,633	+0.316,144	+0.335,785
$-\phi_{2,6}(p)a^6$	−0.021,753	−0.022,810	−0.023,936	−0.025,336	−0.027,028	−0.029,068	−0.031,811	−0.035,715
$+\phi_{2,8}(p)a^8$	+0.000,977	+0.001,049	+0.001,129	+0.001,230	+0.001,353	+0.001,510	+0.001,727	+0.002,054
$-\phi_{2,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,030	−0.000,033	−0.000,037	−0.000,042	−0.000,049	−0.000,059	−0.000,074
$+\phi_{2,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,002
計	−0.000,173	−0.000,807	−0.000,400	−0.000,658	−0.000,917	−0.000,536	−0.000,637	−0.000,792

第 2 次 試 算 ($n=2$)

p^2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.73	9.60	9.45	9.30	9.14	8.96	8.77	8.56
a^2	2.4325	2.4000	2.3625	2.3250	2.2850	2.2400	2.1925	2.1400
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{2,2}(p)a^2$	−1.237,379	−1.243,591	−1.248,808	−1.255,974	−1.264,297	−1.273,142	−1.285,173	−1.301,323
$+\phi_{2,4}(p)a^4$	+0.258,747	+0.265,317	+0.271,993	+0.280,206	+0.289,846	+0.300,961	+0.315,425	+0.335,002
$-\phi_{2,6}(p)a^6$	−0.021,686	−0.022,739	−0.023,860	−0.025,254	−0.026,939	−0.028,971	−0.031,703	−0.035,590
$+\phi_{2,8}(p)a^8$	+0.000,973	+0.001,045	+0.001,125	+0.001,224	+0.001,347	+0.001,503	+0.001,719	+0.002,045
$-\phi_{2,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,030	−0.000,033	−0.000,037	−0.000,042	−0.000,049	−0.000,058	−0.000,073
$+\phi_{2,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,002
計	+0.000,629	+0.000,003	+0.000,418	+0.000,166	−0.000,084	+0.000,303	+0.000,211	+0.000,063

第 1 次 試 算 ($n=3$)

p^3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.80	9.73	9.65	9.57	9.48	9.38	9.28	9.17
a^2	2.4500	2.4325	2.4125	2.3925	2.3700	2.3450	2.3200	2.2925
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{3,2}(p)a^2$	−1.237,711	−1.242,514	−1.247,043	−1.252,792	−1.258,769	−1.265,407	−1.274,808	−1.287,037
$+\phi_{3,4}(p)a^4$	+0.258,366	+0.263,735	+0.269,403	+0.276,117	+0.283,609	+0.292,301	+0.303,589	+0.318,340
$-\phi_{3,6}(p)a^6$	−0.021,617	−0.022,488	−0.023,439	−0.024,586	−0.025,900	−0.027,482	−0.029,583	−0.032,452
$+\phi_{3,8}(p)a^8$	+0.000,969	+0.001,029	+0.001,094	+0.001,176	+0.001,303	+0.001,391	+0.001,556	+0.001,793
$-\phi_{3,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,029	−0.000,032	−0.000,035	−0.000,039	−0.000,044	−0.000,051	−0.000,061
$+\phi_{3,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001
計	−0.000,019	−0.000,266	−0.000,016	−0.000,115	+0.000,205	+0.000,760	+0.000,704	+0.000,584

第 2 次 試 算 ($n=3$)

p^3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.79	9.72	9.64	9.56	9.49	9.39	9.29	9.18
a^2	2.4475	2.4300	2.4100	2.3900	2.3725	2.3475	2.3225	2.2950
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{3,2}(p)a^2$	−1.236,448	−1.241,237	−1.245,751	−1.251,483	−1.260,096	−1.266,756	−1.276,181	−1.288,441
$+\phi_{3,4}(p)a^4$	+0.257,839	+0.263,193	+0.268,845	+0.275,540	+0.284,207	+0.292,924	+0,304,244	+0.319,034
$-\phi_{3,6}(p)a^6$	−0.021,550	−0.022,419	−0.023,366	−0.024,505	−0.025,982	−0.027,570	−0.029,679	−0.032,559
$+\phi_{3,8}(p)a^8$	+0.000,965	+0.001,025	+0.001,090	+0.001,171	+0.001,309	+0.001,397	+0.001,562	+0.001,800
$-\phi_{3,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,029	−0.000,032	−0.000,035	−0.000,039	−0.000,044	−0.000,051	−0.000,061
$+\phi_{3,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001
計	+0.000,780	+0.000,534	+0.000,787	+0.000,689	−0.000,600	−0.000,048	−0.000,104	−0.000,226

第1次試算 ($n=4$)

p^4	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.83	9.78	9.74	9.69	9.64	9.58	9.52	9.46
a^2	2.4575	2.4450	2.4350	2.4225	2.4100	2.3950	2.3800	2.3650
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{4,2}(p)a^2$	−1.237,328	−1.240,009	−1.244,728	−1.248,988	−1.254,265	−1.259,559	−1.266,653	−1.276,450
$+\phi_{4,4}(p)a^4$	+0.257,655	+0.261,580	+0.266,649	+0.271,917	+0.278,132	+0.285,035	+0.293,716	+0.305,166
$-\phi_{4,6}(p)a^6$	−0.021,505	−0.022,166	−0.023,004	−0.023,908	−0.024,993	−0.026,243	−0.027,847	−0.030,029
$+\phi_{4,8}(p)a^8$	+0.000,963	+0.001,008	+0.001,065	+0.001,130	+0.001,211	+0.001,303	+0.001,428	+0.001,602
$-\phi_{4,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,029	−0.000,031	−0.000,033	−0.000,037	−0.000,040	−0.000,046	−0.000,053
$+\phi_{4,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001
計	−0.000,141	+0.000,385	−0.000,048	+0.000,119	+0.000,049	+0.000,497	+0.000,599	+0.000,237

第2次試算 ($n=4$)

p^4	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.82	9.79	9.75	9.70	9.65	9.59	9.53	9.47
a^2	2.4550	2.4475	2.4375	2.4250	2.4125	2.3975	2.3825	2.3675
1	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000	1.000,000
$-\phi_{4,2}(p)a^2$	−1.235.970	−1.241,277	−1.246,006	−1.250,277	−1.255,566	−1.260,874	−1.267,983	−1.277,799
$+\phi_{4,4}(p)a^4$	+0.257,131	+0.262,116	+0.267,197	+0.272,479	+0.278,710	+0.285,630	+0.294,334	+0.305,812
$-\phi_{4,6}(p)a^6$	−0.021,440	−0.022,234	−0.023,074	−0.023,982	−0.025,070	−0.026,326	−0.027,935	−0.030,124
$+\phi_{4,8}(p)a^8$	+0.000,959	+0.001,012	+0.001,070	+0.001,134	+0.001,216	+0.001,308	+0.001,434	+0.001,609
$-\phi_{4,10}(p)a^{10}$	−0.000,027	−0.000,029	−0.000,031	−0.000,034	−0.000,037	−0.000,040	−0.000,046	−0.000,054
$+\phi_{4,12}(p)a^{12}$	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001	+0.000,001
計	+0.000,654	−0.000,411	−0.000,843	−0.000,679	−0.000,746	−0.000,301	−0.000,195	−0.000,555

第1次試算と第2次試算の結果より比例部分の法則に依つて $4a^2$ の値を算出すれば表—2 の如くである.

此の計算に於て a^2 は常に 1 より大である爲, $\phi_{1,2}$, $\phi_{1,4}$ は小數第 6 位迄, $\phi_{1,6}$, $\phi_{1,8}$ は小數第 7 位迄, $\phi_{1,10}$ は小數第 8 位, $\phi_{1,12}$ は小數第 10 位迄を夫々採らなければ試算に於ける小數第 6 位迄の正確さを揃へる事が出來なかつた. $\phi_{1,12}(p)$ の影響は無視しても差支へないので $n=2$ 以下の計算に於ては省略した.

表—2 $\frac{PL^2}{EI_c}\left(=4a^2\right)$ と $\frac{I_e}{I_c}\left(=1-p^n\right)$ の關係

p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_e/I_c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
PL^2/EI_e $(n=1)$	9.5712	9.2620	8.9403	8.6035	8.2483	7.8701	7.4612	7.0085
PL^2/EI_e $(n=2)$	9.7378	9.6000	9.4551	9.3020	9.1390	8.9636	8.7725	8.5607
PL^2/EI_e $(n=3)$	9.7998	9.7267	9.6498	9.5686	9.4825	9.3894	9.2887	9.1772
PL^2/EI_e $(n=4)$	9.8282	9.7848	9.7394	9.6915	9.6406	9.5862	9.5275	9.4630
PL^2/EI_e $(n\to\infty)$	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696

斯くして $n=1$ の場合の正確な挫屈荷重が求められたので之と前記近似計算値の差を出し $n=2,\ 3,\ 4$ の場合に就ても同量の誤差があるものと假定して a^2 を推定し，$n=1$ の場合と同樣に 2 回の試算に依つて正しい挫屈荷重を出す事が出來た．計算結果は表—2 に總括した．

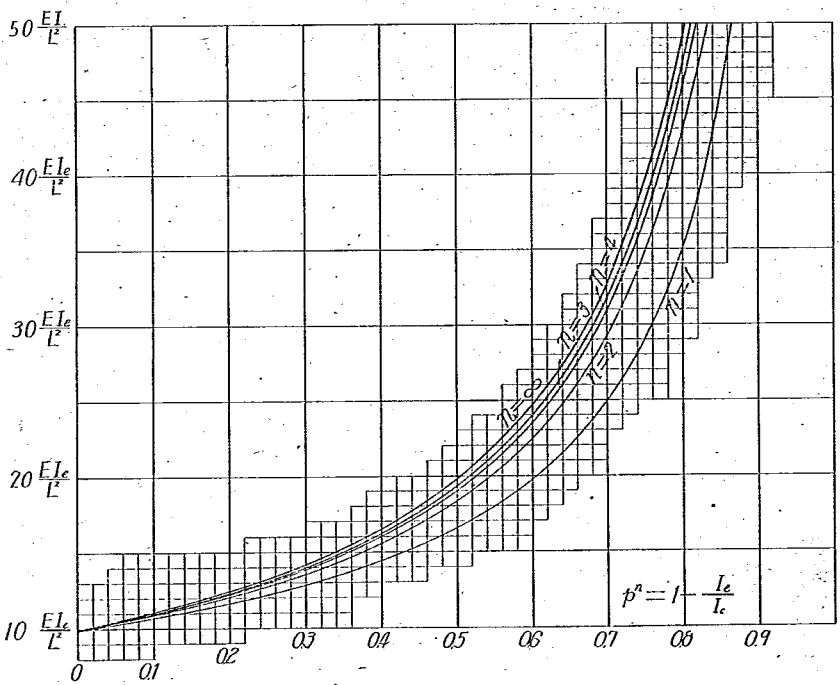
表—2 をグラフで表せば圖—2 實線の如くである．

以上は計算の都合に依つて柱の中央の斷面の慣性モーメント I_c を基準に取つて居たが實用上の便利からは I_e を基準に取る方が望ましい．

表—3 $\frac{PL^2}{EI_e}$ と $\frac{I_e}{I_c}$ の關係

p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_e/I_c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$PL^2/EI_e\ (n=1)$	10.635	11.578	12.772	14.339	16.497	19.675	24.871	35.043
$PL^2/EI_e\ (n=2)$	10.820	12.000	13.507	15.503	18.278	22.409	29.242	42.804
$PL^2/EI_e\ (n=3)$	10.889	12.158	13.785	15.948	18.965	23.474	30.962	45.886
$PL^2/EI_e\ (n=4)$	10.920	12.231	13.913	16.153	19.281	23.966	31.758	47.315
$PL^2/EI_e\ (n\to\infty)$	10.966	12.337	14.099	16.449	19.739	24.674	32.899	49.348

圖—3 $\frac{PL^2}{EI_e}$ と $\frac{I_e}{I_c}$ の關係



I_e を基準取につて表—2 を書き直せば表—3 の如くなる．之をグラフで表はしたものが圖—3 である．之に依つて柱が與へられた荷重に對して挫屈しない爲には柱の中央を如何に膨ましたならば良いかが簡單に求められる譯である．

$n\to\infty$ の場合は I_e なる慣性モーメントを有する等斷面長柱の場合に收斂する筈である．此の場合をも I_e 基準に換算すれば圖—3 $n\to\infty$ に相等する曲線で示す如くなる．之に依つて $n=5$ 以上の場合が如何なる範圍内に限られるかゞ解るであらう．

V. 結　　言

變斷面長柱の基礎方程式を級數に展開して解いて挫屈荷重を求める事が出來る．基礎方程式が既知の函數の形で解ける場合であつてもその函數の數表を新に作製しなければ挫屈荷重が求められない樣な場合には却つて最初から級數で解いた方が計算が樂な場合もあり得るであらう．

實用的な變斷面長柱の斷面の慣性モーメントは柱の中央を原點に取り (2) 式即ち

$$I(x)=I_e-(I_e-I_c)\left(\frac{2x}{L}\right)^n$$

で最も簡單に表はされ，又此れで充分であらうと思はれる．

かゝる變斷面對稱長柱に關して基礎方程式を級數に展開して解き，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の場合の挫屈荷重を求めた結果は表—2, 3 或は圖—2 (實線) 及び圖—3 に總括されてゐる．

前に發表した著者の勢力式に依る近似計算法に依る計算結果と本結果との比較は圖—2 に示す如くであるが誤差は常に 2～3 % 程度で最も甚しい場合 ($n=1,\ p=1$) で 4% である．

特殊な變斷面長柱で，基礎方程式を既知の函數に依つても解き得ず，又級數に展開しても甚だしく複雜となる樣な場合には上記の勢力式の近似計算法に依つて 2～3 % の誤差の範圍で比較的簡單に挫屈荷重を求める事が出來るであらう．

中空壓縮材の挫屈に關する理論的研究(第1報)

內務技師　横　田　周　平

要　旨

中空壓縮材と謂ふ新しい名稱で統一される事の出來る組合せ壓縮材或は管柱等はその內部的機構の如何に依り挫屈した場合その狀態に安定不安定の差別が生じ，此れは結局壓縮材としての安定不安定を決定するものである．壓縮材として安定なる爲には1つの條件が滿足されなければならない．此の條件より組合せ壓縮材の場合には綾片が管柱の場合にはその肉厚が決定される．

本論文に於ては上記の問題を中心とし之に關聯する諸問題を理論的に考究せんとするものである．

目　次

I. 壓縮材の挫屈に關する基本的考察……(1)
[1] 壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎微分方程式……(2)
[2] 微分方程式の基本的解……(2)
(i) 通常行はれてゐる解……(3)
(ii) 2つの境界條件と長さの條件を嚴密に入れた場合の解……(4)
(iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$を省略しない場合の解……(6)
[3] 限界荷重，挫屈狀態の安定不安定竝びに中空壓縮材に關する新しい問題……(10)
(i) 限界荷重……(10)
(ii) 挫屈狀態の安定不安定……(11)
(iii) 中空壓縮材に關する新しい問題……(11)
[4] 壓縮材の挫屈に對する其の他の考察……(12)
II. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導……(14)
[1] 中空壓縮材の曲げに對する抵抗……(14)
[2] 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導……(18)
[3] 基礎方程式の解と不安定なる挫屈を起さざる爲の條件……(20)
[4] 要　約……(26)

第2報に於ては〝諸種の組合せ壓縮材と管柱に就ての計算例〟及び〝組合せ壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響〟を中心問題とし論ずる豫定である．第2報發表迄は土木試驗所速報第19號（諸種の組合壓縮材及びパイプの挫屈に就て）及び第22號（組合壓縮材の挫屈に及ぼす剪斷力の影響に就て）を參照して戴き度い．

I. 壓縮材の挫屈に關する基本的考察

本篇は壓縮材の挫屈に關する基本的問題を檢討し，著者の中空壓縮材の挫屈に對する考へ方の根底を明かにするものである．その主張する處は從來餘り重要視せられなかつた挫屈してからの狀態の安定不安定の問題が中空壓縮材の場合には重大なる意義を持つて來るとする點である．

[1] 壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎微分方程式

壓縮材の挫屈の解析的研究に於てはその撓曲線に對する微分方程式が出發點となる．勢力式方法に依つて取扱ふ場合に於ても多かれ少かれ撓曲線に對する微分方程式が關聯して來てゐる．從つて此の撓曲線に對する微分方程式は壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎方程式である．

壓縮材に對する基礎方程式は一般に良く知られてゐる樣に次の形で與へられてゐる．

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

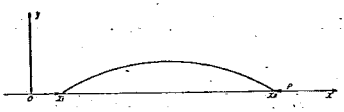
E：材料の彈性係數

I：壓縮材の斷面の慣性モーメントで一般には x の函數である

P：中心軸荷重

座標軸は圖—1 の樣に採る．兩端鉸支持の場合には (1) 式で充分なのであるが兩端を固定した場合に於ては (1) 式では含み切れない場合が生ずる．此の事實に就ては稻田博士が土木學會誌第 20 卷第 11 號(昭和9年 11 月)〝長柱の挫屈と之に及す彈性橫抵抗の影響竝に鐵道軌道の張出に關する新考察〟に於て詳論されてゐる．稻田博士は次の形の基礎方程式から出發されてゐる．

圖—1



$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

等斷面の壓縮材に於ては (2) 式が最も一般的基礎方程式となるが變斷面壓縮材の場合をも含ましむるならば形としては次の樣になるであらう．

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

著者は壓縮材の挫屈を論ずる場合の最も一般的なる基礎方程式として (3) 式を擧げ樣と思ふ．

(3) 式は梁の橫振動に對する基礎方程式に類似して居て面白く思はれる．梁の橫振動に對する式は次の如き形を有する．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{EI(x)\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right\}+\frac{m}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0$$

柱の限界荷重の求め方と梁の振動周期の求め方とは實際に於て亦全く同樣である．

形としては (3) 式が最も一般的であるが實際問題としては境界條件を仔細に檢討して其れに適合する如く (1) 式を變更し之より出發する方が便利である．以下の所論に於ても (3) 式迄遡る事はしないであらう．

(3) 式で基礎方程式としては完備してゐるかの如く見えるが撓曲線の根本に立歸つて見れば尙問題が殘つてゐる．卽ち數學的には曲率は $\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ で表はさるべきであるが撓は小なるものとして1に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略し簡單に $\frac{d^2y}{dx^2}$ としてゐるのである．$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ の項を省略しない場合には (1) 式は次の如くなる．

$$EI\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+Py=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

同樣に (3) 式も正しくは括弧內の $\frac{d^2y}{dx^2}$ を $\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ で置き換へなければならない．$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略する事が如何にる影響を與へるかに就ては後章に之を明らかにするであらう．

[2] 微分方程式の基本的解

（i） 通常行はれてゐる解

(1) 式の如く基礎方程式を與へた時には既に圖—1 の如き坐標の取り方を前提としてゐる．即ち軸荷重の作用線を x 軸に取つてゐるのである．

I は一般には x の函數であつて此の線型微分方程式の一般解は

$$y=AF_1(x)+BF_2(x)$$

の形で表はされる．玆に A と B とは積分常數である．微分方程式の解の順序としては次に2個の境界條件から A, B なる2個の積分常數を決定しはければならないのであるが，壓縮材の兩端の y 坐標が零であると謂ふ2つの條件を入れ，A, B が同時に零になる事はない（挫屈したものとしてゐる故）と考へれば，A, B が完全には決定されずに却つて $F_1(x)$ と $F_2(x)$ の間に或る關係式が生ずる．即ち壓縮材の兩端の坐標を O, L とすれば兩端鉸支持の場合

$$\begin{vmatrix} F_1(O) & F_2(O) \\ F_1(L) & F_2(L) \end{vmatrix}=0$$

と謂ふ條件が得られる．但し L は壓縮材の長さである．此れは (1) 式に戻つて考へれば E, I, P 及び長さ L の間を關係づける事になつて，限界荷重が決定されるのである．

以上の經過に於て第1に不可思議に思はれる事は2つの境界條件が A, B なる積分常數を決定せずに基礎方程式に現れてゐる常數の間を關係づける點である．梁の固有振動周期を求むる場合にもかゝる例が現れるが微分方程式の解としては實に變則と見做すべきであらう．

境界條件の取り方が結局不適當な爲にかゝる結果を生ずるものであつて此の點に於ては次節に詳論するが一見して境界條件として此の他にない樣に思はれる．次に問題となるのは挫屈した形に就き式を建てゝ置きながら壓縮材の兩端間の直線距離を壓縮材の長さ L に等しいとして境界値を入れる事である．挫屈するかしないかの限界點の極く近傍を取つて考へてゐるのであるから之で良いのだと通常考へられてゐるが，之には明瞭な誤謬が含まれてゐる．

即ち以上の樣にして解いた結果は限界荷重に於て挫屈する事を示してゐるが，正確には次節以下に示す如く限界荷重を越えて初めて挫屈するのである．

之を具體的に說明する爲に兩端鉸支持の等斷面長柱の場合（1 次挫屈）に就て考へれば通常の取扱に於ては (1) 式は良く知られてゐる樣に次の如く解かれる．

$$y=A\sin\frac{\pi}{L}x \qquad (5)$$

但し $P=\pi^2\dfrac{EI}{L^2}$

(5) 式を見れば $A\neq 0$ であるから限界荷重 P にて於て挫屈し，又限界荷重以外の軸荷重に對してはそれが限界荷重より大であつても挫屈しない事を示してゐる．

(5) 式の如き形の解に依つて挫屈現象を解釋する時は次の如くなる．

壓縮材が挫屈する爲には限界荷重以外の軸荷重は取り得ない．

A が不定の儘殘されてゐるのであるから限界荷重に對して無數の挫屈形が存在する．從つて (5) 式より判斷すれば挫屈してからの狀態は中立の釣合狀態と見做さるべきである．

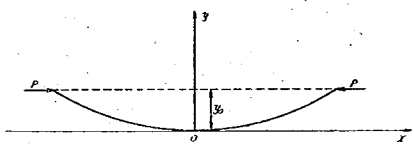
通常行はれてゐる解に從つて壓縮材の挫屈現象を解釋すれば上述の如くであるが，2 つの境界條件と此れとは別に長さの條件とを嚴密に入れて基礎方程式を解けば挫屈現象に對する解釋は又自から異つて來る．而して此の

方がより正しい解釋である事は解き方がより嚴密である事より見て間違ひないであらう.

