土木研究所報告

第八十四号

AEコンクリートに関する実験的研究 (1) …… 山田順治
ランガー橋の振動に関する研究 (2) …… 安部清孝
最近1ケ年間に於ける各種セメントの物理的性質について …… 山田順治
溶解熱法によるアルミン酸石灰塩の水和熱に関する研究 …… 有泉昌
道路の吹溜り防除工法に関する実験的研究 (1)——積雪地方における道路の冬季交通対策—— 谷藤正三
国道4号線道路良好度調査報告 …… 道路研究室
茶臼山地すり防止堰堤に関する研究 …… 福岡正巳

P.510.5
3957

昭和二十七年十一月

建設省土木研究所

所報83号正誤表追加

ランガー橋の振動に関する研究（1）

頁		行	誤	正
6	上より	11	$M=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial y_m}{\partial x^2}\right)$	$M=-EI\frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2}$
6	下より	5	$-\frac{\rho}{A_d\sin\theta}\left(\frac{I}{EF}v+2\frac{udI}{dx}\right)$	$-\frac{\rho}{A_d\sin\theta}\left(\frac{I}{EF}v+2\frac{dI}{dx}\right)$
6	下より	4	$+\frac{HI}{A_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$	$+\frac{nI}{EFA_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$
9	上より	8	$\alpha_3=\frac{l}{HA_d\sin\theta}\left(2\frac{du}{dx}+v\right)$	$\alpha_3=\frac{l}{EA_d\sin\theta}\left(2\frac{du}{dx}+v\right)$
14	下より	1	$\mathfrak{E}_{mn}=\int\sin\gamma_n\xi\sin\gamma_m\xi d\xi=0$	$\mathfrak{E}_{mn}=\int_0^1\sin\gamma_n\xi\sin\gamma_m\xi d\xi=0$

5頁の註 6) は全文以下の如く訂正

6): $y=\eta_m\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi}{T}t$ と仮定し，η_m（ランガー橋の中点における振動変位の時間的最大値）$=0.5$ cm と仮定し，$\frac{\partial y}{\partial x}$ の半周期における時間的平均値を考えれば，$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}\fallingdotseq\frac{\pi\eta_m}{l}\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin\frac{2\pi}{T}tdt\frac{2\eta_m}{l}=\frac{1}{l}$ となる。この η_m $=0.5$ cm は相当安全側の仮定である。

正　誤　表

AE コンクリートに関する実験的研究 （1）

頁	行	誤	正
6	上より 28	グライングー	グライングー
7	表-4 7	43	4.3

ランガー橋の振動に関する研究 （2）

35	上より 10	$\mu \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\Big)y$	$\mu\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\Big)y$
37	〃 11	τ, ν_0 は実正数	ζ, ν_0 は実正数
37	〃 15	行　式	行列式
40	〃 13	$æ_{mn}=\int_0^1(\quad)\sin\gamma_n\xi d\xi$,	$æ_{mn}=\int_0^1(\quad)\sin\gamma_m\xi d\xi$
44	〃 3	$S_m\gamma t$	$S_m\nu t$
48	〃 15	$\ddot{q}_m+hq_m+\Sigma$	$\ddot{q}_m+h\dot{q}_m+\Sigma$
48	〃 20	$\gamma_m^2\gamma_n l\int_0^1\varphi uv\cos\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi d\xi$	$\gamma_m\gamma_n^2 l\int_0^1\varphi uv\cos\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi d\xi$
50	〃 6	$\frac{\partial F(t)}{\partial q_m}$	$\frac{\partial F(t)}{\partial \dot{q}_m}$
50	〃 9	$\frac{2}{\rho}\int\quad\Big)\sin(\nu t+\delta)$	$\frac{2}{\rho}\Big(\int\Big)\sin(\nu t+\delta)$

43 頁 10 行目より 44 頁 9 行目までの S_{in} $\gamma_n\xi$ 中のγ_n 以外の γ_n はすべて γ_n であり，且つ S_n はすべて小文字の s_n である。

最近1ケ年間に於ける各種セメントの物理的性質について

58	図—1	昭和27年3月迄普通セメント27種	昭和27年3月迄普通セメント24種

溶解熱法によるアルミン酸石灰塩の水和熱に関する研究

64	上より 32	0.8921 cal/°C	0.9821 cal/°C
73	〃 34	$\gamma_2 H'_{a5}$	$\gamma_2 H'_a$
77	〃 31	熱伝導量計.	伝導熱量計
78	〃 36	1, 2, 35, 5, 34, 5	1, 2, 3.5, 5, 34, 5
79	〃 21	材分 12 時	材令 12 時
84	〃 5	続きの全発熱量	続き全発熱量

道路の吹溜り防除工法に関する実験的研究 (1)

——積雪地方における道路の冬季交通対策——

頁	行	誤	正
87	下から4	・偏風壁・	・偏風柵(又は吹抜け柵)・
90	下から4	(第1章 §I. 参考文献参照)	(参考文献参照)
91	下から1 (1.1.2)	$R_\phi \equiv \frac{V \cdot L}{\nu}$ (=const.)	$R_\phi \equiv \frac{V \cdot L}{\hat{\nu}}$ (=const.)
92	下から12 (1.1.16)	$\hat{\nu}_1 = 1464 \times 10^{-1} c.g.s.$	$\hat{\nu}_1 = 1.464 \times 10^{-1} c.g.s.$
94	下から14	§2. —— 参照	削　除
98	上から12 (2.3.6)	$I \equiv \frac{\hat{\sigma}}{V}$	$I \equiv \frac{\hat{\sigma}}{\bar{V}}$
100	下から10 (2.3.18)	$u^2 \equiv \frac{Sv}{f} \equiv \frac{Sv}{N-1}$	$u^2 \equiv \frac{S_v}{f} \equiv \frac{S_v}{N-1}$
101	下から14 (2.3.22)	$J^2 \equiv \frac{\hat{\sigma}}{\bar{V}^2} = \text{const.}$	$I^2 \equiv \frac{\hat{\sigma}}{\bar{V}^2} = \text{const.}$
101	下から7 (前出2.3.4)	$R_\phi \equiv \frac{\bar{V} \cdot L}{\hat{\nu}} = \text{const.}$	$R_\phi \equiv \frac{V \cdot L}{\hat{\nu}} = \text{const.}$
101	下から2 (前出2.3.22)	$\bar{I}^2 \equiv \frac{\sigma^2}{\bar{V}^2} = \text{const.}$	$\bar{I}^2 \equiv \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{V}^2} = \text{const.}$
102	下から13 (2.3.26)	$H_0: m_0 = V_0 = \nu_1 = m_1$	$H_0: m_0 = \bar{V}_0 = V_1 = m_1$
108	上から13 (8)	$^{(8)}\ _2 = \ _1 - \cdots$	$^{(8)}\ a_2 = a_1 - \cdots$
111	下から12	$\cdots - \frac{\partial k_0}{\partial y_0} \frac{\partial u_0}{\partial}\Big) = 0,$	$\cdots - \frac{\partial k_0}{\partial y_0} \frac{\partial u_0}{\partial x_0}\Big) = 0,$
113	上から1	$,273,16 + t°C,$	$,273.16 + t°C,$
115	上から6	$,273,16 + t°C,$	$,273.16 + t°C,$
116	下から8 (45)	$^{(45)}\Delta T'_0 \geqq 0(10^2, c.g.s.)$	$^{(45)}\Delta T'_0 \geqq O(10^2, c.g.s.)$
117	下から1	$y_0 \cdot x_0 = \cdots$	$\widehat{y_0 \cdot x_0} = \cdots$
119	上から10	$^{(51)}\ \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial t_0} = \cdots$	$^{(51)}\ \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t_0} = \cdots$
119	下から9	$\cdots = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\overline{x_0 \cdot z_0} - \cdots\right.$	$\cdots = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\widehat{x_0 \cdot z_0} - \cdots\right.$
120	上から11	$\overline{x_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'u_0}$	$\widehat{x_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'u_0}$
120	下から11	$\overline{y_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'v_0}$	$\widehat{y_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'v_0}$

頁	行	誤	正
121	上から12	$\rho_0 \cdot \bar{u}_0\bar{v} \cdot {}_0+\cdots$	$\rho_0 \cdot \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0+\cdots$
121	下から8	$\equiv -\rho_0 \cdot \sigma^0{}_{u0}$,	$\equiv -\rho_0 \cdot \sigma^2{}_{u0}$,
121	下から7	$\cdots -\rho_0 \frac{I}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\bar{u}_0)(v_{0i}-\bar{}_0)$	$\cdots =-\rho_0\frac{I}{N}\sum_{j=1}^{k}(u_{0i}-\bar{u}_0)(v_{0i}-\bar{v}_0)$
123	上から2	$\cdots+\frac{\partial_0\bar{v}}{\partial x_0}\Big)$,	$\cdots+\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x_0}\Big)$,
123	下から10	$\cdots+\frac{\partial w_0}{\partial z_0}=0$	$\cdots+\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z_0}=0$
125	上から7	$-\rho_{w1}\sigma_1 \cdot \sigma_v \cdot \gamma_{w1\cdot v1}$	$-\rho_1 \cdot \sigma_{w1} \cdot \sigma_{v1} \cdot \gamma_{w1\cdot v1}$
127	上から9	$\cdots=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\rho_0}\frac{\bar{p}}{\bar{L}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial x_0}$.	
			$\cdots=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\rho_0}\frac{\bar{p}}{\bar{L}}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial x_0}=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{x}_0}$;
127	下から8 (86)	$\cdots+\frac{\bar{V}^2}{\bar{L}}\Big(\bar{u}_0\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_0}+\cdots$	$\cdots+\frac{\bar{V}^2}{\bar{L}}\Big(\bar{u}_0\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}_0}+\cdots$
127	下から7	$=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\Big(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{x}_0}+\cdots$	$=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\Big(\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{x}_0}\Big)+\cdots$
127	下から5	$=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\Big(\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}_0}\Big)+\cdots$	$=-\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\cdot\bar{L}}\Big(\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{y}_0}\Big)+\cdots$
127	下から4	$\cdots+\frac{\bar{V}^2}{\bar{L}}\Big(\bar{u}_0\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x_0}+\cdots$	$\cdots+\frac{\bar{V}^2}{\bar{L}}\Big(\bar{u}_0\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}_0}\Big)+\cdots$
127	下から3	$\cdots-\frac{\delta^2}{\bar{L}}\Big(\bar{Z}_0\cdot\sigma_0{}^2\Big)$	$\cdots-\frac{\delta^2}{\bar{L}}\Big(\bar{V}_0\cdot\sigma_0{}^2\Big)$
128	下から4	…並びにそれ示性式は,	…並びにその示性式は,
130	下から8 (104)	$\cdots\equiv\frac{\bar{\kappa}_1}{V_1\cdot\bar{L}_1}\equiv\bar{V}R_1{}^{-1}$	$\cdots\equiv\frac{\bar{\kappa}_1}{V_1\cdot\bar{L}_1}\equiv\bar{\kappa}_1R_1{}^{-1}$
130	下から4 (前出101)	$\bar{I}^2\equiv\frac{\sigma^2}{V^2}=\underset{2}{0}$ const.	$\bar{I}^2\equiv\frac{\delta^2}{V^2}=\underset{2}{0}$ const.

国道4号線道路頁好度調査報告

150	7	$u_x^2\equiv\frac{1}{N-1}\sum_{i=}^{N}(u_i-\bar{x})^2$	$u_x^2\equiv\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(xi-\bar{x})^2$
156	9	$t=\sqrt{F}=2.109$	$t=\sqrt{F}=2.109$
156	図—4	${}_0$*Cement conect pave*	${}_0$*Cement concret pave*

荼臼山地土り防止堰堤に関する研究

頁	行	誤	正
161	緒論の2行目	する形式となつた	する形成となつた.
174	下より8	短縮したり等したとき	短縮したり等しくしたとき
184	下より3	(実際その3による)	(実験その3による)

AEコンクリートに関する実験的研究（1）

建設技官　山　田　順　治
建設技官　磯　崎　正　晴

目　次

Ⅰ　緒　論……（1）
Ⅱ　研究の目的……（2）
Ⅲ　結果の要約……（2）
Ⅳ　実験の概要……（3）
Ⅴ　実験結果……（7）
Ⅵ　空気量におよぼす種々の因子の影響について……（11）
〔1〕　AE材の添加量と種類……（11）
〔2〕　練り混ぜ時間……（11）
〔3〕　練り混ぜ量……（12）
〔4〕　AE材の稀釈の程度……（12）
〔5〕　使用水量……（12）
Ⅶ　空気量の安定性について……（13）
〔1〕　練り置き時間……（13）
〔2〕　振動締固め……（13）
〔3〕　硬化したコンクリート中の空気量，気泡の大きさ，並びにその分布……（14）
Ⅷ　コンクリートの性質に及ぼす空気量の影響について……（15）
〔1〕　スランプ……（15）
〔2〕　セメントの凝結……（16）
〔3〕　圧縮強度……（16）
〔4〕　すりへり抵抗……（17）
Ⅸ　空気量の測定について……（17）
〔1〕　まだ固まらないコンクリートの空気量測定方法……（17）
〔2〕　硬化したコンクリートの空気量測定方法……（18）
Ⅹ　現場試験について……（18）
〔1〕　新京浜国道に於けるAEコンクリート試験道路の施工について……（18）
〔2〕　五十里堰堤仮設備用AEコンクリートの配合設計について……（20）
Ⅺ　結　論……（23）

Ⅰ　緒　論

AEコンクリートは最近ようやく多くの構造物に用いられるようになつて来たが，現在，なお，その気泡の働きについての説明が明らかでないばかりでなく，施工の面に於ても，セメント重量の 10 万分の 4 とか 5 とかのAE材と，それによつて出来るコンクリートの出来高に対する数パーセントの空気量を取扱うために，材料の選択，取扱い等の管理が出来上るAEコンクリートの性質に大きな影響のあることが知られているが，AEコンクリートの効果を十分に発揮させるためには，これらの性質を十分に知つておくことと，未だ明らかで

ないものについても研究すると共に，それに応じたコンクリート工事施工の十分な管理が必要である．

Ⅱ 研究の目的

この研究は主に昭和25年に実施したもので，アメリカ製のAE材であるプロテックス(Protex)，ダレックス(Darex)，および拡散材であるポゾリス(Pozzolith)を用いたコンクリートについて，一つにはそれらAE材の比較を兼ね，又一つには，主として一定配合の場合の各種の性質を求め，我が国でのAEコンクリート施工の基礎的資料を求めようとしたものである．

そのために研究は之を次のように4段階に分けて実施した．

第1段階はコンクリートの中に発生した空気量の測定に関するもので，測定器の試作，検定，測定方法の比較，精度，取扱い等の影響等に関するもの．

第2段階は，気泡の発生に及ぼす色々の影響の内，AE材の量，種類，練り混ぜの影響等に関するもの．

第3段階は，発生した空気の安定性に関するもので，一旦発生した気泡の維持に関した．振動締固め，練り置き時間等の影響に関するもの．

第4段階は，以上のように発生して維持された空気量がコンクリートの品質に及ぼす影響に関するもので，スランプ，凝結，強度等についての影響がこれに含まれる．

以上の他にAEコンクリートの施工に関して新京浜国道，および五十里堰堤の仮設備の施工に関連して現場試験を行つた．

Ⅲ 結果の要約

この実験の範囲内で，結果を要約すれば次のようになる．

(1) 3種類の混和材の内で，ダレックス，プロテックスは，大体空気量の発生および強度その他に対して同様な効果のあることが判つたが，ポゾリスはこれと違つて，空気量はすくないようであるが，ウォーカビリチーに対しては極めて効果的で，また強度に対しても一定のW/Cに対してはその添加量が増しても強度の低下はあまりみられなかつた．

(2) 空気量に及ぼす練り混ぜ時間，練り混ぜ量の影響は使用するミキサの練り混ぜの能率によつて変化があると考えられ，一般にこれを無視することは出来ず，AEコンクリートの施工に当つては，実際に使用するミキサについてこれを調べておく必要がある．

(3) AE材の稀釈の影響はあまり大きいとは思われないが，AE材をそのままミキサに加えることは避けたい．

(4) 他の使用材料が一定でも，使用水量が異ると空気量に相当変化があり，あまり水量がすくなくても，多くても空気量はすくなくなり，良いAEコンクリートは得られないようである．

(5) AEコンクリートに入れられた空気量は一般にそのコンクリートを放置して，これを練り直して用いたり，振動機をかけたりすればその量が相当減ずることがあるが，練り混ぜて直後にこれを普通の方法で打込

んで硬化させたものについては，その性質に大きい影響を与えるような空気量の変化はないように思われた．

（6） 硬化したAEコンクリートの気泡の分布は一般に気泡の小さいものが多い偏つた分布をするようで，その分布の形は空気量に関係がないように思われた．

（7） 空気量が増せば一般にスランプも増すがその増加する割合は，使用水量を増す場合とは同じではないようである．

（8） セメントの凝結は一般にAE材の添加によつてやや遅れるが，普通程度の使用量ならば工事の施工に支障を来たすことはないと考えられる．

（9） コンクリートの圧縮強度は一般に空気量が増すと減少して，その関係は空隙セメント比で示されるがAE材の相違による傾向の差は認められない．

すりへりによる重量減は空気量と共に増加していて，その程度はあまり大きくないように思われた．

（10） 空気量の測定方法の内で，未だ固まらないコンクリートの場合には，ワシントン型エアーメーターが比較的簡単で現場に向くのではないかと思われた．

Ⅳ 実験の概要

実験は主として当所の実験室に於て実施したが，その他に現場試験を新京浜国道および五十里堰堤に於て行つた．

その概要は次のようである．

〔1〕 使用した材料

（1） **AE材** 実験にはアメリカ製の2種類のAE材，プロテックス（Protex），ダレックス（Darex）およびAE材ではないが拡散材ポゾリス（Pozzolith）を使用した．

（2） **セメント** 他の実験との関係から，使用したセメントはこの実験の初期には日本セメント，後期には小野田セメントの何れも普通ポルトランドセメントを使用したがその試験結果は表—1 のように規格に合するものであつた．

表—1 セメント試験結果

種類	比重	粉末度（%）	凝結 水量（%）	凝結 始発（時分）	凝結 終結（時分）	膨脹亀裂	フロー	強度 (kg/cm²) 曲げ 3日	曲げ 7日	曲げ 28日	圧縮 3日	圧縮 7日	圧縮 28日
日本普通ポルトランドセメント	3.13	1.35	30.0	2.25	3.52	ナシ	209	19	32	53	65	107	198
小野田普通ポルトランドセメント	3.15	0.50	26.5	2.48	4.13	ナシ	238	21	42	71	71	175	288

（3） **骨材** 骨材は特別の実験の他は，粗骨材最大寸法が 30 mm のものでその試験結果は表—2 および表—3 の通りであつた．

（4） **水** 水は水道水を用いた．

〔2〕 主な試験機械器具

表—2　細骨材試験結果

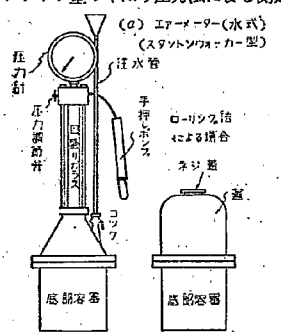
産地	荒川砂	フルイ分ケ試験	
試験項目	試験結果	通過残留	%
比重	2.66	5 以上	2.7
単位容積重量	1593	5～2.5	3.6
空隙率	40.11	2.5～1.2	4.3
吸水率	1.2	1.2～0.6	16.2
洗イ試験	0.2	0.6～0.3	43.5
有機不純物	標準色以下	0.3～0.15	27.4
粗粒率	2.15	0.15～0.075	1.9
		0.075 以下	0.4

表—3　粗骨材試験結果

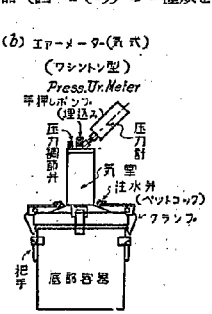
産地	相模川砂利	フルイ分ケ試験	
試験項目	試験結果	通過残留	%
比重	2.65	30～25	8.6
単位容積重量	1770	25～20	19.3
空隙率	33.21	20～15	21.3
吸水率	1.5	15～10	24.4
洗イ試験	0.95	10～7	12.2
粗粒率	6.95	7～5	10.6
		5 以下	3.6

この実験に用いた主な試験機械器具は次のようなものであつた.

(1)　空気量測定器　当所と前川試験機製作所との共同設計並びに試作によるスタントンウオーカー型の水式の圧力法による測定器（重量法，ローリング法に準用）（図—1 (a)）および，池田建設の好意で借用したワシントン型のやはり圧力法による測定器（図—1 (b)）の2種類を使用した.



図—1 (a)



図—1 (b)

前者は全長 99.0 cm 重量約 25.0 kg で構造は底部容器および蓋とから成つている．蓋には目盛りを 12 % まで刻んだガラス管とその上に 2.0 kg/cm² の圧力計があり，ガラス管（内径 30 mm）の上部には手押しポンプに通ずる孔と，圧力を調節するコックがついている．又ガラス管の下には水を入れる為のコックとそれにつながる漏斗管がある．底部容器の容積は 6680 cc. 検定の結果，作業圧力は 0.4 kg/cm² であつた．蓋を底部にとりつけるのは6個のボルト，ナットでこれを行い，蓋と底部容器の間には厚さ 3 mm の円形のゴムパッキングを使用している．材質は鋳鋼で厚さは平均約 8 mm のものである．附属品には検定用シリンダー，木槌等がある.

後者はアメリカの チャールスワット会社 (Charles R. Watts Co.) が販売する コンクリート・スペシャリーズ会社 (Concrete Specialies Co.) 製の Press-Ur-Meter と呼ばれるものでその構造は大体2つの部分に分けられている．1つはコンクリートを入れる底部容器で，その容量は正確に 0.250 ft³ (約 7079 cm³) で重量約 3.865 kg で材質は軽金属（比重約 2.76）である．もう一つの部分は気室のついている蓋であつて，これにはクランプ，ペットコック等がとりつけてある.

気室は真鍮製でその上端に径約 3 1/2 in (8.9 cm) の 15 psi の圧力計があるほか，親指レバーおよび空気

ポンプがとりつけられてある．気室の容積は底部容積の 5.8％である．蓋の内面には，硬質ゴムパッキングが流し込みになつている他，多少コーン型に内側がえぐられていて，その中央に気室と通ずる排口があけてある．圧力計は直接空気量が読めるように目盛りがしてあり，最大 100％ まで読める．空気量の小さい初めは 1％ ずつ最後の方は，5％ までの目盛りがしてある．なおこの目盛りは 0％ (15 psi) の上に更に 5 までの数字を刻んだ小目盛りがあり，実際の作業気圧はその容器の特性に従つて検定してこの内のいずれかの目盛りにきめられるようになつている．当所で使用したものは 3.5 であつた．

この測定器には検定用の器具が附属しているがこれら全体は，プライウッド製の容器 (40×40×100 cm) に収められていて，その重量は 32 1/2 lbs (14.742 kg)，測定器だけでは 19 1/2 lbs. (8.845 kg) 高さ 20 1/2 in (52.1 cm) でこの測定器による空気量測定に要する時間は平均 7～8 分程度である．

（2） **ミキサ**　ミキサはコンクリートの練り混ぜ量が少いときにはアイリッヒ型を，多い時にはラボラトリー型を使用したがその概要は次のようである．

1） **アイリツヒ型**　容量 1 切　動力　1 馬力電動機

2） **ラボラトリー型**　可傾式　容量 2 切　動力　1/2 馬力　電動機

（3） **すりへり試験機**　AEコンクリートのすりへり試験に使用したすりへり試験機はアムスラー型のもので回転板の回転数が 1 分間に 32 回転供試体は 1 回に 2 個取りつけられるもので，500 回転をもつて，1 回の試験とする．

（4） **振動機**　振動機は内部振動機でロスアンゼルスのバイバー会社製の電動可撓型のもので 1/2 馬力，振動端部は長さ 30 cm，径 5 cm 回転数は 8000 回/分 重量は約 23 kg のものである．

（5） **圧縮試験機**　アムスラー型 200 瓲試験機およびオルゼン 100 瓲万能試験機を用いた．

（6） **コンパレーター**　硬化したコンクリートの中の気泡を検べるのに使用したコンパレーターは，理化学研究所製の 1/1000 mm の精度のもので，測定面の寸法が横 16 cm，縦 12 cm のものである．

（7） 硬化したコンクリート中の気泡をしらべるために，コンクリート表面を仕上げるのには，石材用グラインダーを用い，助材としての金剛砂は 320 番のものを用いた．

〔3〕 材料の準備

AE材はこれを重量で試料瓶に計り取り，特別に稀釈の影響を調べた時以外は使用水の全量にこれを溶解して使用した．粗骨材はこれを粒度別に 30～20 mm，20～10 mm，10～5 mm の 3 種類に分けて貯蔵したので使用の際には再びこれを混合した．

〔4〕 コンクリートの練り混ぜ

コンクリートの練り混ぜには，練り混ぜ量が大体 0.02 m³ 以下のときはアイリッヒ型ミキサを，0.02 m³ 以上の場合にはラボラトリー型を使用した．練り混ぜ時間は，最初に細骨材，セメントを投入して空練り 2 分の後に水（AE材を溶解させた）を加えて 2 分練り，更に粗骨材を投入して 3 分，計 7 分で練り終つた．稀釈液の影響を調べた場合には予め所定の水に溶解しておいたAE材溶液とAE材を入れない残りの水量とを別々の容器から同時にミキサに加えた．練り混ぜ時間の影響を調べる時には粗骨材を投入してからの時間を加減した

が表示した練り混ぜ時間は空練りの時間を差引いたものである．ミキサから取出した後は一旦鉄板にうけて練り直し，スランプと空気量を測定して供試体を作つた．練り置き時間の影響を調べた時には，一定容器に練つたものを入れて所定の時間放置しこれについて，スランプ空気量を測定した．

〔5〕 空気量の測定

空気量の測定はエアーメーターの底部容器を重量法に兼用することにし，まず練り混ぜたコンクリートを底部容器に3層にわけて詰め，各層は標準圧縮試験供試体製作用の突き棒で 25 回突き更に容器の外部を木槌で叩いてコンクリート内の大きな気泡を追い出して次の層を詰め，このようにして上面まで詰め終つた後は上面を鏝で均し，周囲を拭つてその重量をはかり，これから計算して重量法による空気量を求めた．重量を測つた底部容器には圧力計のついた蓋の部分をしつかりと所定の位置にとりつけ，水式のエアーメーターの場合にはまず零マークまで漏斗から注水し，大体作業圧力附近までポンプで圧力を加えてから，メーターを水平線に対して約30°傾けて回転させながら，器壁を木槌で叩いて器壁についている気泡を追い出し，これを気泡が出なくなるまで行う．出て来なくなつたらメーターを水平面上に直立させて置き圧力を戻し水面が零マークに正しく合うように調節する．調節が出来たら作業圧力 (0.4 kg/cm²) を加えて，水面の下りから目盛りで見かけの空気量を読み圧力を戻す．戻したときの水面の示す目盛りを読み，これを先に読んだ見かけの空気量から差引き，更に骨材修正係数も差引いてこれを真の空気量とした．この測定は3回繰り返して平均を採つた．

骨材修正係数はコンクリートの場合と同じように詰め且つ測定した．唯容器につめる際は砂1に対して粗骨材2が互層になるようにこれを行つた．

気式のエアーメーター (Press-Ur-Meter) の場合には蓋をした後，ペットコックを2つともあけて附属のスポイトで一方から注水し，他方から水が溢れ出るようになつた時にこれを閉ぢ，次いで気室の圧力を所定の初期圧力 (3.5) まで上げてから親指レバーを押してその圧力を底部容器に伝え，この時の圧力計の下りから空気量を直接読みとつてこれを見かけの空気量とし，骨材修正係数を差引いて正しい空気量とした．この場合も測定は3回行い，その平均を採つた．骨材修正係数はやはり同じ操作でこれを求めた．

〔6〕 供試体の製作

標準圧縮供試体の製作および凝結試験はJISによつて行つたが，振動締固めの影響を調べる場合には一層に詰め，振動機を所定の時間挿入して，しかも均等に移動させてこれを行つた．すりへり抵抗試験用の供試体はアムスラーすりへり試験機にとりつけられるように1つの面の面積が 50 cm² の立方体で，この場合には粗骨材最大寸法を 20 mm とし2層につめて，試験の際には側面をすりへり面とした．すりへり試験をした供試体は他の側面を石材用グラインダーで磨いて，硬化したコンクリートの気泡測定に用いた．供試体の個数は普通3個を1組とし，すりへりの場合は8個1組であつた．なおすりへり試験では比較のために同じ供試体2個を1組として圧縮試験を行つた．養生は全て標準養生をした．供試体製作中の気温は常に 10°C～15°C に保つた．

〔7〕 試　験

試験はすべて硬化したコンクリートのものについては材令 28 日でこれを行い，未だ固まらないコンクリー

トの場合には1日に1種類の試験を終了するようにした.

V 実験結果

以上のようにして実施した実験の結果をまとめると次のようになる.

表—4 AE材添加量とスランプ，空気量および強度との関係

AE材 種類	AE材 添加百分率 (%)	スランプ (cm)	空気量 (%) 圧力法	空気量 (%) 重量法	製作月日	材令 (日)	圧縮強度 (kg/cm²)	V/C
ダレックス	0	4.5	1.9	1.7			185	2.03
	0.03	6.5	3.3	2.3			167	2.17
	0.06	8.4	4.5	3.2	9/15	28	159	2.28
	0.10	10.2	5.4	4.6			146	2.39
	0.12	11.2	6.5	6.2			143	2.49
プロテックス	0	4.3	1.9	1.9			203	2.03
	0.03	7.3	2.4	2.5			166	2.03
	0.05	8.9	3.4	3.3	8/17	28	149	2.18
	0.06	8.5	4.1	4.3			146	2.26
	0.07	8.5	3.9	3.8			168	2.15
ポゾリス	0	6.3	1.9	1.7			192	2.03
	0.03	6.2	1.7	1.8			198	2.00
	0.10	8.5	2.2	1.8	9/21	28	193	2.06
	0.25	12.0	2.5	2.2			198	2.08
	0.50	16.5	3.1	2.4			183	2.16

粗骨材の最大寸法；30 mm
水セメント重量比；58%
セメント使用量　；310 kg/m³（日本セメント）
使用水量　；180 kg/m³
粗細骨材重量比　；2.2
ミキサ　；ラボラトリー型

表—5 AE材の量を一定にして水セメント比を変えた場合

AE材 種類	AE材 添加百分率 (%)	水セメント重量比 (%)	スランプ (cm)	空気量 (%) 圧力法	空気量 (%) 重量法	製作月日	材令 (日)	圧縮強度 (kg/cm²)	V/C
ダレックス	0	58	9.5	0.7	0.5			283	1.90
	0.040	58	19.2	3.5	3.9			236	2.18
	〃	53	9.5	4.3	4.1	11/3	28	267	2.03
	〃	45	0.4	3.5	1.7			330	1.76
	〃	40	0	—	2.9			407	1.54

プロテックス	0	58	6.0	1.2	0.9	10/27	28	252	1.94
	0.045	65	20.4	3.1	2.7			162	2.38
	〃	58	11.0	5.2	5.5			180	2.37
	〃	53	8.5	5.4	5.6			204	2.23
	〃	45	0.5	4.4	4.3			253	1.84
ポゾリス	0	58	7.5	0.9	0.5	11/7	28	284	1.92
	0.750	58	22.4	2.3	2.1			220	2.06
	〃	53	15.3	4.4	4.3			239	2.10
	〃	45	4.2	4.5	5.1			310	1.86
	〃	40	0.2	2.9	4.5			372	1.54

粗骨材の最大寸法 ; 30 mm
セメント使用量 ; 310 kg/m³ (小野田セメント)
粗細骨材重量比 ; 2.2
ミキサ ; ラボラトリー型

表—6 練り混ぜ時間および練り置き時間の影響

練り混ぜ時間(分)	測定回数	1	2	3	4
3.0	経過時間(分)	0	30.0	78.0	188.0
	空気量(%)	4.6	2.1	2.2	1.2
	スランプ (cm)	3.7	2.5	0.7	0
3.5	経過時間	0	35.0	60.0	
	空気量	2.7	2.2	1.9	
	スランプ	4.7	1.1	0.8	
5.0	経過時間	0	30.0	64.0	
	空気量	6.7	2.7	2.1	
	スランプ	4.7	1.8	1.0	
6.0	経過時間	0	36.0	71.0	
	空気量	4.9	3.8	2.6	
	スランプ	4.9	1.6	0.5	
7.0	経過時間	0	30.0	110.0	
	空気量	6.5	4.6	3.3	
	スランプ	6.5	2.3	0.6	

粗骨材の最大寸法 ; 30 mm
セメント使用量 ; 310 kg/m³ (小野田セメント)
水セメント重量比 ; 50 %
粗細骨材 重量比 ; 2.2
ミキサ ; ラボラトリー型
AE材 ; ダレックス 0.08 % 添加

表—7　ミキサの大きさとバッチの大きさの影響

ミキサの種類（公称容量 m³）	粗骨材の最大寸法（mm）	セメント使用量（kg/m³）	水セメント比 W/C（%）	AE材 種類	AE材 使用量（%）	粗細骨材比 G/S	練り混ぜ量 （m³）	練り混ぜ量 ミキサの大きさに対する比（%）	スランプ（cm）	空気量（%） 圧力法	空気量（%） 重量法
ラボラトリー型（0.0556）	30	310	58	ダレックス	0.04	2.2	0.0129	23.2	7.5	3.3	2.7
							0.0226	40.7	17.6	4.3	4.2
							0.0322	57.9	16.5	4.6	4.8
							0.0452	81.0	18.5	4.7	4.5
アイリッヒ型（0.0278）	30	310	58	ダレックス	0.04	2.2	0.0097	34.4	15.5	2.4	2.2
							0.0129	46.4	18.4	2.5	2.5
							0.0161	58.0	18.3	2.3	2.0
							0.0194	69.7	18.6	2.3	2.1

（小野田セメント使用）

表—8　AE材稀釈液の量の影響

全水量に対するAE材稀釈液の百分率（%）	スランプ（cm）	空気量（%） 圧力法	空気量（%） 重量法	製作月日	材令（日）	圧縮強度（kg/cm²）
0（生）	3.8	4.1	4.3	12/15	28	353
10	4.3	4.7	4.8			344
25	4.4	4.8	4.8			365
100	4.2	4.8	4.8			331

セメント使用量　；310 kg/m³（小野田セメント）
水セメント重量比；50 %
粗細骨材重量比；2.2
粗骨材の最大寸法；30 mm
ミキサ　；アイリッヒ型
AE材　；ダレックス 0.08 % 添加

表—9　振動締固めの影響

締固め方法	締固め時間（秒）	空気量（%） 圧力法	空気量（%） 重量法	製作月日	材令（日）	圧縮強度（kg/cm²）
手突き	—	3.8	4.3	12/12	28	386
振動機	15	2.7	2.8			455
〃	30	1.8	1.8			—
〃	60	1.4	1.4			508
〃	120	0.5	0.4			480

粗骨材の最大寸法；30 mm
セメント使用量　；310 kg/cm³（小野田セメント）
水セメント重量比；45 %
粗細骨材重量比；2.2
振動機　；ロスアンゼルスバイバー社製モデル 15 可撓性内部電動振動機（振動数 8000 回/分）
ミキサ　；ラボラトリー型
AE材　；ダレックス 0.04 % 添加

表—10 AE材の添加がセメントの凝結に及ぼす影響

AE材 種類	AE材 添加百分率(%)	水量(%)	稠度計の下り (mm)	空気量(%)	凝結時間(時.分) 始発	凝結時間(時.分) 終結	試験月日
—	0	26.25	6.0	0.6	3.08	4.21	12/1
ダレックス	0.03	26.25	20.0	4.6	3.50	5.22	12/1
	0.05	〃	7.0	1.8	3.13	5.24	
	0.08	〃	30.0	4.3	3.40	5.12	
プロテックス	0.03	26.25	8.0	2.6	3.44	5.32	12/1
	0.05	〃	25.0	3.4	4.11	6.13	
	0.08	〃	32.0	3.4	5.13	6.47	
ポゾリス	0.1	26.25	16.0	1.2	3.29	5.31	12/1
	0.3	〃	4.0	2.0	4.34	6.44	
	0.6	〃	0	1.8	1.03	3.53	
—	0	26.25	6.0	1.5	3.37	4.57	12/7
ダレックス	0.05	27.00	6.0	2.7	3.34	5.10	
プロテックス	0.03	26.00	6.0	5.1	4.21	5.32	
ポゾリス	0.10	28.00	6.0	1.1	4.03	5.40	

室温 16.5～19°C 湿度 85～90％
空気量の測定は重量法による
小野田普通ポルトランドセメント使用

表—11 すりへり試験結果

アムスラー型すりへり試験機使用（500 回転）

AE材添和百分率(%)	スランプ	空気量(%) 圧力法	空気量(%) 重量法	空気量(%) 硬化したコンクリート	すりへり高さ(mm)	重量減百分率(%)	圧縮強度(kg/cm²)
0	5	1.8	1.9	1.4	2.9	4.52	397
0.03	11.5	2.3	2.5	1.7	3.4	4.60	393
0.08	15.5	3.8	4.0	3.5	3.4	4.70	343
0.12	19.5	4.7	5.2	3.9	3.2	4.88	318

粗骨材の最大寸法 ; 20 mm
セメント使用量 ; 314 kg/m³ （小野田セメント）
水量 ; 182 kg/m³
粗細骨材重量比 ; 2.2
供試体寸法 ; 7.07×7.07×7.07 cm
ミキサ ; アイリッヒ型
AE材 ; ダレックス

Ⅵ　空気量に及ぼす種々の因子の影響

空気量は非常に多くの因子によつて影響をうけるが，実験を行つたのはAE材の添加量とその種類の影響，練り混ぜ時間，練り混ぜ量およびAE材を稀釈する程度の影響についてである．

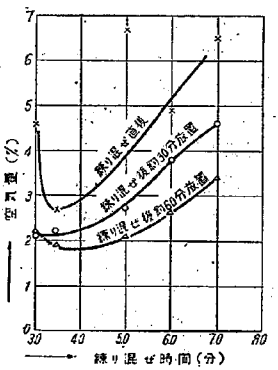
〔1〕 AE材の添加量と種類

3種類の混和材，プロテックス，ダレックス，およびボゾリスを用い，水セメント比を一定にした場合，および水セメント比を変えた場合について実験した結果は，表—4，表—5 の通りで，これによると気泡の発生の良いのは，ダレックス，プロテックス，ボゾリスの順でボゾリスはあまり気泡の発生がよくないように思われる．AE材の添加量と空気量との関係は大体直線で 1% の空気量を発生させるのに必要なAE材の量は，ダレックスではセメント重量の約 0.03%，プロテックスでは約 0.04% ボゾリスでは 1.0% 程度となつた．これらの値は表に示したように一定の配合のコンクリートにAE材の添加量のみを変化させたものであるために，AE材の量が増すとスランプの値も増す為に，配合を変えてスランプを一定に保つ場合に[1]較べて気泡の発生の程度が稍々少いようである．ボゾリスはその性質が気泡発生材としてよりも拡散材(Disparsing Agent)に本来の目的があるために気泡の発生量の少いのは当然であつて，特に空気量を増したい場合のために気泡発生の助材があつたが，これについての実験は行わなかつた．

〔2〕 練り混ぜ時間

AEコンクリートはこれを練り混ぜる程度によつて気泡の発生量が違うが，[2] その練り混ぜ時間の影響は，AEコンクリートの施工の際に特に注意を要する．小型ミキサを使用した場合，一定配合のAEコンクリートの空気量に対する練り混ぜ時間の影響は，表—6 および図—2 のようになつた．

実験は練り混ぜ直後および放置しておいた同じコンクリートについて空気量を測定したもので練り混ぜ直後においては練り混ぜ時間が多くなるに従つて，初めは約3.5分頃で一寸空気量が減つて，それから次第に増加をみせている．この傾向は放置した時間が増しても同様であつたが，その程度ははるかに減少した．練り混ぜ時間と共に空気量が増減する程度は，使用するミキサの練り混ぜの機構によるところが大きいようで，多くの実験結果を見ても空気量が最大になる練り混ぜ時間があつて，それが大体3～12分の広い範囲にわたつている．この様にAEコンクリートではAE材を有効に使用し適当な空気量を入れるためには一般に普通の場合より練り混ぜ時間が長くなるが，現場ではAE材を多少多く使つても練り混ぜ時間を短くするか，AE材を有効に使うために最も効果的な練り混ぜ時間（多少それが普通の場合より長くなつても）を用いるかを考えなければならない．

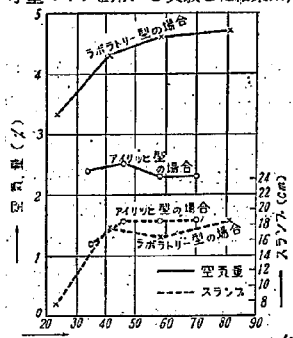


図—2 練り混ぜ時間と空気量との関係

1) Concrete Manual 1949年
2) Symposium on Concrete's Contain Air-entraining Agents; ACIJ. 1944.

〔3〕 練り混ぜ量

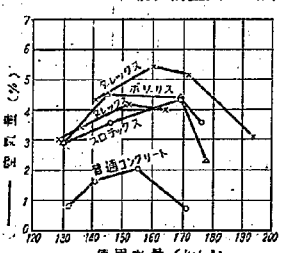
練り混ぜの程度は練り混ぜ量によつても異り[3]同じミキサに対してその練り混ぜ量の影響はかなり大きい．小型ミキサを用いて実験した結果は，表—7，図—3 のようにアイリッヒ型(容量1切)では練り混ぜ量の変化は認められない様であるが，一方容量2切のラボラトリー型の場合には，練り混ぜ量が少いと空気量が少いが，量が増すに従つて空気量は次第に増して，そのミキサの公称容量に近ずくに従つてほぼ一定になつている．このようにミキサの練り混ぜの能力によつては練り混ぜ量の影響が相当大きく，この場合ではその差が 25 % にも及んでいるのでAEコンクリートの施工に当つては，そのミキサについて，これらの特性を求めておかなければならない．練り混ぜ量が公称容量より多くなれば又空気量も減少するものと思われる．AEコンクリートの配合設計等の場合にはミキサの差を考慮しなければならないが，示方配合にミキサの型式，容量，練り混ぜ時間を指定するのもよいと思われる．



図—3　練り混ぜ量と空気量スランプとの関係

〔4〕 AE材の稀釈の程度

AE材はこれを使用する際には適当に稀釈したものを計量し混合水に混ぜて使用するが，その稀釈の程度が大きいと計量装置が大きくなり取扱いが不便である．しかし又稀釈の程度が少いと計量の際の誤差および，AE材の均等な分布が出来にくくなる．この点についてダレックスを用い稀釈の程度の影響を求めて表—8 を得た．これによるとAE材をコンクリートの練り混ぜに使用する水量の約 30 % 以上に稀釈して使用すれば発生する空気の量にほとんど影響を与えないが，それ以下の場合には，例えば全然稀釈しないでそのままAE材を直接ミキサに他の混合水と共に加えた場合には約 15 % の空気量の減少が見られた．従つてAE材を最も有効に使用し均質なAEコンクリートを造るためにはAE材の稀釈の程度を大きくするか，あるいはミキサへこれを投入するまでに他の混合水とよく混ざるような方法をとる必要のあることも考えられる．実際の施工に当つてはミキサの性能，計量装置の精度等に応じて最も効果的な，AE材の稀釈の程度を求める必要がある．



図—4　使用水量と空水量との関係

〔5〕 使用水量

セメント，骨材，AE材の使用量を一定にしておいて水量を増減させると空気量も変化するが，その状態は表—4，表—19 および図—4 のようになつた．

これによると常に最も空気量が多くなる水量の時があつて大体 150 ～170 kg/m³ 位の使用量のときが最も効果的のようで，これは使用水量があまりすくないと気泡を十分維持出来ず，又あまり多いとミキサによる攪拌が十分行われない為と考えられる．

3) Effect of Mixing Time, Size of Batch and Brand of Cement on Air-entrainment; E. W. Scripture Jr. and F. J. L. Twinowicz ACIJ. 20 : 653—62 May 1949

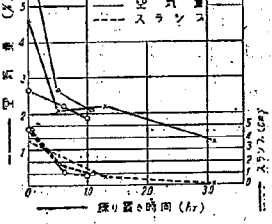
Ⅶ　空気量の安定性について

AEコンクリートの空気量は取扱いの簡単なことと，精度がよいために普通練りたての未だ固まらないコンクリートについてこれを測定し，その時の空気量を基にして硬化した後のAEコンクリートの色々な性質と結びつけてAEコンクリートの配合設計，施工の資料としているが，実際のコンクリートの施工に当つては，空気量はその取扱いあるいは状況の変化によつて常に変動すると考えられるので，AEコンクリートの品質を確かなものとすることは仲々困難で，従つて計画通りの品質のものが得られないおそれがある．AEコンクリートの施工に当つてはこれらの影響を少くすると共にそれを考えに入れて設計施工の計画を樹てなければならない．これらの影響の内，コンクリートを練り混ぜてからしばらく放置したときの影響，振動締固めの影響および硬化したコンクリート中の空気量並びにその大きさと分布を求めるための実験を行つた．

〔1〕 練り置き時間

コンクリートは練り混ぜて直後にこれを打ち込むのが理想であるけれども施工の方法あるいは思いがけない故障等のためにその打込みが遅れる事がすくなくない．この場合普通のコンクリートでは水分の上昇，水和の進行等によつてウォーカビリチーが相当減少してその減少の程度はコンクリートを放置する初期において著しい．[4] AEコンクリートでは水分の変動ばかりでなくミキサで一旦練り混ぜて出来た気泡の変化が問題になる．この点について練り置き時間ばかりでなく練り混ぜ時間をも変えて実験した結果は，表—6，図—5 のようになつた．

これによると比較的硬いコンクリートのためもあつて練り置き時間の増加によるスランプの減少はあまり著しくはないが空気量の方は練り置き時間の最初の 30 分間に於けるその減少が著しく，その後は練り混ぜ時間に関係なく一段に同じような値に近ずいている．これらの実験値は放置したコンクリートを測定する前に手で練り直して使用したので以上の放置による空気量の減少は直ちにこれがコンクリートを型枠に打ち込んだ後の空気量の減少を示すものではなく，むしろ練り直しの操作による空気量の減少が相当大きいと見るのが妥当であるかも知れない．練り直しによる空気量の減少はそれまでに放置した間に水が分離して練り直しの際には，気泡を保つだけの水分が不足するためにこれが失われるのではないかと考えられる．いずれにしても練り直しによる空気量の減少は相当大きいようで練り直しを必要とするAEコンクリートについては再び空気量を，その使用前に測定して，そのコンクリートの採否を決定する必要がある．



図—5　練り置き時間と空気量との関係

〔2〕 振動締め固め

練り混ぜ直後のAEコンクリートの空気量は一般にその後の取扱いによつて減少するが振動機を使用する場合には，この影響のかなり大きいことが今までの実験で示されている．[5] この点についてバイバー内部振動機

4) 現場に於て考慮すべきコンクリートのウォーカビリチーについて；
山田順治，磯崎正靖　建設省土木研究所報告第 11 号 昭 24, 3

を用いて試験した結果は表—9 のように一般に振動時間が長いほど空気量が減少して，振動時間2分ではその 85 % が失われている．この減少は特に最初の 30 秒間に於て著しい．これは初めに気泡の大きい出やすいエントラップド・エアーが逸出し，次第にエントレインドエアーが出て来るものと思われ，振動時間が短かければかえつて好都合なことと考えられるが，その点については耐久性による裏づけが必要である．振動をかけすぎることは，普通コンクリートでもAEコンクリートでも材料の分離を起すので悪いことは当然であるけれども，AEコンクリートでは以上のようにエントレインド・エアーも失われるので振動締固めを行う際には普通のコンクリートに於ける以上の注意が必要である．

〔3〕 硬化したコンクリートの中の空気量，気泡の大きさ並びにその分布

硬化したコンクリート中の空気量を測定することは硬化したAEコンクリートの性質を明らかにするために極めて大切である．現在までの研究では未だ固まらないコンクリートに較べて空気量は多少減少する様である　後に述べる方法によつて求めた空気量は 表—10 の様で測定の誤差は含むが，大体 0.5~1.0 % 程度の減少の傾向が見られる．AEコンクリートの性質を今までよりも詳しく説明し，今後の合理的な設計や施行を行うようにするためには，空気量の他に気泡の大きさとその分布の状態についての研究が必要であるが，この実験でも硬化したコンクリートの空気量を求める方法[6]を利用して硬化したコンクリートの中の気泡の大きさとその分布を推定した．

既ち気泡の形を球と仮定して，その気泡を含むコンクリート中に任意に引く直線が気泡で切られる長さを測

表—12 気泡の個数

測定した長さの範囲 (μ)	A 供試体			B 供試体			C 供試体				D 供試体			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4
15~ 25	2	1	1	6	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
25~ 50	9	5	7	16	4	6	22	16	8	13	9	16	27	24
50~ 75	10	9	11	12	9	8	27	29	7	18	23	15	28	41
75~ 100	11	9	9	9	6	3	25	24	11	10	24	12	17	22
100~ 150	10	11	10	12	7	12	40	18	11	20	42	16	28	39
150~ 200	4	14	5	7	6	3	23	17	17	16	24	14	24	19
200~ 250	6	2	1	13	9	3	16	9	8	11	22	8	15	14
250~ 350	4	6	4	9	5	6	17	18	10	14	22	13	8	10
350~ 500	3	5	4	3	7	5	15	13	15	15	15	9	9	11
500~1000	3	2	6	6	6	8	19	7	9	7	18	11	13	17
計	62	64	58	93	59	55	205	152	97	125	199	114	170	197
単位長さ当り個数/cm	0.49	0.76	0.69	1.11	0.70	0.76	2.33	1.81	1.15	1.49	2.37	1.36	2.06	2.35

5) Entrained Air Loss in Handling Placing Vibrating ; Tuthrill, L. H. ACIJ Feb. 1948
6) Linear Transverse Technique for Measurement of Air in Hardened Concrete; L. S. Brown and C. M. Pierson. ACIJ Oct. 1950 No 2. Vol 22.

定出来るものとしそれと気泡の直径との関係から，コンクリートの中の気泡の分布を推定したもので，その結果は大体表—12，図—6 の様である．

既ちこれらの結果によると推定による気泡の大きさは，この場合，50～250 μ のものが多く，一番多いのは 125～150 μ のものである．空気量の相違による分布状態の変化は図でも明らかでないが，平均値の均一性についてF分布による検定の結果はそれらの平均値の間の差違は有意とは考えられず従つてその分布の状態は空気量には関係がない様で，空気量は気泡の数の相違によるのではないかと思われる．

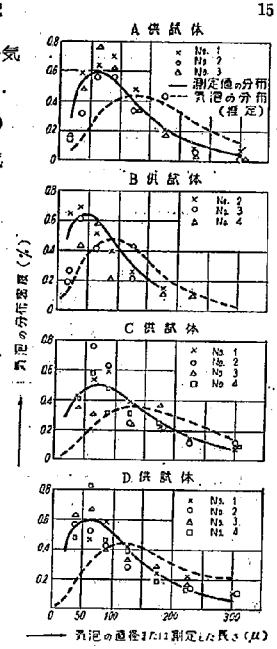
Ⅷ コンクリートの性質に及ぼす空気量の影響について

気泡が存在することによつてAEコンクリートはウォーカービリチーと耐久性特に凍結融解に対する抵抗性が増大するが，又一方強度が減少する．これらの程度は勿論材料配合によつて異るが，AEコンクリートでは空気量の影響と関連をつけることが必要である．

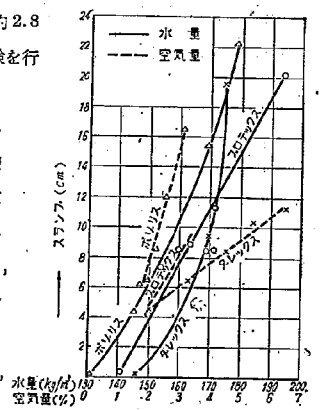
〔1〕 スランプ

気泡の存在によつてコンクリートはウォーカビリチーがよくなるが，これは気泡がボールベアリングのような働きをする為と考えられ，[7] ウォーカビリチーの点では水を増した場合と同じ傾向にあると考えられる．配合設計の際には普通スランプ 1 cm の増減に対して水量を約 2.8 kg/m³ 増減するが空気量に対してもその大体を求めるために，実験を行つたがその結果は表—4 図—7 のようになつた．

これによると空気量とスランプとの関係は大体直線でダレックスおよびプロテックスはほぼ同じ程度の増加率で，空気量 1% の増加に対してスランプは約 1.5 cm，スランプ 1 cm の増減に対しては 0.6～0.8 % の空気量の増減がこれに対応している．これに反してポゾリスは非常にその影響が大きく，空気量が 1% 増減すると，スランプは約 7 cm 増減していて，スランプ 1 cm の増減に対応する空気量は約 0.1～0.2 % である．ポゾリスがスランプに対してこのように非常に能率の良いのはこれが拡散材であるためと考えられ，すべてが空気量のみによるのではないが，スランプに対してはポゾリスはダレックス，プロテックスより優れている．水量がスランプ



図—6　気泡の分布



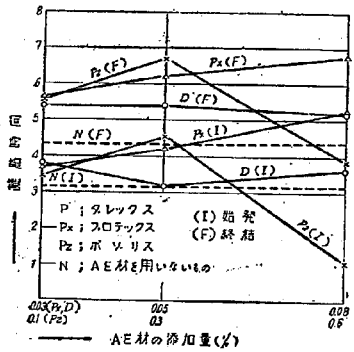
図—7　スランプと空気量又は水量との関係

7) Laboratory Studies of Concrete Containing Air-entraining Admixture; Charles E. Wuerpel ACIJ Feb. 1946.

に及ぼす影響と較べるために空気量をほゞ一定にして水量を変えた場合について実験を行つたが，その結果は表—5 図—7 のように混和材の種類に関係なく大体使用水量 10 kg/m³ の増減に対してスランプが約 4 cm 増減しスランプ 1 cm に対して使用水量 約 2.5 kg/m³ が対応している．

〔2〕 セメントの凝結

セメントの凝結は混和材の種類によつて遅速を生ずるがＡＥ材を用いた場合についても多少遅れることが指摘されている．[8] この点について実験した結果は，表—11 図—8 のようになつた．

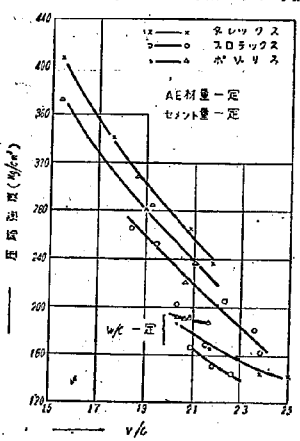


図—8　AE材の添加が凝結に及ぼす影響

これによると使用水量を一定にした場合にはダレックス，プロテックスは共に添加量が多くなるほどやゝ凝結開始および終了が遅れる傾向にあるのに反して，ポゾリスでは添加量が非常に多くなると凝結の時間が著しく早められている．これはポゾリスが拡散材であることから説明出来るようであるが普通の使用量ではこのおそれはないものと考えられる．

なおこの際ＡＥ材の添加量が多くなり空気量が増しても軟度の増加は見られずかえつて減少を見ていることは興味ある現象でこれは非常に粘性を増すために軟度計の針が下降したいためではないかと考えられる．

〔3〕 圧縮強度



図—9　V/C と強度との関係

ＡＥコンクリートは気泡が多く存在するために普通のコンクリートと較べて強度が一般に多少減少するが，[9] その程度を圧縮強度について試験した結果は 表—4 表—5 図—9 のようになつた．

この図の上方の 3 曲線はＡＥ材の添加量を一定にした場合のもので下方の 3 曲線は水量を一定にしたものである．これによると水量を一定にして空気量の変化で V/C を変えた場合，強度の増減に対する V/C の影響は大体ＡＥ材を一定にして水量の変化をさせた場合の主として水量の変化による V/C と強度との関係の傾向と大体同じようである．即ちこの実験の場合には圧縮強度 100 kg/cm² に対して，V/C の減少は 0.3～0.5 の範囲にある．これらの V/C と強度との関係は配合設計の上に必要なものであるので色々の条件の下におけるこの種の関係を求めておく必要があると思われるが外国の例と較べて[9] 強度がやゝ下廻るように思

8)　空気連行コンクリートの研究（第 1 報）；吉浦豐太郎，山橋武　セメント技術年報Ⅱ，昭和 24 年度．
9)　Strength of Air-entrained Concrete Given by Job-tested charts ; J. Sigglekow Eng. N. 143 : 30—1 N 3′ 1949.

われるのでこの点については設計者が十分注意を要すると思われる．

〔4〕 すりへり抵抗

AEコンクリートは空気を普通のコンクリートより多少多く含むことによつて凍結融解作用に対する抵抗性を増加させるが，コンクリート道路のようにその交通によるすりへりに対する耐久性については未だ十分明らかにされていない．[10] この点についてアムスラー型すりへり試験機によつて供試体のすりへりによる重量減で示されるすりへり抵抗についての実験を行つた結果は表—11 のようになつた．これによるとすりへりによる重量減は空気量に比例し空気量 1% の増加に対してその重量減は約 0.15% の増加を示している．すりへりはこれを骨材そのものの摩耗と，ペースト，モルタル分の摩損とに分けられるが以上の試験の大部分はモルタル分の脱離であるために圧縮強度の場合と同じように空気量の増加によつて重量減が大きくなつたものと考えられる．

Ⅸ 空気量の測定について

AEコンクリートの施工に於ては空気量の測定は欠くことが出来ないが，その方法には色々あつて[11] 実際の工事施工の場合には空気量を正確に且つ迅速に測定出来るものであることが望ましい．

〔1〕 未だ固まらないコンクリートの空気量測定方法

実験に用いた空気量測定方法には圧力法(水式，気式)，重量法，ローリング法等があるが圧力法(水式) と重量法とによる結果は試験結果の 表—4，5，7，8，10，13 等に示してあるようによく一致していて，普通空気量にして 0.2% 以内の誤差に収まつている．その他の測定方法による結果は 表—13 のようでこれも亦よく一致している．従つて現場で測定するのには精度の点に於ては大体いずれの方法によつても良い結果が得られる．測定の取扱いについては，操作の時間では重量法が一番短く，約5分間，圧力法（気式）がこれに次いで 5~8 分，圧力法（水式）では 7~12 分，ローリング法では 15~25 分で材料の比重が正確にわかつている場合には重量法は極めて簡単である．しかし，又装置や計算等を考えると現場では圧力法（気式）が簡便でよいように思われる．

〔2〕 硬化したコンクリートの空気量測定方法

硬化したコンクリートの空気量測定は気泡が小さい上に数も多く互に独立して分布しているので外部との連絡がつかず実際にはなかなか困難である．それでもこれまでに多くの方法が提案されているが，[5) 13) 13) 14)] その内で比較的簡単でしかも気泡の個々について調べることの出来るブラウンとビアソンの直線法（Linear Transverse Technique）は今後の気泡の研究によいと考えられる．この実験ではこの方法を用いて前に述べた気泡の分布を求めた．即ち空気量はすりへり試験に用いた 7.07 cm 立方体のコンクリート供試体をすりへり

10) Symposium on Entrained-Air in Concrete; ACIJ June 1946 p 601~700.

11) Measurement of Entrained-Air in Concrete; J. H. Swanberg and T. W. Thomas A. S. T. M. proc. 1947. p 869~75.

表—13

圧力法 Press-Ur-Meter（気式）による	圧力法 Stanton Walker 型（水式）による	重量法	ローリング法
0.6	0.6	1.1	—
2.2	2.3	2.0	—
2.3	2.5	2.1	—
2.4	—	2.2	—
2.5	—	2.5	—
4.3	4.3	4.2	—
4.3	4.7	4.5	—
4.6	5.3	4.8	—
7.9	8.1	—	8.4

を行つた面を避けた相対する二面の表面からそれぞれ約 10 mm の位置でこれを切断し，なめらかに仕上げその各よの面について 1/1000 mm まで読めるコンパレーターにかけ仕上つた面上を約 10 mm 間隔の平行な直線に沿つて，その直線が切る気泡の長さを一つ一つ測定し，その長さの総計と測定したコンクリートの表面上の長さとの比から空気量を算出したものである．この方法は測定する距離が短いと偶然に起つている局部的な気泡の分布の偏りの影響が大きく響いて算出する空気量が相当変ると思われる．測定の長さと算出する空気量との関係を求めたが大体 500 mm 以上になれば安定するもののようであつたが使用するコンクリートの配合の如何によつては更に長い測定距離が必要なのではないかと思われる．

X 現場試験について

AEコンクリートの施工についての色々の問題を明らかにするために現場試験を新京浜国道および五十里堰堤に於て実施した．

〔1〕 新京浜国道に於けるAEコンクリート試験道路の施工について

施工したのは新京浜国道，東京横浜間の多摩川大橋を起点とする 7.4 km の横浜市神奈川区生麦の 4 車線高速車道の補修箇所で 6.0 m×2.75 m×0.2 m のAEコンクリートのもの 1 ブロック，普通コンクリートのもの 1 ブロック計 2 ブロックを施工した．

（1） 使用した材料

12) Camera Lucida Method for Measureing Air Void in Hardened Concrete; G. J. Verbeck ACIJ 18 1025—39. May 1947.
Discussion 19 : 1040[1]—1040[5] pt 2. Oct. 1947 by Rexford.

13) Methode for Determination of the Air-Content of Fresh and Hardened Concrete ; R. P. Vellines and T. Ason. ACIJ 20. 665—71. May 1949.

14) Exploratory Tests to Develop A Method for Determining the Air Content of Hardened Concrete ; Alexander Klein, David Pirtz and Milos Polivka A. S. T. M. Proc. Vol 50 1950.

A E 材　プロテックス（2倍濃縮液）

セメント　浅野ベロセメント（比重 3.06）

細骨材　多摩川（平　間）産　比　重 2.67

粗粒率 1.9

粗骨材　馬入川（下曽我）産　比　重 2.63

粗粒率 7.8

（2） **機械および器具**　この実施に当つて使用した機械並びに器具の主なものは次のようであつた.

ミ　キ　サ——容量 12 切（実練り 8 切）石油発動機を動力とする円筒不傾式

振　動　機——表面振動型で 12 本足の石油発動機を動力とするフレキシブルシャフト製振動機

重量は約 90 kg のもの

空気量測定器——重量法と兼用のクラインウオーカー型の水式エアーメーター

（3） **実施状況**　スランプを 2.0 cm セメント量を 332 kg/m³, 空気量を約 4.0 % とするために必要なプロテックスの量および修正を要する砂の量を求めて表—14 を得た.

コンクリート打ちは 7 月 25 日に実施したが天候は快晴で気温は 32.5～37°C であつた. プロテックスは化学天秤で計り, 練り混ぜは 1 分半行い現場までは トラックで約 1 km を運搬した. トラックから降したコンクリートは練り直してこれを振動機で締め固めた. これらの間にスランプ, 供試体の製作および空気量の測定を行つた. 仕上げはテンプレートで叩いた後を木ゴテで行い養生はぬれむしろを表面にかけ交通開始予定の材令 7 日迄これを行つた.

表—14

	粗骨材の最大寸法 (mm)	スランプの範囲 (cm)	水セメント重量比 W/C (%)	コンクリート 1m³ に用いるセメント量 (kg)	コンクリート 1m³ に用いるAE材の量 (g)	同百分率 (%)	コンクリート 1m³ 当りの水量 (kg)	空気量 (%)	粗細骨材比 G/S	コンクリート 1 m³ に用いる表面乾燥飽和状態の骨材重量 全量 (kg)	細骨材 (kg)	粗骨材 (kg)
普通コンクリート	5.0	2.0	54	332	—	—	180	—	2.0	1989	663	1326
AEコンクリート	5.0	2.0	54	332	166	0.05	180	4	2.4	1881	555	1326

（4） **結果について**　結果をまとめると表—15 のようになるがその概要は次のようであつた.

スランプ；スランプは設計配合では 2.0 cm を予定したが実際には 5.5 cm 程度となり, AEコンクリートに於てもスランプに大きな差はなかつたが外観はプラスチックで良好であつた.

強度；一般にAEコンクリートの強度は低下したが, その低下率は 材令 7 日ではあまり 変化がなかつたが 28 日では空気量 1% について約 2.5 % の強度低下がみられ曲げ強度の方では 1.9 % の低下があつた.

仕上げ；表面仕上げはAEコンクリートの方がモルタルの表面へのまわりがよく, 仕上げ面は スムースで短時間でこれを完了することが出来た.

空気量；圧力法によつて測定した空気量は 普通コンクリートでは 0.9 % AEコンクリートでは 3.3～3.9 % で計画量を多少下廻つた.

表—15

	1バッチに使用した材料					スランプ (cm)	空気量 (%)	材令 (日)	供試体の重量 (kg)	圧縮強度 (kg/cm²)	曲げ強度 (kg/cm²)	標準偏差率 (%)
	セメント量 (kg)	AE材 (g)	水量 (kg)	細骨材 (kg)	粗骨材 (kg)							
普通コンクリート	60	—	32.4	120	240	5.5	0.9	28	12,605	253	—	2.4
	〃	—	〃	〃	〃	〃	〃	7	12,763	215	—	5.8
	〃	—	〃	〃	〃	〃	〃	28	19,060	—	45	4.4
AEコンクリート	60	15.0	32.4	102	240	6.5	3.3	28	12,450	225	—	4.5
	〃	〃	〃	〃	〃	〃	3.8	7	12,497	214	—	5.9
	〃	〃	〃	〃	〃	〃	3.3	28	19,160	—	42	3.3

外観および現況；表面が滑らかであるために表面に於ける土砂の附着が少く材令3ヶ月では遠方から識別出来るほど白色状を保つていて現在まで異状は認められない．

其の他；小規模の工事のためにAE材は1バッチ毎に天秤で計量して用いたが能率的にこれを行うにはやはりジスペンサーが必要なことが痛感された．以上の施工で特に感ぜられたのは全般的な現場管理と作業担当者のAEコンクリート施工に対する認識の必要とであつた．

〔2〕 五十里堰堤仮設備用 AE コンクリートの配合設計について

鬼怒川の洪水調節のために昭和25年秋起工された五十里堰堤工事に使用される予定のAEコンクリートの実施に先だち，その試験方法，取扱い等の予備試験を兼ねて，その仮設備（鉄筋コンクリートの骨材貯蔵所，ミキシングプラント，クレーンの走行路等を含む約1500 m³）にAEコンクリートを試験的に施工する事になり，その為にAEコンクリートの配合設計並びにそれに関連した2.3の試験を行つた．

（1） **実施項目**　試験は使用材料の関係から現場でこれを行つたが実施したのは

1) 材料試験

2) 配合設計

3) AE材の添加量の影響

4) 練り混ぜの影響

の4項目であつた．

（2） **主な使用機械器具**　エアーメーター (Press-Ur-Meter)，スランプ試験器，標準フルイ，比重壜，メスシリンダー，温度計，ミキサ（10切ドラム型），型ワク，養生水槽

（3） **使用材料**

セメント；磐城普通ポルトランドセメント　比重 3.15

細骨材；鬼怒川上流産（比重 2.63，粗粒率 3.89）

粗骨材；鬼怒川上流産（比重 2.54，粗粒率 7.27）

AE材；ダレックス AEA

（4） 配合設計　設計の対象は部材の最小寸法が 30 cm，型枠と鉄筋（最大径 22 mm）の最小間隔が約 5 cm であるのと許容圧縮応力度が 80 kg/cm² （仮構造物であるために許容応力度を大きく採つた）であつたので設計条件は次のようであつた．

粗骨材の最大寸法　40 mm

$\sigma_{28}=220 \geqq 3\times\sigma_{ca}\times 1.15=276$ kg/cm²　（15 % の余裕を見て）

空気量　4.2 ± 1 %

スランプ　7.5 ± 0.5 cm　（AEコンクリートであるので比較的小さいスランプのものとした）

セメント使用量　約 300 kg/m³

これらの条件に従うように 4 種類の粗細骨材比について 1 バッチを約 4 切（0.110 m³）として行つた配合設計試験バッチの試験結果は 表—16 のようになつた．

表—16 配 合 設 計

配合											試験結果			
粗骨材の最大寸法 (mm)	スランプの範囲 (cm)	水セメント比 (%)	1バッチ当りのセメント量 (kg)	AE材の量 (cc)	1バッチ当りの水量 (kg)	粗細骨材重量比 G/S	1バッチ当りの表面乾燥飽和状態の骨材の重量 (kg) 全量	細骨材	粗骨材	V/C	空気量 (%)	スランプ (cm)	外観	圧縮強度 (kg/cm²)
40	7.5±0.5	49	37.8	17.0	18.5	1.90	191.6	66.1	125.5	—	—	0.4	荒々しい	
〃	〃	〃	37.4	16.8	18.3	1.90	191.7	66.2	125.5	—	2.65	15.0	富，軟い	
〃	〃	〃	36.4	24.8	17.8	1.90	199.0	67.0	127.0	—	3.65	14.0	富，軟い	
40	7.5±0.5	49	33.3	28.3	16.3	1.95	201.2	68.2	133.0	—	4.15	4.8	良	
〃	〃	〃	33.7	28.0	16.5	1.95	199.7	67.7	132.0	—	4.85	7.9	良好やや軟	
〃	〃	〃	33.7	27.6	16.5	1.95	199.7	67.7	132.0	—	4.15	7.5	良好	決定配合
40	7.5±0.5	49	34.8	29.6	17.0	2.00	196.3	64.8	131.5	—	4.35	13.0	軟い	
〃	〃	〃	33.7	28.6	16.5	2.00	200.1	66.6	133.5	—	4.40	11.0	分離傾向	
40	7.5±0.5	49	37.0	16.6	18.1	2.10	193.5	62.5	131.0	—	—	0.4	荒々しい	
〃	〃	〃	38.0	16.6	19.1	2.10	203.5	62.5	131.0	—	—	12.8	荒い	
〃	〃	〃	38.0	17.2	18.1	2.10	192.0	62.0	130.0	—	2.05	9.4	やや荒い	
40	7.5±0.5	44	37.5	31.2	16.5	2.03	196.3	64.8	131.5	1.86	5.05	9.5	—	240
〃	〃	49	33.7	28.0	〃	1.95	199.7	67.7	132.0	2.05	4.95	7.9	—	232
〃	〃	54	30.6	25.4	〃	1.87	203.3	70.8	132.5	2.34	5.45	9.4	—	203
〃	〃	59	28.0	23.3	〃	1.79	203.7	73.7	130.0	2.60	5.88	9.6	—	161

各試験配合の修正に際しては大体スランプ 1 cm の変化に対して水量を 2.0～5.0 kg/m³, G/S の増減 0.1 に対して水量を 2.0～3.0 kg/m³ 減増させた．又空気量の方は主としてAE材の量でこれを調節した．強度をたしかめるために 4 種類の W/C について空気量スランプを同一として圧縮強度試験をした結果は表—16 のようになつた．これらの試験結果から配合は表—17 のように決定された．

表—17

粗骨材の最大寸法 (mm)	スランプ範囲 (cm)	水セメント重量比 (%)	コンクリート1m³当りのセメント量 (kg)	コンクリート1m³当りのAE材量 (cc)	コンクリート1m³当りの水量 (kg)	空気量の範囲 (%)	粗細骨材重量比 G/S	コンクリート1m³当りの表面乾燥飽和状態の骨材の重量 (kg) 全量	細骨材	粗骨材
40	7.5±0.5	49	307	252	151	4.2±1	1.95	1817	616	1201

この決定された配合は，普通のAEコンクリートの配合に較べてAE材の量が約2倍近いことがわかるがこれは主として砂の粒度が粗い為と考えられ，工事を経済的に実施するためにはAE材の量，セメント量，砂の粒度の調整等の軽重を考えなくてはならない．

（5） 練り混ぜの影響　試験バッチの練り混ぜ量はミキサの大きさに比して相当小さく又練り混ぜ時間も1.5分に一定していたので実施に当つての練り混ぜ時間の影響を求める為に簡単な試験を行つたがその結果は表—18のようにミキサの練り混ぜ量の影響は相当大きく又練り混ぜ時間の影響も無視出来ないようでその傾向は実験室に於ける結果（表—7）とよく一致している．

表—18　練り混ぜ量の影響

配合											試験結果		
粗骨材の最大寸法 (mm)	水セメント重量比 (%)	1バッチのセメント量 (kg)	AE材の量 (cc)	1バッチ当りの水量 (kg)	粗細骨材重量比 G/S	1バッチ当りの表面乾燥飽和状態の骨材の重量 (kg) 全量	細骨材	粗骨材	練り混ぜ量 (m³)	練り混ぜ時間 (分)	気温 (°C)	空気量 (%)	スランプ (cm)
40	49	33.7	27.6	16.61	1.95	199.7	67.7	132.0	0.11	1.0	6.0～10.6	3.8	15.2
〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃		4.4	13.1
〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	1.5		3.9	12.0
〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	2.0		4.6	16.0
〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	2.5		4.9	14.8
40	49	67.4	55.2	33.22	1.95	399.4	135.4	264.0	0.22	1.5		6.5	18.8

（6） AE材添加の影響　普通のコンクリートとそれにAE材を加えたものとの比較をするためにAE材の量を変えて空気量との関係を求めた結果は表—19のように大体空気量1%の増減に対しては ダレックスの量 0.02%（セメント重量の）が対応している．

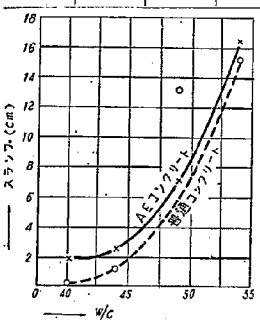
又スランプを採つてみると一般にAEコンクリートの方がウォーカブルであるがW/Cの少いものほどその差が大きくW/Cが増すとかえつて逆になる傾向さえ見られる．（図—10）

Ⅺ 結　論

実験の結果の要約はⅢにまとめてあるようにこの実験の範囲は，特に材料の範囲は広いものではなかつたが全般的に見てAEコンクリートが普通のコンクリートに較べて，ウォーカビリチーにすぐれていて，練り混ぜた後の取扱いは容易で，その利用は日本に於ても可能であるけれどもコンクリートの組成分としての新しく気

表—19　AE 材添加の影響

配合										試験結果		
粗骨材の最大寸法 (mm)	水セメント重量比 (%)	1バッチのセメント量 (kg)	AE材の量 (cc)	1バッチ当りの水量 (kg)	粗細骨材重量比 G/S	1バッチ当りの表面乾燥飽和状態の骨材の重量 (kg) 全量	細骨材	粗骨材	V/C	空気量 (%)	スランプ (cm)	圧強縮度 (kg/cm²)
40	49	33.7	27.6	16.5	1.95	199.7	67.7	132.0	1.97	4.2	7.5	239
〃	〃	〃	23.6	〃	〃	〃	〃	〃	2.06	5.0	9.5	229
〃	〃	〃	30.4	〃	〃	〃	〃	〃	1.97	4.2	11.0	210
40	40	33.7	27.6	13.5	1.95	199.7	67.7	132.0	1.60	3.0	1.9	345
〃	44	〃	〃	14.6	〃	〃	〃	〃	1.70	3.4	2.7	289
〃	49	〃	〃	16.6	〃	〃	〃	〃	2.00	4.2	7.0	220
〃	54	〃	〃	18.4	〃	〃	〃	〃	2.14	4.0	16.5	253
40	40	33.7	0	13.5	1.95	199.7	67.7	132.0	1.33	0.8	0.2	340
〃	44	〃	〃	14.6	〃	〃	〃	〃	1.52	1.6	1.2	321
〃	49	〃	〃	16.6	〃	〃	〃	〃	1.75	2.0	13.2	260
〃	54	〃	〃	18.4	〃	〃	〃	〃	1.79	0.7	15.2	273



図—10　AEコンクリートと普通コンクリートのスランプ

泡が加えられたために，配合設計から練り混ぜにいたる取扱いの如何は特にその出来上りのコンクリートの品質に影響するところが大きく，効果的なAEコンクリートの施工に関しては徹底した管理の必要が痛感される．AEコンクリートの最大の長所である凍結融解に対する耐久性については我が国では未だ十分な検討がされていないが，AEコンクリートはこの長所があつてその意義が大きいので，この点については実験室に於ける促進試験ばかりでなく実際の構造物について長期にわたる実物試験が必要であり引続いてこれに関する研究を実施中である．又これらに関連して気泡の性質の影響は極めて重大で，AEコンクリートの特徴を解明する上には，これについての研究も亦必要で，今後は鉄筋コンクリートを対象とするAEコンクリートの性質と共に明らかにされなければならない大切な問題である．

ランガー橋の振動に関する研究（2）

建設技官　安　部　清　孝

Ⅰ　犀川橋の振動実測結果……（2）
〔1〕 試験方法および測定器械……（2）
〔2〕 測定結果に対する述語の説明……（3）
Ⅱ　犀川橋の実測結果と理論結果との比較……（6）
Ⅲ　理論式の誘導に必要な使用記号の一般的説明……（8）
Ⅳ　減衰振動の基礎微分方程式の誘導……（9）
Ⅴ　基礎微分方程式による固有減衰振動の解……（12）
Ⅵ　基礎微分方程式による強制非減衰振動の解……（15）
Ⅶ　基礎微分方程式による強制減衰振動の解……（18）
Ⅷ　結　語……（22）
附　録……（22）

要　旨

前報告 83 号ではランガー橋の非減衰振動に関する基礎微分方程式を誘導し，併せて固有振動周期の理論的算定法につき説明した．この報告 84 号では前報告 83 号で計算を行つた長野県犀川橋についての実測結果を示し，これと報告 83 号にて示した計算結果との比較検討を行い，これよりしてランガー橋の振動の微分方程式の誘導過程における仮定の妥当なる事を示した．なお仮定の妥当なる事が確認されたので，減衰振動に関する基礎微分方程式を誘導し，さらに非減衰並びに減衰強制振動解を求める方法を説明した．ランガー橋の振動の問題は 83 号にて示した様にエネルギー法によつても解決出来るのであるが，ランガー橋のごとくラグランジの一般運動方程式よりえられる一般座標 q_m に関する常微分方程式が

$$\frac{d^2q_m}{dt^2}+k\frac{dq_m}{dt}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}\,q_n=p_m\sin(\nu t+\delta)$$

ここに

$$k,\ \varphi_{mn},\ p_m,\ \nu,\ \delta \text{ は既知常数}$$

の形に与えられるものは，q_m に関する連立微分方程式を解かねば正解はえられない．この種のエネルギー法による問題の一般的解決方法を与えた点に，このエネルギー法による筆者の取扱い方法の特徴が見出されるのであるが，これに関しては附録にて説明してある．

なお犀川橋の第1径間を例に取つて，固有振動周期の実測値と計算値を比較するとつぎのごとくである．

第1次の固有振動周期の実測値：　$T_{n1}=0.370$ sec

第2次の固有振動周期の実測値：　$T_{n2}=0.168$ sec

第3次の固有振動周期の実測値： $T_{a3}=0.1057$ sec

第1次の固有振動周期の計算値： $T_1=0.345$ sec

第2次の固有振動周期の計算値： $T_2=0.167$ sec

第3次の固有振動周期の計算値： $T_3=0.0997$ sec

計算周期に対する実測周期の誤差の百分率は

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1}\times 100\% \fallingdotseq 7.3\%$$

$$\frac{T_{a2}-T_2}{T_2}\times 100\% = 0.6\%$$

$$\frac{T_{a3}-T_3}{T_3}\times 100\% \fallingdotseq 2.0\%$$

となつている.