(ii) 2 つの境界條件と長さの條件とを嚴密に入れた場合の解

壓縮材の中心線の中央を原點に取り圖—2 の如く坐標軸を定めて計算を進める. 坐標軸の取り方如何は問題の本質に何等變化を來すものではないが, 積分常數を定めるべき 2 つの境界條件と壓縮材の長さの條件とは混同すべからざる別種の條件である事を示すには此の方が好都合である. 此の場合の基礎方程式は次の如くなる.

圖—2



$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+P(y-y_0)=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

y_0 は壓縮材の中央の張出し量であり, 此の y_0 が常數として豫め基礎方程式に入つて來てゐる爲に樣子が非常に異つて來る.

$\frac{EI}{P}=\alpha^2$ (α は長さのデイメンションを有する) と置き (6) 式を解けば

$$y=y_0+A\sin\frac{x}{\alpha}+B\cos\frac{x}{\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A}{\alpha}\cos\frac{x}{\alpha}-\frac{B}{\alpha}\sin\frac{x}{\alpha}$$

境界條件としては $x=0$ に於て $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ の 2 つを用ふべき事は明瞭である.

$$\therefore\ A=0,\ B=y_0$$

從つて

$$y=y_0\left(1-\cos\frac{x}{\alpha}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

以上に依つて 2 つの積分常數 A, B が決定せられ微分方程式 (6) に關する限り完全に解決されたのである. 次に壓縮材の問題に立歸つて考て見れば長さの條件が殘されてゐる.

(7) 式で $x=\frac{L}{2}$ に於て $y=y_0$ にすれば前節に於けると同樣に α と L とを關係づけ限界荷重が求められる. 然しながら此の場合には此れは積分常數を定むべき境界條件ではない事に注意すべきである. 又一方壓縮材が既に張出してゐる形を前提としてゐる以上かゝる條件は不合理である事は明瞭である.

壓縮材の長さの條件は張出した形に於て考へる事が正確であり又最も自然である.

卽ち

$$\frac{L}{2}=\int_0^{y_0}\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\,dy=\int_0^{y_0}\sqrt{\frac{\alpha^2+2y_0y-y^2}{2y_0y-y^2}}\,dy \quad \cdots\cdots(8)$$

$$y=y_0(1-t),\quad 0\leqq\frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}=h<1$$

と置換すれば

$$\frac{L}{2}=\frac{y_0}{h}\int_0^1\frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

此れは第 2 種楕圓積分であつて

$$E(h)=\int_0^1\frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2h^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{h^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{h^6}{5}-\cdots\cdots\right\}$$

と置けば (9) 式を得る.

$$\frac{y_0}{L}=\frac{h}{2E(h)} \quad \cdots\cdots(9)$$

又

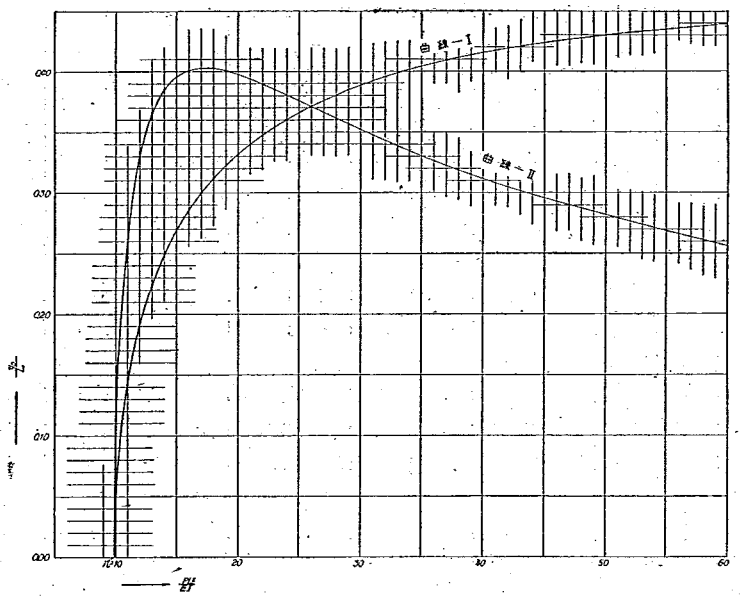
$\frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2+y_0^2}}=h$ なる關係式より P と h の關係式を導けば(10)式を得る

$$\frac{PL^2}{EI}=\frac{4E^2(h)}{1-h^2} \quad \cdots\cdots(10)$$

(9)式と(10)式とは同一關係式の2つの表現であるが便宜的には h を媒介變數と見て P と y_0 の函數關係を示すものとも見做し得る.

P と y_0 の關係は表—1 の如くでありグラフで表はせば圖—3 曲線—I となる.

圖—3　$\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係



曲線—Ⅰ：$EI\frac{d^2y}{dx^2}++P(y-y_0)=0$ の場合

曲線—Ⅱ：$EI\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+P(y-y_0)=0$ の場合

表—1　$\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係 $\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略した場合$\right)$

h	$E(h)$	$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{y_0}{L}$
0.0000000	1.5708	9.8696	0.0000

0.0871557	1.5678	9.9073	0.0278
0.1736482	1.5589	10.0230	0.0557
0.2588190	1.5442	10.2232	0.0838
0.3420201	1.5238	10.5184	0.1122
0.4226183	1.4981	10.9292	0.1411
0.5000000	1.4675	11.4859	0.1704
0.5735764	1.4323	12.2293	0.2002
0.6427876	1.3931	13.2417	0.2307
0.7071068	1.3506	14.5920	0.2618
0.7660444	1.3055	16.4995	0.2934
0.8191520	1.2587	19.2626	0.3254
0.8660254	1.2111	23.4688	0.3575
0.9063078	1.1638	30.3327	0.3849
0.9396926	1.1184	42.7705	0.4201
0.9659258	1.0764	69.1833	0.4487
1.0000000	1.0000	∞	0.5000

以上の解き方に就て見れば積分常數の定め方，壓縮材の長さの條件の入れ方は合理的で疑問を挿む餘地はないであらう．此の解に依れば軸壓力 P が零から始まつて次第に增大し限界荷重を越えて後に到る全領域に亘り壓縮材の狀態が說明される．

卽ち表—1 或は圖—3 曲線—I に依つて見るのに限界荷重より小なる P に對しては y_0 の數實値は存在し得ない．卽ち限界荷重以下の軸壓力に對して挫屈の起り得ない事を示してゐる．又限界荷重に對しては $y_0=0$ であるから矢張り未だ挫屈しない事が解る．限界荷重を越えた軸壓力に對して始めて y_0 が零ならざる實數値を有する樣になる．

挫屈現象全般に對するより詳しい考究は次章に讓る事として，次に 1 に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を小なりとして省略する事が如何なる影響を及ぼして居るかを明らかにしようと思ふ．

(iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合の解

等斷面壓縮材の場合に 1 に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略せずに解く事は目新しい事ではないのであるが，解き方の比較の爲に又その省略が如何なる影響を及ぼして居るかを明らかにする意味で計算過程を示さうと思ふ．

圖—2 の如く坐標軸を取る事とすれば撓曲線に對する微分方程式は次の如くなる．

$$EI\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+P(y-y_0)=0$$

或は

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\alpha^2}(y_0-y) \quad \cdots\cdots(11)$$

但し　$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI}$

此の二次微分方程式を解いた時に生ずる 2 つの積分常數を定むべき 2 つの條件は前節 (ii) の場合と同樣に $y=0$ に於て $x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ の 2 つである．壓縮材の兩端の位置は P の函數として表はされる筈である．

(11) 式の兩邊に $\frac{dy}{dx}$ を乘じて積分すれば直ちに

$$-\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\alpha^2}\left(yy_0-\frac{y^2}{2}\right)+C$$

$y=0$ に於て $\frac{dy}{dx}=0$ なる條件より積分常數 C を定むれば

$$C=-1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\alpha^2}(y^2-2y_0y+2\alpha^2)\qquad\cdots\cdots(12)$$

$$\therefore\quad \pm dx=\frac{(y^2-2y_0y+2\alpha^2)dy}{\sqrt{-y(y-2y_0)(y^2-2y_0y+4\alpha^2)}}\qquad\cdots\cdots(13)$$

(12) 式の左邊は常に正である故次の不等式が成立する．

$$y^2-2y_0y+2\alpha^2=(y-y_0)^2+2\alpha^2-y_0^2>0$$

y は $0\leqq y\leqq y_0$ の範圍を變動する故

$$2\alpha^2-y_0^2>0$$

とならなければならない．y_0 は P の函數として表はされるものであるから上式は恒等的に成立するものである．從つて (13) 式の分母の根號内は負になり得ない事が解る．

(13) 式の形より見て此の積分は第1種，第2種の楕圓積分と初等函數の 3 つになる事が豫期される．楕圓積分の標準形に導く爲に先づ次の如く變數の置換を行ふ．

$$y=y_0\frac{\zeta-1}{\zeta},\quad dy=y_0\frac{d\zeta}{\zeta}$$

此れを (13) 式に代入すれば

$$\pm dx=-\frac{\{(2\alpha^2-y_0^2)\zeta^2+y_0^2\}}{\sqrt{(\zeta^2-1)\{(4\alpha^2-y_0^2)\zeta^2+y_0^2\}}}\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

$0<\frac{4\alpha^2-y_0^2}{y_0^2}=k^2$ と置けば $\frac{2\alpha^2-y_0^2}{y_0^2}=\frac{k^2-1}{2}$ となる

從つて

$$\pm dx=\frac{\left(\frac{k^2-1}{2}\zeta^2+1\right)}{\sqrt{(\zeta^2-1)(k^2\zeta^2+1)}}y_0\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

更に　$\sqrt{k^2\zeta^2+1}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{t}$　と置換すれば

$$\zeta^2=\frac{(k^2+1)-t^2}{k^2t^2},\quad d\zeta=-\frac{k^2+1}{t^2\sqrt{(k^2+1)-t^2}}\frac{dt}{k},\quad \zeta^2-1=\frac{(k^2+1)(1-t^2)}{k^2t^2}$$

となり之等を上式に代入すれば

$$\pm\frac{dx}{y_0}=\frac{k^2-1}{1}\cdot\frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)\{(k^2+1)-t^2\}}}+\frac{-k^2t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)\{(k^2+1)-t^2\}^3}}$$

$0<\frac{1}{k^2+1}=h^2<1$　即ち　$0<h=\frac{y_0}{2\alpha}<1$

と置けば

$$\pm\frac{dx}{y_0}=\frac{1-2h^2}{2h}\cdot\frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}+h(1-h^2)\frac{-t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)^3}}$$

積分の範圍は夫々次の如くである.

y： 0～y_0

ζ： 1～$+\infty$

t： 1～0

從つて第1象限に於て積分する事とし $y=0$ の時 $x=0$ なる條件即ち $t=1$ なる時 $x=0$ なる境界條件を含ましむれば次の式が成立する.

$$\frac{x}{y_0}=\frac{1-2h^2}{h}\int_t^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}+h(1-h^2)\int_t^1\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}$$

此の第2項を部分積分し右邊全體を整頓すれば

$$\frac{x}{y_0}=-\frac{1}{2h}\int_t^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}+\frac{1}{h}\int_t^1\frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{ht\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-h^2t^2}}$$

又 $h=\frac{y_0}{2\alpha}$ なる關係式に依り y_0 の代りに α を導入すれば

$$\frac{x}{\alpha}=-\int_t^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}+2\int_t^1\frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{2h^2t\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-h^2t^2}}\quad\cdots\cdots(14)$$

即ち (13) 式の解は第1種，第2種の楕圓積分と初等函數で表された事になる．此の事は (13) 式の形よりして直ちに豫期された處であつた.

以上で (11) の微分方程式は形の上からは完全に解かれた事になる．然しながら (14) 式の內には軸荷重 P と最大撓 y_0 とが獨立に含まれてゐる．此の2つの量を結合する條件として壓縮材の長さの條件が殘されてゐる點は前節 (ii) の場合と全く同樣である.

即ち

$$\frac{L}{2}=\int_0^{y_0}\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}dy$$

$$=\int_0^{y_0}\frac{2\alpha^2dy}{\sqrt{-y(y-2y_0)(y^2-2y_0y+4\alpha^2)}}$$

前と同樣に

$$y=y_0\frac{\zeta-1}{\zeta},\quad\sqrt{k^2\zeta^2+1}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{t}$$

と變換すれば

$$L=2\alpha\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}$$

$$=2\alpha K(h)$$

$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI}$ なるを以て

$$\frac{PL^2}{EI}=4K^2(h)\quad\cdots\cdots(15)$$

又 $h=\frac{y_0}{2\alpha}$ なる關係式より

$$\frac{y_0}{L}=\frac{h}{K(h)}\quad\cdots\cdots(16)$$

但し $K(h)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2h^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2h^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2h^6+\cdots\cdots\right\}$

(15), (16) 式は同一の關係式を書き換へたものであるが便宜的に h を媒介變數と見做して $\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係を求むれば表—2 或は圖—3 曲線—Ⅱ の如くである.

表—2 $\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係 $\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合$\right)$

h	$K(h)$	$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{y_0}{L}$
0.0000000	1.5708	9.8696	0.0000
0.0871557	1.5738	9.9074	0.0544
0.1736482	1.5828	10.0210	0.1097
0.2588190	1.5981	10.2157	0.1620
0.3420201	1.6200	10.4976	0.2111
0.4226183	1.6490	10.8768	0.2563
0.5000000	1.6858	11.3677	0.2966
0.5735764	1.7313	11.9896	0.3313
0.6427876	1.7868	12.7706	0.3597
0.7071068	1.8541	13.7507	0.3814
0.7660444	1.9356	14.9862	0.3958
0.8191520	2.0347	16.5600	0.4026
0.8660254	2.1565	18.6020	0.4016
0.9063078	2.3088	21.3222	0.3925
0.9396926	2.5046	25.0921	0.3752
0.9659258	2.7681	30.6495	0.3489
0.9848078	3.1534	39.7757	0.3123
0.9961947	3.8317	58.7277	0.2600
0.9998477	5.4349	118.1526	0.1840
1.0000000	∞	∞	0.0000

$y_0 \to 0$ ならしむると $h \to 0$, $K(h) \to \frac{\pi}{2}$ となり $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ を得る．此れは Euler の限界荷重と一致する．$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ より小なる P の値に對しては y_0 の實數値は存在しない．即ち Euler の限界荷重を越えて始めて壓縮材は曲り初め其の後荷重が增加するに從つて曲り方が大きくなる．

以上の解析の結果を通じて挫屈現象を解釋すればそれは本質に於て (ii) の場合と全く同樣である．即ち 1 に比して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しても挫屈現象の考へ方に本質的な變化は入つて來ない．

即ち壓縮材の長さの條件を嚴密に入れるか入れないかが重大な問題であつて $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ の項を省略するかしないかは大して問題とはならないのである．此の點は從來逆に考へられて居た樣であるので* 特に一般の注意を喚起

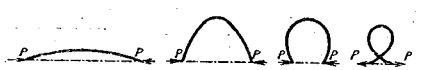
* 例へば Timoshenko 著 Theory of Elastic Stability, 仲・澤川・久川共譯 45 頁 13 節に於て最大撓が不定の値殘されるのは曲率に對して正確な式を用ひないで近似式 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を用ひた爲であると明言してゐる．此れは明瞭な誤謬と云ふべきであらう．

し度く思つてゐる.

本節の結果と (ii) 節の結果との差異は圖—3 の 2 つの曲線に依つて見れば明瞭である. 限界荷重に於ては兩曲線は共通の切線を有し其の近傍に於ては殆ど一致してゐるが P が大きくなるに從つて次第に離れ $P\to\infty$ に對しては, (ii) 節の結果 (曲線—Ⅰ) に於ては $y\to\frac{L}{2}$ となるに對して本節の結果 (曲線—Ⅱ) に於ては $y\to 0$ となつてゐる. 此の差異は $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略するかしないかに起因せるものである事は明瞭である.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合に於ては軸荷重が限界荷重を越えて增加するに從つて圖—4* の如き挫屈形を生じ遂に $y_0\to 0$ となるが $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合には挫屈形が正弦曲線となる爲 $P\to\infty$ では壓縮材が中央で折り重ねられた形になるのである. 此の事は彈性の限界內で考へられる事であるが實際の場合に於ては挫屈したならば間もなく中央の斷面附近に於て彈性限界を越えて仕舞ふであらうから限界荷重を遠く離れてからの差異は重要な問題ではなくなる.

圖—4



本章の結論としては次の如くである.

限界荷重を求むる事のみを目的とする場合には便宜的方法として (i) 節に於る如く取扱つても良いが挫屈現象全般を解析的に說明しようとする時は少くとも (ii) 節に於ける樣に取扱はなければならない. 從つて以下の議論を進める場合には (ii) 節に於けを解を基本として進めようと思ふ.

[3] 限界荷重, 挫屈狀態の安定不安定竝に中空壓縮材に關する新しい問題

前章に於て得られた基礎方程式の解を通じて限界荷重の意義, 挫屈狀態の安定不安定に關する問題等挫屈現象の全般に亘る考察を下し, 更に進んで中空壓縮材に關しては挫屈狀態の安定不安定の問題が重大なる意義を有する事を指摘しようと思ふ.

(i) 限界荷重

(10) 式或は (15) 式を仔細に檢討して見れば解る事であるが $\frac{PL^2}{EI}$ の値を $\pi^2=9.8696$ より小ならしむる h の實數値は存在し得ない. 卽ち Euler の限界荷重以下では壓縮材は曲がり得ない事が解析的に證明されてゐる. 限界荷重さへ求むればそれで良いとする通常の取扱方に於ては限界荷重以下の軸荷重に對して何故に挫屈し得ないかと問題は曖昧の儘放置されてゐる. 勢力的に之を見ても限界荷重に達する迄は眞直に壓縮された方が內働が小である事は簡單に實證される.**

軸荷重が限界荷重を越えると壓縮材は曲り始める. 此處で注意すべきは限界荷重では未だ壓縮材は挫屈しない事である. 表—1 或は表—2 に依つて見ても Euler の限界荷重に於ては $\frac{y_0}{L}=0$ である. 通常の解き方に依れば限界荷重に於て無數の撓曲線が考へられるのであるから限界荷重で挫屈する事を示してゐるのであるが正しくは限界荷重では未だ挫屈しないのである. 此の事實に關しては栖原博士が先般の第 4 回日本工學大會に於て異つた立場から指摘せられた. 此の意味から謂へば挫屈荷重或は挫屈强度と謂ふ樣な用語は避けらるべきであらう.