実在のランガー橋はその振動の様相を決定する重要な部分は拱肋であるので，この拱肋を主体に考えれば，実在のランガー橋の強度の低下率は近似的に

$$\omega = \frac{T_{a1}-T_1}{T_{a1}}\times 100\%$$

によつて与えられる事になる．この方式に従つて犀川橋の強度低下率を求めると

$$\omega = 6.8\%$$

となつている.

I 犀川橋の振動実測結果

この犀川橋は長野県道池田明科停車場線の犀川横過点に昭和10年に架設されたランガートラス橋であつて径間長 60.20 m，拱矢 7.00 m 補剛トラス高 1.85 m，有効幅員 5.5 m，径間数5，全長 305 m のものである.

〔1〕 試験方法および測定器械

橋の5径間に対し右岸側より番号を附けて No. 1 $S_p(S_{p1})$，No. 2 $S_p(S_{p2})$，No. 3 $S_p(S_{p3})$，No. 4 $S_p(S_{p4})$，No. 5 $S_p(S_{p5})$ と呼ぶ事にすれば，S_{p1} は起震機およびトラック走行による振動を測定し，S_{p2}，S_{p3}，S_{p4} はトラック走行による振動のみを測定した.

起震機は当研究所の試作になるものにして，3 IP の整流子モータによつて 150 rev/min～2500 rev/min の回転数に連続可変的に作られており，なお偏心質量は 1 kg，2 kg，5 kg，10 kg，20 kg の5種類が取換え可能の様に作られ，それはその重心が回転中心軸より，9.0 cm の所になる様に鋼円板に取附けられている.

走行トラックは前軸重 2.23 ton，後軸重 7.17 ton，全重 9.40 ton のもので，これを予定速度 5 km/hr～20 km/hr で走行させた.

S_{p1} と S_{p3} の振動測定には田辺式撓度振動計を用い，S_{p2} と S_{p4} の振動測定には携帯用橋梁振動計を用い

た.

田辺式撓度振動計：　0.1～1.0 sec (周期), 0.1～10 mm (振幅)

携帯用橋梁振動計：　0.2～1.0 sec (周期), 0.1～1 mm (振幅)

〔2〕 測定結果に対する述語の説明

(1) 衝 撃 率 i

$$i=\frac{\eta_i-\eta_o}{\eta_o}\times 100\%$$

η_i ： 最大衝撃撓度

η_o ： 最大静的撓度

(2) 減 衰 比 γ

$$\gamma=\frac{e_1}{e_2}$$

e_1 ： 自由振波部分の適当な点の全振幅

e_2 ： e_1 部分より 10 波隔たより減衰した点の全振幅

(3) 減 衰 係 数 ζ

$$\zeta=\frac{\log\gamma}{10\,T_{a1}}=\frac{1}{10\log_{10}e}\cdot\frac{\log_{10}\gamma}{T_{a1}}$$

Ta_1 ： 第1次の固有振動周期の実測値

γ ： 減衰比

(4) 測定撓度並びに振幅に対する補正係数 δ

$$\delta=\left(1+l_w\frac{\rho_w}{\rho_s}\right)=\frac{y}{y_s}$$

$$y=\delta\,y_s$$

y ： 測定点真上の真の上下動変位

y_s ： 上下動による燐青銅線の張力変化に応ずる spring の伸縮量 (記録紙上の変位量)

l_w ： 燐青銅線の長さ (m)

ρ_w ： 単位長当りの燐青銅線の伸張率 (cm/kg/m)

ρ_s ： spring の伸張率 (cm/kg)

なお ρ_s は spring 長さ l_s の場合に対する値として求めるものとする.

S_{p1} に対するトラック走行による測定結果は上流橋に対するものは表-1-1に，下流橋に対するものは表-1-2に示してあり，起震機による測定結果は表-1-3 に示してある. S_{p2} に対する測定結果は表-2 に; S_{p3} に対する測定結果は表-3 に，S_{p4} に対するものは表-4 に示してある.

なお表中の変位振幅は実測記録値のままの数字であるが，撓度計使用のものに対してはこれらの数字に補正係数 δ を乗ずれば真の値がえられる.

表-1-1 S_{p1} 上流橋トラック走行記録

試験番号	予定速度 (km/hr)	実速度 (km/hr)	最大衝撃度 η_i(mm)	最大静的撓度 η_0(mm)	最大振幅 B(mm)	固有振動周期 Ta_1(sec)	衝撃率 i(%)	減衰比 γ	減衰係数 ζ(sec^{-1})	備考
1	5	8.85	5.04	3.66	3.00	0.370	37.7	1.487	0.10580	l_s=0.315 m
2	5	13.34	5.00	3.30	3.92	0.372	51.5	1.091	——	l_w=3.12 m
3	5	7.53	4.58	3.60	3.90	0.370	27.2	1.264	0.06332	ρ_s=1.123cm/kg
4	5	7.82	4.00	3.56	2.30	0.375	12.4	1.503	0.10866	ρ_w=0.00962 cm/kg/m
5	10	7.66	5.00	3.60	3.82	0.367	38.9	1.465	0.10405	
6	10	13.06	4.90	3.32	4.54	0.365	47.6	1.273	0.06613	δ=1.02673
7	15	18.37	4.00	3.20	3.60	0.375	25.0	1.342	0.07643	
8	15	16.80	4.70	3.10	3.62	0.370	51.6	1.285	0.06687	
9	20	18.52	4.60	3.60	3.66	0.371	27.8	1.378	0.08642	
10	20	21.89	4.60	3.30	2.88	0.377	39.4	1.429	0.09224	
11	Max	32.35	4.62	3.40	3.70	0.374	35.9	1.495	0.10752	
12	20	21.04	4.96	3.56	3.94	0.372	39.3	1.149	——	
Ext 1			2.00	——	1.70	0.370	58.7	1.385	0.08783	普通交通荷重
Ext 2			4.00	——	3.16	——	51.7	1.218	——	

表-1-2 S_{p1} 下流橋トラック走行記録

試験番号	予定速度 (km/hr)	実速度 (km/hr)	最大衝撃度 η_i(mm)	最大静的撓度 η_0(mm)	最大振幅 B(mm)	固有振動周期 Ta_1(sec)	衝撃率 i(%)	減衰比 γ	減衰係数 ζ(sec^{-1})	備考
1	5	8.85	5.24	3.90	2.80	0.372	34.4	1.346	0.07986	l_s=0.42 m
2	5	13.34	5.00	3.50	3.80	0.370	42.9	1.109	——	l_w=3.32m
3	5	7.53	4.80	3.70	3.10	——	29.7	1.403	——	ρ_s=1.523cm/kg
4	5	7.82	4.66	4.03	3.50	0.365	15.6	1.260	0.06332	ρ_w=0.00962 cm/kg/m
5	10	7.66	4.70	3.76	3.60	0.369	25.0	1.386	0.08846	
6	10	13.06	5.00	3.40	4.40	0.370	47.1	1.263	0.06311	δ=1.02085
7	15	18.37	4.26	3.90	3.20	0.368	9.2	1.187	0.04658	
8	15	16.80	6.03	4.18	4.52	0.368	44.2	1.285	0.06814	
9	20	18.52	5.50	4.20	3.00	0.368	31.0	1.377	0.08693	
10	20	21.89	5.80	3.88	4.20	0.371	49.5	1.108	——	
11	Max	32.35	5.36	3.90	5.16	0.370	37.4	1.400	0.09094	
12	20	21.04	6.40	4.00	4.72	0.372	60.0	1.125	——	
Ext 1			2.60	1.80	1.72	0.370	54.4	1.126	——	普通交通荷重
Ext 2			5.20	3.50	3.50	0.372	48.6	1.211	0.05012	

表-1-3 S_{p1} 起震機記録

試験番号	起震機回転数 (rev/min)	上流桁 共鳴周期 $T'_{a_1}, T'_{a_2}, T'_{a_3}$(sec)	上流桁 固有周期 T'_{a_1}(sec)	下流桁 共鳴周期 $T'_{a_1}, T'_{a_2}, T'_{a_3}$(sec)	下流桁 固有周期 T'_{a_1}(sec)
1	160	0.370	0.372	0.370	0.370
2	160	——	——	0.372	0.370
3	350	0.175	——	0.174	0.364
4	350	0.165	0.368	0.160	0.375
5	625	0.099	——	0.093	0.370
6	630	0.098	0.367	0.100	0.365
7	630	0.104	0.365	0.100	0.370

表—2 S_{p2} トラック走行記録

試験番号	予定速度 (km/hr)	固有振動周期 T'_{a1}(sec)	減衰比 γ	備考
1	5	0.375	1.451	携帯用橋梁振動計記録
2	5	0.376	1.284	
3	15	0.372	1.400	
4	15	0.375	1.462	
5	25	0.370	1.270	
6	25	0.362	1.395	

表—3 S_{p3} トラック走行記録

試験番号	予定速度 (km/hr)	最大衝撃撓度 η_i(mm)	最大静的撓度 η_0'mm	最大振幅 B(mm)	固有振動周期 T'_{a_1}(sec)	衝撃率 i (%)	減衰比 γ	減衰係数 c(sec)	備考
1	5	5.30	3.68	4.90	0.368	44.0	1.146	——	l_s=0.370 m
2	5	5.60	3.58	5.64	0.375	56.4	1.535	0.11427	l_w=2.35 m
3	15	5.20	3.90	4.26	0.372	33.3	1.311	0.07279	ρ_s=1.042cm/kg
4	15	5.22	3.48	5.00	0.368	50.0	1.407	0.09279	ρ_w=0.00962cm/kg/m
5	25	5.28	3.60	3.80	0.370	46.7	1.725	0.14689	δ=1.02170
6	25	5.28	3.60	3.70	——	46.7	——	——	
Ext 1		4.80	3.24	4.03	0.370	48.1	1.362	0.08501	普通交通荷重

表—4 S_{p4} トラック走行記録

試験番号	予定速度 (km/hr)	固有振動周期 T'_{a1}(sec)	減衰比 γ	備考
1	5	0.350	1.417	携帯用橋梁振動計記録
2	5	0.372	1.400	
3	5	0.370	1.280	
4	5	0.370	1.321	

5	10	0.374	1.241
6	10	0.360	1.231
7	15	0.368	1.265
8	15	0.375	1.429
9	20	0.368	1.200
10	20	0.367	1.250
11	Max	0.370	1.263
12	20	0.374	1.344

Ⅱ 犀川橋の実測結果と理論結果との比較

固有振動周期の測定値の平均値はつぎのごとくである.

Sp_1 に対して：

(1) **トラック走行**

上流橋： $T'_{a1}=0.3715$ sec
下流橋： $T'_{a1}=0.3696$ sec
平均： $T'_{a1}=0.3705$ sec

(2) **起震機**

上流橋： $T'_{a1}=0.3705$ sec, $T'_{a2}=0.170$ sec, $T'_{a3}=0.1057$ sec
下流橋： $T'_{a1}=0.3691$ sec, $T'_{a2}=0.166$ sec, $T'_{a3}=0.0977$ sec
平均： $T'_{a1}=0.3698$ sec, $T'_{a2}=0.168$ sec, $T'_{a3}=0.1017$ sec

従つて Sp_1 全体としての周期の平均値は

$$T_{a1}=0.370\,\text{sec},\quad T_{a2}=0,168\,\text{sec},\quad T_{a3}=0.102\,\text{sec}$$

S_{p2} に対して：

$$T_{a1}=0.372\,\text{sec}$$

S_{p3} に対して：

$$T_{a1}=0.371\,\text{sec}$$

S_{p4} に対して：

$$T_{a1}=0.368\,\text{sec}$$

T'_{a1}： 第1次の固有振動周期の実測値
T'_{a2}： 第2次の固有振動周期の実測値
T'_{a3}： 第3次の固有振動周期の実測値

次に犀川橋の固有振動周期の計算値を前報告 83 号にて求めた結果に従つて示すとつぎのごとくである.

第1次の固有振動周期： $T_1=0.345$ sec

第2次の固有振動周期： $T_2=0.167$ sec

第3次の固有振動周期： $T_3=0.0997$ sec

従つて実測周期の計算周期に対する誤差の百分率を示すとつぎのごとくなる.

S_{p1} に対しては

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1}\times 100\%=7.3\%$$

$$\frac{T_{a2}-T_2}{T_2}\times 100\%=0.6\%$$

$$\frac{T_{a3}-T_3}{T_3}\times 100\%=2.0\%$$

S_{p2} に対しては

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1}\times 100\%=7.8\%$$

S_{p3} に対しては

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1}\times 100\%=7.5\%$$

S_{p4} に対しては

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1}\times 100\%=6.7\%$$

この事よりして筆者の理論式の妥当性は確認された.

次に計算周期 T_1, T_2, T_3 の比をとると

$$\frac{T_1}{T_2}=2.066,\quad \frac{T_1}{T_3}=3.460$$

となつており，従つて

$$T_1=2.036\,T_2,\quad T_1=3.460\,T_3$$

となつている.

この事よりして，実在のランガー橋においては低次の振動周期を決定する決定的要素は拱肋の断面積であつて，低次の振動周期は拱肋の断面積に近似的に逆比例すると考えても大誤ないと思う.

従つてランガー橋の振動学的強度は第1次の固有振動周期に近似的に逆比例すると考えられるので，この強度低下率を ω をもつて示すと，これは

$$\omega=\frac{T_{a1}-T_1}{T_{a1}}\times 100\%$$

によつて与えられる.

計算周期が正しいと仮定すれば，犀川橋の強度低下率はつぎのごとくなる.

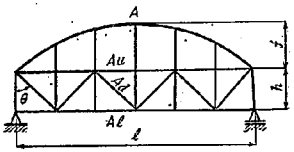
S_{p1}： $\omega=6.8\%$

S_{p2}： $\omega=7.2\%$

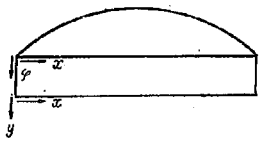
S_{p3} : $\omega=7.0\%$

S_{p4} : $\omega=6.3\%$

Ⅲ 理論式の誘導に必要な使用記号の一般的説明



図－1 (a)



図－1 (b)

x : 単純橋および拱肋の任意点の左支点よりの距離 1)

l : ランガー橋の径間長

f : 拱肋の拱矢

h : 単純橋の高さ

ξ : x の l に対する比，すなわち x/l

y : 単純橋の振動変位

y_s : 単純トラス橋の腹材変形による振動変位

y_m : 単純橋の曲げ変形による振動変位

η : 単純橋の振動の正規函数

η_n : 単純橋の第 n 次の正則型振動の正規函数

ds : 任意点における dx 部分の拱肋の微小弧長

Sds: 拱肋の ds 部分が振動中に変化する長さ

φ : 拱肋の軸曲線を表わす函数

A : 任意点における拱肋の断面積

A_u : 任意点における単純トラスの上弦材の断面積

A_l : 任意点における単純トラスの下弦材の断面積

A_d : 単純トラスの斜材の平均断面積

a : 垂直吊材の径間方向の単位長当りの断面積

F : A_u と A_l との和，すなわち (A_u+A_l)

θ : 単純トラスの斜材の垂直材に対する傾斜角

I : 単純橋の断面二次率

　: A_u および A_l のそれぞれの重心軸に関する断面二次率の和

1) 左支点を原点にとる.

p ： 任意点における径間方向の単位幅部分の垂直吊材に作用する張力

ε ： 垂直吊材の上記部分の p による伸び

H ： 拱肋に作用する軸力の水平分値 [2]

H_x： 任意点における拱肋の振動中の軸力の水平分値

H_o： $x=0$ なる原点における H_x の値

δP： 任意点における拱肋の振動中の軸力の変化量

P ： 任意点における拱肋に作用する軸力

Y ： ランガー橋の単位長当りに作用する強制力

ρ ： ランガー橋の単位長当りの質量

E ： ランガー橋を構成する材のヤング弾性係数

ν ： ランガー橋の固有円振動数

ν_n ： ランガー橋の第 n 次の固有円振動数

単純トラス橋に対しては断面二次率としてはつぎの式によつて表わされるものを採用するものとする.

$$I=\frac{A_u\cdot A_l}{A_u+A_l}\cdot h^2+J$$

なお η はつぎの式によつて表わされる.

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\eta_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \infty)$$

a_n は任意常数とする.

Ⅳ　減衰振動の基礎微分方程式の誘導

減衰力に関してはつぎの想定の下に考察を進める事にする.

（1） 振動中の外部減衰力は変位速度に比例する.

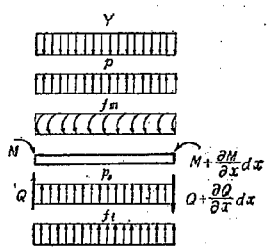
$$\zeta_o=\frac{(\text{粘性抵抗})}{(\text{変位速度})\times(\text{管量})}$$

（2） 振動中の内部減衰力は歪速度に比例する.

$$\zeta_i=\frac{(\text{粘性応力})}{(\text{歪速度})\times(\text{弾性率})}$$

しかるときは x 点における垂直材の単位幅に作用する軸力 p はつぎのごとく与えられる.

$$p=-u\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\right)-v\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\zeta_i\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



図— 2

2) 自由振動の場合には自重による軸力の水平分値となる.

ここに v, v は報告 83 号の (14) 式に与えられているものである.

原点における H_x すなわち H_o による x 点の垂直分布力 p_o は

$$p_o = H_o\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\right) \cdots\cdots(2)$$

によつて与えられる.

断面の剪断力 Q と腹力変形 y_s との間には

$$Q=EA_d\sin\theta\left(\frac{\partial y_s}{\partial x}+\zeta_i\frac{\partial^2 y_s}{\partial x\partial t}\right) \cdots\cdots(3)$$

なる関係が報告 83 号の (19) 式に対応して成立する.

断面の曲げ モーメント M と曲げ変形 y_m との間には報告 83 号の (24) 式に対応して

$$M=-EI\left(\frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3 y_m}{\partial x^2\partial t}\right) \cdots\cdots(4)$$

なる関係が成立する.

ここに

$$y_m=y-y_s \cdots\cdots(5)$$

x 点の単位長当りに作用する並進慣性力 f_t は

$$f_t=\rho\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\zeta_o\frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdots\cdots(6)$$

によつて与えられる.

x 点の単位長当りに左向きに作用する廻転慣性力 f_m は

$$f_m=\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^3 y_m}{\partial x\partial t^2}+\zeta_o\frac{\partial^2 y_m}{\partial x\partial t}\right) \cdots\cdots(7)$$

によつて与えられる.

単位長当りに作用する任意強制力を Y とすれば単純橋の任意点 x における微小要素 dx 部分に作用する鉛直方向の力の釣合式および廻転運動の釣合式は図-2 を参考にすれば

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+Y-f_t-p-p_o=0 \cdots\cdots(8)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}-Q+f_m=0 \cdots\cdots(9)$$

によつて与えられる.

この両式中の p_o, p, f_m, f_t, Q, M に前出の式を代入すれば減衰項を含むランガー橋の強制振動の基礎微分方程式はつぎの連立微分方程式によつて与えられる.

$$\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\zeta_o\frac{\partial}{\partial t}\right)y=EA_d\sin\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y_s$$

$$+u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$

$$+v\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_t\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y$$

$$-H_0'\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y+Y \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)(y-y_s)=EA_t\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_t\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y_s$$

$$+E\frac{\partial}{\partial x}\left\{I\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)(y-y_s)\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

この両式から y_s を消去すれば強制振動の基礎微分方程式が得られるのであるが，これは一般には求められない．

いま腹材変形の影響を無視すればランガー橋の減衰振動の基礎微分方程式は

$$\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial}{\partial t}\right)y=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y\right\}$$

$$-E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{I\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y\right\}$$

$$+u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$

$$+v\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_t\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y$$

$$-H_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y+Y \quad \cdots\cdots(12)$$

となる．

なお I が一定値であるか又は振動学的に等値な等断面換算断面二次率を用いる事にし，ρ および F' の値の変化の影響は小さいので，これを一定値であるとすると (12) 式はつぎのごとくなる．

$$\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial}{\partial t}\right)y=-\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$

$$-EI\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\zeta_t\frac{\partial^5}{\partial x^4\partial t}\right)y$$

$$+u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$

$$+v\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_t\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y$$

$$-H_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_t\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y+Y \quad \cdots\cdots(13)$$

V 基礎微分方程式による固有減衰振動の解

腹材変形の影響を考慮に入れると一般に解けないので，この影響を無視した(12)式の右辺の V を除いた式

$$\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial}{\partial t}\right)y=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y\right\}$$
$$-E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{I\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y\right\}$$
$$+u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$
$$+v\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_i\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y$$
$$-H_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y \quad\cdots\cdots(14)$$

を考察する事にする．

この (14) 式にて I, F, A, A_d, ρ, u はすべて一定の場合にはこれに

$$y=\eta(\xi)e^{\sigma t},\quad \sigma=-\zeta+i\nu_0 \quad\cdots\cdots(15)$$

を代入すれば，η に関するつぎの常微分方程式がえられる．

$$\left(k_1\eta-k_3\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)\sigma^2+\left\{\zeta_0\left(k_1\eta-k_3\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)+\zeta_i\left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4}-k_1\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-k_2\frac{d\eta}{d\xi}\right)\right\}\sigma$$
$$+\left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4}-k_1\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-k_2\frac{d\eta}{d\xi}\right)=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

ここに

$$k_1=\frac{(u-H_0)\,l^2}{EI},\quad k_2=\frac{vl^3}{EI},\quad k_3=\frac{\rho l^2}{EF},\quad k_4=\frac{\rho l^4}{EI} \quad\cdots\cdots(17)$$

いま η に境界条件を満足する式

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\gamma_n\xi,\quad \gamma_n=n\pi \quad\cdots\cdots(18)$$

を代入して *Galerkin* の方法を適用するとつぎの式がえられる．

$$a_m(\vartheta'_{mm}\sigma^2+\varpi'_{mm}\sigma+\tau'_{mm})+\sum_{n=1}^{\infty}{}'a_n(\varpi'_{mn}\sigma+\tau'_{mn})=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

ここに

$$\vartheta'_{mm}=\frac{k_4+k_3\gamma_m^2}{2}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\text{æ}'_{mm} &= \frac{\zeta_o(k_4+k_3\gamma_m{}^2)}{2}+\frac{\zeta_i\gamma_m{}^4}{2}- \\
&\quad +\zeta_i\int_0^1(k_1\gamma_m{}^2\sin\gamma_m\xi-k_2\gamma_m\cos\gamma_m\xi)\sin\gamma_m\xi\,d\xi \\
\tau'_{mm} &= \frac{\gamma_m{}^4}{2}+\int_0^1(k_1\gamma_m{}^2\sin\gamma_m\xi-k_2\gamma_m\cos\gamma_m\xi)\sin\gamma_m\xi\,d\xi \\
\text{æ}'_{mn} &= \zeta_i\int_0^1(k_1\gamma_n{}^2\sin\gamma_n\xi-k_2\gamma_n\cos\gamma_n\xi)\sin\gamma_m\xi\,d\xi \\
\tau'_{mn} &= \int_0^1(k_1\gamma_n{}^2\sin\gamma_n\xi-k_2\gamma_n\cos\gamma_n\xi)\sin\gamma_n\xi\,d\xi
\end{aligned}
\right\}\quad\cdots\cdots(20)
$$

なお (19) 式にて，$m=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots,\infty$ にして，$\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ は $\sum_{n=1}^{\infty}$ の内の $n=m$ なる項を除いた和とする．

(19) 式よりすべての任意常数を消去すれば σ に関するつぎの行列方程式がえられる．

$$
\begin{vmatrix}
\vartheta'_{11}\sigma^2+\text{æ}'_{11}\sigma+\tau'_{11}, & \text{æ}'_{12}\sigma+\tau'_{12}, & \cdots\cdots \\
\text{æ}'_{21}\sigma+\tau'_{21}, & \vartheta'_{22}\sigma^2+\text{æ}'_{22}\sigma+\tau'_{22} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix} = 0 \quad\cdots\cdots(21)
$$

ここに

$$\sigma=-\zeta+i\nu_o,\quad \tau,\ \nu_o \text{ は実正数}\quad\cdots\cdots(22)$$

拱肋軸曲線が対称の場合には

$$\text{æ}'_{12}=\text{æ}'_{21}=\text{æ}'_{14}=\text{æ}'_{41}=\text{æ}'_{32}=\text{æ}'_{23}\ \cdots\cdots\ \text{etc}=0$$

$$\tau'_{12}=\tau'_{21}=\tau'_{14}=\tau'_{41}=\tau'_{32}=\tau'_{23}\ \cdots\cdots\ \text{etc}=0$$

となるので (21) 式は奇数文字添字群行列式と偶数添字群行式とに分けられる．例えば

$$
\begin{vmatrix}
\vartheta'_{11}\sigma^2+\text{æ}'_{11}\sigma+\tau'_{11}, & \text{æ}'_{13}\sigma+\tau'_{13}\cdots\cdots \\
\text{æ}'_{31}\sigma+\tau'_{31}, & \vartheta'_{33}\sigma^2+\text{æ}'_{33}\sigma+\tau'_{33}\cdots\cdots \\
\vdots & \vdots\ \ddots
\end{vmatrix} = 0 \quad\cdots\cdots(23)
$$

$$
\begin{vmatrix}
\vartheta'_{22}\sigma^2+\text{æ}'_{22}\sigma+\tau'_{22}, & \text{æ}'_{24}\sigma+\tau'_{24}\cdots\cdots \\
\text{æ}'_{42}\sigma+\tau'_{42}, & \vartheta'_{44}\sigma^2+\text{æ}'_{44}\sigma+\tau'_{44}\cdots\cdots \\
\vdots & \vdots\ \ddots
\end{vmatrix} = 0 \quad\cdots\cdots(24)
$$

に分解される．

いま(23)式の第2項までとつて考えると (23) 式はつぎのごとく展開される．

$$d_4\sigma^4+d_3\sigma^3+d_2\sigma^2+d_1\sigma+d_0=0\quad\cdots\cdots(25)$$

ここに

$$
\left.
\begin{aligned}
d_4&=\vartheta'_{11}\vartheta'_{33} \\
d_3&=\vartheta'_{11}\text{æ}'_{33}+\vartheta'_{33}\text{æ}'_{11}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left.\begin{aligned} d_2&=\vartheta'_{11}\tau'_{33}+\vartheta'_{33}\tau'_{11}+\text{æ}'_{11}\text{æ}'_{33}-\text{æ}'_{13}\text{æ}'_{31}\\ d_1&=\text{æ}'_{11}\tau'_{33}+\text{æ}'_{33}\tau'_{11}-\text{æ}'_{13}\tau'_{31}-\text{æ}'_{31}\tau'_{13}\\ d_0&=\tau'_{11}\tau'_{33}-\tau'_{13}\tau'_{31}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

(25) 式の σ に $\sigma=-\zeta+i\nu_0$ を代入して，実部および虚部をそれぞれ零に等しくおくと

$$d_4(\zeta^4-6\zeta^2\nu_0^2+\nu_0^4)-d_3\zeta(\zeta^2-3\nu_0^2)+d_2(\zeta^2-\nu_0^2)-d_1\zeta+d_0=0\cdots\cdots(27)$$

$$4d_4\zeta(\zeta^2-\nu_0^2)-d_3(3\zeta^2-\nu_0^2)+2d_2\zeta-d_1=0\cdots\cdots(28)$$

がえられる．

(28) 式より

$$\nu_0=\sqrt{\frac{4d_4\zeta^3-3d_3\zeta^2+2d_2\zeta-d_1}{4d_4\zeta-d_3}}\cdots\cdots(29)$$

がえられる．これを (27) 式に代入すると

$$A_6\zeta^6-A_5\zeta^5+A_4\zeta^4-A_3\zeta^3+A_2\zeta^2-A_1\zeta+A_0=0\cdots\cdots(30)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} A_0&=d_1d_2d_4-d_0d_3^2-d_1^2d_4\\ A_1&=2d_3(d_1d_3+d_2^2+4d_0d_4)\\ A_2&=4(d_2^2d_4+d_1d_3d_4+2d_2d_3^2-4d_0d_4^2)\\ A_3&=8d_3(4d_2d_4+d_3^2)\\ A_4&=16d_4(2d_2d_4+3d_3^2)\\ A_5&=96d_3d_4^2\\ A_6&=64d_4^3\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(31)$$

(30) 式よりえられる最小の正の実根を ζ_1 とし，この ζ_1 の値を (29) 式に代入すれば ν_0 の最小根 ν_1 がえられ，これより第1次の固有振動周期 T_1 は

$$T_1=\frac{2\pi}{\nu_1}\cdots\cdots(32)$$

によつて与えられる．

なお一般に第 n 番目の ζ の正根を ζ_n とし，これに対応する ν_0 の値を ν_n とし，これに対応する周期を T_n とすると

$$T_n=\frac{2\pi}{\nu_n}\cdots\cdots(33)$$

によつて与えられる．

従つて固有振動の解は一般に

$$y_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\zeta_nt}\sin n\pi\xi\sin(\nu_nt+\delta_n)\cdots\cdots(34)$$

によつて与えられる．　$\xi=\frac{x}{l}$

ここに a_n および δ_n は任意常数とする．

Ⅵ　基礎微分方程式による強制非減衰振動の解

この場合には腹材変形の影響も考慮に入れて取扱うものとすると，振動の基礎微分方程式[3]は前報告 83 号の (26) 式によつてつぎのごとく与えられている．

$$\left(1+\frac{u-H_0}{EA_d\sin\theta}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{1}{EA_d\sin\theta}\left(2\frac{du}{dx}+v\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-\left\{\frac{u-H_0}{EI}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{EA_d\sin\theta}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\left(\frac{v}{EI}-\frac{1}{EA_d\sin\theta}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\rho}{EI}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\rho v}{E^2FA_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial t^2}-\frac{\rho}{E}\left\{\frac{1}{F}+\frac{1}{Ad\sin\theta}\left(1+\frac{u-H_0}{EF}\right)\right\}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2}{E^2FA_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$$

$$=\frac{Y}{EI}-\frac{1}{EA_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\rho}{E^2FA_d\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\quad\cdots\cdots(35)$$

いま強制力 Y が正弦的に

$$Y=Y_0(\xi)\cdot\sin(\nu t+\delta)\quad\cdots\cdots(36)$$

ここに δ は位相角

の形に作用するものとし，この Y_0 の径間 l 上のフーリエ級数展開の係数を p_n とすると，

$$Y=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\sin\gamma_n\xi\sin(\nu t+\delta)\quad\cdots\cdots(36)'$$

$$\gamma_n=n\pi,\qquad \xi=\frac{x}{l}$$

となる．

(36)′ 式にて与えられる強制力が作用する場合，(35) 式を満足する強制振動の特解を

$$y=\bar{\eta}\sin(\nu t+\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\gamma_n\xi\sin(\nu t+\delta)\quad\cdots\cdots(37)$$

ここに B_n は常数値

の形に置いて y を (35) 式の y に代入して $\sin(\nu t+\delta)$ を分離すれば $\bar{\eta}$ に関するつぎの方程式がえられる．

$$\alpha_1\frac{d^4\bar{\eta}}{d\xi^4}+\alpha_2\frac{d^3\bar{\eta}}{d\xi^3}-\alpha_3\frac{d^2\bar{\eta}}{d\xi^2}-\alpha_4\frac{d\bar{\eta}}{d\xi}-\left(\alpha_5\bar{\eta}-\alpha_6\frac{d\bar{\eta}}{d\xi}-\alpha_7\frac{d^2\bar{\eta}}{d\xi^2}\right)\nu^2+\alpha_8\bar{\eta}\nu^4$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}p_n(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_n^2)\sin\gamma_n\xi\quad\cdots\cdots(38)$$

ここに

3)：I, F, A, A_d, ρ, a すべて一定の場合を取扱うものとする．

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=1+\frac{u-H_0}{EA_a\sin\theta},\quad \alpha_2=-\frac{l}{EA_a\sin\theta}\left(2\frac{du}{dx}+v\right)\\
&\alpha_3=l^2\left\{\frac{u-H_0}{EI}-\frac{1}{EA_a\sin\theta}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)\right\}\\
&\alpha_4=l^3\left(\frac{v}{EI}-\frac{1}{EA_a\sin\theta}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\right)\\
&\alpha_5=\frac{\rho l^4}{EI},\quad \alpha_6=\frac{\rho l^3 v}{E^2FA_a\sin\theta}\\
&\alpha_7=\frac{\rho l^2}{E}\left\{\frac{1}{F}+\frac{1}{A_a\sin\theta}\left(1+\frac{u-H_0}{EF}\right)\right\}\\
&\alpha_8=\frac{\rho^2 l^4}{E^2FA_a\sin\theta},\quad \alpha_9=\frac{l^4}{2}\left(\frac{1}{EI}-\frac{\rho\nu^2}{E^2FA_a\sin\theta}\right)\\
&\alpha_{10}=\frac{l^2}{2EA_a\sin\theta}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(39)
$$

(38) 式の両辺に $\gamma_m(\xi)$ を乗じ，ξ に関して 0 より 1 まで積分すれば，B_n に関するつぎの形の式がえられる．

$$
\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\vartheta_{mn}-æ_{mn}\nu^2+\tau_{mn}\nu^4)=p_m(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_m{}^2),\quad(m=1,2,3,\cdots\cdots,\infty)\cdots\cdots(40)
$$

ここに

$$
\left.\begin{aligned}
\vartheta_{mn}&=\int_0^1(\alpha_1\gamma_n{}^4\sin\gamma_n\xi-\alpha_2\gamma_n{}^3\cos\gamma_n\xi+\alpha_3\gamma_n{}^2\sin\gamma_n\xi\\
&\qquad-\alpha_4\gamma_n\cos\gamma_n\xi)\sin\gamma_m\xi d\xi\\
æ_{mn}&=\int_0^1(\alpha_5\sin\gamma_n\xi-\alpha_6\gamma_n\cos\gamma_n\xi+\alpha_7\gamma_n{}^2\sin\gamma_n\xi)\sin\gamma_n\xi d\xi\\
\tau_{mn}&=\int_0^1\alpha_8\sin\gamma_n\xi\sin\gamma_m\xi d\xi
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(41)
$$

(40) 式よりえられる B_n に関する無数の連立方程式より B_n を求めると

$$
B_n=\frac{D_{p_n}}{D_\nu}=\frac{D_{p_n}}{(\nu_n{}^2-\nu^2)D_{\nu_n}},\quad D_{\nu_n}=\frac{D_\nu}{\nu_n{}^2-\nu^2}\quad\cdots\cdots(42)
$$

となる．

ここに

$$
D_\nu=\begin{vmatrix}
\vartheta_{11}-æ_{11}\nu^2+\tau_{11}\nu^4, & \vartheta_{12}-æ_{12}\nu^2+\tau_{12}\nu^4, & \cdots\cdots, & \vartheta_{1n}-æ_{1n}\nu^2+\tau_{1n}\nu^4, & \cdots\cdots\\
\vartheta_{21}-æ_{21}\nu^2+\tau_{21}\nu^4, & \vartheta_{22}-æ_{22}\nu^2+\tau_{22}\nu^4, & \cdots\cdots, & \vartheta_{2n}-æ_{2n}\nu^2+\tau_{2n}\nu^4, & \cdots\cdots\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\vartheta_{n1}-æ_{n1}\nu^2+\tau_{n1}\nu^4, & \vartheta_{n2}-æ_{n2}\nu^2+\tau_{n2}\nu^4, & \cdots\cdots, & \vartheta_{nn}-æ_{nn}\nu^2+\tau_{nn}\nu^4, & \cdots
\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(43)
$$

$$D_n=\begin{vmatrix} \vartheta_{11}-\varpi_{11}\nu^2+\tau_{11}\nu^4, & \vartheta_{12}-\varpi_{12}\nu^2+\tau_{12}\nu^4, \cdots\cdots, & p_1(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_1^2), \cdots\cdots \\ \vartheta_{21}-\varpi_{21}\nu^2+\tau_{21}\nu^4, & \vartheta_{22}-\varpi_{22}\nu^2+\tau_{22}\nu^4, \cdots\cdots, & p_2(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_2^2), \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vartheta_{n1}-\varpi_{n1}\nu^2+\tau_{n1}\nu^4, & \vartheta_{n2}-\varpi_{n2}\nu^2+\tau_{n2}\nu^4, \cdots\cdots, & p_n(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_n^2), \cdots \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots(44)$$

すなわち D_n は D_ν の第 n 列の因子の代りに右辺の項を置き換えた行列式である.

いま拱肋の軸曲線 φ が対称曲線で与えられ，行列式の第4項までを考える場合を例にとつて D_{pn}, $D_{\nu n}$ の値を具体的に求めてみよう.

この場合は奇数添字行列式と偶数添字行列式に分離して考えられる.

$$\left.\begin{aligned} D_{p1}&=\begin{vmatrix} p_1(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_1^2), & \vartheta_{13}-\varpi_{13}\nu^2 \\ p_3(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_3^2), & \vartheta_{33}-\varpi_{33}\nu^2+\tau_{33}\nu^4 \end{vmatrix} \\ D_{p2}&=\begin{vmatrix} p_2(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_2^2), & \vartheta_{24}-\varpi_{24}\nu^2 \\ p_4(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_4^2), & \vartheta_{44}-\varpi_{44}\nu^2+\tau_{44}\nu^4 \end{vmatrix} \\ D_{p3}&=\begin{vmatrix} \vartheta_{11}-\varpi_{11}\nu^2+\tau_{11}\nu^4, & p_1(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_1^2) \\ \vartheta_{31}-\varpi_{31}\nu^2, & p_3(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_3^2) \end{vmatrix} \\ D_{p4}&=\begin{vmatrix} \vartheta_{22}-\varpi_{22}\nu^2+\tau_{22}\nu^4, & p_2(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_2^2) \\ \vartheta_{42}-\varpi_{42}\nu^2, & p_4(\alpha_9+\alpha_{10}\gamma_4^2) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(45)$$

$$\left.\begin{aligned} D_{\nu1}&=(\vartheta_{11}\varpi_{33}+\vartheta_{33}\varpi_{11}-\vartheta_{13}\varpi_{31}-\vartheta_{31}\varpi_{13}) \\ &\quad-(\vartheta_{11}\tau_{33}+\vartheta_{33}\tau_{11}+\varpi_{11}\varpi_{33}-\varpi_{13}\varpi_{31})(\nu_1^2+\nu^2) \\ &\quad+(\varpi_{11}\tau_{33}+\varpi_{33}\tau_{11})(\nu_1^4+\nu_1^2\nu^2+\nu^4)-\tau_{11}\tau_{33}(\nu_1^2+\nu^2)(\nu_1^4+\nu^4) \\ D_{\nu2}&=(\vartheta_{22}\varpi_{44}+\vartheta_{44}\varpi_{22}-\vartheta_{24}\varpi_{42}-\vartheta_{42}\varpi_{24}) \\ &\quad-(\vartheta_{22}\tau_{44}+\vartheta_{44}\tau_{22}+\varpi_{22}\tau_{44}-\varpi_{24}\varpi_{42})(\nu_2^2+\nu^2) \\ &\quad+(\varpi_{22}\tau_{44}+\varpi_{44}\tau_{22})(\nu_2^4+\nu_2^2\nu^2+\nu^4)-\tau_{22}\tau_{44}(\nu_2^2+\nu^2)(\nu_2^4+\nu^4) \\ D_{\nu3}&=(\vartheta_{11}\varpi_{33}+\vartheta_{33}\varpi_{11}-\vartheta_{13}\varpi_{31}-\vartheta_{31}\varpi_{13}) \\ &\quad-(\vartheta_{11}\tau_{33}+\vartheta_{33}\tau_{11}+\varpi_{11}\varpi_{33}-\varpi_{13}\varpi_{31})(\nu_3^2+\nu^2) \\ &\quad+(\varpi_{11}\tau_{33}+\varpi_{33}\tau_{11})(\nu_3^4+\nu_3^2\nu^2+\nu^4)-\tau_{11}\tau_{33}(\nu_3^2+\nu^2)(\nu_3^4+\nu^4) \\ D_{\nu4}&=(\vartheta_{22}\varpi_{44}+\vartheta_{44}\varpi_{22}-\vartheta_{24}\varpi_{42}-\vartheta_{42}\varpi_{24}) \\ &\quad-(\vartheta_{22}\tau_{44}+\vartheta_{44}\tau_{22}+\varpi_{22}\varpi_{44}-\varpi_{24}\varpi_{42})(\nu_4^2+\nu^2) \\ &\quad+(\varpi_{22}\tau_{44}+\varpi_{44}\tau_{22})(\nu_4^4+\nu_4^2\nu^2+\nu^4)-\tau_{22}\tau_{44}(\nu_4^2+\nu^2)(\nu_4^4+\nu^4) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(46)$$

ここに ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 はそれぞれ第1次，第2次，第3次，第4次の固有円振動数である.

従つて強制振動の特解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_{pn}}{(\nu_n^2-\nu^2)D_{\nu n}}\sin\gamma_n\xi\sin(\nu t+\delta)$$

によつて与えられる.

従つて (35) 式の一般解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\gamma_n\xi\sin(\nu_n t+\delta_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_{pn}}{(\nu_n^2-\nu^2)D_{\nu n}}\sin\gamma_n\xi\sin(\nu t+\delta)\cdots(47)$$

ここに a_n, δ_n は任意常数にして, ν_n は第 n 次の固有円振動数である.

いま $t=0$ にて $y=\frac{\partial y}{\partial t}=0$ なる初期条件を満足する解を $\delta=0$ の場合に対して求めると

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_{pn}}{(\nu_n^2-\nu^2)D_{\nu n}}\sin\gamma_n\xi\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)\sin\gamma_n\xi\quad\cdots\cdots(48)$$

となる. なお j 次の固有振動が強制動に共鳴する場合には

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{D_{pn}}{(\nu_n^2-\nu^2)D_{\nu n}}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)\sin\gamma_n\xi$$
$$+\frac{D_{pj}}{2\nu^2 D_{\nu j}}(\sin\nu t-\nu t\cos\nu t)\sin\gamma_j\xi\quad\cdots\cdots(48)'$$

となる. ここに $\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ は $\sum_{n=1}^{\infty}$ の中の $n=j$ なる項を除いた和とする.

Ⅶ 基礎微分方程式による強制減衰振動の解

ここでも強制力が (36)′ 式の形に与えられた場合を取扱うものとし, 強制振動の基礎微分方程式は履材変形を無視した (12) 式を使用する事にし, しかも I, F, A, ρ, a がすべて一定なる場合を取扱うものとする.

(36)′ 式は

$$Y=\text{Imaginary Part}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}p_n\sin\gamma_n\xi e^{i(\nu t+\delta)}\right\}\quad\cdots\cdots(36)''$$

と考えられる.

いま

$$Y_i=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\sin\gamma_n\xi\,e^{i(\nu t+\delta)}\quad\cdots\cdots(49)$$

を (12) 式の右辺の Y の代りにおいた強制振動の基礎微分方程式の解の虚部を求めれば, これが所要の強制振動の解となる.

いまこの強制振動の方程式を示すと

$$\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial}{\partial t}\right)y=\frac{\rho I}{F}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}+\zeta_0\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y-EI\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\zeta_i\frac{\partial^5}{\partial x^4\partial t}\right)y$$
$$+u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y+v\left(\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_i\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)y$$
$$-H_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\zeta_i\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right)y$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\gamma_n\xi\, e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots (12)'$$

となる.

(12)′ 式の強制振動の特解を

$$y_i=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\gamma_n\xi\, e^{i(\nu t+\delta)}$$

として (12)′ 式に代入し, $e^{i(\nu t+\delta)}$ を分離するとつぎの形の式がえられる.

$$B_m(-\vartheta'_{mm}\nu^2+i\varpi'_{mm}\nu+\tau'_{mm})+\sum_{n=1}^{\infty}{}' B_n(i\varpi'_{mn}\nu+\tau'_{mn})=\frac{1}{2}p_m \quad \cdots\cdots (50)$$

ここに $\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ は $\sum_{n=1}^{\infty}$ の中の $n=m$ の項を除いた和とし, δ'_{mn}, ϖ'_{mn}, τ'_{mn}, ϖ'_{mn}, τ'_{mn} は (20) 式にて与えられている値とする. $m=1, 2, 3 \cdots\cdots\infty$

いま

$$B_n=\gamma_n+iS_n, \quad (\gamma_n,\ S_n \text{ は実数値}) \quad \cdots\cdots (51)$$

として (50) 式に代入すればつぎの二群の方程式がえられる.

$$(-\vartheta'_{mm}\nu^2+\tau'_{mm})\gamma_m-\varpi'_{mm}\nu S_m+\sum_{n=1}^{\infty}{}'(\tau'_{mn}\gamma_n-\varpi'_{mn}\nu s_n)=\frac{1}{2}p_m \quad \cdots\cdots (52)$$

$$\varpi'_{mm}\gamma_m+(-\vartheta'_{mm}\nu^2+\tau'_{mm})S_m+\sum_{n=1}^{\infty}{}'(\varpi'_{mn}\nu\gamma_n+\tau'_{mn}s_n)=0 \quad \cdots\cdots (53)$$

ここに $m=1, 2, 3, \cdots\cdots, \infty$

この (52) 式および (53) 式より任意の γ_n および S_n の値は理論上は求められる.

これらの γ_n, S_n を用いれば (12)′ 式の特解は

$$y_i=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\gamma_n\cos(\nu t+\delta)-S_n\sin(\nu t+\delta) +i\Big\{\gamma_n\sin(\nu t+\delta)+S_n\cos(\nu t+\delta)\Big\}\Big]\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots (54)$$

によつて与えられるので, (12) 式の特解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\gamma_n\sin(\nu t+\delta)+S_n\cos(\nu t+\delta)\Big\}\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots (54)'$$

によつて与えられる事を知る.

従つて (12) 式の一般解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\zeta_n t}\sin(\nu_n t+\delta_n)\sin\gamma_n\xi +\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\gamma_n\sin(\nu t+\delta)+s_n\cos(\nu t+\delta)\Big\}\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots (55)$$

によつて与えられる.

いま $t=0$ の時 $y=-\frac{\partial y}{\partial t}=0$ なる初期条件を満足する解を $\delta=0$ なる場合に対して求めると，

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\left[S_n\left\{\cos\nu t-\frac{\zeta_n e^{-\zeta_n t}}{\nu_n\cos\delta_n}\sin(\nu_n t+\delta_n)\right\}+\gamma_n\left\{S_n\gamma t-\frac{\nu}{\nu_n}\cdot\frac{1}{\cos\delta_n}e^{-\zeta_n t}\sin(\nu_n t+\delta_n)\right\}\right]\sin\gamma_n\xi \quad\cdots\cdots(56)$$

ここに

$$\delta_n=\tan^{-1}\left(-\frac{\gamma_n\nu}{S_n\nu_n}\right)\quad\cdots\cdots(56)'$$

となる．

なお橋肋曲線が対称として与えられる場合，第4項までとつて γ_n, S_n の値を具体的に求めると

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_1=\frac{D_{p_1}}{D\nu_1},\quad S_1=\frac{D'_{p_1}}{D\nu_1},\quad \gamma_2=\frac{D_{p_2}}{D\nu_2},\quad S_2=\frac{D'_{p_2}}{D\nu_2}\\&\gamma_3=\frac{D_{p_3}}{D\nu_3},\quad S_3=\frac{D'_{p_3}}{D\nu_3},\quad \gamma_4=\frac{D_{p_4}}{D\nu_4},\quad S_4=\frac{D'_{p_4}}{D\nu_4}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(57)$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{p_1}&=k_5[\{(\zeta_1^2\overline{6\nu_1^2-\zeta_1^2}-\overline{\nu_1^4-\nu^4})d_{14}-\zeta_1(3\nu_1^2-\zeta_1^2)d_{13}\\
&\quad+(\nu_1^2-\nu^2-\zeta_1^2)d_{12}+\zeta_1 d_{11}\}(-\vartheta'_{33}\nu^2p_1+\tau'_{33}p_1-\tau'_{31}p_3)\\
&\quad-\nu\{4\zeta_1\nu_1(\nu_1^2-\zeta_1^2)d_{14}-(\nu_1^3-\nu^3-3\nu_1\zeta_1^2)d_{13}-2\zeta_1\nu_1d_{12}\\
&\quad+(\nu_1-\nu)d_{11}\}(\text{æ}'_{33}p_1-\text{æ}'_{31}p_3)]\\
D'_{p_1}&=k_5[\{(\zeta_1^2\overline{6\nu_1^2-\zeta_1^2}-\overline{\nu_1^4-\nu^4})d_{14}-\zeta_1(3\nu_1^2-\zeta_1^2)d_{13}\\
&\quad+(\nu_1^2-\nu^2-\zeta_1^2)d_{12}+\zeta_1d_{11}\}(\text{æ}'_{33}p_1-\text{æ}'_{31}p_3)\\
&\quad+\nu\{4\zeta_1\nu_1(\nu_1^2-\zeta_1^2)d_{14}-(\nu_1^3-\nu^3-3\nu_1\zeta_1^2)d_{13}-2\zeta_1\nu_1d_{12}\\
&\quad+(\nu_1-\nu)d_{11}\}(-\vartheta_{33}'\nu^2p_1+\tau'_{33}p_1-\tau'_{31}p_3)]\\
D_{p_2}&=k_5[\{(\zeta_2^2\overline{6\nu_2^2-\zeta_2^2}-\overline{\nu_2^4-\nu^4})d_{24}-\zeta_2(3\nu_2^2-\zeta_2^2)d_{23}\\
&\quad+(\nu_2^2-\nu^2-\zeta_2^2)d_{22}+\zeta_2d_{21}\}(-\vartheta'_{44}\nu^2p_2+\tau'_{44}p_2-\tau'_{42}p_4)\\
&\quad-\nu\{4\zeta_2\nu_2(\nu_2^2-\zeta_2^2)d_{24}-(\nu_2^3-\nu^3-3\nu_2\zeta_2^2)d_{23}-2\zeta_2\nu_2d_{22}\\
&\quad+(\nu_2-\nu)d_{21}\}(\text{æ}'_{44}p_2-\text{æ}'_{42}p_4)]\\
D'_{p_2}&=k_5[\{\zeta_2^2(\overline{6\nu_2-\zeta_2^2}-\overline{\nu_2^4-\nu^4})d_{24}-\zeta_2(3\nu_2^2-\zeta_2^2)d_{23}\\
&\quad+(\nu_2^2-\nu^2-\zeta_2^2)d_{22}+\zeta_2d_{21}\}(\text{æ}'_{44}p_2-\text{æ}'_{42}p_4)\\
&\quad+\nu\{4\zeta_2\nu_2(\nu_2^2-\zeta_2^2)d_{24}-(\nu_2^3-\nu^3-3\nu_2\zeta_2^2)d_{23}-2\zeta_2\nu_2d_{22}\\
&\quad+(\nu_2-\nu)d_{21}\}(-\vartheta'_{44}\nu^2p_2+\tau'_{44}p_2-\tau'_{42}p_4)]\\
D_{p_3}&=k_5[\{\zeta_3^2(\overline{6\nu_3^2-\zeta_3^2}-\overline{\nu_3^4-\nu^4})d_{14}-\zeta_3(3\nu_3^2-\zeta_3^2)d_{13}\\
&\quad+(\nu_3^2-\nu^2-\zeta_3^2)d_{12}+\zeta_3d_{11}\}(-\vartheta'_{11}\nu^2p_3+\tau'_{11}p_3-\tau'_{13}p_1)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(58)$$

$$
\begin{aligned}
&-\nu\{4\zeta_3\nu_3(\nu_3^2-\zeta_3^2)d_{14}-(\nu_3^3-\nu^3-3\nu_3\zeta_3^2)d_{13}-2\zeta_3\nu_3d_{12}\\
&+(\nu_3-\nu)d_{11}\}(\text{æ}'_{11}p_3-\text{æ}'_{13}p_1)]\\
D'_{p_3}=&k_5[\{\zeta_3^2(\overline{6\nu_3^2-\zeta_3^2}-\nu_3^4-\nu^4)d_{14}-\zeta_3(3\nu_3^2-\zeta_3^2)d_{13}\\
&+(\nu_3^2-\nu^2-\zeta_3^2)d_{12}+\zeta_3d_{11}\}(\text{æ}'_{11}p_3-\text{æ}'_{13}p_1)\\
&+\nu\{4\zeta_3\nu_3(\nu_3^2-\zeta_3^2)d_{14}-(\nu_3^3-\nu^3-3\nu_3\zeta_3^2)d_{13}-2\zeta_3\nu_3d_{12}\\
&+(\nu_3-\nu)d_{11}\}(-\vartheta'_{11}\nu^2p_3+\tau'_{11}p_3-\tau'_{13}p_1)]\\
D_{p_4}=&k_5[\{(\zeta_4^2\overline{6\nu_4^2-\zeta_4^2}-\nu_4^4-\nu^4)d_{24}-\zeta_4(3\nu_4^2-\zeta_4^2)d_{23}\\
&+(\nu_4^2-\nu^2-\zeta_4^2)d_{22}+\zeta_4d_{21}\}(-\vartheta'_{22}\nu^2p_4+\tau'_{22}p_4-\tau'_{24}p_2)\\
&-\nu\{4\zeta_4\nu_4(\nu_4^2-\zeta_4^2)d_{24}-(\nu_4^3-\nu^3-3\nu_4\zeta_4^2)d_{23}-2\zeta_4\nu_4d_{22}\\
&+(\nu_4-\nu)\ d_{21}\}(\text{æ}'_{22}p_4-\text{æ}'_{24}p_2)]\\
D'_{p_4}=&k_5[\{(\zeta_4^2\overline{6\nu_4^2-\zeta_4^2}-\nu_4^4-\nu^4)d_{24}-\zeta_4(3\nu_4^2-\zeta_4^2)d_{23}\\
&+(\nu_4^2-\nu^2-\zeta_4^2)d_{22}+\zeta_4d_{21}\}(\text{æ}'_{22}p_4-\text{æ}'_{24}p_2)\\
&+\nu\{4\zeta_4\nu_4(\nu_4^2-\zeta_4^2)d_{24}-(\nu_4^3-\nu^3-3\nu_4\zeta_4^2)d_{23}-2\zeta_4\nu_4d_{22}\\
&+(\nu_4-\nu)d_{21}\}(-\vartheta'_{22}\nu^2p_4+\tau'_{22}p_4-\tau'_{21}p_2)]\\
D_{\nu_1}=&\{(\nu_1-\nu)^2+\zeta_1^2\}[\{\zeta_1(3\nu_1^2+2\nu_1\nu+\nu^2-\zeta_1^2)d_{14}-(\nu_1^2+\nu_1\nu+\nu^2\\
&-\zeta_1^2)d_{13}-\zeta_1d_{12}+d_{11}\}^2+\{(\overline{\nu_1+\nu}\cdot\overline{\nu_1^2+\nu^2}-\zeta_1^2\overline{3\nu_1+\nu})d_{14}\\
&+\zeta_1(2\nu_1+\nu)d_{13}-(\nu_1+\nu)d_{12}\}^2]\\
D_{\nu_2}=&\{(\nu_2-\nu)^2+\zeta_2^2\}[\{\zeta_2(3\nu_2^2+2\nu_2\nu+\nu^2-\zeta_2^2)d_{24}-(\nu_2^2+\nu_2\nu\\
&+\nu^2-\zeta_2^2)d_{23}-\zeta_2d_{22}+d_{21}\}^2+\{(\overline{\nu_2+\nu}\cdot\overline{\nu_2^2+\nu^2}-\zeta_2^2\overline{3\nu_2+\nu})d_{24}\\
&+\zeta_2(2\nu_2+\nu)d_{23}-(\nu_2+\nu)d_{22}\}^2]\\
D_{\nu_3}=&\{(\nu_3-\nu)^2+\zeta_3^2\}[\{\zeta_3(3\nu_3^2+2\nu_3\nu+\nu^2-\zeta_3^2)d_{14}-(\nu_3^2+\nu_3\nu+\nu^2\\
&-\zeta_3^2)d_{13}-\zeta_3d_{12}+d_{11}\}^2+\{(\overline{\nu_3+\nu}\cdot\overline{\nu_3^2+\nu^2}-\zeta_3^2\overline{3\nu_3+\nu})d_{14}\\
&+\zeta_3(2\nu_3+\nu)d_{13}-(\nu_3+\nu)d_{12}\}^2]\\
D_{\nu_4}=&\{(\nu_4-\nu)^2+\zeta_4^2\}[\{\zeta_4(3\nu_4^2+2\nu_4\nu+\nu^2-\zeta_4^2)d_{24}-(\nu_4^2+\nu_4\nu\\
&+\nu^2-\zeta_4^2)d_{23}-\zeta_4d_{22}+d_{21}\}^2+\{(\overline{\nu_4+\nu}\cdot\overline{\nu_4^2+\nu^2}-\zeta_4^2\overline{3\nu_4+\nu})d_{24}\\
&+\zeta_4(2\nu_4+\nu)d_{23}-(\nu_4+\nu)d_{22}\}^2]
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(58)'
$$

ここに ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 および ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 はそれぞれ第1次，第2次，第3次，第4次の固有円振動数および減衰係数である．なお

$$
\begin{aligned}
&d_{14}=\vartheta'_{11}\vartheta'_{33},\quad d_{13}=\vartheta'_{11}\text{æ}'_{33}+\vartheta'_{33}\text{æ}'_{11}\\
&d_{12}=\vartheta'_{33}\tau'_{11}+\vartheta'_{11}\tau'_{33}+\text{æ}'_{11}\text{æ}'_{33}-\text{æ}'_{13}\text{æ}'_{31}\\
&d_{11}=\text{æ}'_{11}\tau'_{33}+\text{æ}'_{33}\tau'_{11}-\text{æ}'_{13}\tau'_{31}-\text{æ}'_{31}\tau'_{13}
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} d_{24}&=\vartheta'_{22}\vartheta'_{44},\quad d_{23}=\vartheta'_{22}\varpi'_{44}+\vartheta'_{44}\varpi'_{22}\\ d_{22}&=\vartheta'_{44}\tau'_{22}+\vartheta'_{22}\tau'_{44}+\varpi'_{22}\varpi'_{44}-\varpi'_{24}\varpi'_{42}\\ d_{21}&=\varpi'_{22}\tau'_{44}+\varpi'_{44}\tau'_{22}-\varpi'_{24}\tau'_{42}-\varpi'_{42}\tau'_{24}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(58)''$$

である.

Ⅷ 結　　語

犀川橋の実測固有振動周期と計算固有振動周期とがよく一致している事を確め得たので，理論的取扱過程における仮定の妥当な事が確め得られた．従つて非減衰強制振動解および減衰の固有並びに強制振動解の妥当なる事を想定してその解の理論的誘導を試みたのであるが，この理論的計算結果と実測結果との比較検討は別号に発表することにする．

なお計算の点からすれば，幾分エネルギー法による方が簡単かも知れないが，これでは幾分精度の悪い解しか得られない．従来の方法によればラグランジの一般運動方程式より得られる一般座標に関する微分方程式が各指標数に対して独立でないので，厳密な取扱いを一応抛棄しなければならないのであるが，筆者はこれを連立微分方程式として解く事によつて，この問題を解決する事が出来たので，この種の問題の一般的取扱を示す目的をもつて附録として記載する事にした．

なお目下任意の移動強制力が作用する場合の強制振動解につき研究しているが，この結果は前記実測結果と計算結果との比較検討と併せて別号に発表するつもりである．

〔附錄〕 エネルギー法による解

〔1〕 減衰振動のエネルギー式の誘導

拱肋の軸力 P および振動中の軸力の変化量 δP によるポテンシャルエネルギーは

$$U_P(t)=\frac{H}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx=\frac{H}{2l}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2d\xi\quad\cdots\cdots(59)$$

$$U_{\delta P}(t)=\frac{E}{2}\int_0^l A\psi\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx=\frac{E}{2l}\int_0^1 A\psi\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2d\xi\quad\cdots\cdots(60)$$

ここに

$$\psi=\varphi'^2(1+\varphi'^2)^{-\frac{3}{2}},\quad \xi=\frac{x}{l}$$

によつて与えられる．

なお H_0 によるポテンシャルエネルギーは

$$U_{H_0}(t)=-\frac{H_0}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx=-\frac{H_0}{2l}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2d\xi\quad\cdots\cdots(61)$$

によつて与えられる．

単純橋の曲げによるポテンシャルエネルギーは

$$U_m(t)=\frac{E}{2}\int_0^l I\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx=\frac{E}{2l^3}\int_0^1 I\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(62)$$

によつて与えられる.

垂直吊材の伸縮によるエネルギーは

$$U_e(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \varepsilon\phi\, dx=\frac{1}{2El^3}\int_0^1 \frac{\varphi}{a}\left(u\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}+vl\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(63)$$

によつて与えられる.

ポテンシャルエネルギーの総和を $U(t)$ とすれば

$$U(t)=\frac{(1-\gamma)H}{2l}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 d\xi+\frac{E}{2l}\int_0^1 A\phi\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 d\xi$$

$$+\frac{E}{2l^3}\int_0^1 I\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)^2 d\xi+\frac{1}{2El^3}\int_0^1\frac{\varphi}{a}\left(u\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}+vl\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(64)$$

ここに

$$\gamma=\frac{H_0}{H}$$

一方運動のエネルギーは，廻転慣性の影響を無視すれば

$$V(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx=\frac{l}{2}\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(65)$$

にて与えられ，ρ を一定とすれば

$$V(t)=\frac{\rho l}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(65)'$$

によつて与えられる.

次にランガー橋全体の内部摩擦係数を k とし，減衰エネルギーは運動速度の2乗に比例するとすれば，ランガー橋全体としての内部減衰エネルギーは

$$F(t)=\frac{k}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx=\frac{kl}{2}\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(65)$$

によつて与えられ，ρ を一定とすれば

$$F(t)=\frac{k\rho l}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 d\xi \quad \cdots\cdots(66)'$$

によつて与えられる.

ランガー橋の振動の第 n 次の正規函数を η_n とし，時間函数 q_n を第 n 次の一般座標に選べば，振動の時間変位曲線はつぎの形に与えられる.

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n q_n \quad \cdots\cdots(67)$$

いま強制力

$$Y=Y_0(\xi)\sin(\nu t+\delta) \quad \cdots\cdots(68)$$

が径間 l 上の一点 $l\xi_0$ を中心に $l(\xi_0-\varepsilon_0)\leq l\xi\leq l(\xi_0+\varepsilon_0)$ の範囲に分布して作用するものとすれば，一般力

Q_n は

$$Q_n=\left(l\int_{\xi_0-\varepsilon_0}^{\xi_0+\varepsilon_0}Y_0\,\eta_n\,d\xi\right)\sin(\nu t+\delta)\cdots\cdots(69)$$

によつて与えられる.

一般座標 q_m を用いたラグランジの運動の基礎微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(t)}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial V(t)}{\partial q_m}+\frac{\partial F(t)}{\partial \dot{q}_m}+\frac{\partial U(t)}{\partial q_m}=Q_m\cdots\cdots(70)$$

$$\dot{q}_m=\frac{dq_m}{dt},\quad \ddot{q}_m=\frac{d^2q_m}{dt^2},\quad m=1,2,3,\cdots\cdots,\infty$$

によつて与えられる.[4]

〔2〕 エネルギー式による固有減衰振動の解

固有減衰振動のラグランジの一般運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(t)}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial V(t)}{\partial q_m}+\frac{\partial F(t)}{\partial \dot{q}_m}+\frac{\partial U(t)}{\partial q_m}=0\cdots\cdots(71)$$

で与えられる.

エネルギー $V(t)$, $F(t)$, $U(t)$ の式に

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\,\eta_n,\quad \eta_n=\sin\gamma_n\xi,\quad \gamma_n=n\pi\cdots\cdots(72)$$

を代入して q_n に関する微分方程式を求めるとつぎのごとくなる.

$$\ddot{q}_m+kq_m+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}q_n=0\qquad(m=1,2,\cdots\cdots,\infty)\cdots\cdots(73)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{mn}=\varphi_{nm}=2\Big\{&\frac{(1-\gamma)H}{\rho l^2}\gamma_m\gamma_n\int_0^1\sin\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi\,d\xi\\&+\frac{EI}{\rho l^4}\gamma_m^2\gamma_n^2\int_0^1\sin\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi\,d\xi\\&+\frac{EA}{\rho l^2}\gamma_m\gamma_n\int_0^1\psi\cos\gamma_m\xi\cos\gamma_n\xi\,d\xi\\&+\frac{1}{Ea\rho l^4}\Big(\gamma_m^2\gamma_n^2\int_0^1\varphi u^2\sin\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi\,d\xi\\&\quad+\gamma_m^2\gamma_n l\int_0^1\varphi uv\cos\gamma_m\xi\sin\gamma_n\xi\,d\xi\\&\quad+\gamma_m^2\gamma_n l\int_0^1\varphi uw\sin\gamma_m\xi\cos\gamma_n\xi\,d\xi\\&\quad+\gamma_m\gamma_n l^2\int_0^1\varphi v^2\cos\gamma_m\xi\cos\gamma_n\xi\,d\xi\Big)\Big\}\end{aligned}\cdots\cdots(74)$$

ここに k はランガー橋の内部摩擦係数である. ここでも I, F, A, A_d, ρ, a はすべて一定と考えた.

4) Lord Rayleigh, Theory of Sound vol. I P. 103

(73)式より拱肋軸が対称の場合には奇数添字の方程式群と，偶数添字の方程式群に分けて考えられる．例えば

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}_1+k\dot{q}_1+\varphi_{11}q_1+\varphi_{13}q_3+\cdots\cdots\cdots=0\\&\ddot{q}_3+k\dot{q}_3+\varphi_{31}q_1+\varphi_{33}q_3+\cdots\cdots\cdots=0\\&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(75)$$

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}_2+k\dot{q}_2+\varphi_{22}q_2+\varphi_{24}q_4+\cdots\cdots\cdots=0\\&\ddot{q}_4+k\dot{q}_4+\varphi_{42}q_2+\varphi_{44}q_4+\cdots\cdots\cdots=0\\&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(76)$$

となる

いま (75) で q_n 第2項までとつて考え，これより q_1, q_3 をそれぞれ消去した式を作ると

$$\frac{d^4q_i}{dt^4}+2k\frac{d^3q_i}{dt^3}+\left(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33}\right)\frac{d^2q_i}{dt^2}+k(\varphi_{11}+\varphi_{33})\frac{dq_i}{qt}+(\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2)q_i=0\cdots(77)$$

$$i=1 \text{ 又は } 3 .$$

となる．同様にして一般に n 項までとると

$$C_{2n}\frac{d^{2n}q_n}{dt^{2n}}+C_{2n-1}\frac{d^{2n-1}q_n}{dt^{2n-1}}+\cdots\cdots+C_1\frac{dq_n}{dt}+C_0q_n=O\cdots\cdots\cdots(78)$$

なる q_n に関する常微分方程式が得られる．

ここに C_{2n}, C_{2n-1}, ……, C_1, C_0 は既知常数値である．

(78) 式は

$$q_n=e^{\alpha t}\cdots\cdots\cdots(79)$$

の形の解を持つのでこれを (78) 式に代入すると α に関するつぎの代数方程式が得られる．

$$C_{2n}\alpha^{2n}+C_{2n-1}\alpha^{2n-1}+\cdots\cdots+C_1\alpha+C_0=0\cdots\cdots\cdots(80)$$

α の根は一般に

$$\alpha_n=-\zeta_n+i\nu_n\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots,\infty)\cdots\cdots\cdots(81)$$

の形となる．ここに ζ_n および ν_n は正の実数値とする．この ζ_n は第 n 次の減衰係数で，ν_n は第 n 次の固有円振動である．

この様な ζ_n, ν_n を使用すると固有振動の解は一般に

$$y_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\zeta_nt}\sin n\pi\xi\sin(\nu_nt+\delta_n)\cdots\cdots\cdots(82)$$

によつて与えられる．　　$\xi=\frac{x}{l}$

ここに a_n および δ_n は任意常数とする．

〔3〕 エネルギー式による強制減衰振動の解

強制力

$$Y=Y_0(\xi)\sin(\nu t+\delta)\cdots\cdots\cdots(83)$$

が径間 l 上の点 $l\xi_0$ を中心に $l(\xi_0-\varepsilon_0)\leqq l\xi\leqq l(\xi_0+\varepsilon_0)$ の範囲に分布して作用するものとすると，ラグランジの運動の方程式の一般力 Q_m は

$$Q_m=\left\{l\int_{\xi_0-\varepsilon_0}^{\xi_0+\varepsilon_0}Y_0\eta_m d\xi\right\}\sin(\nu t+\delta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

によつて与えられる．

ラグランジの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(t)}{\partial\dot{q}_m}\right)-\frac{\partial V(t)}{\partial q_m}+\frac{\partial F(t)}{\partial\dot{q}_m}+\frac{\partial U(t)}{\partial q_m}=\left\{l\int_{\xi_0-\varepsilon_0}^{\xi_0+\varepsilon_0}Y_0\eta_m d\xi\right\}\sin(\nu t+\delta)\cdots(85)$$

と表わされる．$V(t)$, $F(t)$, $U(t)$ に (47) 式の η の表現を代入すれば，強制減衰振動の q_m に関する微分方程式はつぎのごとく表わされる．

$$\ddot{q}_m+k\dot{q}_m+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}q_n=\frac{2}{\rho}\int_{\xi_0-\varepsilon_0}^{\xi_0+\varepsilon_0}Y_0\eta_m d\xi)\sin(\nu t+\delta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

ここに φ_{mn} は (49) 式に示すものである．

$$p_m=\frac{2}{\rho}\int_{\xi_0-\varepsilon_0}^{\xi_0+\varepsilon_0}Y_0\eta_m d\xi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(87)$$

とすると，運動の方程式の内の q_n に関する微分方程式は

$$\ddot{q}_n+k\dot{q}_n+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}q_n=\text{Imaginary Part}\left\{p_m e^{i(\nu t+\delta)}\right\}\cdots\cdots\cdots(88)$$

によつて与えられる．

この q_n の特解は

$$\ddot{q}_{in}+k\dot{q}_{in}+\sum_{n=1}^{\infty}{}'\varphi_{mn}q_{in}=p_m e^{i(\nu t+\delta)},\quad(m=1,2,3,\cdots\cdots,\infty)\cdots\cdots\cdots\cdots(88)'$$

の q_{in} の特解の虚部として得られる．

この方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{q}_{i1}+k\dot{q}_{i1}+\varphi_{11}q_{i1}+\varphi_{12}q_{i2}+\cdots\cdots+\varphi_{1n}q_{in}+\cdots\cdots=p_1e^{i(\nu t+\delta)}\\
&\ddot{q}_{i2}+k\dot{q}_{i2}+\varphi_{21}q_{i1}+\varphi_{22}q_{i2}+\cdots\cdots+\varphi_{2n}q_{in}+\cdots\cdots=p_2e^{i(\nu t+\delta)}\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\ddot{q}_{in}+k\dot{q}_{in}+\varphi_{n1}q_{i1}+\varphi_{n2}q_{i2}+\cdots\cdots+\varphi_{nn}q_{in}+\cdots\cdots=p_ne^{i(\nu t+\delta)}\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(89)$$

拱肋軸が対称の場合には奇数添字と偶数添字の方程式の 2 群に分けられる．

例えば奇数添字の方程式群を示すと

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{q}_{i1}+k\dot{q}_{i1}+\varphi_{11}q_{i1}+\varphi_{13}q_{i3}+\cdots\cdots=p_1e^{i(\nu t+\delta)}\\
&\ddot{q}_{i3}+k\dot{q}_{i3}+\varphi_{31}q_{i1}+\varphi_{33}q_{i3}+\cdots\cdots=p_3e^{i(\nu t+\delta)}\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(90)$$

となる．いま $m=1$, 3 までをとると (90) 式は

$$\frac{d^4q_{i1}}{dt^4}+2k\frac{d^3q_{i1}}{dt^3}+(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\frac{d^2q_{i1}}{dt^2}+k(\varphi_{11}+\varphi_{33})\frac{dq_{i1}}{dt}$$
$$+(\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2)q_{i1}=\{-(p_1\nu^2-\varphi_{33}p_1+\varphi_{13}p_3)+ikp_1\nu\}e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots(91)$$

$$\frac{d^4q_{i3}}{dt^4}+2k\frac{d^3q_{i3}}{dt^3}+(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\frac{d^2q_{i3}}{dt^2}+k(\varphi_{11}+\varphi_{33})\frac{dq_{i3}}{dt}$$
$$+(\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2)q_{i3}=\{-(p_3\nu^2-\varphi_{11}p_3+\varphi_{13}p_1)+ikp_3\nu\}e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots(92)$$

によつて与えられる.

(91), (92) 式の特解をそれぞれ

$$q_{i1}=(C_1+iD_1)e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots(93)$$

$$q_{i3}=(C_3+iD_3)e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots(94)$$

と置き，これらの q_{i1}, q_{i3} をそれぞれ (91) 式および (92) 式に代入して，C_1, D_1, C_3, D_3 を求めればつぎのごとくなる.

$$C_1=-\frac{(p_1\nu^2-\varphi_{33}p_1+\varphi_{13}p_3)\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}+k^2p_1\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})}{\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}^2+k^2\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})^2}$$

$$D_1=-\frac{(p_1\nu^2-\varphi_{33}p_1+\varphi_{13}p_3)k\nu(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})-kp_1\nu\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}}{\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}^2+k^2\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})^2}$$

$$C_3=-\frac{(p_3\nu^2-\varphi_{11}p_3+\varphi_{13}p_1)\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}+k^2p_3\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})}{\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}^2+k^2\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})^2}$$

$$D_3=-\frac{(p_3\nu^2-\varphi_{11}p_3+\varphi_{13}p_1)k\nu(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})-kp_3\nu\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}}{\{\nu^4-(k^2+\varphi_{11}+\varphi_{33})\nu^2+\varphi_{11}\varphi_{33}-\varphi_{13}^2\}^2+k^2\nu^2(2\nu^2-\varphi_{11}-\varphi_{33})^2}$$

$$\cdots\cdots(95)$$

同様にして $n=1, 2, \cdots\cdots, \infty$ までの n を採用すれば理論上は第 n 次の C_n, D_n ($n=1,2,\cdots\cdots,\infty$) は求められ，一般に (87) 式の特解は

$$q_{in}=(C_n+iD_n)e^{i(\nu t+\delta)} \quad \cdots\cdots(96)$$

の形に求められる.