限界荷重に於て挫屈するものであるか否かの問題は數の切斷に於ける切斷點の歸屬の問題に過ぎないが, 然しながら此の點を明確にしない爲に挫屈現象そのものに對する考へ方が一般に非常に曖昧になつてゐるのではなか

* Southwell 著 Theory of Elasticity より轉載.

** 著者は〝勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法〟(土木試驗所報告第 44 號, 昭和 14 年 2 月) に於て此の點を論じた.

らうか．壓縮材を挫屈せしめざる軸荷重の數値の集合と挫屈せしむるそれの集合とで數の切斷を考へれば此の切斷は限界荷重に對應し限界荷重は前者の集合の上端に對應し後者の集合には端がないと見做すことが出來る．

前章（i）節の解では限界荷重として $n^2\pi^2\frac{EI}{l^2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を得るが，之等の荷重の間では挫屈しないと解さなければならぬとすれば此れも嚴密を缺く通常の解に基く不合理の1つとして擧げられるであらう．

(ii) 挫屈狀態の安定不安定

壓縮材が挫屈してからの狀態に就て考へて見る．限界荷重を越えても挫屈せずに眞直の儘壓縮される場合も考へ得られる．然しながら勢力式の立場より見れば限界荷重を越えてから眞直に壓縮される場合の方がより大なる內働を要する事は容易に實證せられる．壓縮材の壓縮される形式としては挫屈するか眞直に壓縮されるかの2通り以外にないとすれば挫屈した狀態は安定な平衡狀態にあるものと見做さざるを得ない．中立な平衡狀態でない事は後に示す．

圖—3 の曲線に依つて見ても限界荷重を越えた或る軸荷重に對しては常に1つの挫屈形が對應し，此の釣合狀態に何等かの攪亂を與へても再び原の狀態に復歸する事は容易に察知し得られるであらう．

彈性の限界內で挫屈してゐる狀態が安定なる平衡狀態に在ると考ふべき事は旣に指摘されてゐる處であるが* 此の事實は案外一般に認識されて居ない．

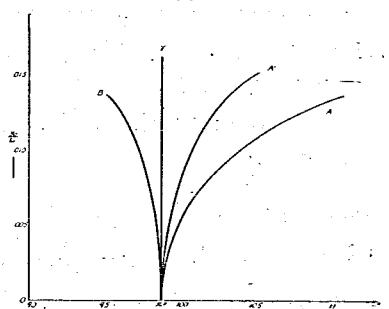
此の原因としては第1に挫屈問題の通常の解き方に基く誤れる考へ方に依るものと思はれる．前にも述べた如く通常の解き方に於ては限界荷重に對して無數の撓曲線が考へられる．此の事を率直に解釋するならば挫屈してからの狀態は中立の平衡狀態と見做さるべきであるが一般には漠然と不安定の如く考へられてゐる樣である．Bleich の著書** に於ては挫屈は不安定平衡の問題であると明言してゐるのであるが著者には此の眞意が理解し兼ねるのである．

第2の原因としては壓縮材は挫屈してからの狀態で使用せられるものでは無い爲に限界荷重より先きの事は實際には大して問題とならなかつた事が擧げられる．從つて挫屈してからの狀態がどうであらうと大して關心が拂はれなかつた．

然し中空壓縮材の問題に於ては挫屈してからの狀態の解析が重大な意義を有して來るのである．

(iii) 中空壓縮材に於ける新しい問題

圖—5



挫屈狀態の安定不安定に關する上述の考察は中實單體の壓縮材に就てであつたが，著者の研究の對象とする中空壓縮材の挫屈狀態に就ては中實なる壓縮材の場合とは異なた樣相を呈するのである．その原因は中空壓縮材はその斷面が中空なる故に曲げられた場合斷面に彈性的變形を來し，之が曲げ剛さの減少となつて現れ，此の減少の程度に依つては挫屈狀態が不安定となる場合をも生ずるのである．即ち挫屈を始めてからの軸荷重と撓みとの關係が圖—5 に於て曲線 B（曲線 A は中實壓縮材に對する曲線）で示される如き場合を生ずるのである．かかる中空壓縮材は限界荷

* 例へば Timoshenko "Theory of Elastic Stability" 仲・濱川・久田共譯 49～50 頁．

** Bleich, "Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken", 奥田・綾・猪瀨共譯 101～102 頁．

重より遙かに小なる軸荷重に對しても，外部からの衝撃に依つては挫屈して元の眞直な狀態に復し得ない脆弱性を內藏するものであつて，壓縮材として理論的に見て不安定なる構造のものであると見做さるべきである．中空壓縮材に於てもその內部的機構（組合せ壓縮材に於ては綾工，管柱に於ては肉厚）が充分强力であれば圖—5 曲線 A' 乃至曲線 A の如き曲線をも採り得るのである．かかる中空壓縮材であればその挫屈狀態は安定であり從つて安定なる壓縮材と稱する事が出來る．

安定なる中空壓縮材を得る爲には挫屈してからの狀態が圖—5 に於て少くとも切線 T より右に在る事が理論的に必要である．第 II 篇に於ては此の條件を解析的に求める筈である．中空壓縮材の場合に於ては挫屈してからの狀態は上述の如く重大な意義を有して來るのであつて此の點が本論文を通じて著者の第 1 に主張せんとする處である．

[4] 壓縮材の挫屈に對するその他の考察

此迄の議論の對象として來た壓縮材は完全に眞直であり又軸荷重も完全に中心にかかると假定してゐた．然しながら實際の壓縮材に於ては完全に眞直である事は期待し得ない事であり，軸荷重の多少の偏心も已むを得ない事である．かかる壓縮材に關して若干の考察を加へて見よう．

先づ中實單體の壓縮材に就て考へる．

最初から撓みの與へられてゐる壓縮材或は偏心荷重を受ける壓縮材の問題は解析的には橫荷重を受ける壓縮材の問題と全く同樣に取扱はれる．其れ故に最も簡單な場合として中央に集中橫荷重を受ける壓縮材の狀態を考察しその他の場合を此れより推察しようと思ふ．

壓縮材が軸荷重の他に橫荷重をも受ける場合に於ては通常の解き方に從へば軸荷重はオイレルの限界荷重に收斂するが限界荷重を越えて其れ以上に上る事は出來ない．然しながら通常の解は前に論じた如く壓縮材の長さの條件の入れ方に嚴密さを缺いてゐる爲に斯くの如き結論に達するのであつて，此の條件を正確に入れるならば樣子は異つて來る．

圖—2 の如く坐標軸を取り壓縮材の中央に橫荷重 Q が作用するとすれば撓曲線に對する微分方程式は次の如くなる．

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+P(y-y_0)=\frac{Q}{2}(x_0-x) \quad \cdots\cdots(17)$$

但し $(x_0,\ y_0)$ は壓縮材の曲げられた狀態に於ける材端の坐標であつて Q を一定とすれば P の函數として表はさるべきものである．

(17) 式の解は次の樣になる．

$$y=y_0+A\sin\frac{x}{\alpha}+B\cos\frac{x}{\alpha}+\frac{Q}{2P}(x_0-x)$$

但し $\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI}$

$x=0$ に於て $y=0$，$\frac{dy}{dx}=0$ なる條件より積分常數 A，B を決定すれば

$$A=\frac{\alpha Q}{2P},\quad B=-y_0-\frac{x_0Q}{2P}$$

$$\therefore\quad y=y_0\left(1-\cos\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{Q}{2P}\left(\alpha\sin\frac{x}{\alpha}-x_0\cos\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{Q}{2P}(x_0-x) \quad \cdots\cdots(18)$$

$x=x_0$ に於て $y=y_0$ なる條件より x_0 と y_0 の關係を定むれば (19) 式を得る．

$$\frac{\alpha Q}{2P}=\left(\frac{x_0Q}{2P}+y_0\right)\cos\frac{x_0}{\alpha} \quad \cdots\cdots(19)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y_0}{\alpha}\sin\frac{x}{\alpha}+\frac{Q}{2P}\left(\cos\frac{x}{\alpha}+\frac{x_0}{\alpha}\sin\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{Q}{2P}$$

$$=\left(2\frac{y_0}{\alpha}+\frac{Qx_0}{P\alpha}\right)\sin\frac{x}{2\alpha}\cos\frac{x}{2\alpha}-\frac{Q}{P}\sin^2\frac{x}{2\alpha}$$

$$=\frac{Q}{P}\sin\frac{x}{2\alpha}\left(\tan\frac{x_0}{\alpha}\cos\frac{x}{2\alpha}-\sin\frac{x}{2\alpha}\right)$$

壓縮材の長さの條件は次の如くである．

$$\frac{L}{2}=\int_0^{x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^{x_0}\sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2\alpha}+\sin^2\frac{x}{2\alpha}\right)^2+\frac{Q^2}{P^2}\sin^2\frac{x}{2\alpha}\left(\tan\frac{x_0}{\alpha}\cos\frac{x}{2\alpha}-\sin\frac{x}{2\alpha}\right)^2}dx\cdots\cdots(20)$$

(20) 式は楕圓積分の範圍で積分する事が出來，從つて P と x_0 の關係が定められ (19) 式に依り P と y_0 の關係が決定される筈である．(20) 式の積分は實際には相當複雜となるので遂行しなかつた．然しながら $Q\to 0$ の極限の狀態が明瞭になれば (20) 式の積分 ($Q\neq 0$ の場合の) から導かれる P と y_0 の關係も略推測し得られるであらう．

(19) 式に於て $Q\to 0$ ならしむれば $\frac{x_0}{\alpha}\to\frac{\pi}{2}$ となる．從つて $Q\to 0$, $\frac{x_0}{\alpha}\to\frac{\pi}{2}$ の場合の (20) 式の極限を考へれば良い事になる．

(19) 式より

$$\lim_{\substack{Q=0\\ \frac{x_0}{\alpha}=\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{Q}{P}\tan\frac{x_0}{\alpha}\right)=\frac{2y_0}{\alpha}$$

從つて (20) 式の積分は次の樣になる．

$$\frac{L}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}\alpha}\sqrt{1+\frac{y_0^2}{\alpha^2}\sin^2\frac{x}{\alpha}}dx\ ,$$

$$=\alpha\sqrt{1+\frac{y_0^2}{\alpha^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{y_0^2}{\alpha^2+y_0^2}\cos^2 t}\ dt$$

$\frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2+y_0^2}}=h$ と置けば

$\frac{L}{2}=\frac{y_0}{h}E(h)$ 或は $\frac{y_0}{L}=\frac{h}{2E(h)}$

此れは (9) 式と全く一致する．

卽ち橫荷重 Q を零に限りなく近附ければ軸荷重 P と撓 y_0 の關係は限りなく圖—5 の曲線 $O\pi^2A$ に接近する事を示してゐる．通常の解に於ては $Q\to 0$ ならしむる時は圖—5 の切線 T に限りなく接近するのであるが正確には曲線 A を漸近曲線とするのである．

壓縮材に初期の撓みがある場合或は荷重のかゝり方に離心率が考へられる場合に就ても同樣の考察が下される．

中空壓縮材の問題に立歸つて考へて見れば，橫荷重，初期の撓み，或は軸荷重の偏心がある場合に於ても其等が非常に小さければ之等の影響のないものして解いた純粹な場合に近接してゐる事は上記の考察より推測される事である．橫荷重等のある場合には最初から撓みが考へられる爲限界荷重と謂ふものは考へられず從つて挫屈した狀態の安定不安定と謂ふ言葉は不適當となるが壓縮材としての安定不安定の問題は前と同樣に考へる事が出來る．卽ち軸荷重が增大するに從つて撓みが甚しくなる樣な中空壓縮材は安定であるが或る限度を越えると撓みが大きくなるに從つて逆に軸荷重が減少する樣な中空壓縮材は不安定と見做すべきである．

横荷重等のある場合の中空壓縮材の安定不安定を判別する事は之等の影響のない場合より遙かに複雜となるであらうと思はれるので之を放棄した．第 II 篇に於ては之等の影響のない場合に就て安定不定安の判別方法を求むるのであるが横荷重，初期の撓み，或は軸荷重の偏心等が存在しても小なる場合には多少の餘裕を以てその判別方法を適用する事が出來るであらう．

II. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導

組合せ壓縮材，管柱等を含む中空壓縮材の力學的特徴はそれが曲げられた場合斷面の形狀が變化する事である．中實壓縮材に於ては彈性の限度内で曲げられてゐる限り變形が起るとしても問題となる程度ではない．

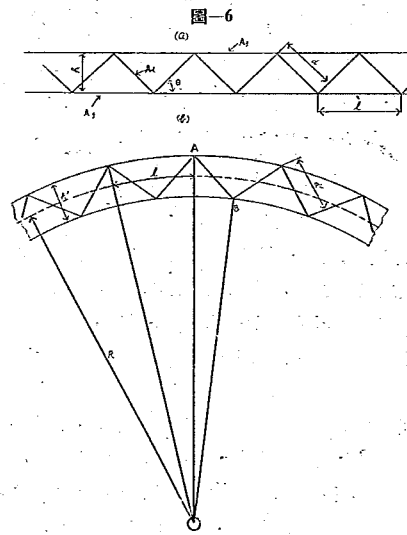
中空壓縮材が彈性の限度内で挫屈して曲げられれば常識的にも考へられる如く一般にその斷面の變形は曲げ剛さの減少となる．此の曲げ剛さの減少を考慮に入れて中空壓縮材の撓曲線に對す微分方程式を導き，之を解いて中空壓縮材の安定不安定を判別する式を提出せんとするのである．

[1] 中空壓縮材の曲げに對する抵抗

本章に於ては中空壓縮材が曲げに對して如何に抵抗するかを解析して見る．中空壓縮材の例としては主としてワレン型に綾片を施した組合せ壓縮材を取つて計算を進め，更に管柱の場合に就ても途中の計算を拔かして結果のみ附記する事とする．各種の組合せ壓縮材又は管柱の場合の詳細な計算は第 III 篇に於てまとめる積りである．

組合せ壓縮材が中心軸荷重を受けて未だ挫屈しない狀態にある時は通常の靜力學的計算に於ては綾片には何等應力はかゝらない．實際には挫屈しない狀態に於ても綾片に應力はかゝるのであるが然しながらそのかゝり方は局部的であり而もそう大きな量ではない*．然しながら一旦曲げられると綾片は急に其の存在を主張し出す．本章に於ては壓縮材を非常に長いものと假定し此れが或る曲率 $\frac{1}{R}$ に一樣に曲げられてゐる狀態に於て綾片が如何なる役割を果してゐるか先づ第 1 に究明して見ようと思ふ．此の狀態は長い壓縮材の兩端に於て適當な曲げモーメントが與へられてゐるとか或は壓縮材が曲げられて丁度半徑 R の全圓を作つてゐると考へても良いであらう．R は綾片の格間長 l に比較して著るしく大である事は勿論である．

圖—6



壓縮材の曲げられる前及び後に於ける骨組の幅，綾片の長さを夫々圖—6 に於ける如く h, h', d, d' とする．壓縮材の中立軸の長さは曲げられて後も同じである筈である．尙弦材，綾片の斷面積は夫々 A_f, A_d で表す事とする．

一側面が圖—6, (a) の如くである正四角柱を作つても

* 安宅勝氏〝綾片の强度に就て〟土木學會誌第 25 卷第 8 號參照．組合せ壓縮材に於ける綾片の役割に關する安宅氏と著者の見解の比較は第 3 報に於て詳しく述べる豫定である．

必ずしも同圖 (b) の如くその側面を含む平面内で挫屈するものとは限らず正方形の對角線を含む中軸面に就て立體的に挫屈する可能性もあり得るのであるが，此れに就ては第 III 篇，第 IV 篇に詳論する事とし此處では平面的にのみ問題を取扱ふ事とする．

圖—6, (b) の如く組合せ材が圓弧狀に曲げられたとすれば外側の弦材は引張られ内側の弦材は壓縮され，兩弦材の斷面積は相等しいからその應力度の絶對値は相等しく從つてその歪度の絶對値も相等しい．

内側の弦材に就て考へれば之は壓縮されてゐるから外側に膨脹せんとしてゐる．内側弦材の壓縮歪度は形の上から見て $-\frac{h'}{2R}$ となつてゐる筈であるから部材の彈性係數を E とすれば壓縮應力度は

$$\sigma=-\frac{h'E}{2R}$$

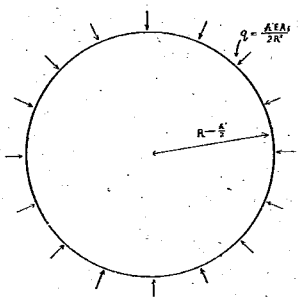
となり壓縮力は

$$\sigma A_f=-\frac{h'}{2R}EA_f \quad\cdots\cdots(21)$$

となる．

圖—7 の如き圓環をなす部材に（初期應力はないものとして）上記の如き壓縮力を起させる樣な等値靜水壓 q と謂ふものを假想すれば q は次の如く表はされる．

圖—7



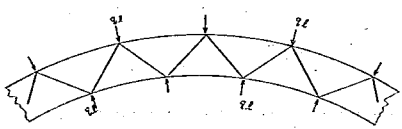
$$\sigma A_f=-\frac{h'}{2R}EA_f=-q\left(R-\frac{h'}{2}\right)$$

或は

$$q=\frac{h'EA_f}{2R\left(R-\frac{h'}{2}\right)}\fallingdotseq\frac{hEA_f}{2R^2} \quad\cdots\cdots(22)$$

但し h' は R に比して非常に小であり又 h と h' の差は極く僅かである．即ち内側弦材は單位長さ當り q なる遠心力を以て外側に膨脹せんとし，又外側弦材は同樣に單位長さ當り q なる求心力を以て内側に縮小せんとし，之等の遠心力と求心力とに抵抗し兩弦材の隔間を保持せんとしてゐるものが綾片であり從つて曲げに對する綾片の役割は此處に見出される．

圖—8



R に比して l は極めて小であるから綾片の各滑節點に於て ql なる力が圖—8 の如く綾片に作用するものと考へて差支へないであらう．正確には外側の滑節點にかかる壓力の方が内側の滑節點にかゝる壓力より幾分大きいのであるがその影響は極めて僅かである．從つて一本の綾片の受ける壓縮力は

$$\frac{1}{2}ql\operatorname{cosec}\theta=\frac{qld}{2h}$$

と置き得る．

綾片の斷面積は A_d であるからその壓縮應力度は (21) 式を考慮に入れて

$$\sigma_d=\frac{1}{2}\frac{qld}{hA_d}=\frac{ldEA_f}{4R^2A_d}$$

となり，綾片の縮みは次式で表はされる．

$$\frac{\sigma_d}{E}d=\frac{ld^2}{4R^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}$$

從つて曲げられる前の綾片の長さ d と比較すれば曲げられて後の長さ d' は次の如くなる．

$$d'=d\left(1-\frac{ld^2}{4R^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}\right) \quad \cdots\cdots(23)$$

次に組合せ材の曲げられた狀態即ち圖—6 (b) に於て h', d', l の關係を求めて見る．ΔOAB の間に餘弦法則を適用すれば

$$d'^2=\left(R-\frac{h'}{2}\right)^2+\left(R+\frac{h'}{2}\right)^2-2\left(R-\frac{h'}{2}\right)\left(R+\frac{h'}{2}\right)\cos\frac{l}{2R}$$

$\cos\frac{l}{2R}$ を級數に展開し其の第2項迄を取れば

$$d'^2\fallingdotseq 2\left(R^2+\frac{h'^2}{4}\right)-2\left(R^2-\frac{h'^2}{2}\right)\left(1-\frac{l^2}{8R^2}\right)$$

$$\therefore \quad d'^2=h'^2+\frac{l^2}{4}-\frac{h'^2l^2}{16R^2} \quad \cdots\cdots(24)$$