従つて (88) 式の q_{in} の特解は一般に

$$q_n=C_n\sin(\nu t+\delta)+D_n\cos(\nu t+\delta) \quad \cdots\cdots(97)$$

の形に与えられる.

従つて (72) 式の表現によつて，減衰振動の特解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\{C_n\sin(\nu t+\delta)+D_n\cos(\nu t+\delta)\}\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots(98)$$

の形に求められる.

従つて強制振動の一般解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\zeta_n t}\sin(\nu_n t+\delta_n)\sin\gamma_n\xi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{C_n\sin(\nu t+\delta)+D_n\cos(\nu t+\delta)\}\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (99)$$

によつて与えられる.

ここに a_n, δ_n は任意常数とする.

いま $t=0$ の時 $y=\frac{\partial y}{\partial t}=0$ なる初期条件を満足する解を $\delta=0$ なる場合に対して求めると

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}[D_n\{\cos\nu t\frac{\zeta_n e^{-\zeta_n t}}{\nu_n\cos\delta_n}\sin(\nu_n t+\delta_n)\}+C_n\{\sin\nu t$$

$$-\frac{\nu}{\nu_n}\cdot\frac{1}{\cos\delta_n}e^{-\zeta_n t}\sin(\nu_n t+\delta_n)\}]\sin\gamma_n\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (100)$$

ここに

$$\delta_n=\tan^{-1}\left(\frac{C_n\nu}{D_n\nu_n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots (101)$$

となる.

最近1ケ年間に於ける各種セメントの物理的性質について

建設技官　山田順治
建設技官　清水道貞

目　次

Ⅰ 緒　言……(1)
Ⅱ 試験セメントの種類……(1)
Ⅲ 試験結果……(1)
〔1〕 普通ポルトランドセメント……(1)
〔2〕 早強ポルトランドセメント……(4)
〔3〕 高炉セメント……(4)
〔4〕 中庸熱セメント……(4)
〔5〕 低熱セメント……(5)
〔6〕 コンクリートの強度試験……(6)
Ⅳ 結　言……(8)

Ⅰ 緒　言

筆者は終戦後，毎年，その1年間に主として東京附近の土木工事現場に使用されようとするセメントの物理試験を依頼されて，その試験結果を発表して来たが，今回も昨年4月より本年3月に至る間，当所にて試験を行つたセメントの物理試験結果を総括して発表する次第である．

もとより全部の土木工事現場から試験を依頼されたわけでないから，全体の事を知るわけにはゆかないが，ここ1年間に各土木工事現場でどんなセメントが使用されようとしているかの傾向の一端を知る事は出来る筈である．現場の方々の御参考になれば幸である．

Ⅱ 試験セメントの種類

最近1ケ年間に，当所に於て試験したセメントの種類は表—1 の如くである．全試験件数は 39 であつて，その内訳は普通ポルトランドセメント 24 種，高炉セメント1種，早強ポルトランドセメント2種，中庸熱セメント5種，低熱セメント7種，合計 39 である．

Ⅲ 試 験 結 果

〔1〕 普通ポルトランドセメント

普通ポルトランドセメントは試料件数 39 の内 24 種であつて，その試験結果は表—2 の如くである．この

試験結果によると，比重では 24 種の内 19 種しか試験を行わなかつたが，規格以下のものは，試料番号 (5) 1つであつた．その平均値は 3.09 である．粉末度については，1.0 以下のものは昨年は 7 種であつたが本年は試料番号 (8) (15) (25) の 3 種である．その平均値は 1.11 である．昨年の 1.88 に比較しその値は小さくなつている．凝結時間は平均値が，始発が 3 時 13 分で終結は 4 時 52 分で何れも昨年に比較して幾分遅くなつている．強度については曲げ強さも圧縮強さも各材令共規格以下のものは 1 つもないが，材令 28 日の圧縮強さを除いて，曲げ強さも圧縮強さも昨年の平均値より僅か乍ら低くなつている．

終戦以来毎年の普通セメントの試験結果を今回のものと比較すれば，表—3 の如くである．表—3 の圧縮強さのみを図示すれば図—1 の如くである．

表—1 試験セメントの種類

試料番号	セメント名	種類	試験依頼者	備考
1	秩父セメント	(ポ)	東京都水道局金町工事々務所	
2	浅野セメント	〃	〃	
3	日本セメント	〃	〃	
4	磐城セメント	〃	〃	
5	徳山セメント	〃	茨城県	
6	秩父セメント	〃	関東地建江戸川工事々務所	
7	浅野セメント	〃	川崎市	
8	小野田セメント	〃	関東地建東京環状街路工事々務所	
9	磐城セメント	〃	関東地建江戸川工事々務所	
10	高炉セメント	(高)	島根県	
11	磐城セメント	(ポ)	関東地建江戸川工事々務所	
12	秩父セメント	〃	〃	
13	浅野ベロセメント	(早)	東京都	
14	磐城セメント	(ポ)	川崎製鉄株式会社	
15	小野田セメント	〃	〃	
16	宇部セメント	〃	〃	
17	浅野セメント	〃	〃	
18	宇部セメント	〃	関東地建東京環状街路工事々務所	
19	磐城セメント	〃	関東地建江戸川工事々務所	
20	〃	〃	〃	
21	日本セメント	〃	日本軽金属株式会社	
22	磐城セメント	〃	関東地建五十里工事々務所	
23	浅野ベロセメント	(早)	関東地建東京国道維戸事務所	
24	日本セメント	(ポ)	当所実験用	
25	小野田セメント	〃	〃	
26	日本セメント	〃	〃	
27	〃	〃	〃	
28	中庸熱セメント	(中)	三重県	

29	中庸熱セメント	(中)	関東地方建設局
30	〃	〃	〃
31	〃	〃	〃
32	〃	〃	〃
33	低熱セメント	(低)	〃
34	〃	〃	〃
35	〃	〃	〃
36	〃	〃	〃
37	〃	〃	〃
38	〃	〃	〃
39	〃	〃	〃

(ポ) 普通ポルトランドセメント　24種
(早) 早強ポルトランドセメント　2種
(高) 高炉セメント　1種
(中) 中庸熱セメント　5種
(低) 低熱セメント　7種

表—2　普通ポルトランドセメント

試料番号	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	フロー	曲げ強さ 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	圧縮強さ 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日
1	3.09	1.8	2~46	3~38	237	13	45	63	46	186	335
2	3.12	1.1	4~29	5~48	235	14	40	76	46	170	391
3	3.12	1.8	5~23	7~46	220	12	37	60	34	151	329
4	3.12	1.4	4~32	6~01	232	15	44	61	49	169	341
5	3.00	1.4	3~39	5~02	237	31	56	69	121	240	438
6	3.05	1.3	4~25	6~10	222	21	37	54	70	138	345
7	3.08	2.3	1~25	2~43	240	28	42	60	92	182	266
8	3.10	0.8	5~04	7~14	246	31	49	63	121	242	348
9	3.05	2.5	4~34	7~10	213	20	36	54	73	155	342
11	—	—	—	—	214	19	39	56	74	146	298
12	—	—	—	—	219	30	50	75	96	193	340
14	3.10	2.7	2~45	3~47	237	28	39	61	78	184	248
15	3.09	0.5	2~00	3~32	243	25	48	64	95	249	357
16	3.08	1.4	2~08	3~30	233	29	40	64	96	188	287
17	3.12	1.4	2~01	3~36	230	24	40	56	89	182	297
18	3.11	2.0	1~41	2~47	215	25	37	54	91	138	213
19	3.09	1.5	2~04	3~02	211	18	29	48	55	113	214
20	3.12	1.7	2~16	5~40	232	17	30	58	58	146	294
21	—	—	—	—	219	20	34	55	67	125	267
22	3.07	3.4	3~47	5~41	224	20	37	51	66	118	233

24	—	—	—	—	219	28	42	62	110	187	328
25	3.16	0.5	2～48	4～15	238	21	42	71	71	175	288
26	3.12	1.7	3～31	5～07	211	26	46	59	92	181	310
27	—	—	—	—	207	19	38	55	55	140	261
平均	3.09	1.11	3～13	4～52	226	22	41	60	77	171	307
規格	>3.05	<10.0	>1～00	<10～00	—	>10	>20	>30	>35	>70	>150

表—3 普通ポルトランドセメントの強度比較

	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	曲げ強さ (kg/cm²) 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	圧縮強さ (kg/cm²) 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日
昭和11年～13年	3.13～3.19	1.29～8.59			20.1～41.3	32.5～53.2	53.8～76.6	68.8～151	115～324	212～373
普通セメント 24 種	3.16	2.96	2～37	4～18	26.5	40.3	63.8	100	168	307
昭和20年～22年3月	——	1.4～9.72			7.8～22.1	13.9～33.9	29.5～60	19～76	40～109	60～195
普通セメント 16 種		4.37	3～32	6～27	13	23	41	37	63	118
昭和22年～23年3月	2.98～3.15	2.1～11.5			8.6～29	11.6～45	28.7～70	38～100	42～130	88～283
普通セメント 12 種	3.08	5.36	5～38	8～14	18	33	55	54	96	150
昭和23年～24年3月	2.95～3.16	0.6～5.8			9～31	23～46	42～64	22～87	69～145	108～204
普通セメント 15 種	3.08	4.02	3～45	6～50	19	32	50	55	102	166
昭和24年～25年3月	2.88～3.18	0.4～5.2			6～36	19～51	35～73	32～138	56～162	114～271
普通セメント 20 種	3.10	2.0	2～31	3～57	22	39	59	71	118	187
昭和25年～26年3月	2.96～3.19	0.5～3.5			15～50	32～75	50～88	50～190	109～289	179～401
普通セメント 34 種	3.11	1.88	2～20	3～36	29	48	69	100	173	285
昭和26年～27年3月	3.00～3.16	0.5～3.4			12～31	29～56	48～76	34～121	113～249	213～438
普通セメント 24 種	3.09	1.11	3～13	4～52	22	41	60	77	171	307
普通ポルトランドセメント規格	>3.05	<10	>1～00	<10～00	>10	>20	>30	>35	>70	>150

〔2〕 早強ポルトランドセメント

早強ポルトランドセメントは当所で試験したものは2種類で，その試験結果は表—4 の如くである．試料番号 (13) は材令1日の曲げ強さをよび圧縮強さは規格以下であつた．

〔3〕 高炉セメント

高炉セメントは当所で試験したものは1種類である．その試験結果は，表—5 の如くである．

〔4〕 中庸熱セメント

中庸熱セメントは当所で試験を行つたものは5種類で，その試験結果は，表—6 の如くである．

表—4　早強ポルトランドセメント

試料番号	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	フロー	曲げ強さ 1日	曲げ強さ 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	圧縮強さ 1日	圧縮強さ 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日
13	3.05	1.0	6~05	8~37	217	8	30	50	59	18	115	243	400
23	3.10	1.4	1~17	2~13	219	25	43	48	62	79	173	279	378
平均	3.08	1.2	3~41	5~25	218	16.5	37	49	60.5	48.5	144	261	389
規格	>3.05	<10.0	>1~00	<10~00		>10	>20	>35	>55	>40	> 80	>160	>250

表—5　高炉セメント

試料番号	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	フロー	曲げ強さ 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	圧縮強さ 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日
10	3.00	2.3	4~07	5~49	206	17	36	56	29	135	294
規格	>2.85	<8.0	>1~00	<10~00		>10	>20	>30	>35	>70	>150

表—6　中庸熱セメント

試料番号	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	フロー	曲げ強さ 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	曲げ強さ 91日	圧縮強さ 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日	圧縮強さ 91日
28	3.21	1.4	2~20	3~31	236	17	24	45	—	49	75	208	—
29	3.16	1.1	1~44	3~52	237	9	19	40	56	23	66	165	269
30	3.17	0.5	2~34	3~56	245	22	38	56	62	65	145	213	424
31	3.17	1.3	3~48	5~44	240	24	36	64	68	81	154	288	447
32	3.17	1.4	1~34	3~24	331	8	24	38	50	27	65	165	268
平均	3.18	1.14	2~24	4~05	258	16	28	49	59	49	101	208	352

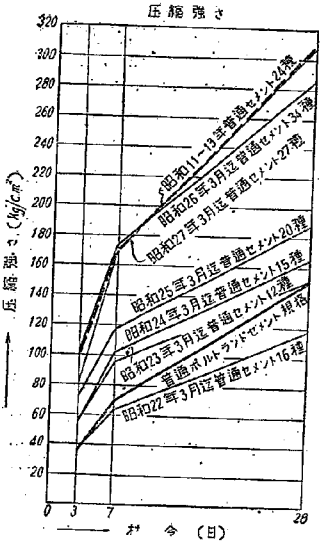
〔5〕 低熱セメント

低熱セメントは当所で試験を行つたものは7種類でその試験結果は，表—7 の如くである．

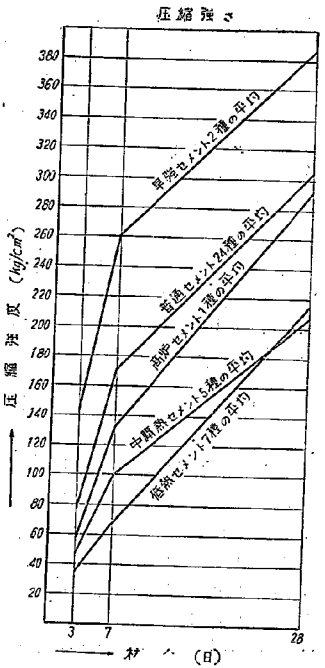
表—7　低熱セメント

試料番号	比重	粉末度	凝結 始発	凝結 終結	フロー	曲げ強さ 3日	曲げ強さ 7日	曲げ強さ 28日	曲げ強さ 91日	圧縮強さ 3日	圧縮強さ 7日	圧縮強さ 28日	圧縮強さ 91日
33	3.18	0.9	3~02	4~38	250	8	17	33	58	21	46	148	294
34	3.17	0.9	1~54	3~16	244	10	20	45	69	27	65	235	414
35	3.17	1.8	2~12	3~01	223	15	22	59	72	42	75	266	455
36	3.21	1.4	3~22	4~42	260	13	25	54	70	35	80	316	470
37	3.17	1.1	1~58	3~21	237	11	18	37	57	30	50	116	365
38	3.17	1.4	3~44	6~16	244	20	37	50	52	60	98	224	383
39	3.17	0.5	3~20	4~55	254	11	22	46	69	34	63	194	421
平均	3.18	1.1	2~47	4~18	245	13	23	46	64	36	68	214	400

以上の本年度の各種セメントの強度についてのそれぞれの平均圧縮強さを図示すれば，図—2 の如くなる．



図—1



図—2

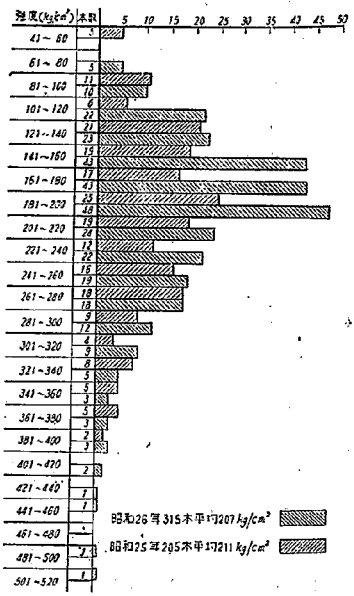
〔6〕 コンクリートの強度試験

この一年間に当所に依頼されたコンクリートの圧縮強度試験の内その強度の趨勢を知り得るものを一部表示したものが表—8 である.

表—8 コンクリート圧縮強度の一部（材令 28 日）

使用セメント	試験依頼者	セメント量 (kg/m³)	水・セメント比 (%)	スランプ (cm)	単位容積重量 (kg/m³)	圧縮強度 (kg/cm²)	備考
日本セメント	関東地建京浜工事々務所	340	33	1.0	2,418	314	
〃	〃	〃	〃	1.0	2,437	310	
〃	〃	〃	〃	0.8	2,429	320	
〃	〃	〃	〃	0.8	2,431	305	
〃	〃	〃	〃	1.0	2,437	304	
〃	〃	〃	〃	1.0	2,424	314	
〃	〃	〃	35	2.2	2,456	357	
〃	〃	〃	35	2.2	2,452	338	

第一セメント	川崎市	345	68	20.0	2,411	228	
〃	〃	〃	〃	20.0	2,414	245	
〃	〃	343	60	15.0	2,410	246	
〃	〃	〃	〃	15.0	2,404	267	
日本セメント	関東地建東京環状街路工事々務所	300	60	9.0	2,437	232	
〃	〃	〃	〃	9.0	2,437	227	
小野田セメント	〃	300	65	8.0	2,418	238	
〃	〃	〃	75	17.0	2,379	237	
〃	〃	〃	55	2.6	2,418	384	
日本セメント	東京都水道局	330	69	19.0	2,353	262	
〃	〃	〃	〃	20.0	2,397	286	
〃	〃	〃	〃	20.0	2,392	267	
秩父セメント	関東地建江戸川工事々務所	340	60	13.0	2,377	155	
〃	〃	〃	〃	15.0	2,410	181	
〃	〃	〃	〃	7.0	2,406	222	
〃	〃	〃	〃	7.0	2,411	193	
磐城セメント	〃	〃	〃	16.0	2,292	194	
〃	〃	〃	〃	10.0	2,292	183	
〃	〃	〃	65	10.0	2,298	194	
〃	〃	〃	〃	12.0	2,320	153	
日本セメント	〃	〃	60	10.0	2,328	149	
〃	〃	〃	〃	17.0	2,348	189	
〃	〃	〃	〃	16.0	2,392	164	
日本ペロセメント	関東地方建設局	533	48	——	2,403	283	材令7日
〃	〃	〃	〃	——	2,380	277	
磐城セメント	関東地建江戸川工事々務所	340	59	5.0	2,279	185	
〃	〃	〃	〃	〃	2,313	181	
〃	〃	〃	〃	3.0	2,305	182	
〃	〃	〃	60	3.0	2,346	201	
〃	〃	〃	〃	7.0	2,335	197	
〃	〃	〃	〃	10.0	2,311	173	
〃	〃	〃	〃	18.0	2,371	151	
〃	〃	〃	〃	12.0	2,373	156	
〃	〃	〃	〃	17.0	2,350	186	
〃	〃	〃	〃	10.0	2,373	137	



図—3

ト品質の向上に努力される事を望んでやまない

一年間に試験したものの内，材令 28 日のものは標準圧縮供試体 315 本でこれを強度によつて分類してみると図—3 の如くなり，平均値は 207 kg/cm² で昨年の 205 本で平均強度 211 kg/cm² に比較して値が小さい．又本年度のコンクリートの強度の集中を見ると大体 120～280 kg/cm² 位のコンクリートが最も多く大体昨年と同様である．

Ⅳ 結　　言

以上の試験結果を総括してみると，実際現場で使用されているセメントは，全般的に終戦直後に比べて非常によくなつており，普通ポルトランドセメントをとつてみると，その強さの平均値は僅かながら昨年の平均値より低くなつているとは云え，材令 28 日の圧縮強さは偶然であろうが昨年の平均値 285 kg/cm² をこえて，昭和 11～13 年の 24 種の平均値 307 kg/cm² と同じ値になつている．

製造者側も 1 年 1 年と良質のセメントを製造され，使用者側も使用前に必ず試験をして使用され，セメン

溶解熱法によるアルミン酸石灰塩の水和熱に関する研究

前建設技官　福島彌六
建設技官　有泉昌

目　次

Ⅰ 緒　言……(1)
Ⅱ 実験法……(2)
〔1〕試　料……(2)
〔2〕熱量計……(3)
〔3〕溶解熱測定法……(3)
Ⅲ 測定結果……(9)
Ⅳ 考　察……(14)
〔1〕C_3A について……(14)
〔2〕C_5A_3 について……(19)
〔3〕CA について……(23)
Ⅴ 総　括……(24)

Ⅰ 緒　言

著者等はアルミン酸石灰塩（$mCaO \cdot nAl_2O_3$ 又は C_mA_n）の短期水和熱をディフェニール・エーテル熱量計および氷熱量計を使用して恒温的に研究測定し，各化合物についてそれらの発熱特性，水和熱，発熱速度の特性を見出し水和反応機構，凝結硬化等の現象と関聯して発熱性の問題を検討し土木研究所報告第 83 号にすでに報告した．

セメント類の発熱性は特に大塊コンクリートの問題には重要な工学的性質と見なされているが，一方化学的にもセメント類の水和硬化の現象を解析する有力な手段を与える重要な性質である．

発熱量の測定法については，すでに述べた恒温法は比較的短期の材令の場合しか採用し得ない難点があり，長期材令の場合には溶解熱法が最も適当とされている．

セメント類の溶解熱法による水和熱の研究は次節に述べる様に主として米国に於て行われ，基礎的研究が累積されて今日見られる A.S.T.M の水和熱測定法が規格化されるに至つた．

著者等は C_mA_n（C_3A，C_5A_3，CA）の長期水和熱を塩酸を溶剤として溶解熱法により 25°C に於て測定し，これら化合物の発熱特性をそれぞれ明らかにし，水和の機構等に検討を加えた．ここには実験法と共にこれらの結果を報告する．

なお C_3A_3 は溶剤に殆んど不溶性であるため水和熱を求めることが不可能であつた．

Ⅱ 実験法

セメントおよびセメント化合物の水和熱測定法についてはすでに前報に述べた所であり，特に長期に亘る測定には溶解法によるのが最も正確な値を与えることは周知のことである．溶解熱法による水和熱の測定は熱化学に於けるHessの熱量恒存に関する法則に基くものであり，未水和物と水和物の溶解熱の差がそれ等の溶解前後の状態を等しくした場合は水和熱を与える．従つて水和熱の正確な測定には溶解熱の正確な測定を必要とする．セメント類の溶解熱およびその測定法については Thorvaldson, Brown, Peaker[1], Meyers[2], Wood, Steiner, Starcke[3], Biddle, Kelley[4], Stenzel, Morris[5], Lerch[6], Pierce, Larmour[7], Lerch, Bogue[8], Troitzsch[9], Nolama[10], Lerch, Brownmiller[11], Insley, Flint, Newman[12], Carlson, Forblich[13], Pechtold, Helz[14] 等の試験研究がある．これらの研究結果よりセメント類の溶解熱，水和熱は次に示す様な種々の実験条件により相違すること，および誤差導入の原因となる実験条件等が確められた．

1. 溶剤の種類，濃度，量，弗化水素量
2. 養生条件（水量，水温，水質，養生温度の相違および攪拌の有無）
3. 未水和試料の組成，風化の程度，粉末度，試料量，溶解前の試料の温度，比熱
4. 水和試料の粉砕法，粉砕時間，実験室の湿度，炭酸ガス量，比熱，灼熱減量の測定法
5. 溶解反応温度，溶解熱の温度係数，攪拌法
6. 測熱装置測熱法

これらの点を考慮して一定条件の下に注意して実験を行えば，溶解熱値は 1cal/g 以下の誤差にて充分な再生性を以て測定し得られることが明らかとなつた．本実験に於ては簡単な測熱装置を以て正確な値を得る様に試みた．

〔1〕試　料

試料アルミン酸石灰塩は純石灰，アルミナより焼火合成したものであり，合成法等についてはすでに前報に述べた．

これら試料は何れも吸湿性が大きく，炭酸ガスも吸収する傾向があるので粉砕には特に注意し，何れも 200 番篩を全通させ密封し，CaO を乾燥剤とする乾燥器に保管する．

次にこれら試料の分析値を表—1 に示す．

表—1 試料アルミン酸石灰塩の分析

試料	灼減%	化合 CaO	化合 Al_2O_3	遊離 CaO	遊離 Al_2O_3	Fe_2O_3	MgO	CaO/Al_2O_3	CaO/Al_2O_3(理論式)
C_3A($3CaO \cdot Al_2O_3$)	0.10	61.90	37.60	tr	0.03	0.41	—	3.00	3.00
C_5A_3($5CaO \cdot 3Al_2O_3$)	0.14	46.05	51.23	0.00	0.00	0.33	0.48	1.64	1.67
CA($CaO \cdot Al_2O_3$)	—	35.00	64.65	—	0.35	—	—	1.00	1.00
C_3A_5($3CaO \cdot 5Al_2O_3$)	—	25.07	72.57	0.00	1.66	0.30	—	0.63	0.69

試料は 4～5g を小形試験管に入れ，炭酸ガスを除去した養生温度と同温度の蒸溜水の一定量を加え，正しくセメント水比を定め，手早く混合して均一体となし，直ちに密封する．C_3A は急発熱性であるから均一なペーストを得るのに充分な注意が必要である．密封した養生管は恒温槽（25.0±0.1°C，C_5A_3 の場合のみ 30.0±1°C）に入れ，一定材令まで養生する．セメント水比の特に大きい時は養生中に水を分離するので養生管は恒温槽中で回転（30～40 r. p. m.）させる．

一定の材令に達した場合は養生管を割り，ガラス片の混入に注意して急速に粉砕し，10 番篩を全通させる．この操作に於ては水分の蒸発，空気中の炭酸ガスの吸収を避けるために特に注意を払わねばならない．粉砕試料は熱量計への投入時までは必ず密封する．

材令および水セメント比は下記の如くである．

C_3A　材　　令（時間）　3, 6, 12, 24, 72
　　水・セメント比（%）　40, 60, 80, 150

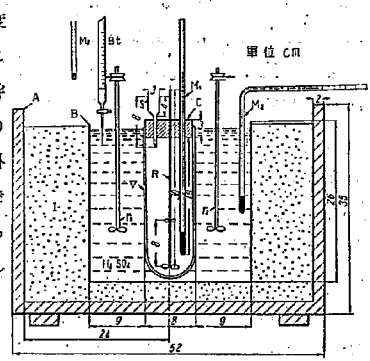
C_5A_3　材　　令（時間）　6, 12, 24, 72, 168
　　水・セメント比（%）　50, 60, 80, 100, 120（外に 200%, 300% のもの一部および完全水和熱測定試験）

CA　材　　令（時間）　24, 72, 168, 336
　　水・セメント比（%）　60, 80, 100, 120

〔2〕 熱　量　計

熱量計は Lerch[6] 等の使用した "Cabinet Calorimeter" を熱漏洩を出来るだけ避けるために W. Richards[15] 等の方法に従つて，中和熱を使用する半断熱式熱量計とした．熱量計の構造は図—1 に示す．

溶解反応の行われる真空瓶 V は硫酸溶を充たしたガラス角箱 B 中に固定させる．B は硝子毛（I）で断熱して木製箱 A 中に置く．V には攪拌棒 R，ベックマン温度計 M_1，試料投入管 S がコルク栓 C を通して挿入される．これらの位置は実験中は必ず定位置でなければならない．攪拌棒 R の回転速度は 300 r. p. m. である．ビュレット Bt よりアルカリ液を滴下して硫酸との中和熱を利用して V の内外の温度差を無くし，断熱を計る．M_2 はベックマン温度計であり，r_1, r_2 は攪拌棒である．r_1, r_2 は充分な攪拌能力がある様にせねばならない．この熱量計は人為的に温度を調節した小型暗室内に置く．M_3 は室温用の温度計である．



図—1　熱量計

〔3〕 溶解熱測定法

予め実験時の温度よりやや低目にした溶解液の一定量を真空瓶に秤り取る．中和熱を利用して温度を調節した硫酸溶中に真空瓶を固定し，一定回転速度（300 r.p.m.）で攪拌棒を廻す．真空瓶内外の温度を同一にして置いたとき液温の変化が定常的となつたのを確めてから，予

め精秤し実験室温と同一温度とした試料を注意深く1分以内に真空瓶中に投入する．試料が投入口等に附着しないことを充分注意する．溶解反応が始り，液温は急速に上昇を始め，終に最高温度に達する（室温は到達最高温度より低く保つ）．この間前性ソーダを滴下して真空瓶内外の温度を同一に保持する．

溶解開始より最高温度に達する間の溶解期の見掛の温度上昇度には溶解期間の液温と室温との温度差に基く熱漏洩の補正を加え，真の温度上昇を求め，別に定めた水当量を利用して溶解熱を算出する．なお溶解期が長時間続く場合には，難溶物質を急速濾過により分離し，濾過に要した時間中の上昇温度を温度上昇曲線上に補外法で求めて補正値とする．

溶解熱は何れも対無水物について算出するので試料の灼減を求める．灼減は 950°C 5 時間加熱とした．

（1） 試料の溶解

一般に物質の溶解熱は溶解温度，溶剤の種類，濃度および溶剤量と溶解物質量の相違により，同一の値を与えない．本実験に於ては水和熱を求めることが目的であり，溶解熱法による水和熱は Hess の法則に依存する故に，水和物，未水和物の溶解は同じ条件の下で行われ，且つ溶解後の状態が同一であることを要する．なお少量の試料を使用して短期間に多数の実験を比較的簡易の方法で行う必要上，溶解試料量，溶解反応開始温度，実験室温等を正確に一定に保つことがある程度不可能であつた．

溶剤としては，後述する水当量の正確な値を得ることと関聯して塩酸を使用することとした．塩酸の濃度は C_3A, C_5A_3 の場合には $HCl \cdot 20H_2O$ を使用し，CA の場合は溶解期の時間を短縮するために，より濃度の高い $HCl \cdot 10H_2O$ を使用した．

溶解開始時の液温は C_3A, CA の場合は 25°C を標準とし，C_5A_3 の場合は 30°C を標準とする．溶剤量はその容積を 350.0 cc と一定とし，試料量は無水物として 1.0～1.2 g を採取する．

溶解時間が極めて長くなり正確な温度上昇を求め難くなる場合には，溶解期終結時前に観測を止め，急速に濾過し（水中に投入稀釈急冷し 溶解速度の低下を計つて濾過したものが数例ある），難溶物を秤量する．この間の温度上昇度を溶解温度曲線より補外法により求め，見掛温度上昇の補正を行う．濾別した難溶物質は分析により，原試料とその組成を殆んど同じくしたものであり，水和物でないことを確めた．

（2） 水当量

熱量を精密に測定しようとすれば，熱量計の水当量を正確に知らねばならない．本実験に使用する真空瓶はその熱容量を正しく直接に知ることは出来ない．従つてこの様な場合には実験的に一定量の熱量を発生させ，熱量計の温度上昇を実測することにより熱量計全体としての水当量を測定せねばならない．著者等は T. Thorvaldson 等[16] が CaO-Al_2O_3-SiO_2 系の熱化学的研究に於て CaO の塩酸に対する溶解熱，塩酸の比熱等，充分信頼出来る下記の様な熱化学的数値を得ていることを利用して，本研究に於ける溶剤として塩酸を使用し，CaO を標準発熱物質として熱量測定を行うこととした．

純 CaO の $HCl \cdot 200H_2O$ 酸液に対する溶解熱	828.9 cal/g	20°C
$HCl \cdot 200H_2O$ 酸液の比熱	0.8921 cal/°C	16～20°C
$HCl \cdot 20H_2O$ 酸液の比熱	0.8507 cal/°C	16～20°C

$HCl \cdot 10H_2O$ 酸液の比熱	0.749 cal/$_o$C	16～20°C
結 C_3A の $HCl \cdot 200H_2O$ 酸液に対する溶解熱	736.4 cal/g	20°C

C_3A, C_5A_3 の場合には溶剤として $HCl \cdot 20H_2O$ を使用し，CA の場合には $HCl \cdot 10H_2O$ を使用するが，CaO の $HCl \cdot 20H_2O$, $HCl \cdot 10H_2O$ への溶解熱は測定されていないので，先ず CaO を $HCl \cdot 200H_2O$ へ溶解させて，温度上昇を測定し，水当量 W_1 を求め，$HCl \cdot 200H_2O$, $HCl \cdot 20H_2O$, $HCl \cdot 10H_2O$ の比熱値より，$HCl \cdot 200H_2O$ と同容の $HCl \cdot 20H_2O$, $HCl \cdot 10H_2O$ を使用した場合の熱量計の水当量 W_2, W_3 を次に記する様に算出した．

1) **CaO の $HCl \cdot 200H_2O$ に対する溶解熱より水当量 W_1, W_2, W_3 の算出**　こゝに使用した CaO は Thorvaldson[16] により精製された方法を採つた．即ち化学用 $CaCO_3$ を精製 HNO_3 に溶解し，NH_4OH で中和し；Br_2 で酸化，濾過する．次で $Ca(NO_3)_2$ を石英ビーカーを使用して 3 回再結晶せしむる．次で精製 $(NH_4)_2CO_3$ で $CaCO_3$ を沈澱させ，充分洗つて遠心分離器で分離した後，蒸溜 HCl に溶解し蓚酸で蓚酸石灰となして，白金坩堝中で 1000°C の電気爐で灼き，密封保存する．CaO は吸湿，吸炭酸ガス性である故に極度に取扱に注意して 350.0 g の $HCl \cdot 200H_2O$ 中に投入する．この際の見掛の温度上昇度に熱漏洩等の諸補正を加え，真の温度上昇を測定し，比熱の補正等を加えて水当量 W_1 を算出することは次項で述べる計算法に依る．この際に液量と CaO 量とは Thorvaldson の実験に対応する様にした．

$HCl \cdot 200H_2O$ のみの水当量を $W_{HCl \cdot 200H_2O}$ とし，溶剤以外の温度計，攪拌棒，真空瓶等を一体とした物の水当量を W_c とすれば，

$$W_1 = W_{HCl \cdot 200H_2O} + W_c$$

ここに $W_{HCl \cdot 200H_2O}$ は $350.0 \times 0.9821 = 343.9$ cal/°C である故に W_c を知る．W_c は $HCl \cdot 20H_2O$, $HCl \cdot 10H_2O$ の場合に，同容積の溶剤を使用すれば，共通であり同一の値を示すべきであり，従つて W_2, W_3 も，算出出来る．

$$W_2 = W_{HCl \cdot 20H_2O} + W_c$$

$$W_3 = W_{HCl \cdot 10H_2O} + W_c$$

2) **水当量の測定値**　以上の様な方法により測定された各熱量計の水当量を次節に述べる様な計算法に依り算出し，その結果を 表—2 に示す．

なお，T. Thorvaldson 等の C_3A の $HCl \cdot 20H_2O$ への溶解熱 736.4 cal/g を利用し，C_3A を標準物質として著者等の合成した C_3A を用いて，直接熱量計の水当量を求めて見た（表—2）．即ち液量と C_3A の関係は Thorvaldson の場合に相応する様にとり，B 熱量計を使用し，CaO による間接法に依り得た水当量 339.7 cal/°C に近い 340.5 cal/°C を得た．かくして著者等の測つた値を確認し得たと同時に，熱量計，測定法等についての信頼性が確められた．

3) **溶解熱，水和熱の算出法等について**

水当量の知られている場合には，熱量計の真の温度上昇度を知れば容易に発生した熱量を知ることが出来る．

本実験に使用した様な半断熱熱量計に於ては，熱量計内外の温度差に基く熱漏洩のための補正を加えねば真の温度上昇度を知ることが出来ない．熱漏洩は予め熱量計の内外に一定の温度差のある場合，単位時間内に熱

表—2 熱量計の水

熱量計番号	試料 CaO (C_3A) g	酸液 ** g	室温 °C	液温 °C	見掛温度上昇 t °C	目盛補正 Δt_1 °C	漏洩補正 Δt_2 °C	露出部補正 Δt_3 °C	真温度上昇 $t+\Sigma\Delta t$	試料熱容量 $_s$ cal
A	1.8003	365.4	23.8	20.6	4.001	0.020	−0.019	−0.005	3.997	+2.5
A	1.8015	365.4	27.2	20.5	4.009	0.020	−0.013	−0.003	4.013	+2.1
A	1.8005	365.4	27.7	20.4	4.005	0.020	−0.016	−0.004	4.005	+3.1
(C_3A用)		$HCl\cdot 20H_2O$								
B	1.7970	365.4	30.8	24.4	4.018	0.020	−0.038	+0.001	4.001	+2.0
B	1.8002	365.4	31.2	23.7	4.037	0.020	−0.046	0.000	4.012	+2.3
B	1.7960	365.4	31.0	23.9	4.017	0.020	−0.042	0.000	3.995	+2.2
(C_5A_3用)		$(HCl\cdot 20H_2O)$								
C	1.8002	378.6	18.8	20.7	3.987	0.011	0.001	0.005	4.003	−0.6
C	1.8052	378.6	18.7	20.9	3.976	0.012	0.000	0.006	3.994	−0.7
C	1.7992	378.6	19.3	20.9	3.973	0.012	0.000	0.005	3.990	−0.6
(CA用)		$(HCl\cdot 10H_2O)$								
B	(C_3A) 1.5038	365.4	30.5	24.3	3.259	0.016	−0.015	0.000	3.260	+1.9
B	1.5075	365.4	31.1	24.3	3.266	0.016	−0.015	0.000	3.264	+2.1

* CaO の比熱を 0.17 とする. C_3A の比熱は 0.2 とする.

** $HCl\cdot 20H_2O$, $HCl\cdot 10H_2O$ の比重はそれぞれ 1.0440 (20°C), 1.0317 (20°C).

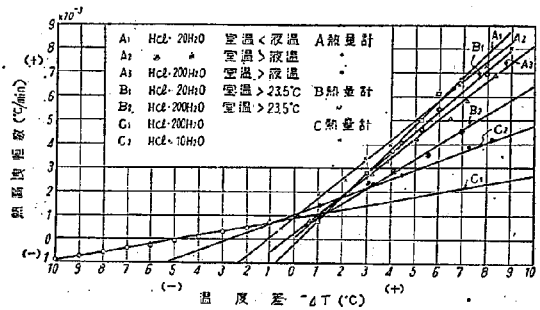
漏洩に基いて起る熱量計内の温度変化(熱漏洩恒数)を測定しておき，溶解反応各期間内の内外温度差によるこの値を積算し，熱漏洩のない場合への補正値とする．各熱量計について測定した熱漏洩恒数曲線を図—2 に示す．見掛の温度上昇度にはベックマン温度計の目盛の補正 (図—3)，露出部の補正を加える．なお C_5A_3, CA の場合の様に溶解を中絶させる時には，補外法で求めた未溶解物分離時間中の温度上昇を加える．

次に室温と同温にある試料が液温に達するまでの熱容量を考慮し，溶解熱を無水物について次の様に算出する．

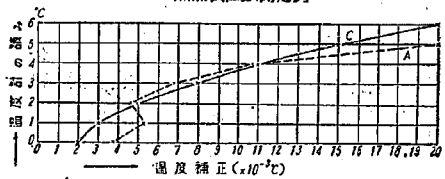
g	試料量	g
i	試料の灼減	%
g'	未溶解物量 (灼熱後の)	g
t	見掛温度上昇度	°C
Δt_1	温度計目盛補正	°C
Δt_2	熱漏洩補正	°C
Δt_3	温度計露出部補正	°C
Δt_4	未溶物分離期間の温度上昇補正	°C

当量測定結果

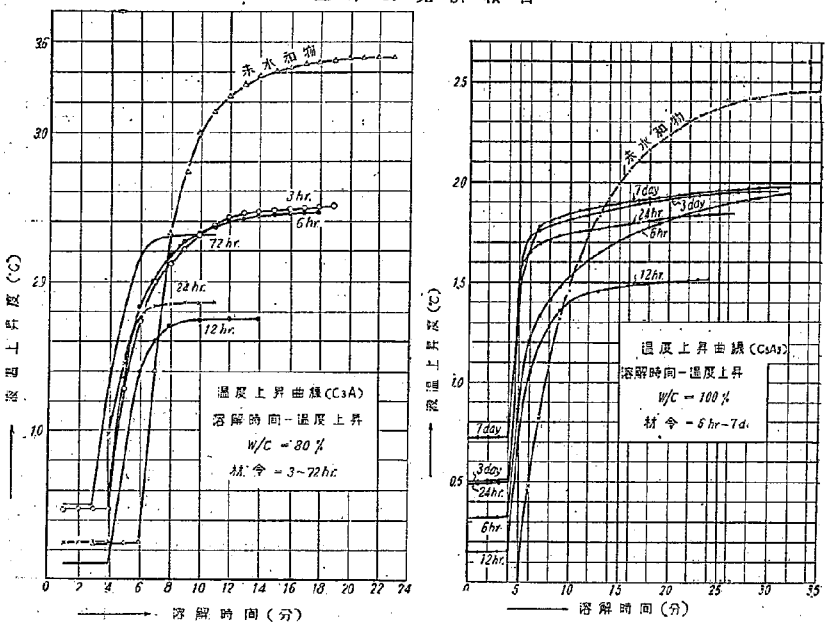
CaOの溶解熱 cal	熱量計中の全熱量 cal	水当量 W_1 cal/°C	酸液の水当量 $W_{HCl\cdot 20H_2O}$ cal/°C	W_c cal/°C	水当量 $W_{HCl\cdot 9H_2O}$	W_2 $W_{HCl\cdot 9H_2O}+W_c$	水当量 $W_{HCl\cdot 10H_2O}$	W_3 $W_{HCl\cdot 10H_2O}+W_c$
1,492.3	1,494.8	374.0	343.7	30.3	310.8	341.1	—	—
1,493.3	1,495.4	372.6	343.7	28.9	310.8	339.7	—	—
1,492.4	1,495.6	373.4	343.7	29.7	310.8	340.5	—	—
					(平均)	340.4		
1,489.5	1,491.5	372.8	343.7	28.9	310.8	339.7	—	—
1,492.2	1,494.5	372.5	343.7	28.6	310.8	339.4	—	—
1,488.7	1,490.9	373.2	343.7	29.3	310.8	340.1	—	—
					(平均)	339.7		
1,492.2	1,491.6	372.9	343.7	29.2	—	—	283.6	312.8
1,496.3	1,495.6	374.8	343.7	31.1	—	—	283.6	314.7
1,491.4	1,490.8	373.9	343.7	30.2	—	—	283.6	313.8
							(平均)	313.8
1,107.4	1,109.3	—	—	—	—	340.3	—	—
1,110.2	1,112.2	—	—	—	—	340.8	—	—
					(平均)	340.5		



図—2　熱漏洩恒数測定例



図—3　Beckmann 温度計目盛補正図



図—4 C_mA_n 溶解液温度上昇曲線

W	熱量計の水当量	cal/°C
T_1	室　温	°C
T_2	液　温	°C
C	比　熱（未水和物 0.2，水和物 0.3，CaO 0.17）	cal/°C
${}_{T_2}H_n$	材令 n 試料の T_2 に於ける溶解熱	cal/g

$$ {}_{T_2}H_n = W\times\frac{t+\Sigma\Delta t}{g(1-i)-g'}+c(T_2-T_1) $$

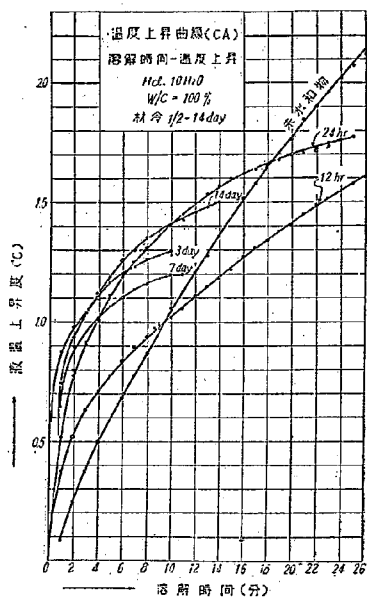
なお溶解熱の温度係数はポルトランドセメント，硝酸系の場合に Morris, Stenzel[5] によれば −0.3 cal/g/°C であり，一定温度 25°C に於ける溶解熱 ${}_{25}H_n$ は次の様に計算される．

$$ {}_{25}H_n = {}_{T_2}H_n - 0.3(T_2-25) $$

材令 n 日に於ける水和熱 $\Delta_{25}H_n$ は，25°C に於て測定された未水和，水和試料の溶解熱の差より算出される．

$$ \Delta\ {}_{25}H_n = {}_{25}H_0 - {}_{25}H_n $$

C_5A_3，CA の様に試料の溶解速度が小さく，完全に溶解させるに長時間を要し，熱量測定の誤差が大きくな



(c) CA

る懸濁のある時は，やむを得ず未溶解物質を残したまま熱量測定を行つたことは，すでに述べた．この場合材令 n に於ける水和熱 $\Delta_{25}H_n$ を求めるためには，水和物が全部溶解した時の溶解熱 ${}_{25}H_n$ を求めなければならない．${}_{25}H_n$ は使用試料に対する未溶解物質の分率を x とし，溶解物についての溶解熱 ${}_{25}H'_n$ を測定し得れば未溶解物は未水和物と同一物質であり，溶解熱は ${}_{25}H_0$ であることはすでに確めてあるので，${}_{25}H_n$ は次の様に求めることが出来る．

$$ {}_{25}H_n=(1-x)_{25}H'_n+x_{25}H_0 $$

従つて水和熱は次の様に求められる．

$$ \Delta_{25}H_n={}_{25}H_0-[(1-x)_{25}H'_n $$
$$ +x_{25}H_0]=(1-x)({}_{25}H_0-{}_{25}H'_n) $$

本実験により求められた結果には未だ確認されていない次に示す様な事項が関聯している．即ち水和物の比熱が確定されていないこと，溶解熱の温度係数は塩酸系については明瞭でなく硝酸系の -0.3 を採用していること，溶解試料量の相違による稀釈熱の補正がなされていないこと，試料溶解前後に於ける塩酸液の比熱が同一であるとしていること，および試料の溶解および試料より導入される水量が水当量に変化を与えないとしていること，等は測熱法と関聯して考慮されねばならない．

然し多くの研究者により確められており，又測定結果が示す様に容易に酸液に溶解しやすい C_3A 系の溶解熱は，1 cal/g 以下の誤差にて測定され，充分信頼し得る水和熱を与える．然し難溶性の C_5A_3 系および CA 系の溶解熱は誤差の導入が容易であり，又やや測熱値の精度を欠く．

Ⅲ 測 定 結 果

測定はすでに述べた g, g', i, t, Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4, W, T'_2, T'_1, x について行い，これより ${}_{T_2}H_n$, ${}_{25}H_n$ を算出し，次いで $\Delta_{25}H_n$ を求めた．これら結果の一部を表—3~6 および図—4 に示す．

表—3 C_3A, C_5A_3 CA の溶解熱

番号	試料別	溶解試料量 g(g)	溶剤濃度	溶剤量 (g)	水当量 (cal/°C)	反応温度 T_2(°C)	見掛け上の温度昇 t (°C)	真の温度昇 $t+\Sigma\Delta t$(°C)	溶解熱 $W\frac{t+\Sigma\Delta t}{g}$ (cal/g)	試料熱容量補正 $0.2(T_2-T_1)$ (cal/g)	真溶解熱 $_{T_2}H_0$ (cal/g)	真溶解熱 (25°C) $_{25}H_0$ (cal/g)
1	C_3A	1.4836	$HCl\cdot 20H_2O$	365.4	340.4	20.1	3.194	3.197	733.5	−0.8	732.7	731.4
2	〃	1.4821	〃	〃	〃	21.2	3.201	3.200	735.0	−0.8	734.2	733.1
3	〃	1.4868	〃	〃	〃	20.2	3.233	3.208	734.5	−1.0	733.5	733.1
4	〃	1.4836	〃	〃	〃	20.4	3.231	3.201	734.4	−1.2	733.2	731.9
5	〃	1.4835	〃	〃	〃	20.6	3.251	3.201	734.5	−1.6	732.9	731.6
6	〃	1.4860	〃	〃	〃	20.9	3.204	3.211	735.6	−0.8	734.8	733.6
											(平均)	732.5
7	C_5A_3	1.3916	$HCl\cdot 20H_2O$	365.4	339.7	24.7	2.735	2.667	651.1	−1.1	650.0	649.1
8	〃	1.3746	〃	〃	〃	24.9	2.719	2.635	651.2	−1.1	650.1	650.1
9	〃	1.3812	〃	〃	〃	25.6	2.728	2.651	652.0	−1.0	651.0	651.2
											(平均)	650.1
10	CA	1.6994	$HCl\cdot 10H_2O$	378.6	313.8	26.6	3.352	3.376	623.4	+0.1	623.5	624.0
11	〃	1.3341	〃	〃	〃	24.9	2.622	2.643	621.7	−0.1	621.6	621.6
12	〃	1.5604	〃	〃	〃	25.7	3.120	3.148	633.1	−0.2	632.9	632.1
13	〃	1.3959	〃	〃	〃	25.0	2.763	2.791	627.4	−0.1	627.3	627.3
											(平均)	626.3

表—4　C_3A の 水 和 熱

25°C 發生，$HCl \cdot 20H_2O$: 365.4 g，水当量 340.4 cal/°C，C_3A の溶解熱 (25°C) 732.5 cal/g

材令 時	水量 W/C (%)	溶解試料量 (無水物) $g(1-i)-g'$ (g)	反応温度 T_2 (°C)	見掛温度上昇 t (°C)	真温度上昇 $t+\Sigma\Delta t$ (°C)	溶解熱 (cal/g)	試料熱容量補正 $0.3(T_2-T_1)$ (cal/g)	真溶解熱 (T_2) $_{T_2}H_n$ (cal/g)	真溶解熱 (25°C) $_{25}H_n$ (cal/g)	水和熱平均 (25°C) $\Delta_{25}H_n$ (cal/g)	
3	40	1.0010	20.8	1.763	1.729	588.0	−0.9	587.1	585.8	146.7	147.9
		1.0341	20.5	1.817	1.780	585.9	−1.1	584.8	583.4	149.1	
6	〃	1.1036	24.0	1.821	1.846	569.4	−0.2	569.2	568.9	163.6	165.8
		0.9874	24.5	1.624	1.639	565.0	−0.2	564.8	564.6	167.9	
12	〃	1.0289	24.7	1.660	1.669	552.2	−0.2	552.0	551.9	180.6	181.4
		1.0233	24.9	1.647	1.655	550.5	−0.2	550.3	550.3	182.2	
24	〃	0.9049	24.1	1.396	1.418	533.4	+0.2	533.6	533.3	199.2	199.2
		0.8465	25.1	1.300	1.325	532.8	+0.4	533.2	533.2	199.3	
72	〃	0.8519	23.9	1.280	1.301	519.9	+0.2	520.1	519.8	212.7	211.5
		0.9682	24.1	1.466	1.486	522.5	+0.1	522.6	522.3	210.2	
3	60	1.0527	24.6	1.788	1.767	571.4	−0.7	570.7	570.6	161.9	161.9
6	〃	1.1083	21.9	1.833	1.769	543.3	−1.5	541.8	540.9	191.6	194.3
		1.0514	22.3	1.718	1.661	537.8	−1.4	536.4	535.6	196.9	
12	〃	0.9562	24.5	1.455	1.427	508.0	−1.0	507.0	506.8	225.7	225.2
		0.8431	24.3	1.300	1.261	509.1	−1.1	508.0	507.8	224.7	
24	〃	0.9086	25.1	1.347	1.346	504.3	−0.4	503.9	503.9	228.6	229.6
		0.8123	24.6	1.210	1.199	502.5	−0.6	501.9	501.8	230.7	
72	〃	0.8484	24.5	1.245	1.259	505.1	+0.2	505.3	505.1	227.4	228.2
		0.8245	24.1	1.215	1.221	504.1	−0.2	503.9	503.6	228.9	
3	80	1.1500	24.3	2.015	2.028	600.3	−0.2	600.1	599.9	132.6	133.2
		0.8944	24.6	1.562	1.569	597.2	−0.4	596.8	596.7	135.8	
6	〃	1.2345	24.5	1.976	1.986	547.6	−0.3	547.3	547.1	185.4	187.1
		0.8702	24.7	1.393	1.391	544.1	−0.3	543.8	543.7	188.8	
12	〃	1.1141	24.1	1.645	1.661	507.5	−0.1	507.4	507.1	225.4	225.4
		1.0760	24.2	1.593	1.604	507.4	−0.1	507.3	507.1	225.4	
24	〃	1.0733	24.3	1.585	1.575	499.5	−0.7	498.8	498.6	233.9	233.1
		0.9476	24.6	1.407	1.395	501.1	−0.7	500.4	500.3	232.2	
72	〃	1.2393	24.5	1.800	1.800	494.4	−0.4	494.0	493.8	238.7	239.8
		1.0213	24.3	1.483	1.477	492.3	−0.6	491.7	491.5	241.0	
3	150	1.1257	24.7	1.891	1.889	571.2	−0.5	570.7	570.6	161.9	162.1
		1.1029	24.5	1.865	1.850	571.0	−0.6	570.4	570.2	162.3	
6	〃	1.1014	24.5	1.653	1.648	509.3	−0.6	508.7	508.5	224.0	225.5
		0.9669	26.2	1.453	1.437	505.9	−0.7	505.2	505.6	226.9	
12	〃	0.8798	24.4	1.304	1.293	500.3	−0.7	499.6	499.4	232.1	230.4
		1.0109	24.5	1.510	1.499	504.8	−0.7	504.1	503.9	228.6	
24	〃	1.0126	24.1	1.478	1.477	496.5	−0.4	496.1	495.8	236.7	235.9
		0.9252	24.2	1.356	1.354	498.2	−0.5	497.7	497.5	235.0	
72	〃	0.8353	24.4	1.217	1.207	491.9	−0.7	491.2	491.0	241.5	240.3
		1.0134	24.2	1.478	1.472	494.4	−0.8	493.6	493.4	239.1	

表—5 C_5A_3 の水和熱

30°C 養生，$HCl \cdot 20H_2O$：365.4 g，水当量 339.7 cal/°C，溶解熱 (25°C) 650.1 cal/g

材令 時	水量 w/C (%)	溶解試料量 $s(1-i)-g'$ (g)	溶解量分率 $(1-r)$ (%)	反応温度 T_2 (°C)	見掛温度上昇 t (°C)	真温度上昇 $t+\Sigma\Delta t$ (°C)	溶解熱 (対可溶物) (cal/g)	試料熱容量補正 $0.3(T_2-T_1)$ (cal/g)	真溶解熱 (対可溶物) $(T_2$°C) $\gamma_2 H'_{t_2}$ (cal/g)	真溶解熱 (対可溶物) (25°C) $\gamma_5 H'_{t_2}$ (cal/g)	水和熱 平均 (25°C) $(1-x)(\gamma_5 H_0 - \gamma_5 H'_{t_2})$ (cal/g)	
6	50	1.2064	94.9	23.8	1.999	1.983	558.8	−0.8	558.0	557.6	87.8	87.8
7	〃	1.2063	94.7	23.7	1.998	1.974	555.9	−0.9	555.0	554.6	90.4	90.4
12	〃	1.2153	95.9	23.6	1.930	1.967	549.7	0.0	549.7	549.3	96.6	97.2
		1.1959	94.3	23.8	1.893	1.925	546.8	0.0	546.8	546.4	97.8	
24	〃	1.2450	96.6	24.1	2.000	2.002	546.3	−0.6	545.7	545.4	101.1	102.8
		1.2387	96.4	23.7	2.002	1.987	544.9	−0.8	544.1	543.7	102.6	
72	〃	1.2591	97.4	23.6	2.029	2.002	540.1	−0.9	539.2	538.8	108.4	109.2
		1.2654	97.8	23.7	2.045	2.008	539.0	−1.1	537.9	537.5	110.1	
168	〃	1.2316	98.7	24.7	2.087	1.996	529.1	−1.9	527.4	527.3	121.2	119.9
		1.2798	98.6	24.4	2.131	2.005	532.2	−2.1	530.1	529.9	118.5	
28日	〃	1.3364	98.6	24.6	2.171	2.092	531.7	−1.6	530.1	530.1	118.3	118.7
		1.3352	98.5	24.7	2.179	2.087	531.0	−1.7	529.3	529.3	119.0	
6	60	1.1049	95.0	23.8	1.849	1.819	558.4	−0.8	557.6	557.2	88.2	88.2
7	〃	1.0966	94.3	23.8	1.835	1.804	558.8	−0.9	557.9	557.5	87.5	87.5
12	〃	1.1298	95.2	23.7	1.744	1.763	530.1	+0.2	530.3	529.9	114.5	113.8
		1.1312	95.3	23.7	1.754	1.770	531.5	+0.2	531.7	531.3	113.0	
24	〃	1.1483	96.3	23.6	1.759	1.777	525.7	0.0	525.7	525.3	120.1	120.6
		1.1536	96.9	23.8	1.759	1.784	525.3	0.0	525.3	525.0	121.0	
72	〃	1.2317	98.3	24.7	1.977	1.891	521.5	−1.6	519.9	519.8	128.1	128.0
		1.2280	98.0	24.6	1.975	1.886	521.7	−1.6	520.1	520.0	127.8	
168	〃	1.1985	97.7	24.2	1.873	1.837	520.7	−1.0	519.7	519.5	127.2	128.2
		1.1990	97.7	24.2	1.896	1.832	519.0	−1.3	517.7	517.5	129.2	
28日	〃	1.0384	98.9	24.3	1.718	1.597	522.5	−1.9	520.6	520.4	128.5	128.5
6	80	1.1067	94.8	22.4	1.822	1.785	547.9	−0.7	547.2	546.4	98.2	98.2
7	〃	1.1073	94.8	21.7	1.799	1.745	535.3	−1.2	534.1	533.1	111.0	111.0
12	〃	1.1380	95.8	21.3	1.696	1.678	500.9	−0.8	500.1	499.0	145.0	146.8
		1.1420	96.1	21.5	1.694	1.671	497.0	−0.5	496.5	495.3	148.5	
24	〃	0.9933	95.2	21.0	1.438	1.397	477.8	−1.0	476.8	475.6	166.0	163.5
		0.9897	94.9	20.9	1.447	1.407	482.9	−1.0	481.9	480.7	160.9	
72	〃	1.1265	96.8	21.3	1.600	1.577	475.4	−0.7	474.7	473.6	171.0	171.2
		1.1307	97.2	22.9	1.596	1.580	474.5	−0.3	474.2	473.6	171.5	
168	〃	1.0413	96.5	20.9	1.453	1.418	462.6	−0.9	461.7	460.5	182.9	184.0
		1.0420	96.6	20.9	1.482	1.413	460.6	−1.2	459.6	458.4	185.0	
6	100	0.9712	94.2	22.1	1.624	1.577	551.6	−0.8	550.8	549.9	94.4	94.4
7	〃	0.9758	94.7	21.6	1.620	1.550	539.6	−1.4	538.2	537.2	106.9	106.9
12	〃	0.9695	96.8	21.0	1.368	1.364	477.9	−0.5	477.4	476.2	168.3	168.0
		0.9967	97.5	21.1	1.390	1.379	479.7	−0.5	479.2	478.0	167.8	

24	100	0.9406	96.3	21.3	1.340	1.296	468.1	−1.1	467.0	465.9	177.4	178.4
		0.9393	96.3	21.2	1.343	1.290	466.3	−1.2	465.1	464.0	179.2	
72	〃	1.0393	98.1	21.3	1.452	1.389	454.0	−1.3	452.7	451.6	194.7	194.6
		1.0410	98.2	21.4	1.477	1.393	454.6	−1.4	453.2	452.1	194.4	
168	〃	0.9300	98.6	22.5	1.250	1.214	443.4	−0.8	442.6	441.8	205.4	206.3
		0.9296	98.6	22.4	1.258	1.209	441.8	−0.9	440.9	440.1	207.1	
6	120	1.0180	91.1	22.0	1.703	1.661	554.3	−1.0	553.3	552.4	89.0	89.0
7	〃	1.0227	91.6	22.0	1.665	1.627	540.4	−1.0	539.4	538.5	102.2	102.2
12	〃	1.0017	96.7	21.4	1.406	1.400	474.8	−0.6	474.2	473.1	171.2	170.2
		1.0025	96.7	21.6	1.417	1.407	476.8	−0.7	476.1	475.1	169.2	
24	〃	0.9183	98.4	21.3	1.243	1.213	448.7	−0.9	447.8	446.7	200.1	200.7
		0.9179	98.3	21.6	1.252	1.209	447.4	−1.1	446.3	445.3	201.3	
72	〃	0.9177	99.3	22.0	1.173	1.159	429.0	−0.7	428.3	427.4	221.1	221.1
168	〃	0.9895	98.9	21.3	1.207	1.218	418.2	−0.1	418.1	417.0	230.5	229.8
		1.0073	98.9	21.4	1.237	1.044	419.5	−0.2	419.3	418.2	229.3	
168	200	0.7808	98.5	20.8	1.045	1.042	449.9	−0.5	449.4	448.2	198.9	199.8
		0.7875	98.8	21.0	1.043	1.040	448.6	−0.5	448.1	446.9	200.7	
168	300	0.8459	99.3	20.8	1.097	1.096	440.1	−0.5	439.6	438.4	210.2	211.9
		0.8475	99.7	20.8	1.095	1.092	437.7	−0.5	437.2	436.0	213.5	

(完全水和熱測定結果)

5日	60	1.2197	97.7	25.3	1.973	1.861	519.2	−1.9	517.3	517.4	129.6	133.6
		1.2201	97.7	25.4	1.938	1.832	511.0	−1.8	509.2	509.3	137.6	
11	120	0.8700	98.6	23.6	1.281	1.226	478.7	−1.1	477.6	477.2	170.5	170.4
		0.8907	98.6	23.6	1.290	1.296	479.0	−0.9	478.1	477.5	170.3	
22	160	0.7112	93.6	24.7	0.959	0.970	463.3	0.0	463.3	463.2	174.9	173.5
		0.6309	89.6	24.3	0.859	0.852	458.7	−0.4	458.3	458.1	172.0	
40	200	0.8835	85.7	21.0	1.152	1.158	445.2	−0.2	445.0	443.8	176.8	179.2
		0.8969	87.0	20.9	1.164	1.169	442.8	−0.2	442.6	441.4	181.6	

表−6 OA の水和熱

25°C 養生, $HCl \cdot 10H_2O$: 378.6 g, 水当量 313.8 cal/°C, 溶解熱 (25°C) 626.3 cal/g

材令 日	水量 w/g (%)	溶解試料量(無水物) $g(1-i)-g'$ (g)	溶解量分率 $(1-x)$ (%)	反応温度 T_2 (°C)	見掛温度上昇 t (°C)	真温度上昇 $t+\Sigma\Delta t$ (°C)	溶解熱(対可溶物) (cal/g)	試料熱容量補正 $0.3(T_2-T_1)$ (cal/g)	真溶解熱(対可溶物) $(T_2$°C$)$ $_{T_2}H'_{n5}$ (cal/g)	真溶解熱(対可溶物) (25°C) $_{25}H'_n$ (cal/g)	水和熱 平均値 (25°C) $(1-x)(_{25}H_0 - {}_{25}H'_n)$ (cal/g)	
1/2	60	1.3768	69.4	25.8	1.884	1.835	619.0	−0.3	618.7	618.9	5.1	7
		1.3773	71.7	25.6	1.948	1.935	613.9	−0.6	613.3	613.5	9.2	
1	〃	1.0509	65.2	20.7	1.173	1.150	526.9	−0.9	526.0	524.7	66.2	66
		1.0509	60.6	20.5	1.076	1.056	519.3	−1.1	518.2	516.8	66.4	
2	〃	1.0353	81.4	25.3	1.755	1.752	531.0	−0.3	530.7	530.8	77.7	76
		1.0401	81.8	25.3	1.773	1.773	534.9	−0.3	534.6	534.7	74.9	
3	〃	0.6522	64.1	21.2	1.021	1.025	493.2	−1.2	492.0	490.9	87.5	88
		0.6509	63.9	21.2	1.023	1.017	490.3	−1.3	489.0	487.9	88.4	

7	60	1.0143 1.0080	75.4 75.0	24.3 24.4	1.513 1.504	1.554 1.547	480.7 481.6	+0.2 +0.1	480.9 481.7	480.7 481.5	109.8 108.6	109
14	〃	1.0934 1.0913	84.4 84.2	22.1 21.8	1.730 1.742	1.715 1.731	492.2 497.7	−1.2 −1.3	491.0 496.4	490.1 495.4	115.0 110.2	113
1/2	80	1.0183 0.7783	77.9 60.0	25.3 25.4	1.963 1.465	1.978 1.492	608.0 601.6	0.0 −0.1	608.0 601.5	608.1 601.6	14.2 14.8	14
1	〃	1.0394 1.0472	85.1 85.7	25.5 25.5	1.713 1.720	1.709 1.707	516.0 511.5	−0.3 −0.4	515.7 511.1	515.8 511.3	94.1 98.4	96
2	〃	1.0214 1.0189	86.5 86.3	25.2 25.1	1.638 1.659	1.641 1.661	504.2 511.6	0.0 −0.1	504.2 511.5	504.3 511.5	105.5 99.1	102
3	〃	0.9186 0.9167	80.8 80.6	24.0 24.2	1.405 1.386	1.440 1.425	491.8 487.8	+0.1 +0.1	491.9 487.9	491.6 487.7	108.8 111.7	110
7	〃	0.9850 0.9968	83.9 84.9	22.4 22.3	1.490 1.556	1.496 1.558	476.6 490.5	−0.8 −0.8	475.8 489.7	475.0 488.9	126.9 116.6	122
14	〃	1.0912 1.0921	92.0 92.1	25.4 25.5	1.697 1.677	1.700 1.683	488.9 483.6	−0.6 −0.6	488.3 483.0	488.4 483.2	128.0 131.8	130
1/2	100	1.0873 1.0966	75.7 75.1	25.3 25.4	2.014 1.986	2.014 1.987	581.2 568.6	−0.4 −0.4	580.8 568.2	580.9 568.3	34.4 43.6	39
1	〃	1.1560 1.1698	87.3 88.3	25.4 25.5	1.848 1.861	1.847 1.859	501.4 498.7	−0.2 −0.3	501.2 498.4	501.3 498.6	109.1 112.8	111
2	〃	1.1517 1.1446	89.2 87.6	25.8 25.4	1.858 1.854	1.851 1.854	504.3 505.1	−0.4 −0.5	503.9 504.6	504.1 504.7	109.0 105.5	108
3	〃	0.8662 0.9062	81.0 83.8	25.5 25.5	1.346 1.410	1.326 1.430	493.4 497.2	−0.4 −0.6	493.0 496.6	493.2 496.8	107.8 108.6	108
7	〃	0.8820 0.8783	84.5 84.2	21.9 21.7	1.295 1.305	1.389 1.345	476.4 480.5	−0.4 −0.6	476.0 479.9	475.1 478.9	127.8 121.5	125
14	〃	0.9937 0.9917	94.3 94.2	25.3 25.7	1.469 1.477	1.487 1.488	469.6 470.8	−0.2 −0.2	469.4 470.6	469.5 470.8	147.9 146.5	147
1	120	1.0205 1.0289	85.7 86.4	25.7 25.7	1.533 1.576	1.555 1.596	478.1 486.1	+0.2 +0.1	478.3 486.9	478.5 487.1	126.7 120.2	123
2	〃	1.1050 1.1141	91.8 92.6	25.5 25.5	1.732 1.746	1.727 1.738	490.4 489.5	−0.4 −0.5	490.0 489.0	490.2 489.2	125.5 127.0	126
3	〃	1.0390 1.0525	90.3 91.5	25.5 25.5	1.590 1.624	1.601 1.627	483.5 485.1	−0.5 −0.5	483.0 484.6	483.2 484.8	129.2 129.5	129
7	〃	1.1043 1.1022 1.1541 1.1545	90.8 90.6 96.7 96.7	25.5 25.5 25.4 25.4	1.671 1.649 1.709 1.739	1.685 1.672 1.711 1.739	479.1 476.0 465.2 472.6	−0.4 −0.5 −0.3 −0.4	478.7 475.5 464.9 472.2	478.9 475.7 465.0 472.3	133.8 136.4 156.0 148.9	144
14	〃	1.1617 1.1509	96.2 95.5	24.6 25.6	1.623 1.615	1.718 1.655	464.1 451.2	+0.4 +0.5	464.5 451.7	464.4 451.9	155.7 166.6	161
28	〃	1.2185 1.2107	99.2 98.5	25.4 25.2	1.747 1.780	1.732 1.762	446.0 456.7	−0.4 −0.4	445.6 456.3	445.7 456.3	179.2 167.5	173

Ⅳ 考　　察

上記の実験結果より C_3A, C_5A_3, CA の溶解熱，水和熱について考察し，水和反応について論及する．

〔1〕 C_3A について

（1） C_3A は $HCl \cdot 20H_2O$ に容易に溶解する．C_3A の水和物は未水和物に比してより容易に溶解することは図—4(a) に見られる様に明白である．即ち図—4 に見られる様に，例えば水量 80%，材令 3 時，6 時の短期養生のものは溶解に 10～12 分を要し，温度上昇曲線は未水和物のそれに近似し，未水和物の存在を示す．12 時間以上の長期養生のものは 4～5 分にて溶解は終り，水和物の方が遥に易溶性であることを示す．又 12 時間以上の長期養生のものは水量に関せず，同様に溶解しやすい事実はその殆んど全部が水和を終つたものと見られ，これは後述の水和熱発生状況とよく一致しており，水和反応解明の一資料と見なされる．

C_3A 水和物の溶解に際して，やや難溶性物質が少量（約 0.5%以下）あつた．この物質は水量多く，長期材令の場合はやや減少する傾向があるが，その割合は大体一定である．このことは酸液にこの物質が殆んど不溶であること，および水和速度が甚だ小さいことを示している．以上述べた様に C_3A の水和熱，溶解熱に対しては，難溶性物質の存在は殆んど影響を与えないと考えることが出来る．これら物質の分析結果は，遊離アルミナ 26.4%，化合アルミナ 43.0%，石灰 31.1%，鉄痕跡であり，C_3A に混じている低級ガラス質アルミネートかと考えられる．又長期材令試料の溶解液が白濁したゾル状液となり，実験が不可能のことがあつた．恐らくアルミナ加水物の老化熟成によると考えられる．

（2） 物質の溶解熱は溶剤の種類，量，濃度，反応温度等により相異し，又熱量計，測熱法によつても相違する．著者等の実験法についてはすでに述べた所であり，Thorvaldson[1] の実験結果と比較し得る条件を選んでいる．

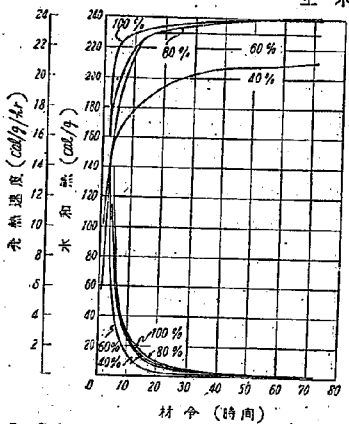
次に現在までに測定されている C_3A の溶解熱を 表—7 に示し，著者等の値と比較対照する．

表—7　C_3A の溶解熱

測定者	熱量計	試料量 (g)	溶剤濃度	溶剤量 (g)	温度 (°C)	溶解熱 (cal/g)
T. Thorvaldson[1](1930)	断熱熱量計	2.8	$HCl \cdot 20H_2O$	600	20	736.4
Lerch-Bogue[8] (1934)	断熱熱量計	3.0	$2N \cdot HNO_3$	350	25	733.0
Lerch-Brownmiller[11] (1937)	半断熱熱量計	3.0	$2N \cdot HNO_3$ +48% HF	420 5cc	23±3	783.3
Insley[12] (1938)	恒温熱量計	—	$2.5N \cdot HNO_3$ +48% HF	648.5 11.5	25	799.0
Cirilli[7] (1939)	——	—	——	—	—	735.6
福島・有泉 (1948)	半断熱熱量計	1.5	$HCl \cdot 20H_2O$	365.4	25	732.5

著者等の 732.5 cal/g は 25°C の場合であり，Lerch-Bogue の 733.0 cal/g と殆んど一致するが Thorvaldson の値と比較するため，20°C の値を算出すれば 734.0 cal/g となり，大体実験誤差程度で一致すると云うことが出来る．Cirilli の測定値については原報が見られないので，実験条件等については明らかでない．Lerch-Brownmiller, Insley の測定値は何れも硝酸系溶剤を使用した Lerch-Bogue の測定値より大きいことはこれら研究がセメント焼塊研究の一部として行われたために弗化水素酸を溶剤に加えたことに基くと考えられる．

（3） すでに著者等が当研究所報告に述べた恒温熱量計（26.8°C）による水和熱の研究にて明らかである様



図—5 C_3A–H_2O 系の水和熱および発熱速度

に，C_3A は注水直後より急激な発熱を行い硬化する故に，注水初期の水和熱の測定はこの溶解熱法では困難であり，正確を期することが難しい．

図—5，表—4，8 に示す様に水和熱は材令および水量により著るしい相異がある．C_3A の水和熱は材令 6 時までは急速に増加し，12 時（水量 60% 以上），又は 24 時（40%）に至つて発熱はほゞ終局状態に近ずき，その後 72 時間に至るも大した変化はなく，水和は終る．水量 40% 以外の試料は材令 3 日の発熱量の約 70%が 3 時間，80～95% が 6 時間，95% 以上が 12 時間に発生するが，水量 40% のものはそれ程急発熱性ではない．C_3A は注水より 12 時間でほゞ水和を完了すると見なされる高発熱急硬性化合物である．C_3A の水

表—8 C_3A の水和熱（cal/g）および発熱速度（cal/g/hr）

水量(%) ＼ 材令(時)	水和熱(cal/g)—材令(時)					発熱速度(cal/g/hr)—材令(時)					水和熱曲線実験式係数 $y=\frac{x}{a+bx}$	
	3	6	12	24	72	3	6	12	24	72	a	b
40	147.9	165.8	181.4	199.2	211.5	16.3	6.1	1.92	0.55	0.066	0.00795	0.00470
60	161.9	194.3	225.2	229.6	228.2	10.7	3.2	0.88	0.23	0.026	0.00268	0.00439
80	133.2	187.1	225.4	233.1	239.8	19.2	7.3	2.35	0.67	0.081	0.00732	0.00405
100	162.1	225.5	230.4	235.9	240.3	18.7	6.9	2.17	0.62	0.075	0.00709	0 00416

和熱は又水量により著るしい影響をうける．一般に水量の多い程水和熱は大きいが，3 時間位では水量少きものの方が水量多いものよりむしろ高い水和熱を与える傾向がある．水量の少いものは初期の水和は盛んであるが，水が消費されるに従い水の分布は不均一となり，局部的水和に終り，長期への水和が可成阻止されるものと考えられる．

なお，水和熱を y cal/g，材令を x 時間とすれば，x/y と x とは直線関係がある．即ち水和熱曲線は次式で表わすことが出来る．

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

表—5 に示す測定値より最小自乗法で a，b の値を求むれば水和熱曲線の実験式を得ることが出来る．表—8 にこの様にして求めた a，b の値を示す．

上式を材令について微分すれば，任意の材令に於ける発熱速度（cal/g/hr）を知ることが出来る．

$$\text{発熱速度(cal/g/hr)}=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{(a+bx)^2}$$

図—5，表—8 にはこの様にして求めた発熱速度を示してある．これらの結果より明らかである様に，C_3A は水和の初期に急激な発熱反応を行い，24 時間で発熱は殆んど終結することを知る．水量 60% のものが 3 時間以後の発熱速度がやや小さいことを除いては，40%，80%，100% 水量の場合は大体類似した発熱速度を与えている．

（4） C_3A の水和熱発生の情況は，水和条件等により異なるものであるが，水和が完了したと見られる 24時間，72 時間の水和熱を現在までに報告された水和熱値，およびその発生の情況と共に表—9 に示す．

Thorvaldson[1] 等はオートクレーヴ中で水和させて造つた $C_3A \cdot 6H_2O$，0°C で水和させて得た $C_3A \cdot 12H_2O$，および $C_3A \cdot 12H_2O$ を種々の蒸気圧の下で乾燥し得た $C_3A \cdot 8H_2O$，$C_3A \cdot 10H_2O$ の溶解熱よりそれら水和物が生成するときの水和熱の値を得ているが，これらの値はそれぞれ特殊の条件の下で作製した水和化合物について得た値であり，未水和物の溶解，水和化合物の析出，ゲル状物質の生成，および結晶化，不安定型水和化合物の生成，およびその安定型水和物への転移，およびそれら反応の速度の異同等複雑な反応の行われる実際の水和反応に於ける水和熱測定値ではない．著者等の研究は実際の水和反応に於て生成する水和熱を水・セメント比，材令を変えて測定したのであり，未だ充分には明らかにされていない水和機構解明の有力な資料となると考えられる．

Lerch-Bogue[3] は“完全水和熱”として 207 cal/g を得て居る．“完全水和”とは，それ以上反応が行われず，又未反応物も残らない終極の水和点を意味し，この点は顕微鏡，X 線的に未反応物の存在を認めず，又溶解熱値が一定となる点とした．207 cal/g の値は Thorvaldson 等の値より約 7 cal/g 低く，著者等の値より何れも低い．実際の水和反応に於ては上記の様な“完全水和”は起らないと考えられる．

Cirilli[17] は水量の異つた各種水和物の水和熱を報告しているが，それら水和物の生成の条件等は原報が入手出来ないので明らかではない．Cirilli は $C_3A \cdot 6H_2O$ の水和熱について，Thorvaldson の値に近い結果を得ており，高級水和物程水和熱が高い点も一致している．$C_3A \cdot 7.3H_2O$，$C_3A \cdot 9.3H_2O$ 等は $C_3A \cdot 6H_2O$，および $C_3A \cdot 12H_2O$ の混合物である点を認めており，高級水和物が純粋な化合物ではないという Thorvaldson の推定を支持して居る．