壓縮材が曲らない前の形に就ては明らかに次の式が成立する．

$$d^2=h^2+\frac{l^2}{4} \quad \cdots\cdots(25)$$

(23), (24), (25) の 3 式より壓縮材が曲げられる前と後とで骨組の幅が如何に變化するものであるかゞ解る．即ち (24), (25) 式より

$$h^2-h'^2=d-d'^2-\frac{h'^2l^2}{16R^2}$$

上式の意味を考へるのに弦材には伸縮し得る彈性的材料を使用し綾片には伸縮の全然ない材料を使用したと假定すれば (即ち $d=d'$ とすれば) 組合せ材は曲げられるに從つて幅を增す事を意味してゐる．即ち實際問題としては綾工の强弱如何に依つて曲げに對して組合せ材の幅が增減する事が豫想される．

$$h-h'=\Delta h$$

と置けば Δh は骨組の幅の減少を意味する．Δh は次の如く表はされる．

$$\Delta h(h+h')=(d-d')(d+d')-\frac{h'^2l^2}{16R^2}$$

(23) 式に於ける $d-d'$ を代入すれば

$$\Delta h(h+h')=(d+d')\frac{ld^2}{4R^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{h'^2l^2}{16R^2}$$

玆に於て近似的に $h\fallingdotseq h'$, $d\fallingdotseq d'$ と置き直せば

$$\Delta h=\left(\frac{ld^3}{4h}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{hl^2}{32}\right)\frac{1}{R^2} \quad \cdots\cdots(26)$$

となる．

(26) 式の意味を考へて見るのに右邊を正ならしむる樣な綾片を有する組合せ材に於ては曲げられるに從つてその曲率の自乘に比例して骨組の幅が減少する．即ち壓縮材の曲げ剛さが減少する事になる．逆に右邊が負となる樣な壓縮材に於ては曲げられるに從つて幅が增加し從つて曲げ剛さが增大する．

(26) 式の右邊を丁度零ならしむる樣な組合せ壓縮材は曲げの前後を通じて曲げ剛さに變化がなく，此れは中實單體の壓縮材の挫屈と同樣に考へて良い譯である．その爲の條件は次の如くである．

$$\frac{ld^3}{4h}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{hl^2}{32}=0$$

或は $$\frac{A_f}{A_d}=\frac{h^2l}{8d^3}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots(27)$$

但し θ は綾片と弦材との間の角である．$\theta \fallingdotseq 45°$ に於ては

$$\frac{A_f}{A_d} \fallingdotseq \frac{1}{11.3}$$

となる．尙 $\sin^2\theta\cos\theta$ を最大ならしむる θ の値は

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{2} = 54°44'8''$$

であつて此の角度に於ては

$$\frac{A_f}{A_d} \fallingdotseq \frac{1}{10.4}$$

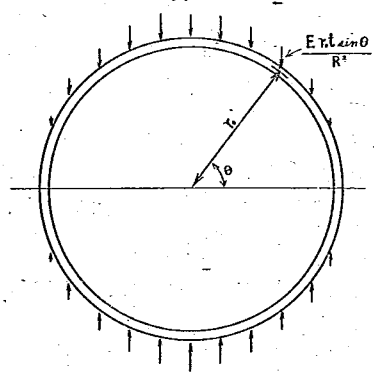
となる．即ちワレン形組合せ壓縮材を中實單體の壓縮材と同等な內部的機構に迄强める爲には小くとも弦材の斷面積の 10 倍以上の斷面積を有する綾片を施さなければならない事になる．換言すれば組合せ壓縮材に次第に增大する軸荷重をかけてその撓と軸荷重との關係が中實單體の壓縮材の場合と同じにする爲にはかくの如く多量の綾片を要するのである．此の事は逆に考へれば中實の壓縮材に於ては材料が非常に遊んでゐる事を示してゐるとも見られる．

以上に於てワレン型組合せ壓縮材の曲げに對する特性を解析して次の結論を得た．即ち組合せ壓縮材は綾片の强弱に應じて曲げられれば曲げられる程曲げ剛さが大きくも或は小さくもなる．此處に組合せ壓縮材の1つの特性が認められる．又中實な壓縮材と同樣に曲げの如何に拘らず曲げ剛さの一定な組合せ壓縮材を集成する爲には實現不可能な程强力なる綾工を施さなければならない事が解つた．

中實なる壓縮材の挫屈現象に關しては第Ⅰ篇に於て論ぜる如く限界荷重を超えて挫屈してからも軸荷重は增加するのであつて，彈性の限度內で挫屈してゐる狀態は安定な釣合狀態にある．之に對して部材を集成して組立てる組合せ壓縮材に於てはその挫屈狀態を中實壓縮材と同程度に安定な平衡狀態に在らしめる程强力な綾工を施す必要はなく，少くとも中立の平衡狀態か此れより多少安定な平衡狀態に近からしむれば良いであらう．

綾片の强弱はその組合せ壓縮材の限界荷重に大きな影響を與へるものである事は第Ⅳ篇に於て詳論する積りであるが以上の如く挫屈の安定不安定にも重大なる關聯を有するのである．不安定なる挫屈をする樣な壓縮材であつても理論的には限界荷重に達しなければ挫屈はしないが，何等かの外的條件に依つて一度柱に曲げが與へられれば如何程小なる軸荷重に對しても挫屈し了す可能性を藏してゐる．從つて組合せ材の綾工はその挫屈が少くとも中立の平衡狀態に在らしめる程度に强力なものでなければならない．組合せ壓縮材の綾片に對する此の條件は絕對的なものであると考へられる．

圖—9



以上は或る特殊な組合せ壓縮材の面も骨組の平面內に於ける挫屈を考へたのであるが無數に考へられる如何なる組合せ壓縮材に就ても同樣の結論が下されるのである．曲げに依る骨組の幅の減少は (6) 式の如く常に $\frac{1}{R^2}$ に比例してゐるのが特徵である．

次に管柱が同樣に $\frac{1}{R}$ の曲率に曲げられてゐる狀態を考へて見よう．中軸面に伸び縮みがないとすれば中軸面より外側の材料は引張られ內側の材料は壓縮されてゐる．從つてパイプの斷面を取つて考へれば圖—9 の如き外力が與へ

られて管の斷面を押潰さうとしてゐる事になる．實際に計算して見ると（詳細の計算は第 III 篇に讓る）豫想された如く管が曲げられると最初圓形であつた斷面が近似的に楕圓となる．その離心率 e と曲率 $\frac{1}{R}$ との關係は次の如く表はされる．

$$e=\frac{2r_0^2}{tR}$$

但し r_0：管の半徑

t：管の肉厚

中軸面に對して壓縮側と引張側との間の間隔の減少は e の自乘に比例する．

以上を通觀して歸納せられる事は如何なる中空壓縮材も曲げられた場合には壓縮側と引張側との間の間隔は曲率の自乘に比例して減少すると謂ふ事である．次章に於ては此の事實に基いて中空壓縮材の撓曲線に對する微分方程式を誘導する．此の方程式に依つて中空壓縮材の挫屈の安定不安定が判別せられ，之に依つてワレン型組合せ壓縮材に於ては綾片を，管柱に於てはその肉厚を決定すべき絕對的條件が求められる筈である．

［2］ 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導

中空壓縮材に於ては曲げに依る曲げ剛きの變化が考へられ之が最も大きな特徵をなしてゐる．從つて中空壓縮材の挫屈を考へる場合には此の曲げに依る曲げ剛さの變化を考慮に入れて撓曲線に對する微分方程式を導かなければならない．

先づ前章に於て取扱つた組合せ壓縮材に就て考へて見るのに曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられてゐる その組合せ材の斷面の慣性モーメント I は次の如く表はされる．

$$I=2A_f\left(\frac{h'}{2}\right)^2=\frac{A_f}{2}(h-\Delta h)^2$$

$$=\frac{A_fh^2}{2}\left(1-\frac{2\Delta h}{h}\right)$$

$$=\frac{A_fh^2}{2}\left\{1-\frac{1}{K^2}\left(\frac{ld^3}{2h^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{l^2}{16}\right)\right\}$$

$$=I_0\left(1-\frac{\beta^2}{K^2}\right) \quad \cdots\cdots(28)$$

但し Δh に對しては (26) 式を代入し

$$I_0=\frac{A_fh^2}{2}\text{（曲げられない前の慣性モーメント）} \quad \cdots\cdots(29)$$

$$\beta^2=\frac{ld^3}{2h^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{l^2}{16} \quad \cdots\cdots(30)$$

と置換した．β は長さのデイメンションを有し綾工の著るしく强力なる場合には β^2 が負となる事もあるが實用的な場合は盡く β^2 が正の範圍内に含まれるので以下 β^2 は常に正であると考へて差支へない．

壓縮材の撓曲線に對する微分方程式は (1) 式即ち

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0$$

であり，此の I に對して (28) 式を代入すればワレン型組合せ壓縮材に對する方程式が導かれる．此の形は又一般の組合せ壓縮材に對しても適用されるものである．綾片の長さに對して壓縮材の長さが大である時には $\frac{1}{R}\fallingdotseq\frac{d^2y}{dx^2}$ と置き得る故次の如き微分方程式を得る．

$$EI_0\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \quad \cdots\cdots(31)$$

此の基礎微分方程式は部材を集めて合成する全ての組合せ壓縮材に對して適用されるものであり β^2 はその綾工の程度に依つて決定される量である．變斷面中空壓縮材であつたならば I_0 は x の函數となる．

此處に取扱ふ場合は EI_0 が一定なる場合であるから

$$\frac{P}{EI_0}=\frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \text{ は長さのディメンションを有す})$$

と置けば次の形に書き直される．

$$\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{\alpha^2}=0 \quad \cdots\cdots(32)$$

管柱の場合に於ける曲げに依る慣性モーメントの變化を示せば次の如くである．

$$I\fallingdotseq I_0\left\{1-\frac{12r_0^2+\ell^2}{8(4r_0^2+\ell^2)}c^2\right\}$$

$$=I_0\left\{1-\frac{r_0^4(12r_0^2+\ell^2)}{2\ell^2(4r_0^2+\ell^2)}\cdot\frac{1}{R^2}\right\}$$

即ち

$$\beta^2=\frac{r_0^4(12r_0^2+\ell^2)}{2\ell^2(4r_0^2+\ell^2)}$$

と置けば管柱の挫屈も又同樣に (32) 式に依つて論ずる事の出來る事を示してゐる．從つて (31) 及 (32) 式は全ての中空壓縮材に適用せられる基礎方程式である事が解る．

正確には $\frac{1}{R}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ であるから基礎方程式に於て $\frac{d^2y}{dx^2}$ を $\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ で置き換へたならばより正しい基礎方程式が得られる．然しながら挫屈の限界點附近を論ずるには 1 に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を小なりとして省略しても差支へない事は第 I 篇に於て既に指摘した通りである．

(32) の基礎方程式は $\frac{d^2y}{dx^2}$ に關して 3 次の代數方程式であつて之を解けば

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$$

なる形の解が得られ此の微分方程式を解けば良い．併しながら $f(y)$ は 3 乘根の內に 2 乘根が含まれてゐる樣な形であり第 1 回の不定積分は簡單に求められるが第 2 回目の積分は到底求められ相もない．

又一方より考へれば (32) 式に於て問題の性質上 $\frac{d^2y}{dx^2}$ と $\frac{y}{\alpha^2}$ とが同じ程度の大きさであり挫屈の限界點附近を考へるとすれば y は小であるから $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$ の項は他の 2 つの項に比較して非常に小さい．此の點に着目して $\frac{d^2y}{dx^2}$ に關する代數方程式を近似的に解く事にする．根としては $-\frac{y}{\alpha^2}$ に非常に近い事が解つてゐるから此れを基本として代數方程式の根を求むるニュートンの近似計算法を 2 回繰返せば次の如き解が得られる．

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y}{\alpha^2}\left(1+\frac{\beta^2y^2}{\alpha^4}+3\frac{\beta^4y^4}{\alpha^8}+12\frac{\beta^6y^6}{\alpha^{12}}+55\frac{\beta^8y^8}{\alpha^{16}}+\cdots\right) \quad \cdots\cdots(33)$$

挫屈の限界點附近即ち y が非常に小である處を取扱はんとする現在の目的の爲には右邊の第 2 項迄を取れば充分である．第 3 項以下を考慮に入れても挫屈の安定不安定の判別には結局影響しないのである．第 2 項迄であれば全ての積分は楕圓積分の範圍內でおさまり又 β^2 が含まれてゐるから中空壓縮材の特性も必ず此の內に含ま

れてゐる筈である．

第3項以下を省略すれば次の微分方程式を得る．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{\alpha^2}\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^4}y^2\right)=0 \quad \cdots\cdots(34)$$

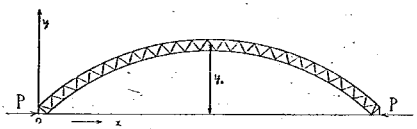
挫屈の限界點の附近を取扱ふ場合には(34)式を中空壓縮材に對する基礎方程式と見做しても差支へないであらう．

(34)式は(32)式に於て$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$の項を$\frac{d^2y}{dx^2}\fallingdotseq-\frac{y}{\alpha^2}$と置き換へて得られる式と結果に於て同一である．

［3］ 基礎方程式の解と不安定なる挫屈を起さざる爲の條件

挫屈狀態が安定であるか不安定であるかを論ずるには，挫屈の限界點附近の模樣が解れば良いのであつて，その爲には(34)式の如き近似的な方程式で充分正確に目的を達し得られる．

圖—10



坐標軸を圖—10の如く取つて(34)式の積分を遂行すれば以下の樣になる．

(34)式の兩邊に$\frac{dy}{dx}$を乘じて積分し$y=y_0$に於て$\frac{dy}{dx}=0$なる條件を入れれば

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{\alpha^2}(y^2-y_0^2)+\frac{\beta^2}{2\alpha^6}(y^4-y_0^4)=0 \quad \cdots\cdots(35)$$

$0\leqq y\leqq y_0$の間で積分すれば

$$x=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(y_0^2-y^2)\left\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\beta^2}{2\alpha^6}(y_0^2+y^2)\right\}}}$$

$y=y_0\sqrt{1-u^2}$　と置換すれば

$$x=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^2}}}\int_u^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^2}}}\left\{K(k)-\int_0^u\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\right\}$$

但し．　$K(k)=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$0<k^2=\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4+\beta^2y_0^2}<1$$

ヤコビーの楕圓函數の記號を用ふれば

$$u=\sqrt{1-\frac{y^2}{y_0^2}}=sn\left(K-\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)$$

或は　　$y=y_0cn\left(K-\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)$

$$=y_0\sqrt{\frac{\alpha^4}{\alpha^4+\beta^2y_0^2}}\cdot\frac{sn\left(\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)}{dn\left(\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)} \quad \cdots\cdots(36)$$

以上で挫屈形が決定されたのである．$\alpha\left(=\sqrt{\frac{EI_0}{P}}\right)$と y_0 とは壓縮材の長さの條件に依つて關係づけられる．軸荷重 P の或る値に對して y_0 が決定され從つて (36) 式に依り挫屈形が實際に求められるのである．壓縮材の長さの條件は次の如くである．

$$\frac{1}{2}L=\int_0^{y_0}\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}dy$$

上式に (35) 式に於る$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$の値を代入して積分すれば良いのであるが，平方根の內が y に關して8次の代數式となり積分が困難であるから$\frac{dy}{dx}$が1に比較して小なる事を利用して級數に展開して項毎に積分を行ふ事とする．即ち

$$\frac{L}{2}=\int_0^{y_0}\left\{\frac{1}{\frac{dy}{dx}}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{dy}{dx}\right)^5-\cdots\cdots\right\}dy$$

此の積分に於ては楕圓積分の標準形に直す必要はないから

$$y=y_0t$$

と變數を置換して積分を敢行すれば

$$\frac{L}{2}=\delta\left\{\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}}+\frac{y_0^2}{2\delta^2}\int_0^1\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}\,dt\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\frac{y_0^4}{\delta^4}\int_0^1\sqrt{(1-t^2)^3(1+h^2t^2)^3}dt+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\frac{y_0^6}{\delta^6}\int_0^1\sqrt{(1-t^2)^5(1+h^2t^2)^5}\,dt-\cdots\right\}\cdots(37)$$

但し　$\delta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}}$

$$0<h^2=\frac{\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}<1$$

である．尙

$$K_0(h)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2h^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2h^4-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2h^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$K_1(h)=\int_0^1\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}\,dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1^2\cdot1}{2^2\cdot4}h^2-\frac{1^2\cdot1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2\cdot6}h^4+\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}h^6-\cdots\cdots\right\}$$

$$K_2(h)=\int_0^1\sqrt{(1-t^2)^3(1+h^2t^2)^3}\,dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{3^2\cdot1\cdot1}{2^2\cdot4\cdot6}h^2+\frac{3^2\cdot1^2\cdot1\cdot3}{2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8}h^4-\frac{3^2\cdot1^2\cdot1^2\cdot3\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8\cdot10}h^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$K_3(h)=\int_0^1\sqrt{(1-t^2)^5(1+h^2t^2)^5}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{5^2\cdot3\cdot1\cdot1}{2^2\cdot4\cdot6\cdot8}h^2+\frac{5^2\cdot3^2\cdot1\cdot1\cdot3}{2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8\cdot10}h^4+\frac{5^2\cdot3^2\cdot1^2\cdot1\cdot3\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8\cdot10\cdot12}h^6-\cdots\cdots\right\}$$

$$K_4(h)=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots\right\}$$

……

と置けば (37) 式は次の如く書き表はされる.

$$\frac{1}{2}\frac{L}{\delta}=K_0(h)+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{\delta}\right)^2K_1(h)-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\frac{y_0}{\delta}\right)^4K_2(h)+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{y_0}{\delta}\right)^6K_2(h)-\cdots\cdots\cdots(38)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}\frac{L}{\delta}&=\frac{L}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}\\ \frac{y_0}{\delta}&=\frac{y_0}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}\\ h&=\sqrt{\frac{\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(39)$$

(38) 式は α と y_0 從つて P と y_0 とを關係づける式であつて $y_0=0$ に對しては

$$\frac{L}{2\alpha}=\frac{\pi}{2}$$

即ち $$P=\pi^2\frac{EI_0}{L^2}$$

を與へる. 此れは組合せ壓縮材の限界荷重が弦材のみに依つて定まり綾片には無關係である事を示してゐる. 此れは撓曲線に對する微分方程式を擧てる時に剪斷力の影響を無視した爲であつて, 此の影響を考慮に入れる時は綾片が限界荷重に對して大きな役割を演じて居る事が解るのである. 併しながら挫屈狀態の安定不安定に對しては剪斷力の影響を考慮すると否とは何等の關聯をも及ぼさないのである. 之等の問題は第 IV 篇に於て詳しく論ずるであらう.

挫屈狀態が安定であるが不安定であるかを決定する爲には (38) 式に (39) 式を代入して $\left(\frac{y_0}{\alpha}\right)^4$ の項以下を省略して考へて充分である.