Wood，Steiner，Starcke[9]，藤井，浅岡[10]，Lerch-Bogue 等はポルトランド・セメントの水和熱を各材令に於て各セメント化合物が如何に分担するかを多数のセメントについて Bogue のセメント化合物計算式が成立し，それら成分は各々独立して水和すると仮定して，セメントの水和熱より最小自乗法により算出した．これらの値は多くの仮定の下に間接的に計算された値であり，純粋な C_3A 一成分の水和熱とは比較することは出来ない．

Honous[18] は既知の熱化学資料より C_3A の水和熱 202.9 cal/g を得ており，これが実測値 213.7 cal/g に近いことを示して居る．

Forblich[23] は熱伝導量計により凝結遅延剤として 12% $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ を添加した C_3A の発熱速度を研究し，反応開始后 6 時間頃より急発熱を始め，8 時間頃にはすでに大部分の発熱を終ることを明らかにしている．

なお上記以外に，Nacken[22]，山内，近藤[20]，内田[21] 等は真空瓶中での C_3A ペーストの温度上昇を測定し

て，これら化合物が急発熱性化合物であり，初期の水和熱が異常に大きいことを実験して居る．

以上は特定水和化合物が生成する場合の水和熱，又は特定条件の下での水和熱の測定結果，あるいはポルトランド・セメント自体の水和熱研究の一端としての C_3A 化合物の発熱を種々の仮定の下に算出したものである

表—9 C_3A の水和熱

測定者	水和度	水和熱 (cal/g)	水和条件
Thorvaldson[1] (1930)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot 6H_2O$	214.3	オートクレーヴ中で合成
	$C_3A\cdot 8H_2O$	235	$C_3A\cdot 12H_2O$ を一定蒸気圧の下で乾燥する
	$C_3A\cdot 10H_2O$	251	
	$C_3A\cdot 12H_2O$	261	0°C で水和させる
Lerch-Bogue[5] (1934)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot nH_2O$	207	25°C 完全水和
Cirilli[17] (1939)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot 1.5H_2O$	94.3	
	$C_3A\cdot 2.7H_2O$	122.3	
	$C_3A\cdot 6H_2O$	215.6	
	$C_3A\cdot 7.2H_2O$	236.3	
	$C_3A\cdot 9.3H_2O$	252.3	
	$C_3A\cdot 12H_2O$	268.1	
福島・有泉 (1948)	$C_3A+nH_2O\rightarrow$ (40%) $C_3A\cdot nH_2O$	(24時) 199.2 (72時) 211.5	25°C 回転養生
	(60%) $C_3A\cdot nH_2O$	229.6 228.2	〃
	(80%) $C_3A\cdot nH_2O$	233.1 239.8	〃
	(150%) $C_3A\cdot nH_2O$	235.9 240.3	〃
Wood-Steiner-Starcke[3] (1932)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot nH_2O$	(3日) (7日) (28日) 170 188 202 (90日) (180日) 188 218	35°C W/c 40%
Lerch-Bogue[5] (1934)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot nH_2O$	(48時) 150	断熱真空瓶法
Honus[18] (1934)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot nH_2O$	213.7	計算値
		202.9	
藤井，岸岡[19] (1934)	$C_3A+nH_2O\rightarrow C_3A\cdot nH_2O$	(1日) (3日) (7日) (28日) 112, 208, 377, 256	18°C W/c 40%
近藤，山内[20] (1933)		定性試験	
内田[21]		定性試験	
Nacken[22]		定性試験	
Forblich[23]		発熱速度(cal/g/hr)	$C_3A+12\%CaSO_4\cdot 2H_2O$
	時 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cal/g/hr 1, 2, 35, 5, 34.5, 2.5		熱伝導熱量計

り，C_3A 自体の各水量，各材令に於ける水和熱，発熱速度を実測し，これが水和による発熱現象を明らかにしようとする著者等の研究とは幾分その目的を異にしていると見られる．

（5） 著者等の実測による水量 40%，材令 72 時間の水和熱 211.5 cal/g は，Thorvaldson の 214.3 cal/g ($C_3A \cdot 6H_2O$)，Cirilli の 215.6 cal/g ($C_3A \cdot 6H_2O$) に近い，又水量 80%，材令 24 時間の水和熱 233.1 cal/g，および 150%，24 時間の水和熱 235.9 cal/g は，それぞれ Thorvaldson の 235 cal/g ($C_3A \cdot 8H_2O$)，Cirilli の 236.3 cal/g ($C_3A \cdot 7.3H_2O$) に近いと云える．従つて著者等の水量，時間，温度では C_3A の水和作用は，その終局水和生成物として $C_3A \cdot 6H_2O$ を主とし，特に水量の多い時はその他の高級水和物をも生成していると解される．然し水和熱が 250～260 cal/g の様に高い値を示さないことは，低温に於てのみ生成するとされる $C_3A \cdot 12H_2O$ 等の高級水和物は生成しないことを支持していると考えられる．

又 Assarson[24] の研究によれば，C_3A は 20°C に於てはその水和初期過程に於て多くのゲル状物質，アルミナゲル，$C_3A \cdot 9H_2O$，$C_4A \cdot 12H_2O$，$Ca(OH)_2$ 等を生成し，これらより順次 $C_3A \cdot 6H_2O$ が生成されるとされている．従つて $C_3A + 6H_2O \rightarrow C_3A \cdot 6H_2O$ の如く簡単に表わされるべきものではなく，実際の水和の様相は可なり複雑であると考えるのが至当である．著者等の研究結果はこれら水和現象の解明に新資料を提供して居る．

（6） すでに報告した恒温熱量計 (26.8°C) による C_3A の水和熱と，本溶解熱法による水和熱を比較すれば溶解熱法の値の方が高いことを示している．このことは後者が養生時に充分攪拌されていることに基くと云うことは，すでに前報告に述べた所である．

〔2〕 C_5A_3 について

（1） C_5A_3 は $HCl \cdot 20H_2O$ に急速には溶解しない．完全に溶解するには約 30分を要する．然し C_5A_3 の水和物は未水和物に比して，はるかに容易に溶解する．図—4—(b) は水量 100% のときの各材令に於ける溶解時の温度上昇状況を示す．材令 6 時のものは溶解に長時間を要し，温度上昇曲線は未水和物のそれに近似し，相当量の未水和物の存在を示す．材分12 時以上のものは大体 5 分位で急速に大部の溶解を終るが，少量の未水和物の存在のためか緩除な溶解が継続する．水和物は C_3A の場合と同様な温度上昇曲線を示し，酸に易溶性である．又 24 時間以上の長期材令のものは水量に関せず同様な溶解状況を示し，殆んど大部分が水和を大体終つたことを示す．又材令 7 日に於ける水量と，温度上昇曲線との関係は水量 80% までは未水和物の相当量が存在することを示し，100% 以上ではそれぞれ同様の急速溶解に次いで緩除な溶解を示す．

これらの未水和物，水和物の溶解状況は試料 C_5A_3 が完全均質のものでなく，溶解速度を異にする2成分より成り，溶解速度の大きい方は水和速度も大きく，溶解速度の小さい方は水和速度も小さいことを示して居る．これらのことは溶解熱測定後の難溶物の量が材令が大きくなる程少なくなることによつても示される．

（2） 未水和物はやや緩溶性であり，水和物より分離した難溶性分は，C_5A_3 化合物の組成上混入しやすい硝子質 C_5A_3 と考えられる．検鏡の結果成分的には C_5A_3 であるに不拘，これが硝子質であることを一応確め，その含量は大体未水和物について約5%以下であることを知つた．即ち恐らく易溶性にて水和速度の大きいものは結晶質 C_5A_3 であり，難溶性にて水和速度の小さいものは硝子質 C_5A_3 と考えられる．W. A. Roth, V. Wolf[25] は C_5A_3 の溶解熱測定実験に於て同様の見解を述べて居る．

（3） 物質の溶解熱は溶剤の種類，量，濃度，反応速度，測熱法によつて相違し，更に硝子質等を含有する場合は結晶潜熱を考慮することが必要となり，硝子質含量によつても相違する．

次に，現在までに報告されている C_5A_3 の溶解熱を 表—10 に示し著者等の値と比較検討する．

表—10 C_5A_3 の 溶 解 熱

測 定 者	熱量計	試料組成	試料量 (g)	溶剤濃度 (N, %)	溶剤量 (g)	HCl量 (HNO_3)/試料(g/g)	温 度 (°C)	溶 解 熱 (cal/g)
Roth[25] (1940)	半断熱熱量計	記載なし	0.21	HCl·aq 24.3%	450.0	516	25	695.2 (結晶質) 754.3 (硝子質)
Lerch, Brownmiller[11] (1937)	半断熱熱量計	記載なし	3.0	HNO_3 2N HF 48%	420.0 5 cc	16.4	23±3	726.2
福島，有泉 (1948)	半断熱熱量計	合成 C_5A_3 約5% 硝子質をふくむ	1.4	HCl·$20H_2O$ 2.6N 9.2%	365.4	24.0	25.0	650.1

Roth[25] は結晶質，および硝子質 C_5A_3 が多量の塩酸に対する溶解熱を測定し，結晶質について 695.2 cal/g，硝子質について 754.3 cal/g を得ているがこれは著者等の実験数値と相当の相違がある．Roth の使用した試料は自らが合成したものでなく，X 線的に結晶質か硝子質かを検してはいるが，C_5A_3 化合物の組成純度等については何等言及していない．又 Roth は塩酸の高濃度のものを使用し，少量の試料に対して多量の溶剤を使用して居る．即ち HCl 量/試料 は著者等の約 20 倍に達して居る．従つて稀釈熱の差等も充分考慮されねばならない．なお試料量 (0.21 g) は溶剤量 (450 g) に比して過小と見られ，温度上昇度測定に困難が予想される．

Lerch, Brownmiller[11] も同様に C_5A_3 の溶解熱として 726.2 cal/g を得ているが，溶剤として著者等の塩酸系とは別に硝酸，弗化水素系を使用しており，試料の組成，純度等に関し何等言及していないし，弗酸を加えた場合は溶解熱が大きいことは C_3A の場合にも認められており，著者等の得た値とそのまま比較することは出来ない．著者等をして云わしむれば，上記両氏共研究者自ら実験試料の合成，および分析等を行わず，これについて言及していない処に，測定値について相違の存する根本的な理由があるものと解釈される．

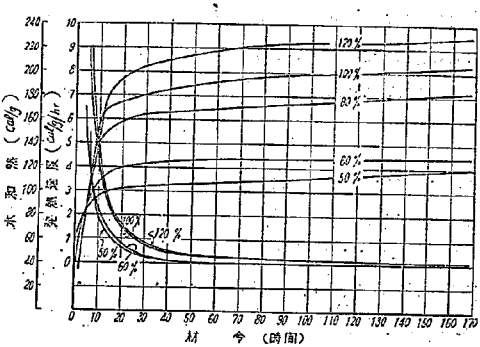
なお，硝子質の溶解熱は結晶質の溶解熱より結晶潜熱丈大きく，Roth 等の結果によればこの結晶潜熱は 59.1 cal/g である．又 Tamman は一般に硝子質の結晶潜熱は約 50 cal/g とし，Lerch-Brownmiller[11] もグリソカー中の硝子質について 50 cal/g の数値をとつて居る．従つて著者等の試料は約 5% 程度の硝子質を含有すると考えられるので，結晶質 C_5A_3 の溶解熱は 650.1 cal/g より 2.5～3.0 cal/g 低い値と考えられる．

要するに C_5A_3 化合物の溶解熱は試料の性質即ち結晶質，硝子質の別，その純度，混合の割合は勿論のこと，溶解条件によつても相違した数値を得るのであるが，更に今日未だ C_5A_3 の組成構造について一部研究者間に見解の相違があり，C_5A_3 に安定型と不安定型の存すること，組成は $C_{12}A_7$ が真の組成である等，溶解熱の基礎となるこの化合物の生成熱に関聯する結晶構造等が，充分解明されていないことが研究者により異つた溶解熱を与える根本的原因と考えられる．従つて C_5A_3 の溶解熱測定に使用する試料は研究者自らが合成し，合成

の方法，条件を明確にし，組成を明らかにしなければならない．

（4） 水量および材令を替えた場合の水和熱を表—5，11 および図—6 に示す．一般に水和熱は水量により著るしく影響され，水量が増せば水和熱も大となり，又養生材令にも関係し，材令が大きくなれば水和熱も増加する．

材令 6 時の水和熱は 90～100 cal/g であり，12 時までは殆んど直線的に急発熱し，続いて 24 時まで同様に発熱する．



図—6　C_5A_3—H_2O 系の水和熱及発熱速度

表—11　C_5A_3 の水和熱（cal/g）および発熱速度（cal/g/hr）

水量（%）	水和熱—材令（時）							発熱速度(cal/g/hr)—材令(時)					水和熱曲線実験式係数 $y=\frac{x}{a+bx}$	
	6	7	12	24	72	168	28(日)	6	12	24	72	168	a	b
50	87.8	90.4	97.2	102.8	109.2	119.9	118.7	4.38	1.90	0.62	0.085	0.017	0.03306	0.00823
60	88.2	87.5	113.8	120.6	128.0	128.2	128.5	4.02	1.30	0.38	0.046	0.088	0.01505	0.00770
80	98.2	111.0	146.8	163.2	171.2	184.0	—	7.72	3.17	1.08	0.151	0.030	0.02526	0.00533
100	94.4	106.9	168.0	178.4	194.6	206.3	—	8.80	3.78	1.32	0.194	0.038	0.02545	0.00472
120	89.0	102.2	170.2	200.7	221.1	229.8	—	9.96	4.70	1.76	0.273	0.056	0.02948	0.00416
200	—	—	—	—	—	199.8	—	—	—	—	—	—	—	—
300	—	—	—	—	—	221.9	—	—	—	—	—	—	—	—

24 時に至り発熱は大略飽和に達し，それ以后は発熱を続けるが僅かであり，水和熱は余り変らない．材令 7 日の発熱量の約 81%（W/c 60%…80%，W/c 120%…74%）が 12 時までに，85～88%（W/c 60%…93%）が 24 時までに発生する．以上の様に C_5A_3 は注水后 12 時間で約 80% の発熱を示す高発熱急硬性化合物である．

C_5A_3 の水和熱は又水量により著るしい影響をうける．水量 50%，60% の場合は水和熱は殊に低い，120% のものは 50% のものに較べて約 2 倍の発熱を示す．この現象はすでに述べた C_3A および次に述べる CA には見られない特異の現象であり，水和反応と何等かの関聯があると推察される．C_5A_3 の水和には多量の水が必要とされるらしく，50%，60% の水量では不充分と考えられる．この点については後に一応の検討を試みる．

なお水和熱を y cal/g，材令を x 時間とすれば x/y と x の間には直線関係がある．即ち水和熱曲線は次式で表わすことが出来る．

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

表—11 に示す測定値より最小自乗法で a, b の値を求むれば水和熱曲線の実験式を得ることが出来る．表—11 にこの様にして求められた a, b の値を示す．

上式を材令について微分すれば任意の材令に於ける発熱速度 (cal/g/hr) を知ることが出来る．

$$\text{発熱速度 (cal/g/hr)} = -\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(a+bx)^2}$$

図—6,表—11 にはこの様にして求めた発熱速度を示してある．これらの結果より明らかである様に，C_5A_3 は水和の初期に極めて旺盛な発熱を示し，24 時間では完結に近づく．C_3A の発熱と比較すれば C_5A_3 は初期の発熱速度は C_3A より小さいが長期にわたつて発熱を継続することを知る．即ち C_3A ほど急発熱性ではない．

(5) C_5A_3 の "完全水和熱" を求めるため水量 60%，5 日養生后，水和熱を測定し，水和試料は粉砕し更に水を加え各材令に於て水和熱が一定になるか否かを材令 40 日まで実験した．然し表—5 に見られる様に水和熱は 40 日で約 180 cal/g であるが，一定値には達しなかつた．この 180 cal/g の値は何れも 80%，100%，120%，7 日の水和熱および 100%，120%，3 日の水和熱より低い．然しながら 7 日以後の長期材令期間中に吸熱反応が起つたのではないかとも考えられるが，水量 50%，60% の場合には 28 日の長期材令でも水和熱は材令 7 日の場合と殆んど変らないので，上記吸熱反応は恐らく起ることはないと考えられる．50%，60%，28 日材令の場合は難溶性物質の量は僅か 1～2% であるが，"完全水和熱" を求める実験に於ける 40 日材令の試料は約 15% の難溶性物質を含有し，Al_2O_3 が相当多量である．即ち "完全水和" を行わせるため多量の水を使用し，充分粉砕水和を計り，材令長期に亘れば水和生成物中に結晶性 $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ の如き塩酸に難溶性成分を生じ，未水和物以外のすべての水和生成物を完全に溶解せしむる様な実験条件で溶解熱を測定しなければ，真の水和熱を得ることが不可能となる．従つてこの様な実験法では C_5A_3 の "完全水和熱" を求めることは出来ない．

(6) 上記の結果より C_5A_3 の水和熱および発熱作用について考えてみる．

C_5A_3 の水和熱は C_3A の場合に較べて水量により著るしい影響を受けることは C_3A の反応より余程複雑な水和反応が行われることを示して居る．固体液体間の不均一系水和反応に於ては，水量の多い方が完全な反応を促すことは充分考えられるのであるが，C_5A_3 の発熱の様相はこれら物理的要因以外に水和生成物の相造等化学的要因が関与していることを推察せしむる．

完全水和熱の項に述べた様に，多量の水量にて長期間養生したものは相当量の塩酸不溶性の $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ が生成することを示し，水量少い場合には 28 日の材令に於てもゲル状アルミナの結晶化が不充分のためか塩酸不溶成分は僅かである．

次に試みに C_5A_3 の水和生成物を $3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 12H_2O$, $4CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 12H_2O$, $2CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 9H_2O$, および $Al_2O_3 \cdot xH_2O$ と見なし，下記の如き水和反応が起ると仮定して，この際の x の値を算出してみると次の様になる．

(1) $3[5CaO \cdot 3Al_2O_3] + (60+4x)H_2O = 5[3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 12H_2O] + 4[Al_2O_3 \cdot xH_2O]$

(2) $4[5CaO \cdot 3Al_2O_3] + (60+7x)H_2O = 5[4CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 12H_2O] + 7[Al_2O_3 \cdot xH_2O]$

(3) $2[5CaO\cdot3Al_2O_3]+(45+x)H_2O=5[2CaO\cdot Al_2O_3\cdot9H_2O]+Al_2O_3\cdot xH_2O$

	50%	60%	80%	100%	120%
x—(1)	—	—	4.6	8.7	14.3
x—(2)	0.7	2.6	6.3	10.3	13.8
x—(3)	—	—	7.1	20.7	33.1

この計算値より推測するに実験結果が示す様に水量の少い 50%, 60% のものの水和熱が割合低く，その増加も小さい事実は，上記の反応を完結させるには水量が過小に過ぎ，反応進行が阻止されることとなり，未水和物が残留することに依ると考えられる．この場合水量は少くも 80% 以上を必要とする様である．

〔3〕 CA について

(1) CA の $HCl\cdot20H_2O$ に対する溶解速度は C_3A, C_5A_3 に比してはるかに小さい．実験の精密を要するため，更に酸の濃度を高め，$HCl\cdot10H_2O$ を使用したが，溶解速度を甚だしく大きくすることが不可能であつた．CA の $HCl\cdot10H_2O$ に対する溶解速度は 図—4 (c) に示される様に溶解時間に関せず殆んど一定である．水和物は割合によく溶解するが，C_3A, C_5A_3 の水和物より溶解しがたい．材令の短いものは未水和物を相当量含有するために，未水和物の溶解と同様な状態を示す．材令が大きくなり，水量も多くなり，未水和物の含量が少くなるに従つて，溶解速度は大きくなり，溶解反応の終点は見出しやすくなるに至る．

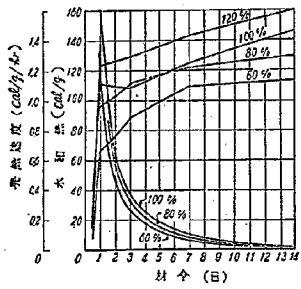
CA の様に溶剤に難溶性な物質の溶解熱測定は測熱実験に困難を来たす．この場合にはすでに述べた様に水和物を完全に溶解させ，未水和物は一部残す様な方法をやむを得ず採用した．この際未溶解物質中に水和物が残らないことを確め，又分析により未溶解物質は CA であることを確めた．

(2) CA の溶解熱は，表—3 に示す様に 626.3 cal/g であり，酸液の濃度は異るが C_3A の 732.5 cal/g, C_5A_3 の 650.1 cal/g に比してかなり低値である．C_mA_n 化合物に於ては石灰が少くなるに従い溶解熱も低く難溶性となることを認める．CA の溶解熱については未だ報告されていないので，これに関して比較検討すべき数値を求め得ない．

(3) 各水量，各材令の CA の水和熱値を，表—12 および 図—7 に示す．水和熱は水量および材令により影響され，水量多く材令の長い程水和熱が大きいことは，C_3A, C_5A_3 の場合と同様である．材令 12 時間まで

表—12 CA の水和熱 (cal/g) および発熱速度 (cal/g/day 又は cal/g/hr)

水量 (%)	水和熱(cal/g)—材令(日)						発熱速度 cal/g/day 又は cal/g/hr,—材令 日)					水和熱曲線実験式係数 $y=\frac{x}{a+bx}$	
	1/2	1	2	3	7	14	1	2	3	7	14	a	b
60	7	66	76	88	109	113	30.1 (1.26)	13.5 (0.56)	7.10 (0.30)	1.88 (0.079)	0.537 (0.023)	0.008230	0.003265
80	14	96	102	110	122	130	31.8 (1.32)	11.7 (0.49)	6.26 (0.26)	1.40 (0.058)	0.380 (0.016)	0.004445	0.007407
100	39	111	108	108	125	147	38.3 (1.60)	16.5 (0.69)	9.13 (0.38)	2.24 (0.094)	0.630 (0.026)	0.006001	0.005544
120	—	123	126	129	144	161							



図—7　CA—H_2O 系の水和熱及発熱速度

の様に比較的反応初期には甚だしい発熱を示さないが，24 時間前後に至つて最もはげしい発熱を示し，3 日頃までは発熱は衰えながらも継続する．3 日以後は引続き発熱は示すが急激に微弱となる．7 日以後は 100%，120% の様に水量の比較的多い場合が引続きの全発熱量を増す以外は終局状態に近ずいて行く．

この関係をすでに述べた C_3A C_5A_3，の場合と比較すると，次の相異のあることが実験的に認められる．C_5A_3 C_3A，の水和熱はある一定の時間まで規則的に増加し続け，その後増加の割合は小さくなり，終息期となり，その水和熱曲線は大体典型的な双曲線を示しているが，CA の場合は 2 日又は 3 日に水和熱の増加が一時的に停滞する時期がある．

この現象はすでに前報にのべた CA の発熱性と関聯あるものと考えられる．従つて水和熱曲線は C_3A，C_5A_3 程完全な双曲線とはならない．

水和熱を y cal/g，材令を x 日とすれば x/y と x との間に大体直線関係のあることを知る．即ち水和熱曲線は次式で表わすことが出来る．

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

表—12 には測定値より最小自乗法で求めた a, b の値を示す．又この式を材令について微分すれば各材令に於ける発熱速度（cal/g/day 又は cal/g/hr）を知ることが出来る．表—12 にはこの様にして求めた暫定的な発熱速度を示す．

これらの結果は C_3A，C_5A_3 程実測値とは一致していないが，発熱の大体の傾向を推察する資料になると考えられる．即ち注水より 24 時間までが最も盛んに発熱し，その後急に減少し，3 日以後は微弱な発熱を継続する．C_5A_3，C_3A との相違は発熱速度の低下の割合が小さく，相当長期にわたつて発熱を継続することである．なお水量の多い程水和熱が大きいことは C_3A 等の場合と同様である．120% 水量で材令 28 日の場合の水和熱は 173 cal/g であり，この値は終局の水和熱値に近いものと考えられる．

V　總　　括

（1）合成した 4 種のアルミン酸石灰塩の内 C_3A，C_5A_3 および CA の 3 種について塩酸を溶剤とし 25°C に於ける水和熱を各材令，および水量について溶解熱法により測定した．

C_5A_3，CA およびそれらの水和物の様に完全には溶解し難い物質の溶解熱，水和熱測定法について述べた．

（2）C_3A およびその水和物は $HCl\cdot 20H_2O$ に容易に溶解するが，C_5A_3 は硝子質の存在のためか $HCl\cdot 20H_2O$ に難溶物が混入して居る．然し水和物は未水和物よりはるかに易溶性である．CA は $HCl\cdot 10H_2O$ にも割合に難溶性であり，水和物は割合に易溶性である．C_3A_5 は甚だ難溶性であり溶解熱の測定は行い得ない．

C_mA_n の内で m/n が小さくなるに従い難溶性となる.

(3) C_3A の溶解熱は 732.5 cal/g であり，この値を現在までに報告されている数値と比較し，検討した.

C_5A_3 の溶解熱は 650.1 cal/g であり，すでに報告されている数値と比較し検討した. C_5A_3 の溶解熱が測定者により相当差異のあることは，未だ充分明白にされていない C_5A_3 の化学構造と関係のあることに言及した. CA の溶解熱は 626.3 cal/g であり，この値については未だ報告されていない.

C_mA_n の溶解熱は m/n が減少するに従い減少することを明らかにした.

(4) C_mA_n の水和熱は何れも材令，および水量の増加と共に増大する. 水和熱は何れも m/n の減少すると共に減少して居る.

C_3A は注水後 12 時間で大部の発熱を終り，急発熱早凝性である. 24 時間を経過すれば殆んど発熱しない. 水量の多い場合には高級水和物を生成することを示す.

C_3A の水和熱と材令の間には双曲線の関係があることを認め，実験式より発熱速度を計算してみても，材令 12 時間で発熱速度が急激に減少することを知る.

C_5A_3 は 12 時間までは急激に発熱し，その後徐々に発熱は衰えるが 24 時間までは発熱をつづけ，それ以後も僅かではあるが発熱を継続する. C_5A_3 は水量により水和熱が相当異り，水和には比較的多量の水を要することを明らかにした.

C_5A_3 も C_3A と同様に，水和熱と材令間に双曲線の関係がある. C_5A_3 の完全水和熱は求めることが出来なかつた.

CA は材令 12 時間までの比較的反応初期には著だしい発熱を示さないが，24 時間前後に最もはげしい発熱を示す. それ以後は 3 日までは発熱は衰えながらも継続する. 3 日以後は引きつづき発熱を示すが急激に微弱となる.

CA の水和熱曲線は水和熱が一時的に停滞する現象があるので，C_3A，C_5A_3 程完全な双曲線とはならない.

(5) 溶解熱法と恒温法により求められた発熱性には相当の相違がある. 一般に溶解熱法により求めた数値の方が大きい. このことは溶解熱法に於ては養生する時に多量の試料を使用し充分水とセメントを混合させ得るに反し，恒温法では試料量少く，攪拌混合が不充分であり，ペーストの均一性に欠けることに基くものと考えられる. なお溶解熱法の試料は回転養生を行い，水の拡散を助長し，未水和物と水を接触させやすくし，水和の進行を早めたことも恒温法と異る結果を得た大きな原因と考えられる. この様な相違は固体の関与する不均一系反応に於ては避けることが出来ない現象であろう.

溶解熱法は長期材令の水和熱の測定にはすぐれた方法であるが，短期材令の場合，又は水和過程を順次追跡するには適当の方法ではない. 溶解熱法では例えば C_3A, C_5A_3 の水和熱曲線が持つ変曲点は知ることが出来ない.

この研究については，野本敏三，牧隆正両氏の熱心な協力を得た. 厚く感謝の意を表す.

文　献

1) Thorvaldson, Brown, Peaker: J. A. C. S. 52, 3927, 1930.

2) Meyers: Rock Product, 35, 22, 1932.
3) Wood, Steiner, Starcke: Ind. Eng. Chem., 24, 1207, 1932; Eng. News Rec., 109, 404, 1932.
4) Biddle, Kelley: Proc. A.S.T.M., 33, 571, 1933.
5) Stenzel, Morris: Ind. Eng. Chem. An. Ed., 6, 246, 1934.
6) Lerch: Eng. News Rec., 113, 523, 1934.
7) Pierce, Larmour: Eng. News Rec., 113, 114, 1934.
8) Lerch, Bogue: Zement, 24, 155, 1935., R.B.S. 12, 645, 1934.
9) Troitzsch: Dissert, Tech. Hochsch. Brawnschweiz, 38, 1935.
10) Nolana: Civil Eng. 365, 1934.
11) Lerch, Brownmiller: R.B.S., 18, 609. 1937.
12) Insley, Flint, Newman: R.B.S., 21, 355, 1938.
13) Carlson, Forbrich: Ind. Eng. Chem. An. Ed., 10, 382, 1938.
14) Bechtold, Helz: Res. Rep. P.C.A.F., 1941.
15) W. Richards: Z. Phy. Chem., 52, 551, 1905.
16) Thorvaldson, Brown, Peaker: J.A.C.S., 51, 2678, 1929.
17) Cirilli: Ricerca Sci. (1939), Chem. Abst. 1940.
18) Honus: Cem. Lime. Manf., 7, 158, 1934.
19) 藤井，淺岡：日本ポルトランドセメント技報，22，60，昭和9年（1934）.
20) 近藤，山内：東工大学報，2，506，昭8年（1933）.
21) 内田：仙.工.紀.：5，9，昭2年（1928）.
22) R. Nacken: Zement, 25, 586, 1936.
23) L. R. Forblich: J. Am. Concrete Inst. 37, 161, 1940.
24) Assarson: Zement, 26, 293, 1937.
25) W. A. Roth, V. Wolf: Z. Electrochem. 46, 282, 1940.

道路の吹溜り防除工法に関する実験的研究（1）
―積雪地方における道路の冬季交通対策―

建設技官　谷　藤　正　三
建設技官　小　川　哲　夫

目　　次

要　旨……（1）
第1章　総合的研究計画とその目的……（3）
§1. 研究計画と風洞模型実験の概要……（3）
§2. 防除雪柵に関する研究目的と吹溜り型式の分布……（7）
第2章　乱流相似性理論……（10）
§3. 乱流現象における推計的相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）の概念……（10）
むすび……（16）
附　録　推計的乱流相似性の誘導
§1. 地表風の運動を表わす微分方程式（運動量保存の微分方程式）……（20）
§2. 地表風の質量保存（連続）の微分方程式並びにその外の微分方程式……（26）
§3. 風洞気流の運動を表わす（運動量保存の）微分方程式および風洞気流の質量保存（連続）の微分方程式並びにその外の微分方程式……（28）
§4. 地表風の運動を表わす微分方程式（運動量保存の微分方程式）の乱流化……（29）
§5. 地表風の質量保存（連続）の微分方程式並びにその外の微分方程式の乱流化……（37）
§6. 風洞気流の運動を表わす（運動量保存の）微分方程式および風洞気流の質量保存（連続）の微分方程式並びにその外の微分方程式の乱流化……（38）
§7. 乱流相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）の誘導……（39）
補　遺　大気の異方性と Coriolis の力　更に気流の圧縮性の影響……（45）
§1. 大気の異方性による乱れのある（乱子）拡散（混合）現象……（45）
§2. Coriolis の力の影響……（48）
§3. 気流の圧縮性の影響……（49）

要　　旨

本研究は，積雪地方における道路の冬季交通対策として，道路の吹溜り防除工法に関する実験的研究である．先ず，防除雪柵に関する工法の基本的研究を次の4項目，

1°. **柵の構造の選定**　使用材料・寸法・形状・縮尺，等の検討

2°. **柵の型式の選定**　透過柵・半透過柵・不透過柵・偏風壁・更に雪堤，等

3°. **地形・地貌との組合せ**

4°. **設立地点**　選定された構造・型式の柵について，その防風効果・防雪効果，等を推定し，その設立地点を柵の高さ H の倍数で表示する．

について行い，更に積雪地方における切土・盛土，等の基本的形状を決定するのが本研究の目的である．

以上の研究目的を遂行する為に，解析の方法論として推計学（推測統計学）的方法を応用し，実験的方法としては，現地観測と風洞模型実験とを併用した．現地観測においては，高さ 10 m 迄の風速の垂直分布（同時観測）を測定することが出来る極小型ロビンソン3風杯風速計による防風効果の測定，吹雪量の垂直分布測定器，等による防雪効果の測定を行つた．

風洞模型実験においては，風速限界が 1～30 m·sec^{-1} の吸込型 300×300 mm 並びに 600×600 mm 小型風洞（東京大学理工学研究所河田研究室の設計によるもの）によつて風速分布を測定し，更に模型雪（局方炭酸マグネシウム等）を使用して模型実験を行つた．

以上の現地観測並びに風洞模型実験は現在継続して観測実験中であつて，総合的結論を得る迄には至つていないが，各段階における結論は逐次続報として発表する．

本報告は，その中の風洞模型実験について実験的方法を述べたものであり，乱流相似性（乱流現象における相似性）の完全条件（必要にして且つ十分な条件）を推計学的に明らかにしたものである．

日本の道路の大半は冬季において降雪の影響を受けている．冬季における“西高東低”の気圧配置と日本列島を縦走する中央山系と，更に冬季において本邦附近を通過する低気圧群とは裏日本一帯から東北地方，北海道にかけて世界的に見ても稀有の深雪，多雪地帯を構成しており，雪日数も多く殊にその積雪量はまた非常に多い．世界の深雪，多雪地帯として知られている北欧，ソ連北部，カナダ，等の寒帯地方でもその最大積雪量は 1～2 m 程度であるのに比較して裏日本一帯，東北地方，北海道，等はこの程度に及ぶことは珍しくなく豪雪時には 4～5 m 又はそれ以上に達する地帯も少くない．従つて日本の道路は雪を無視しては完成される筈がなく，従来道路と雪との問題がなすところなく見過されて来たことはこの国の道路の維持工法の欠陥の一つの現われであり，夏季の降水量に対する維持工法と共に現在の日本において緊急に解決を要する問題である．殊に終戦後におけるおびたゞしい自動車輛の増加から推定しても（昭和 26 年現在 41 万台，従来の最高は昭和 13 年の 22 万台），今後は自動車交通量の激増を伴ない道路交通の本来の使命達成が要求されることになるのであるから，日本の道路技術者としては早急にこの問題の解決に努力しなければならない．

さきにこの情勢を推察して東北地方建設局企画部は土木研究所道路研究室と協同して昭和 22 年の秋以来文献蒐集，模型実験用風洞並びに現地観測用諸計測器の試作，等の研究準備および予備実験を外の調査研究の傍ら続けて来たのであるが，昭和 25 年度から道路局道路企画課の賛同を得ていよいよ本格的な調査，研究に着手することになつた．“道路の冬季交通対策に関する総合的調査研究”は今後数箇年の間，所期の目的を達成する迄行われるのであるが，その第1年として昭和 25 年度の調査研究計画は道路の雪害状況の実態調査に主眼を注ぐことになつた．これは雪害対策を考える場合には当然のことであるが，よく現地の道路が雪害を受けるという声は聞いても，その定量的把握は勿論のこと，定性的な面においてさえも雪害状況の実態を記述することが出来ないのが現状であるから，数量的基礎を持つた雪害資料を得ることが有意義なことはいう迄もない．

昭和 25 年度の調査研究において，土木研究所は東北地方建設局企画部に協力する為，“道路の防除雪工法に関する実験的研究”をとり挙げた．科学や技術の調査，研究において知りたいのはその研究対象の母集団

の特性（性質，傾向；常数，母数）であり，調べることの出来るのはその標本であつて，母集団と標本とを峻別することこそ確率論的方法の本質的な性格である．云い換えれば，実験科学の諸分野においては，推計学的方法がその本質を占めるものである．

なお，これらの総合的調査研究においては，道路局道路企画課，東北地方建設局企画部道路対雪調査小委員会の関係諸係官の終始一貫した熱心なる御協力を戴いた．

また本研究を行うに当り，風洞模型実験に関して種々御指導を賜つた東京大学理工学研究所河田三治教授を始め同研究室所員，更に農業技術研究所物理統計部井上栄一技官，並びに常に有益なる御助言を戴いた早稲田大学兵藤直吉教授に対して厚く御礼を申し上げる．

第 1 章　綜合的研究計画とその目的

§1.　研究計画と風洞模型実験の概要

積雪地方の道路においてまず第一に問題になるのは防除雪柵，雪堤，等の利用による吹溜り防除工法である。その吹溜りの形成には，地貌の影響を受けた地表風の構造，路面附近の地形，地表の状態，気温，雪質，等の諸因子が綜合的に関与している為に従来の因果論的方法ではその法則性を簡単に摑むことは出来ない．更にその上，現地実験を主体として調査，研究を進める為に，気象，等の変動性の多い実験条件による影響を如何に調整して行くべきかということを考えておかなければならない．従来この様な実験では現象論的（巨視的）方法の様に，現象のありの儘の姿を忠実に限りなく記述表現することによつて，自ずからその因果的関係が浮び上り，その法則性が把握されると考えられて来たが，それらの考え方には大きな誤りが含まれているということが，今日一部の科学者や技術者，等の間では明確に認識されているのである．何故ならば，現地の様に変動性の多い実験条件では何を比較しているのか見当がつかないからである．そしてこの大きな誤りは，大標本によつて補われて来た代りに随分無駄な時間と費用とが使われ，更にアイマイな結論が鋭く批判されることもなく過ぎ去つて来たのである．これを推計学的にいえば母集団と標本との混同であり，*J. Bernoulli*＝*A. de Moivre* の大数の法則の観念的誤用である．この誤りは現象自体を現象論的（巨視的）見方に基いた形而上学的方法によつてとらえ様とする所にあり，その様な考え方の許される小範囲以外では弁証法的方法によらなければならないのである．更に又実験資料が同一でも，実験者が何を求め様とするかというその目的と，それに応じた実験者の態度と取扱い方即ちその方法とによつて，得られる結論が異つて来るということである．

それで以上の様な概念に基いて現地実験を押進めて行けばよいのであるが，実験の対象が気象条件によつて左右される為に，冬季間に行い得る実験的組合せというものは非常に少くなるので，この気象条件を任意に替えられる様な方法として風洞模型実験の存在意義が生れて来るわけである．なお，北欧，ソ連，アメリカ，等の積雪地方において経験的な理論から施工された幾多の実例は有益な参考資料ではあるが，地貌，地表風の構造，気温，雪質，等が異つている為に一義的には受け入れられない．また，従来鉄道においてその線路の防除雪の目的の為に同様に施工された幾多の実例を，道路の場合に適応しても吹溜り防除雪の機構は理論的に同一と考えて差支えないが，その施工並びに維持方法が異つて来るので，結局外からの借物でなしに道路に適応した