即ち $$\frac{1}{2}\frac{L}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}{1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2}\frac{L}{\alpha}\fallingdotseq\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{8\alpha^2}\right)\frac{y_0^2}{\alpha^2}\right\}\left(1+\frac{\beta^2y_0^2}{2\alpha^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{4}-\frac{3\beta^2}{8\alpha^2}\right)\frac{y_0^2}{\alpha^2}\right\}\cdots\cdots(40)$$

y_0 が增加するに從つて P が增加すれば之れは安定な挫屈である. y_0 が增加するに從つて P が減小すれば夫れは不定安な挫屈である. 中空壓縮材が不安定なる挫屈を起さない爲には次の條件が成立する.

$$\frac{1}{4}-\frac{3\beta^2}{8\alpha^2}\geqq 0$$

或は

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}\leqq\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots(41)$$

(41) 式に於て α は如何なる値を取るものであるかを考へて見よう．(41) 式は軸荷重を越えて壓縮材が挫屈してからの關係である．元々 $\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{P}{EI_0}}$ であつて P は固定された數値ではなく y_0 に伴つて變化する變數であるが限界荷重以下の P に對しては y_0 は零以外の實數値は取り得ず（不安定なる挫屈の場合を除く）限界荷重を越えれば P の僅かな變動に對して y_0 は非常に大き變化する．換言すれば挫屈の限界點附近に於ては y_0 の大きな變化に對して P の變化は非常に小さい．從つて α の値としては P を限界荷重に固定した場合の値を取つて差支へない．從つて

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI_0}=\frac{\pi^2}{L^2} \quad \cdots\cdots(42)$$

と置いて差支へ無い．

次に β^2 の數値であるがワレン型組合せ壓縮材と管柱に對しては既に求めた．如何なる中空壓縮材に對しても β^2 は同樣の考へ方で計算される．結局中空壓縮材の安定不安定の問題は各壓縮材に固有な數値である β^2 を計算し (41) (42) の兩式に依り判別すれば良い事になる．

ワレン型組合せ壓縮材に對しては β^2 は (30) 式で表はされる．此れを (41) 式に代入し (42) 式を考慮すれば

$$\frac{\pi^2}{L^2}\left(\frac{Id^3}{2h^2}\cdot\frac{Af}{Ad}-\frac{l^2}{16}\right)\leqq\frac{2}{3}$$

或は

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{\dfrac{Id^3}{2h^2}}{\dfrac{2L^2}{3\pi^2}+\dfrac{l^2}{16}}$$

l は格間長であり壓縮材の全長 L に比較して著るしく小さいから $\frac{l^2}{16}$ の項を省略すれば

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{3\pi^2Id^3}{4h^2L^2}$$

此の省略は安全側である．此の結果を更に綾片が弦材に對してなす角 θ と壓縮材の細長比 $s\left(\frac{2L}{h}\right)$ とで書き直せば

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin 4\theta} \quad \cdots\cdots(43)$$

ワレン型組合せ壓縮材の挫屈が安定である爲には綾片の斷面は上記の條件式を滿足しなければならない．

Rahmen Stab 型の組合せ壓縮材に對して同樣な條件式を導けば次の如くである（詳細の計算は第 II 篇に譲る）．

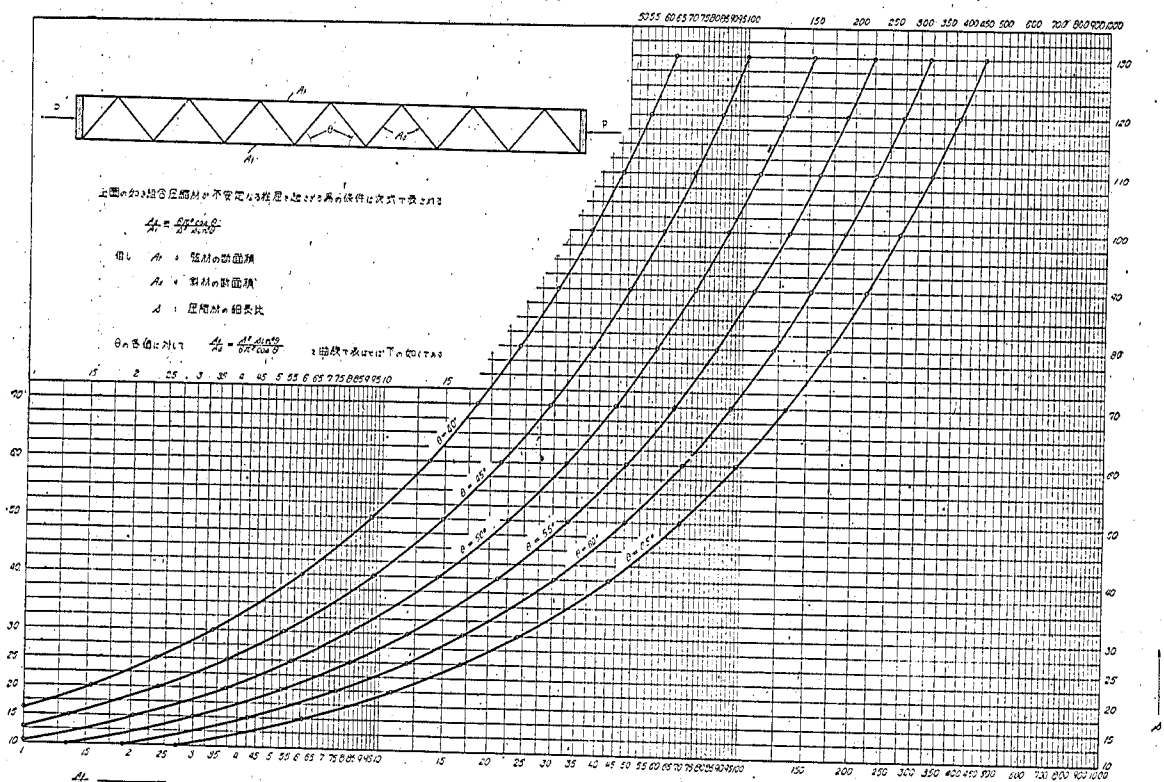
$$\frac{A_h}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin\theta} \quad \cdots\cdots(44)$$

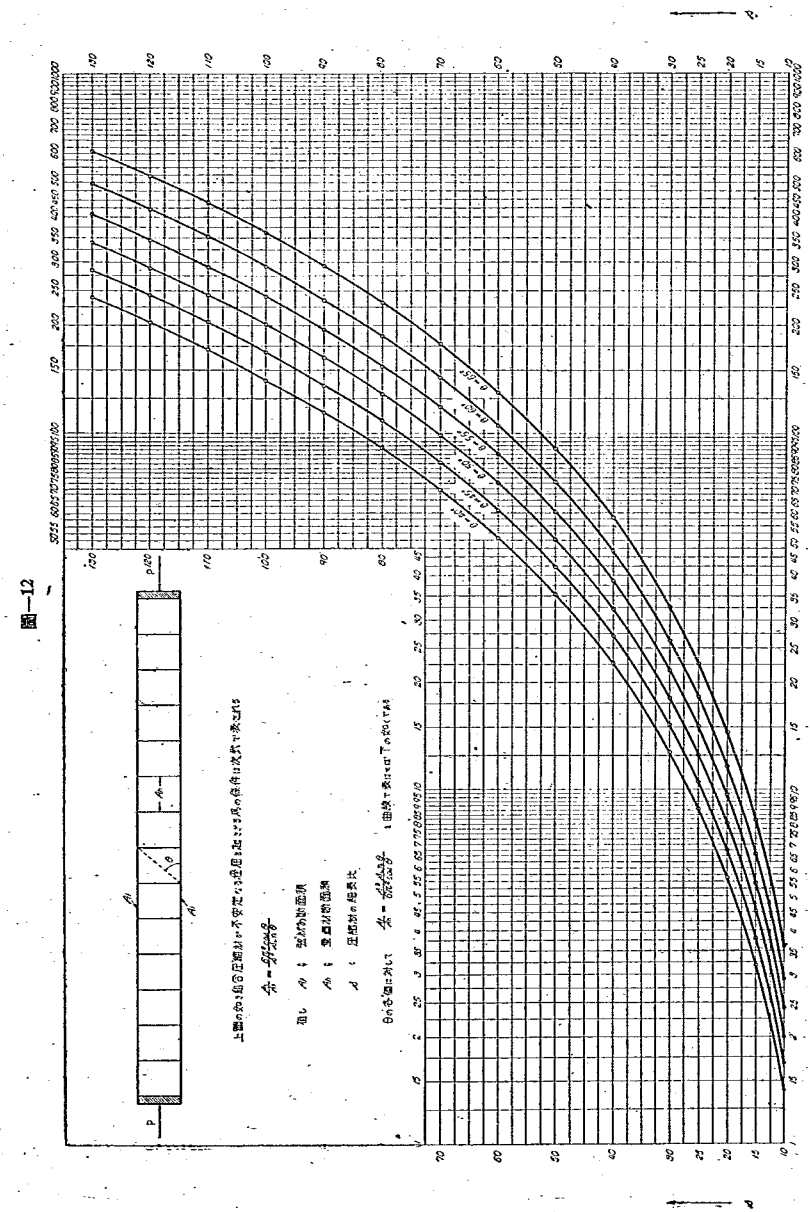
A_h は綾片の斷面積を表はす．

管柱の場合も不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は次の如く表はされる．

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\pi^2r_0^4(12r_0^2+l^2)}{2l^2(4r_0^2+l^2)L^2}\leqq\frac{2}{3}$$

図—11


P
P
A1
A2
θ
上図のような組合圧縮材が不安定な挙動を起こさない為の条件は次式で表される
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\beta n^2 \cos\theta}{2n+\cos\theta}$
但し A1 : 弦材の断面積
A2 : 斜材の断面積
n : 圧縮材の組数比
θの各値に対して $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1' A_1 \sin\theta}{\beta n^2 \cos\theta}$: 曲線で表わせば下の如くである
θ=60°
θ=55°
θ=50°
θ=45°
θ=40°
$\frac{A_1}{A_2}$
λ



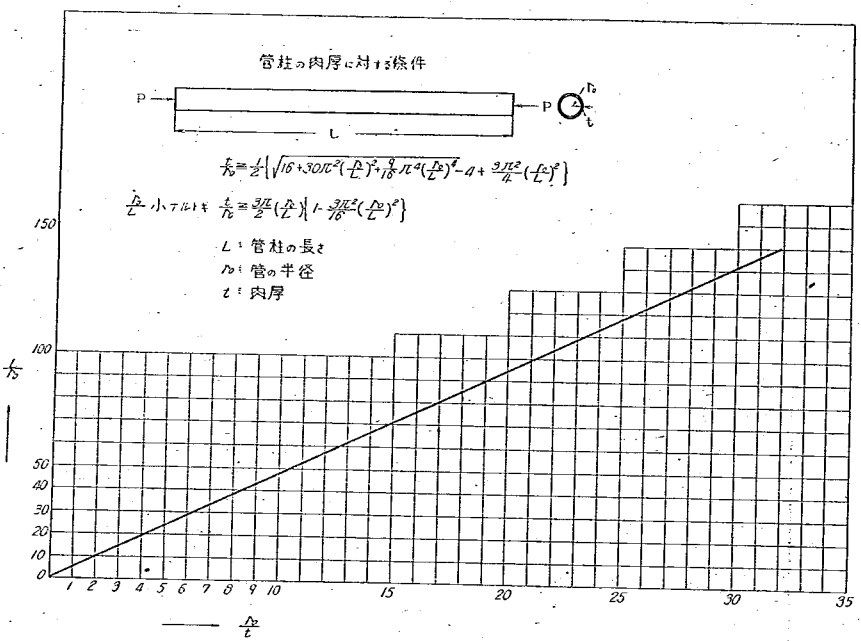
図—12

管の半徑 r_0 に對して肉厚 t が如何程なければならないかを $\frac{r_0}{L}$ の函數として表はせば次の如くである.

$$\frac{t^2}{r_0^2} \geqq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+30\pi^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2+\frac{9\pi^4}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4}-4+\frac{3\pi^2}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots(45)$$

(43), (44), (45) の各式をグラフにして示せば圖—11, 12, 13 の如くである.

圖—13



[4] 要　　約

第II篇に於ける所論を要約すれば次の如くである.

[1] 章に於ては中空壓縮材が曲げに對して如何に抗抵するかを主としてワレン型組合せ壓縮材に就て解析した. 曲げられるに從つて斷面が變形するが此れを兩弦材間の間隔の減少で表はせば (26) 式の如くである. 即ち

$$\Delta h=\left(\frac{Id^3}{4h}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{hl^2}{32}\right)\frac{1}{R^2}$$

此の第2項は通常省略して差支へない.

管柱の場合には曲げられると斷面は楕圓に變形する. 此の場合の壓縮側と引張側の間の間隔の減少は e^2 に比例し從つて $\frac{1}{R^2}$ に比例する. [2] 章に於ては全ての中空壓縮材の曲げ剛さは曲げられるに從つて減少しその量は $\frac{1}{R^2}$ に比例する事實を考慮に入れて撓曲線に對する微分方程式を導いた. その經過は次の如くである.

曲げに依る慣性モーメントの減少　　$I=I_0\left(1-\frac{\beta^2}{R^2}\right)$

但しワレン型組合せ壓縮材に對しては　$\beta^2=\frac{Id^3}{2h^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}-\frac{l^2}{16}\fallingdotseq\frac{Id^3}{2h^2}\cdot\frac{A_f}{A_d}$

管柱に對しては　$\beta^2=\frac{r_0^4(12r_0^2+l^2)}{2l^2(4r_0^2+l^2)}$

撓曲線に對する微分方程式　$EI_0\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0$

或は　$\left\{1-\beta^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{\alpha^2}=0$

挫屈の限界點附近に對しては近似的に　$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{\alpha^2}\left(1+\frac{\beta^2y^2}{\alpha^4}\right)=0$

［3］章に於ては上記の近似的微分方程式を解き挫屈形に對しては

$$y=y_0\sqrt{\frac{\alpha^4}{\alpha^4+\beta^2y_0^2}}\cdot\frac{sn\left(\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)}{dn\left(\frac{x}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2y_0^2}{\alpha^4}}\right)}$$

α（即ち P）と y_0 の關係に對しては

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{\alpha}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{y_0^2}{\alpha^2}+\cdots\cdots\right\}$$

を得た．此れより不安定なる挫屈を起さざる爲の條件として

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}\leqq\frac{2}{3}$$

を得る．玆に $\frac{1}{\alpha^2}=\frac{P}{EI_0}\fallingdotseq\frac{\pi^2}{L^2}$ として良い．此の條件をワレン型組合せ壓縮材に適用すれば

$$\frac{A_d}{A_f}\geqq\frac{6\pi^2\cos\theta}{s^2\sin^4\theta}$$

となり管柱に適用すれば

$$\frac{l^2}{r_0^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16+30\,\pi^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2+\frac{9\pi^4}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4}-4+\frac{3\pi^2}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\right\}$$

となる．

以上の計算に於ては壓縮材は可成り長い事が假定されてゐる．從つて餘り短かい壓縮材に對しては此の結果は適用し難くなる．かゝる場合には組合せ壓縮材に於ては結構としての計算を行ふべきであり管柱の場合には圓壔殻の挫屈（小田原提灯の如く挫屈する場合）の問題となる．

鐵筋コンクリートロツカーの設計竝びに その設計荷重に對する安全性に就て

內務技師　一　木　保　夫

要　旨

曩に行へる模型實驗の結果（土木試驗所報告第 51 號「鐵筋コンクリートロツカーの形狀竝びに配筋に關する實驗的研究」參照）を實際に應用して，荷重 100 ton に耐ふべき鐵筋コンクリートロツカーを設計し，これに就き載荷試驗を行ひ，設計荷重に對し十分なる安全率を有することを見出し，模型實驗の結果を實證したのである．

目　次

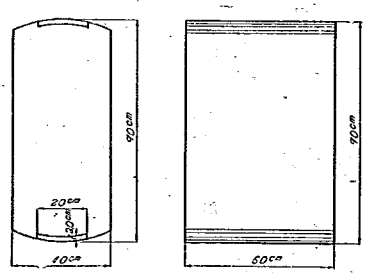
I. 緒　言……（1）
II. 設　計……（1）
III. 供試體の製作及び養生……（4）
IV. 載荷試驗……（6）
V. 設計荷重に對する安全率……（10）
VI. 接觸面承鈑の影響……（12）
VII. 結　言……（12）

I. 緒　言

筆者は曩に鐵筋コンクリートロツカーに關し模型實驗を行ひ，その結果を土木試驗所報告第 51 號に「鐵筋コンクリートロツカーの形狀竝びに配筋に關する實驗的研究」として發表したが，之を實際に應用して，愛知縣名古屋西尾線米津橋（鐵筋コンクリート突桁式桁橋，有効幅員 6.00 m，1 徑間長 23.00 m）橋脚上に使用せんとする，荷重 100 ton に耐ふべき鐵筋コンクリートロツカーを Bortsch の方法によつて設計し，之に對し供試體を 3 箇製作して載荷試驗を行つた．その結果この方法によつて設計せるロツカーが，設計荷重に對し十分なる安全率を有することを見出し，模型實驗の結果を實證したのである．尙，供試體 3 箇の內 2 箇は使用骨材の異なるもの，1 箇は接觸面承鈑の影響を見んがために，承鈑を省略して製作せるものである．

供試體の製作は，米津橋工事現場に於て之を行つたが，本試驗に對する愛知縣土木部道路課今泉課長，田島技師兩氏の熱心なる協力を玆に深く感謝する．

圖—1　ロツカーの形狀及び寸法



II. 設　計

1. 設計荷重竝びにロツカーの形狀及び寸法

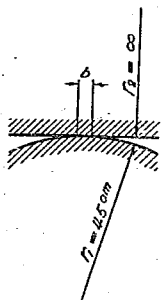
設計荷重は 100 ton，形狀及び寸法は構造の關係より圖—1 に示す如く，高 90 cm，幅 40 cm，長 60 cm とし兩端面

は高さの中央に中心を有する圓弧とした．後に鐵筋の計算に於て述べる如く，この寸法とすれば Bortsch の方法による最大引張應力度は 21.25 kg/cm² となり，適當であることが認められた．

2. 兩端接觸面承鈑

幅 20 cm，長 60 cm，厚 20 mm の鋼鈑を表面半徑 45 cm に曲げて使用することゝした．

圖—2 接觸狀態



桁の下面及び橋脚上面にも鋼鈑を使用する故，今 Hertz の式によつて接觸面幅 b を求めると次の如くになる (圖—2 參照).

$$b=4\sqrt{\frac{2P}{\pi lE}\cdot\frac{1-\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}}$$

$P=100{,}000$ kg, $l=60$ cm, $E=2{,}100{,}000$ kg/cm², $m=3$, $r_1=45$ cm, $r_2=\infty$

を入れゝば

$$b=4\sqrt{\frac{2\times100{,}000}{3.1416\times60\times2{,}100{,}000}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{45}}}$$

$$=8\sqrt{0.00505}$$

$$=0.568\text{ cm}$$

$$\fallingdotseq5.7\text{ mm}$$

次に應力の分布を Hertz の假定した如く，拋物線狀に分布するものとして接觸面に於ける最大壓縮應力度を求むれば，

$$\sigma_{max}=\frac{4P}{\pi bl}$$

$$=\frac{4\times100{,}000}{3.1416\times0.568\times60}$$

$$=\frac{40{,}000}{10.7}$$

$$=3{,}738\text{ kg/cm}^2$$

鋼に對しては，かゝる場合に 5,000～6,000 kg/cm² の壓縮應力度を許容し得る故に安全である．且つ又，實際には承鈑に接する部分のコンクリートが鋼よりも大なる變形を生ずるために，接觸面幅 b は計算によるものよりも更に大となり，從つて σ_{max} は更に小となるものと考へられる．

3. 承鈑に接する部分のコンクリートに生ずる最大壓縮應力度

荷重が承鈑によつて，承鈑に接するコンクリートの幅 12 cm (40 cm×0.3=12 cm) の面に Bortsch の假定せる如く，cos 狀に分布するものと假定すれば，コンクリートに生ずる最大壓縮應力度は，

$$p_1=\frac{\pi P}{2bl}$$

$$=\frac{3.1416\times100{,}000}{2\times12\times60}$$

$$=218\text{ kg/cm}^2$$

となる．

土木學會「鐵筋コンクリート標準示方書」に於ては，コンクリート面が局部的に荷重を受くる場合の許容支壓

應力度を

$$\sigma_{ca}'=\frac{\sigma_{28}}{3.5}\sqrt[3]{\frac{A}{A'}}$$

によることゝし，その限度を 1：2：4 コンクリートを標準として 120 kg/cm² に限定してゐるが，之をロツカーの場合に對してそのまゝ適用することは甚だ不經濟であつて，ロツカーの場合にはコンクリートの強度も大であるし，應力の分布も cos 狀と假定するのであるから，更に大なる應力度を許容し得るのである．

上の計算では $p_1=218$ kg/cm² となつたが，既往の實驗から見ても，これ位の應力度は許容し得るものと認める．

4. 鐵筋の配置

鐵筋の配置は Bortsch の方法によつて決定する．

$$\beta=\frac{b}{a}=\frac{12}{40}=0.3$$

$$\frac{y_0}{a}\fallingdotseq\frac{\beta}{4}[5-13\beta]$$

$$=\frac{0.3}{4}[5-13\times0.3]=0.0825$$

$$(0.60-0.9\beta+2\beta^2)\frac{P}{a}$$

$$=(0.60-0.9\times0.3+2\times0.3^2)\frac{P}{a}$$

$$=0.51\frac{P}{a}$$

又　$P=\frac{100{,}000}{60}$

$=1667$ kg（長 1 cm 當り）

$$\frac{P}{a}=\frac{100{,}000}{60\times40}$$

$=41.67$ kg/cm（長 1 cm 當り）

故に引張應力の分布は圖—3 (*a*) の如くになる．

鐵筋は長さの方向に對し 10 cm 間隔に入れるものとする．

c を高さの方向に於ける鐵筋の間隔，鐵筋斷面積を A_s，鐵筋の許容引張應力度を $\sigma_{sa}=1{,}000$ kg/cm とする．

引張應力を全部鐵筋にとらせるのであるから，

$$c\cdot10\,\sigma_x=A_s\cdot\sigma_{sa}$$

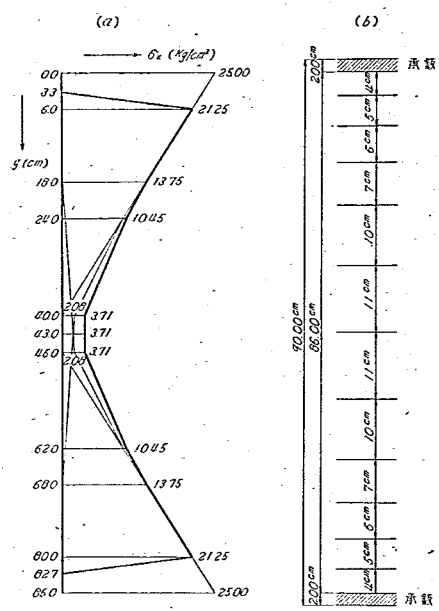
$$c=\frac{A_s\,\sigma_{sa}}{10\,\sigma_x}$$

ϕ 12 mm の鐵筋を使用するときは

$$A_s=1.131\text{ cm}^2$$

故に　$c=\frac{1.131\times1{,}000}{10\,\sigma_x}$

圖—3　引張應力の分布並びに引張鐵筋間隔の決定



$$=\frac{113.10}{\sigma_x}$$

之より σ_x の種々なる値に對し，鐵筋の間隔 e を求むれば表—1 の如くになる．

表—1 引 張 鐵 筋 の 間 隔

σ_x (kg/cm²)	e (cm)	σ_x (kg/cm²)	e (cm)
21.25	5.3	10	11.3
20	5.7	8	14.1
19	6.0	6	18.9
18	6.3	4	28.3
16	7.1	2	56.6
14	8.1	0	∞
12	9.4		

之より高さの方向に於ける鐵筋の間隔を圖—3(b)の如く決定する．

縱方向及び長さの方向の鐵筋も同じく ϕ 12 mm を使用する．

5. コンクリート

コンクリートの配合は容積比 1：1.5：3，スランプは 5～7 cm を標準とする．砂利は 25 mm 以下，粒度の特に良好なものを使用する．

コンクリートの填充に當つては，締固めを特に入念に行ひ，空隙の發生を防ぐ．

セメントは新鮮なものを使用する．

その他コンクリートの强度に影響を及ぼす諸因子を考慮し，出來るだけ强度大なるコンクリートをつくること

6. 設 計 圖

以上により設計したるロツカー構造圖は，次頁圖—4 に示す如くである．

III. 供試體の製作及び養生

供試體は 3 箇で，昭和 14 年 10 月 6 日（天候 晴時々曇，氣温 23.5～25℃）に米津橋工事現場に於て製作したが，3 箇の內供試體Ⅰ及びⅡは夫々產地の異なる砂利を使用せるもの，供試體Ⅲは接觸面承鈑の影響を見んがために，承鈑を省略したものである．

1. 使 用 材 料

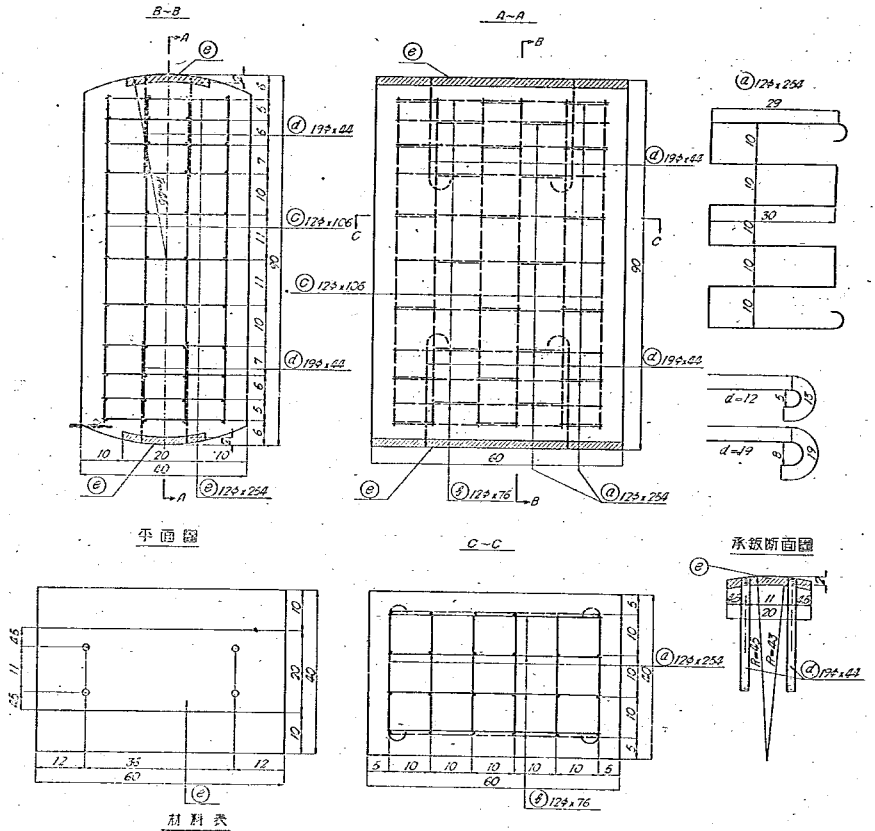
セメントは三河セメント會社製の普通ポルトランドセメント（木造倉庫內に約 80 日間貯藏せるもの）を使用した．

砂は愛知縣矢作川產 2.5 mm 以下，比重 2.61，單位容積重量 1,500 kg/m³，空隙率 42.53％，粗粒率 2.73 のもの，砂利は供試體Ⅰ及びⅢに於ては三重縣宮川產 25 mm 以下，比重 2.62，單位容積重量 1,673 kg/m³，空隙率 36.15％，粗粒率 6.91 のもの，供試體Ⅱに於ては愛知縣豐川產 25 mm 以下，比重 2.50，單位容積重量 1,537 kg/m³，空隙率 38.52％，粗粒率 6.92 のものを使用した．

2. 混 合

混合には 7 切錬りバツチミキサを使用した．配合は容積比 1：1.5：3，水セメント比はスランプ 5～6 cm を

圖—4　鐵筋コンクリートロッカー構造圖



符号	數量	長さ(mm)	員数	単重量(kg)	合重量(kg)	摘要
ⓐ	12	254	11	0.559	24.811	
ⓑ	12	76	44	0.939	23.695	
ⓒ	12	106	22	0.930	22.591	
ⓓ	19	44	8	2.230	7.850	ボールト
ⓔ	25	2460	2		63.456	承鈑
合計					184.005	

1:5:3コンクリート	40×60×65 = 0.204 m³
鉄筋ノ重量	77.097 kg
鉄筋ノ容積	0.0771/7.85 = 0.0098 m³
鉄筋化	0.0098/0.204 = 0.048 (容積比)

標準として $\frac{W}{C}$ =50％ とした (混和水の温度 22°C). 各供試體とも，コンクリートは 2 練りに分けて練り，材料投入の順序は，砂とセメントを同時に投入し，水量の半分を加へてから砂利を入れ，更に殘りの水を加へた．混合時間は材料を全部投入せる後 2 分間とした．

3. 填　　充

各供試體共，兩端接觸面が鉛直に立つ如く型枠を組立て，特に兩端接觸面に偏倚を生ぜざる樣十分注意した．鐵筋が非常に複雜してゐるので，コンクリートを數層に分つて填充し，直徑 12 mm 及び 6 mm の鐵棒にて十

分突固めを行ふと同時に，型枠外部より Viber Co. A 型振動機を併用して，鐵筋の周圍，型枠の隅々へコンクリートの行き亘りを良好ならしめた．

尙，ミキサの各練りより，コンクリート壓縮強度試驗標準供試體を 2 箇宛製作した．

寫眞—1（卷末）は供試驗Ⅰの鐵筋を組立てたものである．

4. 養　　生

コンクリート塡充後，濕筵を以て被覆し，隨時散水して常に濕潤狀態に保たしめ，2 週間後側面の型枠のみを除去し，その後も同樣な養生を續けた．3 週間後トラックにて當試驗所實驗室內に搬入したが，その後も材齡 5 週に至るまで常に濕潤狀態に保つて養生を續けた．

壓縮強度試驗用標準供試體は，12～22°C の水中にて養生し，當試驗所に搬入後は標準養生水槽中に入れて養生を行つた．

IV. 載　荷　試　驗

試驗機は M. A. N. 油壓式 1,000 ton 壓縮試驗機を使用し，載荷前供試體の軸を完全に鉛直にして，漸次荷重を增し，各面に於ける初龜裂の發生竝びに龜裂進行狀態を觀察しつゝ，破壞狀態に達して荷重の上昇が止むまで載荷を續けた．

尙，設計荷重に對する安全率の基準となるべき荷重を見出さんがために，撓み測定器（Rectus. $\frac{1}{100}$ mm 讀み）を取付けて，供試體の對稱斷面に於ける鉛直，水平兩方向の總變形量を測定した．

供試體コンクリート塡充の際製作した壓縮強度試驗標準供試體（直徑 15 cm，高 30 cm）は材齡 66 日にて試驗したが，その結果は表—2 の如くである．强度が甚だ不均等であるのは，製作者の不馴れによるものであるが，大體に於て普通の强度に達してゐる．

表—2　使用コンクリートの壓縮强度

ロツカー供試體	標準供試體番號	スランプ (cm)	單位重量 (kg/m³)	壓縮强度 (kg/cm²)	備　考
Ⅰ	1_1	5	2377	226	配合 1：1.5：3 水セメント比50% 製作 14— 10—6 試驗 14— 11—11 材齡 66 日 養生温度12～22°C 1_1, 1_2 はミキサの第 1 練りよりとつたもの，2_1, 2_2 は第 2 練りよりとつたもの．
	1_2	5	2343	285	
	2_1	5.5	2343	328	
	2_2	5.5	2365	368	
Ⅱ	1_1	5	2339	283	
	1_2	5	2328	226	
	2_1	9	2294	300	
	2_2	9	2301	294	
Ⅲ	1_1	6	2347	226	
	1_2	6	2347	311	
	2_1	3	2369	351	
	2_2	3	2377	379	

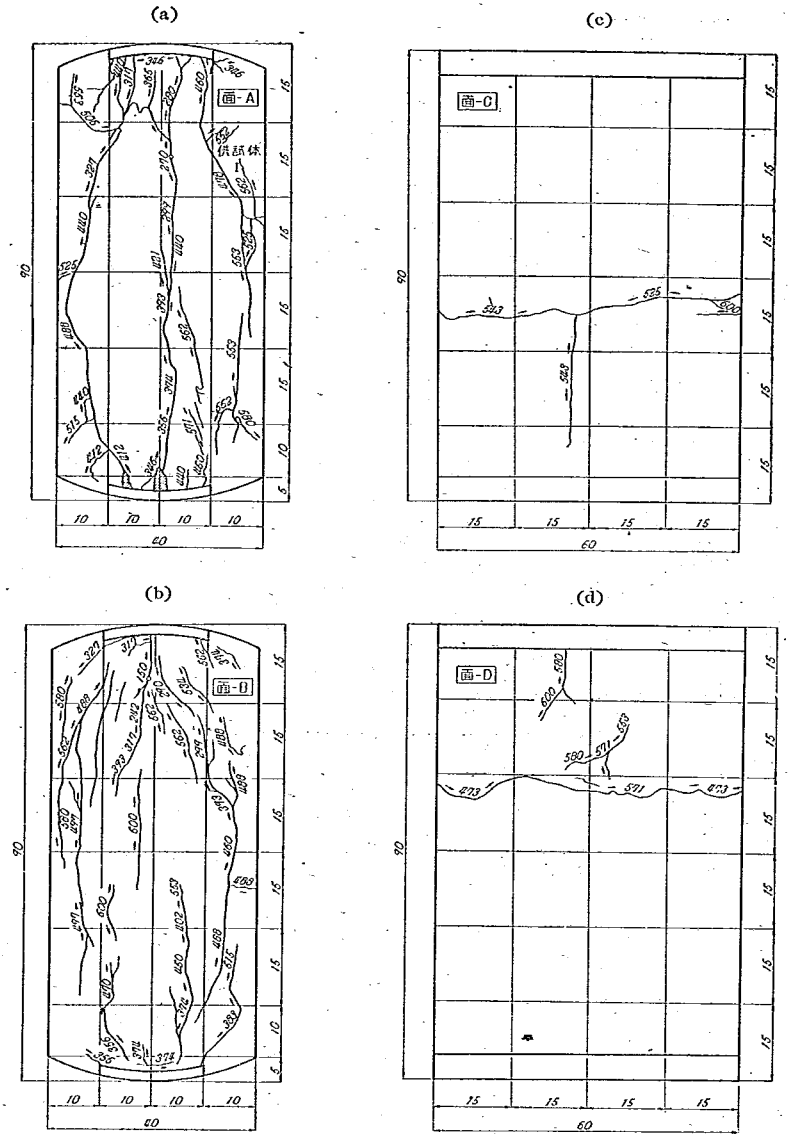
ロツカーの各供試體に就き載荷試驗を行つた結果は次の如くである．

1. 供試驗Ⅰ（試驗日 14—12—13，材齡 68 日）

A 面（コンクリート塡充の際の上面）にては 270 ton，B 面（コンクリート塡充の際の下面）にては 150 ton

圖—5 供 試 體 I の 龜 裂 狀 態

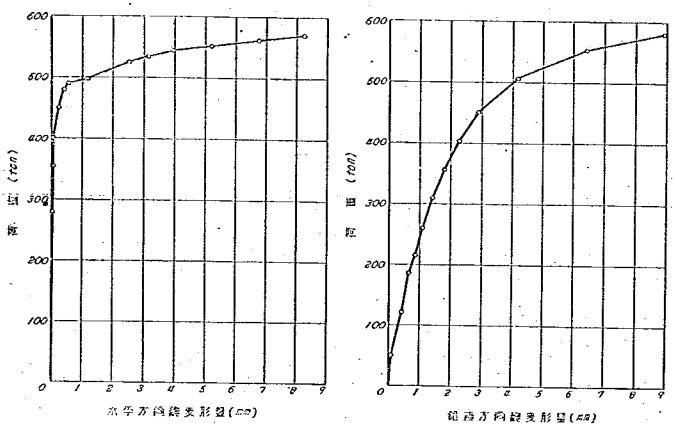
(○は初龜裂發生箇所を示す)



にて毛狀龜裂を認めた．その後の龜裂進行狀態は圖—5 に示す如くである．破壞荷重は 603 ton であつた．

荷重と對稱斷面に於ける鉛直水平兩方向の總變形量との關係は，圖—6 の如くである．之より見るに，約 490 ton にて變形量が急激に增大してゐる．

圖—6 供試體Ⅰに於ける荷重と總變形量との關係



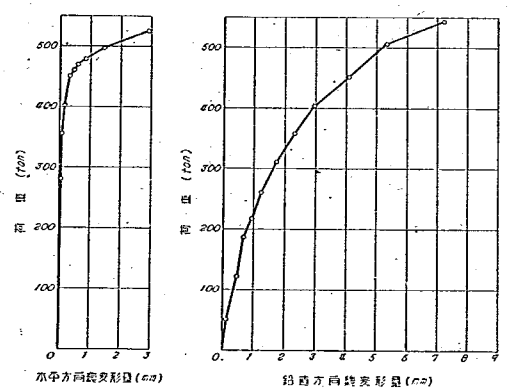
寫眞—2（卷末）は載荷前の供試體，寫眞—3（卷末）は破壞後の狀態である．

2. 供試體 II（試驗日 14—12—14，材齡 69 日）

A 面（コンクリート塡充の際の上面）にては 224 ton，B 面（コンクリート塡充の際の下面）にては 253 ton にて毛狀龜裂を認めた．その後の龜裂進行狀態は圖—7 に示す如くで，破壞荷重は 585 ton であつた．

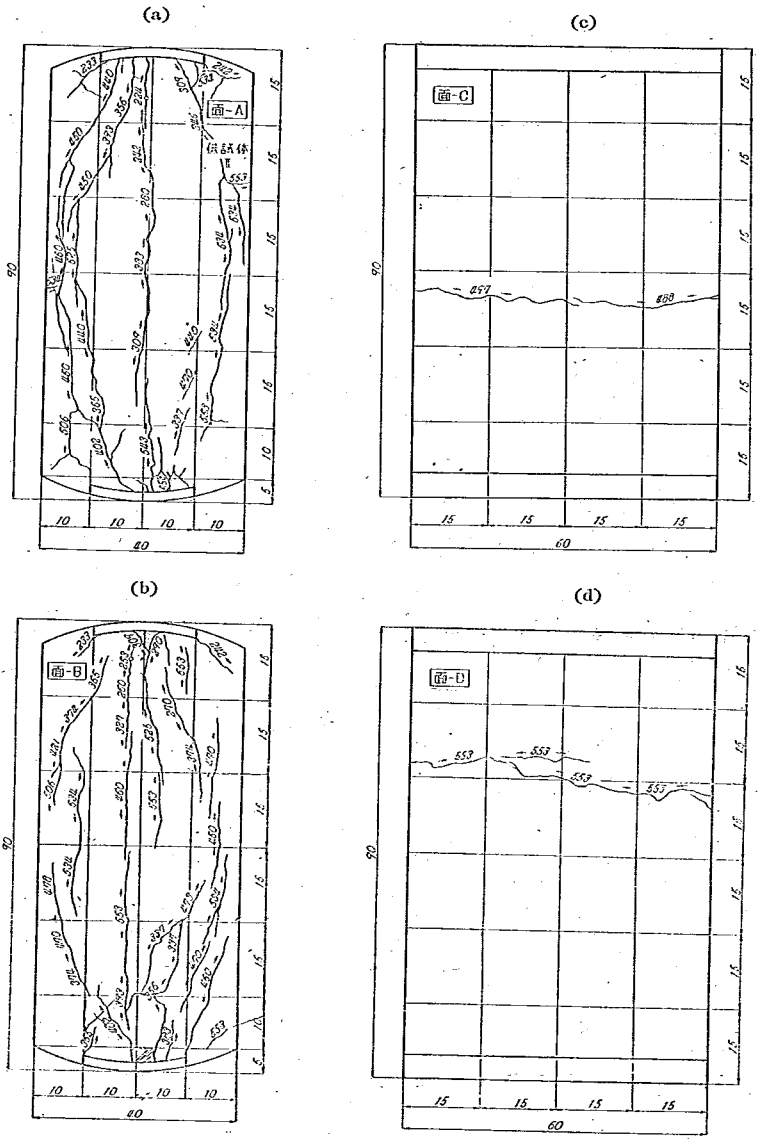
荷重と對稱斷面に於ける鉛直水平兩方向の總變形量との關係は圖—8 に示す如くである．之より見るに約 450 ton にて變形量が急激に增大してゐる．

圖—8 供試體Ⅱに於ける荷重と總變形量との關係



図—7 供試體Ⅱの龜裂狀態

（○は初龜裂發生箇所を示す）



寫眞—4（卷末）は載荷前の供試體，寫眞—5（卷末）は破壞後の狀態である．

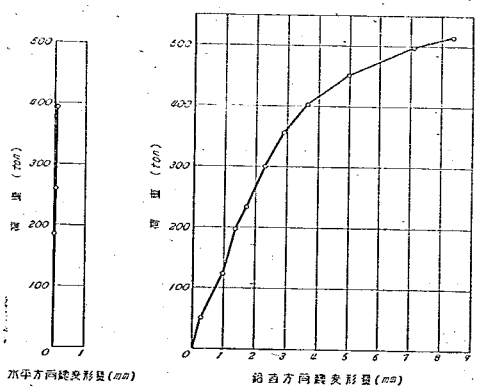
3. 供試體 III（試驗日 14—12—12，材齡 67 日）

供試體Ⅲは接觸面に承鈑を有しないものである．

A 面（コンクリート填充の際の上面），B 面（コンクリート填充の際の下面）共に 233 ton にて毛狀龜裂を生じた．その後の龜裂進行狀態は圖—9 に示す如くで，破壞荷重は 563 ton であつた．

荷重と對稱斷面に於ける鉛直水平兩方向の總變形量との關係は圖—10 に示す如くで，水平方向の變形は測定器の故障のため途中までしか測れなかつたが，約 400 ton にて變形量が急激に增大するのを認めた．

圖—10 供試體Ⅲに於ける荷重と總變形量との關係



寫眞—6（卷末）は載荷前の供試體，寫眞—7（卷末）は破壞後の狀態である．

V. 設計荷重に對する安全率

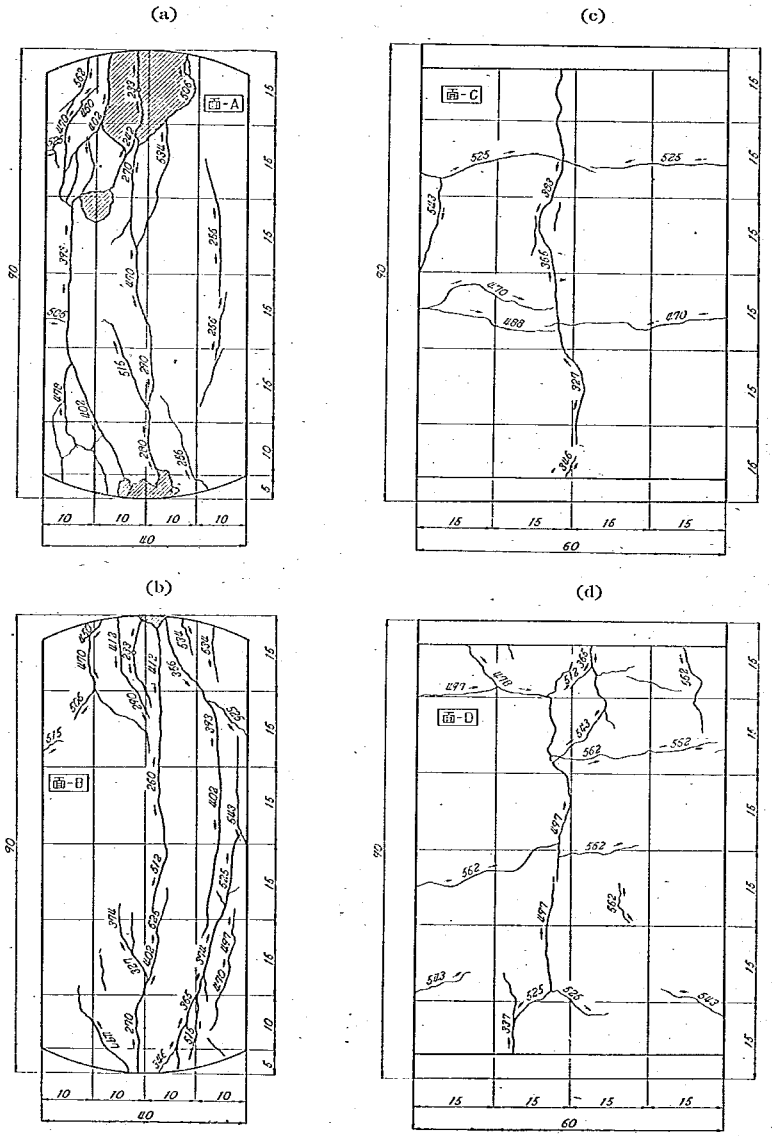
載荷試驗結果より，龜裂荷重及び破壞荷重，並びに之等の設計荷重 100 ton に對する倍率を求むれば表—3 の如くになる．

表—3 龜裂荷重及び破壞荷重並びに之等の設計荷重に對する倍率

供試體	面	龜裂荷重 (ton)	倍率	破壞荷重 (ton)	倍率
I	A	270	2.7	603	6.0
	B	150	1.5		
II	A	224	2.2	585	5.9
	B	253	2.5		
III	A	233	2.3	563	5.6
	B	233	2.3		

圖—9 供 試 體 Ⅲ の 龜 裂 狀 態

(○は初龜裂發生箇所を示す)



併しながら，ロツカーの安全率は龜裂荷重を基準とすべきものでもなく，又破壞荷重を基準とすべきでもない．卽ち安全率の基準としては，變形量の急激に增大するときの荷重をとるのが，妥當であると考へる．

今この變形量の急激に增大せるときの荷重を基準として，安全率を求めるときは，表—4 の如くになる．又その荷重の際の總變形量は表—4 の右の欄の如くである．

表—4 設計荷重に對する安全率

供試體	變形量が急激に增大せるときの荷重 (ton)	安全率	總變形量 (mm)	
			鉛直	水平
Ⅰ	490	4.9	3.8	0.5
Ⅱ	450	4.5	4.0	0.3
Ⅲ	400	4.0	3.6	0.1

卽ち何れも設計荷重に對し 4.0 以上の安全率を有してゐるが，ⅡはⅢより 13％，ⅠはⅢより 23％大なる安全率を有してゐる．

VI. 接觸面承鈑の影響

同じ材料を使用した供試體ⅠとⅢ（Ⅰは承鈑を有するもの，Ⅲは承鈑を省略せるもの）を比較してみる．

ⅠはⅢに比し，龜裂荷重は增大してゐないが，破壞荷重は僅か增大してゐる．龜裂荷重が增大してゐないのは，Ⅲの方がむしろⅠよりも，コンクリート填充の際，接觸面に近い部分のコンクリートの突固めが容易に行ひ得ることによるのである．

併し，變形量が急激に增大せるときの荷重卽ち安全率の基準と考へらるべき荷重に就いて比較してみると，ⅠはⅢよりも 23％の增加を示してゐる．又圖—6 と圖—10 とを比較するに，同じ荷重に對してⅢはⅠよりも鉛直方向の總變形量が非常に大である．例へば，荷重 300 ton の際に，Ⅰでは 1.4 mm であるのに對してⅢでは 2.3 mm，荷重 400 ton のときⅠでは 2.3 mm であるがⅢでは 3.6 mm となつてゐる．

之は，接觸面に承鈑を使用しない場合には，接觸面附近のコンクリートが，承鈑を使用する場合よりも大きな壓搾を蒙むるためである．

以上の如く接觸面の承鈑は，安全率を高め，變形量を減ずるものであるから，接觸面には必らず承鈑を使用すべきである．

VII. 結　　言

模型實驗の結果を實際に應用して，荷重 100 ton に耐ふべき鐵筋コンクリートロツカーを設計し，之に就き 3 箇の供試體を製作して載荷試驗を行つた結果を要約すれば次の如くである．

1. Bortsch の方法によつて計算した，水平方向引張鐵筋を Bügel 形に使用せる鐵筋コンクリートロツカー（圖—4 構造圖 參照）は，製作に十分の注意を拂へば，十分の强さを有するものである．之によつて最に行つた模型實驗の結果が實證された．

2. 安全率の基準としては，對稱斷面に於ける總變形量が急激に增大するときの荷重をとるのが妥當であると考へ，荷重に應ずる鉛直水平兩方向の總變形量を測定したが，之を基準として求めた安全率は，Ⅰでは 4.9，Ⅱ

では 4.5, Ⅲでは 4.0 であり何れも 4.0 以上の安全率を有する.

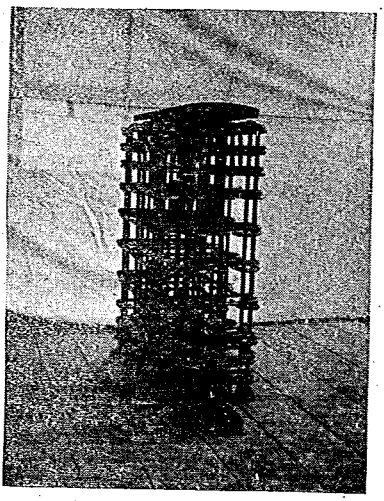
3. 接觸面承鈑の影響についてⅠとⅢとを比較するに, 承鈑の使用によつて安全率は 23％の增加を示してゐる. 又承鈑は接觸面附近のコンクリートの壓壞を防ぎ, 從つて變形量を減ずる. かゝる理由より, 接觸面には必らず承鈑を使用すべきである.

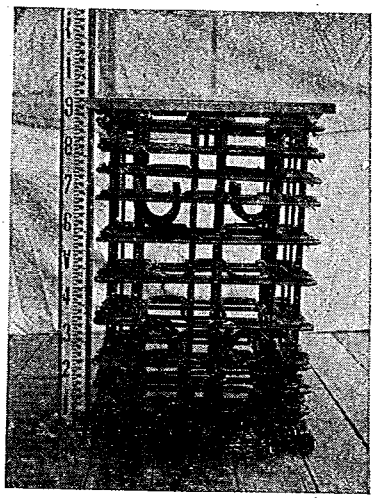
4. 使用骨材の異なるものⅠとⅡとを比較するに, Ⅰの方が僅かに强くなつてゐるが, 大差はない.

この設計に於ては Bortsch の方法による水平方向引張應力度の最大値を 21.25 kg/cm² に止めたが, この値があまり大きくなるときは, ロツカーの寸法を大にしてこの値を減じなければならない.

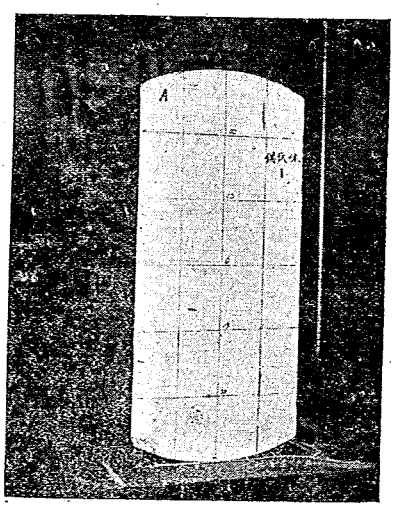
尙この外彙の報告に於て述べた設計施工に際しての注意事項に十分考慮を拂へば, 强さの十分大なるロツカーをつくることが出來る.

寫眞—1 組立て終つた鐵筋

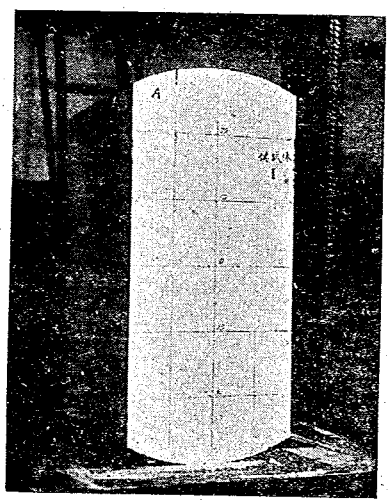




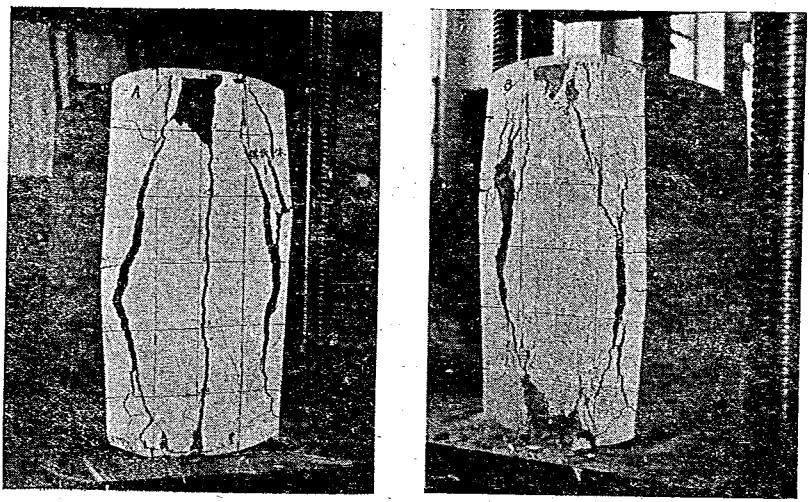
寫眞—2 載荷前の供試體 I



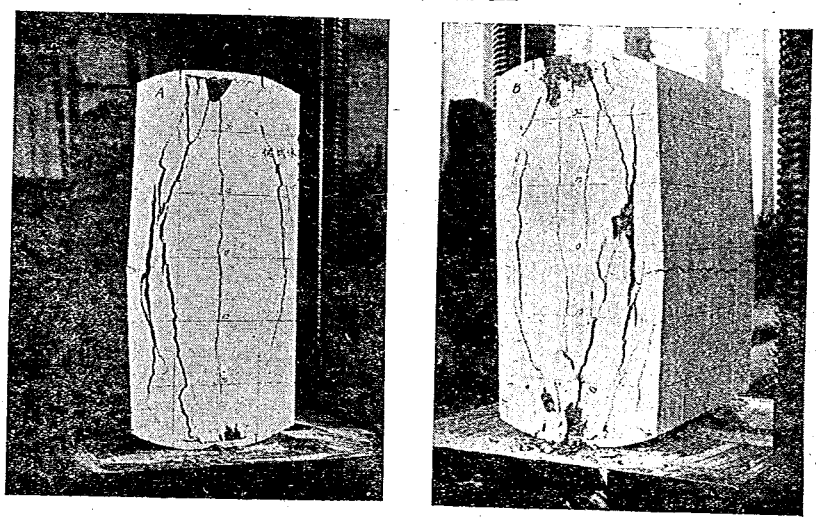
寫眞—4 載荷前の供試體II



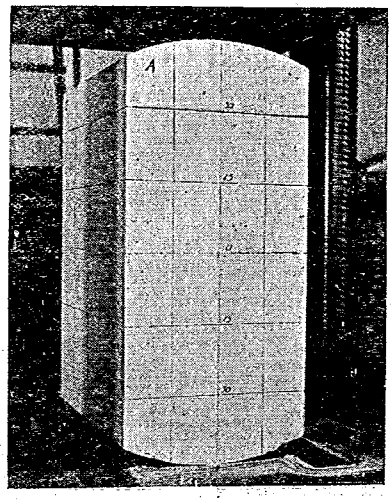
寫眞—3　破壊後の供試體 I



寫眞—5　破壊後の供試體 II



寫眞—6 載荷前の供試體III



寫眞—7 破壞後の供試體III

自動車重量係數に關する調査

內務技師　兵　藤　直　吉

[1] 重量係數の定義及成立基礎

重量係數といふ語は昭和 3 年に我國で初めて行はれた道路交通調査の際に造られた語であつて各種の車輛の路面に及ぼす影響の比である．昭和 3 年には二輪及四輪の牛馬車（盈）と他の車輛との比であつたが次の昭和 8 年の調査の際には改めて乘用自動車（盈）に對する他の車輛の比を用ゐた．重量係數は次式によつて定められてゐる．

$$w=\frac{E_w}{E_{0w}}=\frac{PV^2fk}{P_0V_0^2f_0k_0}$$

茲で　w 重量係數，E_w 車輛の路面に及ぼす影響，P 路面に最大壓力を及ぼす 1 車輪の重量，V 車輛の速度，f 撥バネの强さ，k タイヤの彈率であつてタイヤの接地面積に逆比例するもの．P_0, V_0^2, f_0, k_0 は乘用自動車に對する之らの數値である．

車輛の路面に及ぼす影響は車輪の重量，速度の 2 乘，撥バネの强さ及タイヤの彈率に比例するものと假定してあるが重量係數は夫々の値を知らなくても相互間の比が知れれば差支ない．

昭和 3 年及 8 年に定められた重量係數を次に列記する．

種類	昭和 3 年係數	昭和 3 年係數
人力車	0.02	0.01
自轉車	0.02	0.01
荷車 空	0.2	0.13
荷車 盈	0.4	0.27
乘合馬車	0.4	0.27
牛馬車（二輪四輪共） 空	0.5	0.33
牛馬車（二輪四輪共） 盈	1	0.67
自動自轉車	0.4	0.27
乘用自動車	1.5	1
乘合自動車	2.5	1.67
貨物自動車 空	1.7	1.13
貨物自動車 盈	3.5	2.33
鐵道省營自動車	—	3.33

而してこの重量係數の數値の基礎は次の數値から出來てゐる．*

種類	總重量 kg	P 一輪重量 kg	V 速度 km/h	f スプリングの强さ（比）	k タイヤ接地面積の逆數
人力車	160	80	8	1	0.008
自轉車	80	40	12	1	0.008
荷車	800	400	3	4	0.06
乘合馬車	1200	400	10	1	0.02
二輪馬車	1700	850	4	4	0.04
四輪馬車	2400	800	4	4	0.04
自動自轉車	160	80	35	1	0.008
乘用自動車	1300	490	35	1	0.005
乘合自動車	3000	1130	30	1	0.005
貨物自動車	4000	1500	20	2	0.006

* 道路の改良第 10 卷　第 8 號（昭和 3 年）38 頁參照．

これらの數値を現在の車輛につき求めて見る.

[2] 乘用自動車の重量

國產乘用自動車は自動車製造事業法が制定せられてから益々隆盛になつた. 現今 (昭和 12 年) 製造せられてゐる乘用車の寸法, 重量は表—1 の通りである.

表—1 國產乘用自動車重量及寸法

名稱	定員	自重 kg	全長 mm	全幅 mm
アツタ	7	1800	4840	1790
六甲 KP 25 A	—	2250 (總)	4860	1860
トヨタ	7	1500	4737	1730
スミダ HA	7	2200	5195	1840
ニツサン	7	1410	4750	1720

國產乘用車の自重は 1400～1800 kg の範圍である.

我國で用ゐられてゐる外國製又は外國系會社の自動車は勿論米國のものが多くその內でも數の上から言へばフオード, シボレー及クライスラーが斷然多い.

米國製自動車 66 種に就て重量を調査した結果は表—2 の通りである. *

表—2 米國製乘用自動車の重量に依る分類

重量 kg	車の種類	率 %
500 以上	1	1.5
600 以上 1000 未滿	0	0
1000 以上	1	1.5
1100 〃	1	1.5
1200 〃	6	9.1
1300 〃	6	9.1
1400 〃	7	10.6
1500 〃	5	7.6
1600 〃	5	7.6
1700 〃	4	6.1
1800 〃	5	7.6
1900 〃	4	6.1
2000 〃	6	9.1
2100 〃	4	6.1
2200 〃	4	6.1
2300 〃	3	4.9
2400 〃	2	3.0
2500 〃	2	3.0
計	66	100.0

フオード 平均約 1290 kg　　クライスラー 平均約 1640 kg

シボレー 〃 1390 〃

* 東京工業大學學報 第 2 卷 第 7 號 (昭和 8 年) の資料より分類す.

卽 1400 kg 級 (1400～1500 kg) が最も多く 10％ を超えてゐる.

英國製乘用自動車 74 種 * に就て調査した結果は 1400 kg 級が最多で 16％ あつた. 歐洲大陸製のものに就ては 1300 kg 級が 16％, 1400 kg 級が 12％, 1500 kg 級が 13％ あつて外國製乘用自動車の自重は大體 1400 kg が最も多いことがわかる.

以上の事實から國產乘用自動車は外國製自動車に比して目方が重い事がわかるがこれは工作が上手になればもつと輕く製作し得る事であるから一般乘用自動車の自重を 1400 kg と決定する. 盈車重量は乘員の數によりて違ふから補助席まで詰め込んで 7 人乘用の場合を基準とする.

人の荷重は 1 人に就き 55 kg とするのが普通であるから概數を採つて總重量を 1800 kg とする.

乘用自動車の前輪及後輪の荷重の分布は盈車の場合は大體前後輪平等にかゝるから 1 車輪當り荷重は 450 kg になる. 表示すれば次の通りである.

乘用自動車重量標準

空車重量	(自重) kg	1400
盈車重量	(總重量) kg	1800
後軸對前軸荷重比		1 : 1
一車輪當り荷重 kg		450

[3] 貨物自動車の重量

國產貨物自動車の重量寸法は表—3 の通りである.

表—3 國產貨物自動車重量寸法

名稱	自重 kg	積載定量 kg	全長 mm	全幅 mm
六甲 KT 15 A	1980	1500	5130	1800
六甲 KT 10	1300	1000	5000	1750
いすゞ TX 35	1870	2530	5120	1800
いすゞ TX 40	2130	2000	5680	1950
トヨタ 141 ½″	1713	1500	6020	1560
トヨタ 131″ (低床式)	1663	1500	5726	1562
ニッサン			5512	2032

我國で最も多く使用せられてゐる外國系自動車は米國のフオード及シボレーである. 兩者ともその自重は 1275～2400 kg である.

貨物自動車の重量の資料として昭和 12 年 5 月千葉縣に於て調査したものと同年 7 月大阪府に於て調査したものがある. 外に昭和 9 年に於ける東京附近の調査と內務省土木局にて集輯せられた最大重量車輛の資料とを加へて貨物自動車の總重量, 後輪重量及自重の傾向を一覽表に作つたのが次のものである (表—4～6).

表—4～6 から貨物自動車の總重量は 5.5 t 級 (5500～6000 kg) が最も多く次に 5 t 級 (5000～5500 kg) が多いことがわかる. 依て貨物自動車の盈重量を 5500 kg に定める.

---

* 東京工業大學學報 第 2 卷 第 7 號 (昭和 8 年) の資料より分類す.

表—4 積載貨物自動車重量調

總重量	東京[1] %	千葉[2] %	大阪[3] %	內務省土木局[4] %	全體 %
2. t 以上	0.6				0.1
2.5 〃	1.8		0.4		0.5
3. 〃	6.0	0.5	1.3		1.8
3.5 〃	7.2	2.1	1.9		2.6
4. 〃	16.9	1.6	8.3	6.1	8.1
4.5 〃	16.3	2.1	11.0	5.4	9.3
5. 〃	17.5	4.8	13.0	6.1	11.2
5.5 〃	13.3	7.4	13.8	6.9	11.5
6. 〃	6.6	7.4	12.6	6.9	9.7
6.5 〃	1.8	10.6	11.3	8.4	9.2
7. 〃	3.0	9.5	12.0	7.6	9.3
7.5 〃	3.0	10.6	7.1	12.2	7.8
8. 〃	1.8	11.6	4.1	17.6	7.1
8.5 〃	3.0	6.9	1.5	8.4	3.8
9. 〃	0.6	8.5	0.9	1.5	2.4
9.5 〃	0	7.4	0.2	3.1	2.0
10. 〃	0	2.6	0.2	2.3	1.0
10.5 〃	0.6	2.6	0.2	3.8	1.3
11. 〃		1.6		0.7	0.4
11.5 〃		2.1		0	0.4
12. 〃				0	0
12.5 〃				1.5	0.2
13. 〃				0.7	0.1
13.5 〃				0.7	0.1
計	100.0	99.9	100.0	99.9	100.0
調査總數(臺)	166	189	461	131	947

備考 1) 內務省土木局小澤技師の東京京濱國道その他 8 地點の綜合（土木學會誌第 20 卷第 7 號）
2) 千葉縣土木課に於て昭和 12 年 5 月，國道及主要府縣道調査， 3) 大阪府土木部道路課に於て昭和 12 年 7 月調査，4) 內務省土木局大石技師の調査にかゝるバス及トラック重量.

表—5 積載貨物自動車後輪重量調

後輪重量（一輪）	東京 %	千葉 %	大阪 %	全體 %
0.6 t 以上	0.6			0.1
0.8 〃	1.8		0.2	0.5
1. 〃	1.8	0.5	0.4	0.7
1.2 〃	8.4	2.6	0.7	2.7
1.4 〃	7.2	1.1	2.6	3.2
1.6 〃	16.8	0.5	8.0	8.1
1.8 〃	14.2	2.1	6.1	6.9
2. 〃	16.2	5.3	11.7	11.1
2.2 〃	11.4	5.8	10.4	9.6
2.4 〃	7.8	9.0	11.7	10.3
2.6 〃	1.2	9.0	11.7	8.9
2.8 〃	3.0	10.6	10.6	9.1
3. 〃	3.7	6.9	7.4	6.5
3.2 〃	3.0	14.2	8.3	8.6
3.4 〃	2.4	5.8	4.5	4.4
3.6 〃	0	5.3	2.2	2.4
3.8 〃	0	5.8	1.3	2.1
4. 〃	0	4.8	1.3	1.8
4.2 〃	0.6	3.2	0.7	1.2
4.4 〃		4.2	0	1.0
4.6 〃		1.6	0.2	0.5
4.8 〃		1.6		0.3
計	100.0	99.9	100.0	100.0
調査總數(臺)	167	189	461	817

表—6 貨物自動車の重量比較

地方別	比較度数の多い自重 t	最多自重 t	最大自重の比較度数%	平均自重 kg
千葉	2.6～3.0	2.6	30.3	2650
大阪	2.6～2.8	2.6	25.0	2620
東京	1.6～2.2	1.6	21.1	1950
内務省土木局	2.4～3.2	2.8 3.0	17.5 17.5	2930
綜合	2.6～3.0	2.6	21.1	2560

後輪重量は千葉縣では制限超過の積載車輛をねらつた關係から重い車が多く 3.2 t が 14% もあるが大阪府では 2 t から 2.6 t 級が夫々 11% を超えてゐる.

後輪對前輪重量の比は千葉縣では 4.4, 大阪府では 3.4, 東京では 3.67 で從來の假定の 3 : 1 比は既に破られて今は 4 : 1 と考へる事が適當のやうである.

貨物自動車の盈車重量を 5500 kg とすれば後輪重量は 2200 kg となる. 後輪が複輪の場合は荷重は等分に分配せらるゝものと假定する.

貨物自動車の重量に關する數字を表示すれば次の如くなる.

貨物自動車重量標準

空車重量	kg	2600
盈車重量	kg	5500
最大荷重に於ける一輪重量	kg	2200
複輪の場合一輪につき	kg	1100
後軸對前軸荷重比		4 : 1

[4] 乘合自動車の重量

國產乘合自動車車輛の重量寸法は次の通りである.

表—7 國產乘合自動車の重量寸法

名稱	自重 kg	定員	全長 mm	全幅 mm
いすゞ BX 40	2180	20	5980	1950
スミダ B	2900	25 (座席)	6990	2190
トヨタバス	1700 (シヤシ)	—	—	—
六甲 KB 20 B	2150	15	6150	1850
ふそう B 46	3500	22 (座席)	6960	2190
ふそう BS 40	2450	18 (座席)	5994	1860

現今我國にて用ゐられてゐる乘合自動車の種類に就ては調査資料がないから不明であるが次第に大型になる傾向のある事は事實で殊に交通取締法が實施せらるれば大型に向つて行く事も想像せられる.

20 人定員の車を標準とすることが適當であらうと考へ 2 種の「ふそう」と「いすゞ」の平均値を採りその自重を 2640 kg とする. 乘車人員は乘務員共 22 人とし便宜上盈重量を 3900 kg とする. 後輪對前輪重量比は從來通り 3 : 1 としタイヤは複輪であるから一輪重量は 730 kg とする.

表示すれば次の通りである.

乘合自動車標準

空車重量	kg	2640
盈車重量	kg	3900
後輪荷重	kg	730 (複輪)
後軸對前軸比		3:1

[5] 鐵道省營自動車

鐵道省に於て使用してゐる旅客自動車は輻員に依つて次に示す A, B 及 C 形の 3 つの形に分れてゐるが標準型は C 形である.

表—8 鐵道省營自動車の重量寸法

種類	自重 kg	定員 人	全長 mm	全幅 mm	最大總重量 t
A 形いすゞ	3500	15	6207	1800	4.3
A 形六甲	3645	15	6207	1800	4.5
B 形いすゞ	4080	19	6838	2100	5.1
B 形六甲	4235	19	6838	2100	5.3
C 形スミダ	5454	35	7490	2200	7.4
C 形ふそう	5610	35	7490	2200	7.5
C 形ちよだ	5645	35	7490	2200	7.6

C形自動車 3 種の平均自重に乘員 35 人の荷重を添加すれば 7500 kg になるから省營バスの盈重量をそれに採る. 省營バスは設計上後軸對前軸の荷重比は盈車の場合に 7 : 3 になるやうにしある. 後輪重量は 2620 kg で複輪であるから一輪當り 1310 kg になる. 表示にすれば次の通りである.

省營自動車標準

空車重量	kg	5600
盈車重量	kg	7500
後輪一輪の荷重	kg	1310 (複輪)
後軸對前軸比		7 : 3

[6] 自動車の速度

法規に依る最高速度を採る. 乘用車は 50 km/h, 貨物及乘合車等の△印をつける車輛は 35 km/h とする. 前回の調査と比較して速度の 2 乘比は貨物自動車に在りては 50% 增, 乘合自動車にありては 33 %減になつてゐる. (前回調査では速度は乘用車 35, 乘合車 30, 貨物車 20 km/h であつた.)

[7] 自動車の撓バネの强さ

自動車の撓バネの强さは比を以て表はしてゐる. 乘用車のバネに對する他の車輛のバネの强さの比を用ゐてゐる.

撓バネの强さは 1 mm の撓みを生ずる荷重の大さで表はす事が出來る. 土木試驗所にて調査した 2, 3 の乘用

車の撓バネの寸法と撓み率は 表—9 の通りである.

鐵道省營バスの撓バネは鐵道省調査の資料から集めたものが 表—10 の通りである.

省營自動車の撓バネの強さは 表—10 の通りであつて又省營バスの標準型は前述の通り C 形即ち幅 2.2 m の車輛であるが C 形でも製作所に依りて撓バネの強さは相當の開きがあるから大體の値をおさへて 18 kg/mm の強さを代表値とすれば乘用自動車の撓バネに對しては 3 倍の強さとなる.

表—9 乘用自動車の撓バネの寸法と撓み率

自動車別	前バネ寸法 幅×厚×枚數—渉り mm	後バネ寸法 幅×厚×枚數—渉り mm	前バネ撓み率 kg/mm	後バネ撓み率 kg/mm
ビュイック	$50.8\times\begin{Bmatrix}6.35\times1\\5.56\times2\\4.76\times9\end{Bmatrix}-960$	$50.8\times\begin{Bmatrix}7.94\times1\\7.14\times2\\6.35\times4\end{Bmatrix}-1388$	7.77	2.55
ハドスン 29 型	不明	不明	4.70	2.40
トヨタ 36 年	$50\times6.4\times9-1100$	$44\times\begin{Bmatrix}6.4\times4\\5.5\times5\end{Bmatrix}-1350$	5.56	2.34
		平均値	6.01	2.43

表—10 省營自動車の撓バネの寸法と撓み率

自動車別	前バネ寸法 mm	後バネ寸法 mm	前バネ撓み率 kg/mm	後バネ撓み率 kg/mm
A 形 いすゞ	$70\times7\times7-1000$	$70\times9\times10-1250$	11.0	16.5
A 形 六甲				
B 形 いすゞ	$70\times7\times9-1000$	$70\times9\times13-1500$	13.9	12.3
B 形 六甲				
C 形 スミダ	$70\times\begin{Bmatrix}8\times3\\6.3\times8\end{Bmatrix}-1120$	$76\times9.5\times12-1525$	11.2	15.6
C 形 ふそう	$76\times\begin{Bmatrix}9\times3\\7\times10\end{Bmatrix}-1100$	$76\times\begin{Bmatrix}11\times4\\9\times12\end{Bmatrix}-1500$	20.4	24.0
C 形 ちよだ	$69.85\times7.94\times13-1150$	$82.55\times11.1\times14-1520$	17.8	17.8
		AB 形平均		14.4
		BC 形平均		17.7
		ABC 形平均		17.2
		C 形平均		19.1

乘合自動車及貨物自動車に對しては撓バネの強さを調査した資料がないが寸法表から省營自動車の或るものと全く同一寸法のもの又は類似した寸法のものがあるから大體の値は省營自動車撓バネ試驗の結果から推定せられる.

國產乘合自動車及貨物自動車の撓バネの寸法は 表—11 及 12 でわかる.

その寸法表より見て乘合「いすゞ」BX 40 及「六甲」KS 20 B の後バネは省營バス B 形「いすゞ」及「六甲」と同一であり, 乘合「ふそう」B 46 の後バネは省營バス C 形「ふそう」に似てゐる. これらの理由から乘合車の撓バネの強さを省營バス同樣に 18 kg/mm とする.

貨物自動車の方も「いすゞ」TX 40 の後バネは省營バス B 形「いすゞ」に似てゐる.「六甲」KT 15 A は

表—11 乗合自動車の撓バネ寸法

自動車別	定員	前バネ寸法 mm	後バネ寸法 mm
いすゞ BX	40 20	$70\times\begin{Bmatrix}9\times1\\7\times8\end{Bmatrix}-1000$	$70\times9\times13-1500$
スミダ R	25 (席)	$76\times\begin{Bmatrix}8\times3\\6.3\times9\end{Bmatrix}-1110$	$76\times\begin{Bmatrix}11\times1\\9.5\times13\end{Bmatrix}-1570$
トヨダバス	—	$45\times8\times9-1014$	$64\times9.5\times14-1773$
六甲 KB 20 B	15	$70\times7\times8-1000$	$70\times9\times13-1500$
ふそう B	46 22 (席)	$76\times\begin{Bmatrix}9\times3\\7\times10\end{Bmatrix}-1110$	$76\times\begin{Bmatrix}11\times5\\9\times12\end{Bmatrix}-1500$
ふそう BS	40 13 (席)	$75\times7\times9-1000$	$75\times7\times15-1500$

表—12 貨物自動車の撓バネ寸法

自動車別	前バネ寸法 mm	後バネ寸法 mm
いすゞ TX 40	$70\times\begin{Bmatrix}9\times1\\7\times8\end{Bmatrix}-1000$	$\begin{cases}主70\times9\times13-1230\\副70\times9\times6-960\end{cases}$
トヨダ 141 ½″	$45\times\begin{Bmatrix}6\times4\\7\times6\\8\times1\end{Bmatrix}-915$	$64\times\begin{Bmatrix}8\times11\\9.5\times4\end{Bmatrix}-1283$
トヨダ 151″	〃	〃
六甲 KT 15 A	$70\times7\times7-1000$	$70\times9\times10-1250$
六甲 KT 10	$44.5\times\begin{Bmatrix}7.2\times1\\6.6\times8\end{Bmatrix}-908$	$63.5\times\begin{Bmatrix}9.7\times3\\7.6\times11\end{Bmatrix}-1220$

省營バス A形「六甲」と同一である．省營バス A形 B形の撓バネの強さを參照して貨物自動車の撓バネの強さを 15 kg/mm と定むれば乘用自動車のバネに對して 2.5 倍の強さとなる．

外國系車輛については資料がないから國產車の資料だけに止める．

以上撓バネの強さについての結果を一覽表にすれば次の通りである．

表—13 撓バネ撓み率の比

	撓み率	比
乘用車バネ	6 kg/mm	1
乘合自動車 省營バス バネ	18 〃	3
貨物自動車バネ	15 〃	2.5

前回の交通調査の際と比較して乘合及省營自動車は 3 倍，貨物自動車は 25 % 增してゐる．

[8] タイヤの彈率

タイヤの彈率はタイヤの接地面積に逆比例するものと假定してある．

タイヤの接地面積は車輛の用途によりて差があるが乘用車は貨物車より大きい．空氣入りタイヤでもバルーンが高壓タイヤより大きい事は勿論である．ソリッドタイヤは次第に少なく特殊のものしか用ゐられない．

接地面積の調査資料は少ないが土木試驗所で調べたものは次の通りである．

車又はタイヤの種類	タイヤ寸法 in	空氣壓 lb/in²	荷重 kg	接地面積 cm²
ビュイク車　前輪	31×4	30	360	155
後輪	〃	35	485	140
ハドスン車　前輪	6.00—19	30	480	217
(バルーン)　後輪	〃	〃	525	277
トヨタ車　後輪	5.50—17	25	500	190
(バルーン)				
ピアスロー車　(貨車)	36×4		1100	95
(ソリッド)				

米國 Bureau of Public Roads 調査の資料に次のものがある.

タイヤ種類	寸法 in	空氣壓 lb/in²	荷重 kg	接地面積 cm²
高壓空氣入	36×6	90	1000	120
			2000	250
〃	36×7	100	1300	160
			2700	300
クッション	36×5		750	100
			1500	145
〃	36×7		1600	190
			3200	275
ソリッド	36×4		750	100
			1500	130
〃	36×6		1600	170
			3200	230

上記の接地面積を面積が荷重に比例するものとして 1200 kg の荷重に對するものに直した結果は次の通りである.

タイヤ種類	寸法 in	荷重 kg	接地面積 cm²
高壓空氣入	36×6	1200	150
〃	36×7	〃	150
クッション	36×5	〃	125
〃	36×7	〃	140
ソリッド	36×4	〃	120
〃	36×6	〃	130

同所で試驗した低壓空氣入タイヤに關する最近の調査資料から 36×8 in タイヤで, 60 lb/in² の空氣壓, 4000 lb の荷重に對して接地面積 64.7 in² が發表せられてゐる. これを 1200 kg 荷重に直せば 276 cm² となる. 又乘合自動車の一輪重量は 730 kg であるからこの荷重に相當する接地面積は 166 cm² になる.

次に英國 Road Research Board の 1936 年の報告書によれば空氣入タイヤにある空氣壓に對する標準荷重を掛けた場合に於て接地面積のうける壓力强度はその空氣壓に略一致する事を實驗の結果として發表しゐる.

此の理論を用ゐて國產タイヤの標準荷重と空氣壓との關係から接地面積を計算から出せば接地面積は次の通りになる.

國産乘用車バルーンタイヤ（空氣壓 28～3.6 lb/in²）

タイヤの寸法			標準荷重 kg	平均接地面積 cm²
4.75—20,	4.75—21,	5.00—19	340～440	172
		5.25—17	355～450	179
5.00—20,	5.25—18,	5.25—19	370～470	187
		5.50—17	380～490	193
5.25—20,	5.50—18,	5.50—19	395～510	202
		6.00—17	405～520	206
	5.25—21,	5.50—20	420～550	216
	6.00—18,	6.00—19	430～570	222
6.00—20,	6.00—21,	6.00—22	465～610	239

國産バスバルーンタイヤ

タイヤの寸法 in	空氣壓 lb/in²	最大荷重 kg	接地面積 cm²
6.00—20	45	630	200
6.50—20	50	745	215
7.00—20	55	860	225
7.50—20	55	950	245
8.25—20	60	1160	275

國産貨物自動車及乘合自動車用タイヤ

タイヤの寸法 in	空氣壓 lb/in²	最大荷重 kg	接地面積 cm²
30×5	80	770	137
34×5	80	880	157
32×6	90	1000	158
36×6	90	1140	180
34×7	100	1270	180
38×7	100	1450	205

以上の資料から乘用車，貨物車及乘合自動車のタイヤの接地面積を次の通りと定める．

種類	接地面積 cm²	その逆數即kとの値
乘用自動車	200	0.005
貨物自動車	175	0.0057
乘合自動車	200	0.005

[9] 重量係數の決定

以上各別に求めた結果を總括して重量係數を算出する．その値は次の通りである．

重 量 係 數 表 $E_w = PV^2 fk$

	重 量 kg	P kg	V km/h	f	k	E_w	重量係數
乘 用 車	1800	450	50	1	0.005	5625	1.00
貨 物 車	5500	1100	35	2.5	0.0057	19210	3.42
乘 合 車	3900	730	35	3	0.005	13400	2.39
省營自動車	7500	1310	35	3	0.005	24000	4.28

昭和 8 年の重量係數と比較すれば次の如くなる.

	新値	昭和8年の數値	比較
乘 用 自 動 車	1	1	
貨 物 自 動 車	3.42	2.33	47 % 增
乘 合 自 動 車	2.39	1.69	41 % 增
省 營 自 動 車	4.28	3.33	29 % 增

新舊重量係數の比較增は貨物自動車に最も大きく乘合自動車之に次ぎ省營自動車最も小さい. この事は道路が改良せられて重交通が增した事, 自動車が大きくなつて積載量の增した事, 乘合自動車の車體が大きくなり又乘客も增した事, 省營自動車は創業時代から他の乘合自動車よりは大きい車を使用してゐるので割合に變化の少ない事實を物語るものである. そして重量係數は今後益々大きくなるものと考へられる.

以上で重量係數の新數値に就て述べた. 資料の不足してゐるものは假定を加へたがこれもあまり無理のない程度に止めた. 而し又後日もつと有力なる資料が手に入れば修正したいと考へる.