道路の防除雪工法が要求されるのである。

こゝに行われる風洞実験においては実物の完全縮尺を使用するものではなく，風洞気流と模型地形と模型雪とによる模型実験である為に，その信頼性はどの程度であろうかという模型実験の相似性を考えなければならない．こゝにいう相似性とは，形而上学的方法では正しく把握することが出来ないもので，任意の現象が自然弁証法に基いた同一の推計的法則性を有する為の完全条件(必要にして且つ十分な条件)のことである．風洞模型実験は航空機の研究に応用されて発達して来たものであり，それらの研究において大気の乱れが翼に及ぼす影響は小さいことが知られているので，風洞模型実験においては層流現象（整流現象）として取扱うことが許容された．それ故に，層流と考えられる様な風洞を作ることは比較的容易であるから，それらの実験的研究は著しく進歩したのである．これに反して地表面上 10 m 程度が関係する地表風による吹溜り現象においては，地表面上の境界層内の現象となつて気流の乱れが重要な因子をなす為に，それらの乱流現象を風洞によつて再現する模型実験を行わなければならないのである．風洞気流を層流化することは技術的にある程度は可能であるが，任意な乱流を得ようとすることには技術的に相当の困難が伴うものである．その為に，乱れの条件は与えられたまゝで相似性の条件を満足させることを考えなければならないのである．以上の様な理由からも，乱流現象を取扱う吹溜りの風洞模型実験に対して，航空機の研究における程精密な実験結果を期待することは無理であることが推定されるが，推計学的方法によれば所有の実験設備においても信頼性の明確な推計的相似性が得られるのである．現在における実験的方法としては次の二つの方法が考えられる．

1°. (1.1.1) **乱流相似性理論に基いて純粋気流を観測する方法** 乱流相似性理論によつて，現地気流と風洞気流との対応は完全につけられているので，現地における吹溜りの状況と現地気流（風速分布）との相関を実測しておけば，それによつて風洞気流の測定から現地の吹溜りの状況を推測することが出来る．

2°. **模型雪を使用した吹雪気流によつて吹溜り現象を再現する方法** 模型雪（局方炭酸マグネシウム，等）を使用する風洞模型実験から近似的に極めて効果的な結果が得られ，現地の吹溜りの状況を推測することが出来る．しかしながら，これらの近似性の信頼限界の検討は今後の問題である．

本研究は今後時日の許す限り実験を追加してゆき，その対策並びに工法についての明確な総合的結論を得る迄継続する予定である．

こゝで今後統計学というのは，勿論統計資料のことではなく，推計学，推測統計学，統計的推理論の意味である．又吹雪について，こゝでいう風雪とは降雪に風が伴つている場合であり，飛雪とは新積雪が風によつて吹き上げられる場合の意味である．

従来わが国においても吹溜り現象に関する諸問題の実験的研究の為に，風洞模型実験法が応用されて来た。(第1章 §1. 参考文献参照)．

従来の考え方からいえば，幾何量的に相似な（境界条件が相等しい）二つの物体の周りの流れに，物理量的相似性が存在する為には（流体力学的相似性が存在する為には），乱れのない（分子）Reynolds' number

$$(1.1.2)\qquad Re \equiv \frac{V \cdot L}{\nu} (=\text{const.})$$

こゝで，$R_{\hat{\nu}}$：乱れのない（分子）Reynolds' number，

V：風　　速，

L：代表的長さ，

$\hat{\nu}$：空気の乱れのない（分子）動粘性係数，$\equiv \frac{\mu}{\rho}$，

μ：空気の乱れのない（分子）粘性係数，

ρ：空気の密度

が相等しいことが必要にして且つ十分な条件（完全条件）であり，その条件が満足されていれば，地表風の場と風洞気流の場において相似性が存在するとされて来た．しかしながら，地表風速が 10～20 m•sec^{-1} の時，路面巾員 6～9 m の現象を模型実験で再現するには，（前出 1.1.2）によつて風洞風速 V と模型縮尺 L とを次の様にしなければならない．(1.1.3) 地表風の場と風洞気流の場において相似性が存在する為には，こゝで乱れのない（分子）動粘性係数 $\hat{\nu}$ は相等しいと考えたのであるから $V•L$ が相等しくなければならない．それ故に実際の風速が 15 m•sec^{-1} で路面巾員が 9 m の時の状態を

$$\left(R_{\hat{\nu}_0} \equiv \frac{15\times10^2\times9\times10^2}{\hat{\nu}_0} = \frac{135\times10^4}{\hat{\nu}_0}\right), \tag{1.1.4}$$

縮尺 50^{-1} 即ち路面巾員 18 cm の模型を用いて再現しようとすれば

$$\left(R_{\hat{\nu}_1} \equiv \frac{75\times10^3\times18}{\hat{\nu}_1} = \frac{135\times10^4}{\hat{\nu}_1}\right), \tag{1.1.5}$$

地表風速の 50 倍即ち 750 m•sec^{-1} の風洞風速にしなければならない（(1.1.6) この場合には $\hat{\nu}_0 \equiv \hat{\nu}_1$ という仮定が導入されている）．現在の一般的風洞の能力では，70～80 m•sec^{-1} が限度であるし，高速風洞でこの様な風速が得られたとしても相似性の存在を直ちに保証することは出来ない．そこでこの場合逆に，小型風洞で 50 m•sec^{-1} の風速を出して実験したとすると

$$\left(R_{\hat{\nu}_1} \equiv \frac{5\times10^3\times18}{\hat{\nu}_1} = \frac{9\times10^4}{\hat{\nu}_1}\right), \tag{1.1.7}$$

地表風速が 1 m•sec^{-1} の状態を

$$\left(R_{\hat{\nu}_0} \equiv \frac{1\times10^2\times9\times10^2}{\hat{\nu}_0} = \frac{9\times10^4}{\hat{\nu}_0}\right) \tag{1.1.8}$$

再現しているのである（(1.1.9) この場合にも $\hat{\nu}_1 \equiv \hat{\nu}_0$ という仮定が導入されている）．そしてこの程度のものが小型風洞実験の限度と考えられて来た．又この様な遅い風速で模型実験をしたものでも，地表風と風洞気流とにおいてその気流状態がかなりよく似ているので，相似性を余り強調しない定性的な方法が行われて来たのである．ところが最近，気象学で多く用いられる乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\kappa}$ を乱れのない（分子）動粘性係数 $\hat{\nu}$ の代りに使用する方法が考えられて来た．地表風の乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\kappa}_0$ の値は（乱流現象においては，拡散が層流現象に比較して大規模に行われており，その気流の粘性係数，等が大きくなつたのと同様な効果を及ぼすので，その値

$$\hat{\gamma}_0 \equiv \hat{\rho}_0 \cdot \hat{\kappa}_0 \tag{1.1.10}$$

を乱れのある（乱子）粘性係数という.），道路の防除雪を対称とした模型実験においては

$$\hat{\nu}_0 = O\ (10^3\ \mathrm{c.g.s.}) \tag{1.1.11}$$

こゝで，O（… …）：Ordnung の略号

と考えられる．乱れのある（乱子）動粘性 係数 $\hat{\nu}$ は，路面の状態，路面からの高さ，平均風速，気温の分布，等によつて，かなりの変動を示すが，路面附近では近似的に 平均風速 $\overline{V}_0$ 並びに高さ z と相関があることが推定される．これに対して，風洞気流の乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\nu}_1$ は，乱れの小さい風洞では，

$$\hat{\nu}_1 = O\ (1\ \mathrm{c.g.s.}) \tag{1.1.12}$$

である．それ故，再び前述の地表風速が 15 m·sec^{-1} で，路面巾員 9m の場合を考えると，

$$R_{\hat{\nu}0} \equiv \frac{V_0 \cdot L_0}{\hat{\nu}_0} = \frac{15\times10^2\times9\times10^2}{10^3} = 135\times10 \tag{1.1.13}$$

となり，

$$R\hat{\nu}_0 = 135\times10 \equiv R\hat{\nu}_1 \tag{1.1.14}$$

とする為には，

$$V_1 \equiv \frac{\hat{\nu}_1 \cdot R\hat{\nu}_1}{L_1} = \frac{1\times135\times10}{18} = 75\ \mathrm{cm\cdot sec^{-1}} \tag{1.1.15}$$

$$= 0.75\ \mathrm{m\cdot sec^{-1}}$$

でなければならない．この程度の遅い風洞風速ならば，実験は可能である．又，風洞気流に対して，乱れのある（乱子）動粘性係数

$$\hat{\nu}_1 = O\ (1\ \mathrm{c.g.s.}) \quad (\text{前出 } 1.1.12)$$

の代りに，乱れのない（分子）動粘性係数 ν_1 を用いた場合には，次の様になる．地表風の場において，標準状態では（15°C·76Hg c.g.s.），

$$\nu_1 = 1.464\times10^{-1}\ \mathrm{c.g.s.} \quad \text{であるから } \nu_1 \fallingdotseq 1.5\times10^{-1}\ \mathrm{c.g.s.} \text{ として，} \tag{1.1.16}$$

風洞気流の場において，風洞風速は，

$$V_1 \equiv \frac{\nu_1 \cdot R\nu_1}{L_1} = \frac{1.5\times10^{-1}\times135\times10}{18} \fallingdotseq 11\ \mathrm{cm\cdot sec^{-1}} \tag{1.1.17}$$

$$= 0.11\ \mathrm{m\cdot sec^{-1}}$$

程度でなければならない．これから考えて，この程度の模型実験では近似的に，風洞気流の場においてその乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\nu}_1$ のみを乱れのない（分子）動粘性係数 ν_1 で置き換えることが可能であると推定される．以上の考察から，乱れのない（分子）動粘性係数 ν のみを用いれば乱れのない（分子）Reynolds' number $R\nu$ が大きくなつて，二つの気流に相似性の存在を予期出来ない現象でも，乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\nu}$ で置き換えることによつて，気流の物理量的相似性が得られるのである．従来，乱れのない（分子）Reynolds' number $R\nu$ が全く異つているものに，気流の物理量的相似性が存在すると考えられていたことに対する一つの説明にはなり得るのである．それは，地表風の場と風洞気流の場とにおける気流の粘性が全く異つていると考えることに外ならない．それらの対応とその物理量的次元系および物理量的単位系は

表—1 の様に表わすことが出来る.

表—1 乱れのない（分子）動粘性係数 $\hat{\nu}$ と乱れのある（乱子）動粘性係数 $\hat{\kappa}$ の対応とその物理量的次元系並びに物理量的単位系

動粘性係数	記号	絶対次元系	絶対単位系 c.g.s.系	工学次元系	工学単位系 c.f.s.系	重力次元系	重力単位系 c.w.s.系
乱れのない(分子)動粘性係数 kinematic viscosity	$\hat{\nu}\equiv\frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}}$	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.
乱れのない(分子)粘性係数 viscosity	$\hat{\mu}$	$L^{-1}.M^1.T^{-1}$.	$cm^{-1}.gm.sec^{-1}$.	$L^{-2}.D^1.T^1$.	$cm^{-2}.dyne.sec$.	$L^{-2}.G^1.M^1.T^1$.	$cm^{-2}.g.gm.sec.=cm^{-2}.gm-wt.sec.$
密度 density	$\hat{\rho}$	$L^{-3}.M^1$.	$cm^{-3}.gm$.	$L^{-4}.D^1.T^2$.	$cm^{-4}.dyne.sec^2$.	$L^{-4}.G^1.M^1.T^2$.	$cm^{-4}.g.gm.sec^2.=cm^{-4}.gm-wt.sec^2.$
乱れのある(乱子)動粘性係数(渦動粘性係数,乱れのある(乱子)拡散係数,渦拡散係数, 等々) eddy viscosity, eddy diffusivity, eddy convectivity, etc.	$\hat{\kappa}\equiv\frac{\hat{\eta}}{\hat{\rho}}$	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.	$L^2.T^{-1}$.	$cm^2.sec^{-1}$.
乱れのある(乱子)粘性係数(見掛けの粘性係数,交換係数, 等々)Austausch, etc.	$\hat{\eta}$	$L^{-1}.M^1.T^{-1}$.	$cm^{-1}.gm.sec^{-1}$.	$L^{-2}.D^1.T^1$.	$cm^{-2}.dyne.sec$.	$L^{-2}.G^1.M^1.T^1$.	$cm^{-2}.g.gm.sec.=cm^{-2}.gm-wt.sec.$
密度 density	$\hat{\rho}$	$L^{-3}.M^1$.	$cm^{-3}.gm$.	$L^{-4}.D^1.T^2$.	$cm^{-4}.dyne.sec^2$.	$L^{-4}.G^1.M^1.T^2$.	$cm^{-4}.g.gm.sec^2=cm^{-4}.gm-wt.sec^2.$

§2. 防除雪柵に関する研究目的と吹溜り型式の分布

道路の防除雪柵工法について根本的に異る二つの方法がある. それらは,

1°. (1.2.1) 路面上に堆積しつゝある雪を路面以外の地点に誘導する方法

2°. 路面上に雪が運搬堆積される前に外に堆積させる方法

であり, 要するに路面以外の地点に吹溜りを形成させる方法である. 更に,

1°. の方法には,

1°°. 緩勾配による吹払いの方法

これは法面又は吹溜りの勾配が $8^{-1}\sim12^{-1}$ 程度の緩勾配ならば, 吹溜りを生ずることなしに吹き払い得るという観測に基く工法である.

2°°. 急勾配あるいは工作物・偏風柵, 等によつて風速の増大を計り, それによつて吹き払う工法である.

3°°. 吹雪気流の風向を外に転向させる工法

これは道路の縦断方向にいわゆる谷風を起させて吹き払う工法である.

等がある.

2° の方法は,

防除雪林・防除雪柵・雪堤, 等の設置によるものであり, それらの透過性, 半透過性, 不透過性を有効に利用する工法である.

一般的に道路の防除雪柵に関する基本的研究目的は次の4項目に要約することが出来る.

1°. (1.2.2) 柵の構造の選定　使用材料・寸法・形状・経費，等の検討

2°. 柵の型式の選定　透過柵・半透過柵・不透過柵・偏風壁更に雪堤，等

3° 地形，地貌との組合せ

4°. 設立地点　選定された構造・型式の柵についてその防風効果・防雪効果，等を推定し，その設立地点を柵の高さ H の倍数で表示する．

これらの諸項目を推定する為に，次の様な現地観測を行うのである．

1°. (1.2.3) 防風効果の測定

使用する計器は高さ 10 m 迄の垂直風速分布を測定することが出来る極小型ロビンソン 3 風杯風速計であり，各測定地点の同時観測が出来ないので測定時刻のズレによる測定値の偏差を補正する為に，柵の風上前方適当な距離に（20・H，等）風車型標準風速計を置いて各測定地点における各高さの相対速度（風速比）を求める．防風効果は風速減小率によつて表示し，次の防雪効果の測定とによつて柵の有効限界を決定する．

2°. 防雪効果の測定

積雪断面の測定による他，簡単な飛雪採取器を併用する．

3°. 飛雪量の垂直密度分布の測定

透過柵・半透過柵の構造の内，上・中・下部の透過率を決定する資料にする．更に，透過柵・半透過柵・不透過柵の構造の内，柵高を決定する資料にする．

4°. 現地の地形，地貌における風速分布の測定

これは偏風柵，等を応用する場合の資料にする．

5°. 飛雪の始まる風速の測定

これには推計学を応用する．§2.——参照

6°. 以上の外，積雪地方の風の性質，特に吹溜りに関連のあるもの（風の乱れの強さ・乱子動粘性係数，等）の測定，等

一方，風洞模型実験においては，

1°. (1.2.4) 道路構造令細則に関する資料として，積雪地方の盛土高（積雪に対するその余裕高を含む）の推定並びに盛土の法勾配の推定

2°. 盛土から切土へ，又切土から盛土へ移り変る地点の吹溜りに対する柵の構造・型式並びに設立地点の推定

3°. 片切土・片盛土地点（山腹道路に山裾から風が吹上げる場合）の吹溜りに対する柵の構造・型式・設立地点の推定

4°. 浅い切土の地点に生ずる吹溜りの対策

5°. 連続家屋の間隙のある地点に生ずる吹溜り（吹抜け拡散）の対策

6°. 独立家屋のある地点に生ずる吹溜りの対策

7°. 偏風柵の偏角の推定

等を実験的に求めていくのである．

要するに，風洞模型実験と現地における実験観測とを適宜併用し組み合せていつて所期の目的を達成することが出来るのである．そして，積雪地方における道路工法に対してその特異性を考慮に入れた一つの基準が得られたならば，本研究の第一の目的は達成されたのである．

こゝで一応の結論が得られたならば，現地状況に基いて，防除雪柵の再検討を行うべきであり，更に

1°.[1.2.5] 除雪工法に関する問題　　2°. 除雪と凍土との関係

3°. 雪上交通に関する問題　　4°. 圧雪工法に関する問題

5°. 氷雪路面の滑止めに関する対策　　6°. 融雪季の砂利道の対策・工法

等の諸問題の解決をしなければならない現状である．

次に，前述の様に積雪地方の道路に関する雪害については，その定量的な資料が極めて少いのであるが，最近の資料として北海道釧路市附近 25 km に亘る道路の切土区間・盛土区間・片切土片盛土区間についての現地調査では次の様な結論が得られている．浅い切土区間において吹溜りの生ずる地点の地貌は，周囲が平坦で道路の切土の深さ 1.5～2.0 m，幅員が 5～6 m 程度の所であり，それに反して山間部の深い切土区間では，いわゆる谷風が生じその吹溜りは甚しくなく，その道路の切土の深さは 8～10 m，幅員 5～6 m 程度である．更に片切土片盛土区間で谷側からの上昇風が激しい地点では，路肩 2 m 位迄の所に高さ 0.8～1.0 m 程度の吹溜りが生じ，また以上の他道路の両側に樹木がある地点（道路から 3～5 m の所迄樹木のある所）には吹溜りが多い．

なお，東北地方建設局企画部道路対雪調査小委員会が昭和 25 年度冬季間に 5 号線青秋国道において調査した吹溜り箇所を各型式毎に分類したものは次の通りである．

それは要約すると，秋田～前代間における実態調査から，発生した吹溜りの型式を次の 表—2 の様に 12 型に分類してその出現度数を求めたものである．（図面省略，原報告参照）

表 —2

吹溜りの分類	型式番号	吹溜りの分類	型式番号	吹溜りの分類	型式番号
浅い切取り	1	風下障害	5	両側障害切断	9
両側盛土	2	両側障害	6	吹抜拡散	10
片切片盛	3	風上ポサ	7	切盛接続	11
風上障害	4	風上障害切断	8	防雪林中	12

表 —3

吹溜りの分類の型式番号	出現度数	吹溜りの分類の型式番号	出現度数	吹溜りの分類の型式番号	出現度数
2 型	1	8 型	4	3型と4型の組合せ	2
3 型	7	9 型	1	4型と5型の組合せ	1
4 型	3	10 型	1	5型と7型の組合せ	2
5 型	12	1型と4型の組合せ	1	5型と10型の組合せ	5

その全出現度数は 40 であり，各型式並びにその組合せの場合の各出現度数は表—3 の様になる．

この吹溜り型式の分布において，特に出現度数の多いものがあるかどうかを検定する為には χ^2—検定法（標本度数分布の検定法）更に厳密には無相関検定法を応用すればよい．その結果は，危険率（有意水準）$\alpha=1\%$ 以下で有意差が認められることは明らかである．以上の結論は，この地方の吹溜り型式において，

5 型：風下障害，[1.2.6] 3 型：片切片盛，

5 型と 10 型の組合せ：風下障害と吹抜け拡散の組合せ，

8 型：風上障害切断，4 型：風上障害，等，

は特に出現度数が多いものであり，その出現度数はこの順序に減少していることを意味している．

第 2 章 乱流相似性理論

§3. 乱流現象における推計的相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）の概念

地貌，等に影響された地表風の乱れた流体力学的現象を，風洞気流で再現しようとする模型実験を行う場合には，それらの二つの気流を等断面流であると仮定しており，それは十分に近似される仮定である．しかも不等断面流ということは，それらの現象を記述する微分方程式に本質的に影響することではない．そこで先ず一般的にこの問題を取扱つて，不定常な気流の場合を考える．これは次の §4 において詳述される様に，いま考えている問題においては三つの仮定条件を導入して Navier-Stokes の微分方程式のある型で表現することが出来る．次に後述の為予備的に，こゝでいう推計的相似性の概念を説明しておかなければならない．任意の流体力学的現象が自然弁証法に基いた同一の推計的法則性を有する為の完全条件（必要にして且つ十分な条件）を推計的相似性と定義する．そしてその条件の誘導には次の二つの方法がある．

1°.[2.3.11] 現象を表現する微分方程式を用いる方法

これは同一の測定単位を用いて，異なる scale をもつた境界条件の相等しい二つの現象を測定し，それらが同一の推計的法則性を有する為の条件を探す方法で，その現象を表現する微分方程式の型が判つている場合（一般的に，その解は存在するが求められていなくてもよい．）に用いられる．(Helmholtz の方法)

2°. 次元解析法による方法

これは同一の現象を二つの異なる測定単位を用いて測定し，その結果得られる二つの相異なる相関式が同一の推計的法則性を有する為の条件を探す方法であり，この場合にはそれらの微分方程式の型は判つていなくても，現象を表現するのに必要である因子として決定的な物理量（誘導量）と単位量（絶対単位量）のみ判つていればよいもので，いわゆる次元解析法を用いる方法である（実験計画法からいえば，数多くの変動因の中から，相対的に容易に管理され且つ計測される因子を抽出するということである．）．

上述のいずれの方法によるにしても，どの因子が効果的であるかということは先決されるべき問題であり，その仮定条件に基いて推計的相似性の諸条件が求められて行くのであるから，その仮定条件の種類によつて，ここで考えている流体現象における推計的相似性にも，例えば，

(2·3·2) Reynolds' number $R_{\hat{\nu}} \equiv \frac{V \cdot L}{\hat{\nu}}$; 粘性が効果的な場合,

Froude's number $F_r \equiv \frac{V^2}{G \cdot L}$; 重力の加速度が効果的な場合,

Newton's number N, ……; ……,

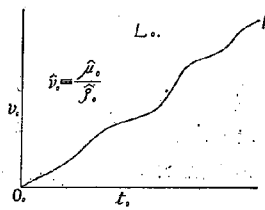
Mach's number M, ……; ……,

Weber's number W, ……; ……,

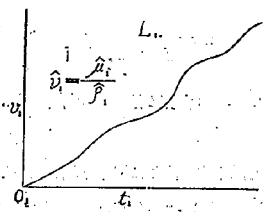
Cauchy's number C, ……; ……,

が考えられ，又それらの幾つかが同時に効果的な組合せも出来る．

さて，前述の場合を2次元的に（これは2次元的に限定して考える必要はない．x, y, z, ……，$-$軸方向の分速度 u, v, w, ……，等を考え，その外に時間 t を加えて4次元以上の空間として考えても同様である．）



図—1



図—2

いま，図—1 によつて表現出来る不定常気流 L_0 があると考える．これは，速度 v_0 が時間 t_0 について vector $\overrightarrow{O_0P_0}$ の様に不定常であり，（図—1 には $\frac{\partial v_0}{\partial t_0} > 0$，即ち速度 v_0 が時間 t_0 について増加する場合を示してあるが，それが減少する，等の一般的な場合でも全く同様であり，以下の図—2，図—3，図—4，等においても同様である．）$\overrightarrow{O_0P_0}$ なる曲線の太さはその気流の粘性的特性として，乱れのない（分子）動粘性係数，

(2·3·3) $$\hat{\nu}_0 \equiv \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0}$$

こゝで，$\hat{\mu}_0$：気流の乱れのない（分子）粘性係数，

$\hat{\rho}_0$：その気流の密度

を表わしている．この流体力学的現象を不定常気流 L_1 を表現している図—2 の様に再現させる為の条件を探せば，それが推計的相似性に外ならない．これは現象 L_0 を現象 L_1 に等角写像するという問題に相当する．この場合は次の附録における誘導方法によつて，乱れのない（分子）Reynolds' number

(2·3·4) $$R_{\hat{\nu}} \equiv \frac{V \cdot L}{\hat{\nu}} = \text{const.}$$

即ち，現象 L_0 と現象 L_1 との乱れのない（分子）Reynolds' number が相等しいことが必要にして且つ十分であるという完全条件が導かれる．（但しこの場合には，幾何量的相似性の諸条件を前提として仮定して置く．）この現象 L_0 で表わせる不定常気流を地表風の場における現象として，現象 L_1 で表わせる不定常気流を風洞気流の場における現象と考えれば，風洞模型実験が想定される．そしてこれは，層流現象の場合の古典的な相似性の条件を表わしていることに外ならない．

又このことの別な表わし方をすれば，

$$\tau_A \equiv \hat{\mu} \cdot \frac{dv}{dz}, \tag{2.3.5}$$

こゝで，z：路面に垂直な高さ

なる応力が気流の方向に働いていると考えられる．

次に，この不定常な気流に乱れが存在している場合，即ち乱流となった場合には，これらの対応は次の様になる．

なお，こゝでいう乱流とは次の様な意味である．例えば，地表風，等の運動を前述の様に Euler の方法で観測すると，その速度および圧力，等が時間的に不規則に，しかしながら統計的法則性に支配されて，平均の周りに変動していることを推定することが出来る．その場合に，その気流には乱れがあるといゝ，その現象を乱流と定義する．更にこの乱れの強さは，気流の速度変動を表わすもので，気流の速度の母標準偏差 $\hat{\sigma}$ を気流の速度の標本平均 $\overline{V}$ で除した値

$$I \equiv \frac{\hat{\sigma}}{\overline{V}} \tag{2.3.6}$$

こゝで，$\hat{\sigma}$：気流の速度の母標準偏差，

$\overline{V}$：〃　標本平均，

こゝで母平均の代りに標本平均を用いることが出来るのは，

（後出 2.3.17 参照）$\overline{V} \equiv E(V) = m$ が成り立つからである．

こゝで，$E(\cdots)$：は期待値（期望値），平均としてを表わし，

m：気流の速度の母平均を表わす．

によつて表わすことが出来るということに注意する（実際の場合においては，無作為（ランダム），任意的，確率的）でしかも相互に独立な標本である風速の個々の測定値から標準偏差不偏推定値 $\hat{\sigma}$ を推定する．正規型では不偏分散が平均として母分散に一致するが，不偏分散の平方根 u を母標準偏差 $\hat{\sigma}$ の推定に用いると，カタヨリがある．それ故，

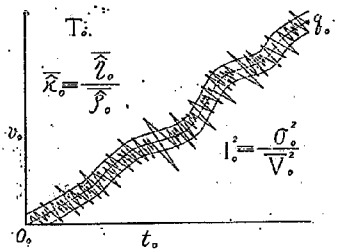
$$\frac{u}{b_f} = u \cdot \left(\frac{1}{b_f}\right) \tag{2.3.7}$$

を作ると，これは平均として $\hat{\sigma}$ に一致する．このことは，

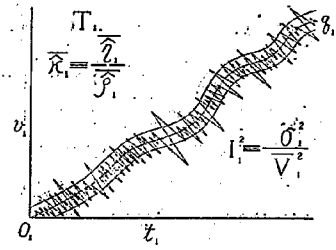
$$E(u) = \hat{\sigma} \tag{2.3.8}$$

であることに外ならない．勿論，標本標準偏差 s を用いることも不合理である（標本の大きさ N（自由度 $f \equiv N-1$）に対応した b_f 並びに $(1/b_f)$ の値は続報に於いて発表する予定である）．

さて，図—1 によつて表現される不定常気流 I_0 に乱れが存在する場合に，その乱流は図—3 の T_0 によつて表わされ，v_0 が時間 t_0 について vector $\widetilde{O_0 p_0}$ の様に変動している．図—1 の層流の場合においては，$\widetilde{O_0 p_0}$ なる曲線の切線即ち加速度は，連続的にしかも緩やかに変化して行くが，図—3 の乱流の場合には，その加速度は存在するが，巨視的には不連続であり，微視的に連続であるとしてもその勾配は急激に変動している．



図—3



図—4

しかし図—3 の乱流の場合でも，その風速の平均 $\bar{v}_0$ をとれば図—1 の層流の場合と同様に考えることが出来る．これを図—4 で表わされる様な乱流現象 T_1 によつて再現する場合の推計的相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）を考える．

こゝでも，層流の場合と同様な別の表わし方をする．そうすると，乱流の場合にも前述の層流の場合と同様な想定に基いて，

$$\bar{\tau}_{\bar{A}+\bar{\mu}} \equiv \bar{A}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz}+\bar{\mu}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz} \tag{2.3.9}$$

の様に表わすことが出来る．（乱流の場合にも，生ずる見掛けの応力を，層流の場合と同様な想定から，

$$\bar{\tau} \equiv \bar{A}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz} \tag{2.3.10}$$

の形に置くことが出来る．（T. V. Boussinesq の仮定，附録参照）この (2.3.9) の第2項は，乱れのない（分子）粘性による項（O (1 c.g.s.)）で，第1項の乱れによる見掛けの応力に関する項（O (10^3 c.g.s.)）に比較すれば非常に小さいものであるから（O (……)：，Ordnung の略号），(2.3.9) は，

$$\bar{\tau}_{\bar{A}+\bar{\mu}} \equiv \bar{A}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz} \equiv \bar{\tau}_{\bar{A}} \tag{2.3.11}$$

として差支えないものである．これは更に形式的に，

$$\bar{\tau}_{\bar{A}} \equiv \bar{A}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz} \equiv \bar{\eta}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz}+(-1)\cdot\bar{\rho}\cdot\overline{v'v'}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz} \tag{2.3.12}$$

$$=\bar{\eta}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz}+(-1)\cdot\bar{\rho}\cdot\delta^2$$

こゝで，δ^2：速度 v の母分散（実際の場合において，この計算を行う方法は前述の通りである．）

に変形することが出来る．

以上の様な省略を許容することが出来るならば，推計的相似性の条件の中から乱れのない (2.3.13) (分子) 粘性の影響による諸条件（乱れのない Reynolds' number $R_{\bar{\eta}}$, Froude's number F, ……, etc. =const., 等の条件）は消去されて，乱れのある (2.3.14) (乱子) 粘性の影響による諸条件（乱れのある Reynolds' number $R_{\bar{\chi}}$, Froude's number $F_{\bar{\chi}}$, ……, etc. =const., 等の条件）と，

$$I^2 \equiv \frac{\hat{\sigma}^2}{V^2} = \text{const.} \tag{2.3.15}$$

という条件（この意味は前述の通りである）とが残るのである．

こゝで後の説明の為に，次に述べる様な準備をして置く．

予備定理 1°. (2.3.16) 地表風の場において，風速の箇々の測定値は，推計的に無作為（ランダム，任意的，確率的）でしかも相互に独立な確率変数で，それらの標本の母集団は正規型（正規分布；母集団の場合には $N(m,\hat{\sigma}^2)$ で表わし，標本の場合には $(N;\bar{x},u^2))$ で表わす．

こゝで，m：母平均，

$\hat{\sigma}^2$：母分散，でこれらは正規分布の母数（母集団常数）を表わし，

N：標本の大きさ，

$\bar{x}$：標本平均，これは平均の不偏推定値になる，即ち

$$\bar{x} \equiv E(x) = m, \tag{2.3.17}$$

$u^2 : M_2 ; V$；分散不偏推定値，不偏分散である．）

であるとして十分近似することが出来る．（もし，その標本分布が正規型でなくても，標本の大きさ N を十分大きく（O (30) 以上に）すれば，平均を問題にする限り中心極限定理が実際に成り立つので，正規型を近似的に想定して差支えない．又正規型に変数変換をして取り扱つてもよい．）

予備定理 2°. 予備定理 1° は風洞気流の場においても，全く同様に成立する．

予備定理 3°. 一つの正規分布はその母平均と母分散とが与えられゝば，一意的に決定されるので，いま二つの正規型の標本分布が同一母集団に属するかどうかを比較するには，その母平均と母分散とがそれぞれ相互に独立にしかも同時に同一であるかどうかを考えればよい．実際の場合においては，標本についてこれらの比較をするのであるから，その場合には標本平均（即ち平均不偏推定値）並びに分散不偏推定値（不偏分散）

$$u^2 \equiv \frac{Sv}{f} \equiv \frac{Sv}{N-1}, \tag{2.3.18}$$

こゝで，u^2：(前出 2.3.16) の通りであり，

$E(u^2)=\hat{\sigma}^2$ である， (2.3.19)

Sv：SS；標本変動，偏差平方和，

f：$\equiv N-1 \equiv n$；DF，自由度

を用いなければならない．

これらの標本の頻度分布の特性を数量的に記述する為には，まず確率変数の積率母函数を見出して，平均の周りの k 次積率を求める．そして，それによつて容易に導かれる次の四つの積率を特性の測度として用いる（しかし現在では，R. A. Fisher による k- 統計量が用いられている．その理由は，積率母函数の存在しない分布（註 Cauchy 分布等）があつて，その場合には k 次積率の意味がなくなるからである．このことから，k

次積率を考える場合に，その積率母函数が存在するという事は前提条件になつていることが判る.). それらは，

(2.3.20)
1°. 中心的傾向の測度としての1次積率（標本平均）

2°. 変動の測度としての2次積率（分散不偏推定値；不偏分散）

3°. 歪みの測度としての3次積率

4°. 尖り の測度としての4次積率

であり，理論的にはより高次の積率を考え合せた方が，より一層完全にその分布を記述出来るのであるが，サンプリングの問題において非常に不安定なものであるので，それらからは信頼出来る知識は殆んど得られないものである. 正規分布の場合には，その平均の周りの 0 次積率は常数項で分布函数の表わす曲線下の面積であるから 1 であり，$(2k-1)$ 次積率は 0 となる. ($k=1,2,3,\cdots\cdots,n$ で正の整数) その結果，$2k$ 次積率のみ残り，その中で前述の2次，4次の積率迄を考慮し，それらの値を用いて各測度を定義する.

大体これだけの準備をして置いて，前述の図—3 と図—4 との対応を考える.

前述した様にこの場合の推計的相似性の条件としては，乱れのある（乱子）Reynolds' number

(2.3.21)
$$R_{\tilde{k}} \equiv \frac{\overline{V}\cdot\overline{L}}{\tilde{\nu}}$$

と乱れのある流れ（乱流）の速度の乱れの強さの2乗

(2.3.22)
$$J^2 \equiv \frac{\delta^2}{\overline{V}^2} = \text{const.}$$

(2.3.23)
（この場合には，Froude's number $F_* \equiv$ const., 等の他の条件は消去される.）とが残される. この (2.3.21) は乱れのある（乱子）粘性による応力の特性を示しており，(2.3.22) は Reynolds' stress（速度変動即ち乱れの強さによる応力の対称 tensor の平均）の特性を表わしている. こゝで，前述の (2.3.16) 予備定理 1°,2°,3° によつて，速度分布を推計量として考えれば，これら二つの条件は必要にして且つ十分な条件（完全条件）であることが判る.（乱れのない気 流の場合には，Reynolds' stress, 等の推計量が消去されるから，乱れのある場合の必要条件に相当する 乱れのない Reynolds' number

(前出 2.3.4)
$$R_{\flat} \equiv \frac{\overline{V}\cdot L}{\flat} = \text{const.}$$

の条件が直ちにその場合の推計的相似性の完全条件となるのである. このことから従来の相似性の理論は乱れのない（分子）流体力学的現象を対象とした場合にのみ適応されるものであることが判る.）その速度分布の平均というものは図—3 の vector $\widetilde{O_0 p_0}$ であり，その線型は 図—1 の vector $\overline{O_0 p_0}$ と同一な連続的加速度を有する. そしてこれらの気流の粘性的特性は $\tilde{\nu}_0$ によつて表わされ，その $\tilde{\nu}_0$ の変動の見掛けの振巾は，

(前出 2.3.22)
$$\overline{I}^2 \equiv \frac{\sigma^2}{\overline{V}^2} = \text{const.}$$

に比例する値である. その結果，乱れのある（乱子）気流の場における推計的相似性の必要条件は，乱れのな

い（分子）気流の場における完全条件と同一型式でよく，たゞ乱れによる（乱子）粘性的特性 $\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \cdots$, etc. を用いればよいことになる．結局，この場合の推計的相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）としては，乱れのある（乱子）気流の粘性的特性 $\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \cdots\cdots$, etc. を用いた乱れのある（乱子）Reynolds' number $R_{\tilde{\nu}}$ を相等しくして，しかも同時に相互に独立にその母分散も相等しいことが（母分散の均一性）要求される．これは実際の場合においては，

$$I \equiv \frac{\hat{\sigma}}{\overline{V}} = \text{const.} \tag{前出 2.3.6}$$

を用い，それらの気流の速度の乱れの強さの均一性について考察することになるものである．更に，（前出 2.3.16）の予備定理 1°;2°,3° を前提して，風洞気流の場における速度の平均不偏推定値（これは標本平均に外ならない）

$$m_1 = \overline{V}_1 \tag{2.3.24}$$

並びに，その標準偏差不偏推定値（分散不偏推定値 u^2 の平方根 u を用いる場合には，（前出 2.3.7）の様にカタヨリを補正する．その理由は（前出 2.3.8）の通りである．）

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{u_1}{b_f} = u_1 \cdot \left(\frac{1}{b_f}\right) \tag{2.3.25}$$

が，地表風の場における（正規）母集団からの無作為標本であるかどうか，即ち，

$$H_0: \quad m_0 = V_0 = \overline{V}_1 = m_1 \tag{2.3.26}$$

並びに，

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{u_0}{b_f} = u_0 \cdot \left(\frac{1}{b_f}\right) = u_1 \cdot \left(\frac{1}{b_f}\right) = \frac{u_1}{b_f} = \hat{\sigma}_1$$

こゝで，H_0：帰無仮説

である帰無仮説を検定する為には，λ 検定法を応用する．言い換えれば，地表風の場における（前出 2.3.21）並びに（前出 2.3.22）の条件によつて再現された風洞気流の場における実験において，推計的相似性が成り立つているかどうかを検定することに外ならない．

むすび

以上は本研究課題の総合的研究計画並びに乱流相似性理論を推計学的立場から明らかにしたものである．実験的研究の方法論として，推計学的方法を用い，以下続報における実験方法は現地観測と風洞模型実験によるものである．これらの現地観測は限られた特定の地域におけるものであるから，広く各現地の依頼調査を行つてその不足を補い，又模型実験においても実物大の模型による実験も行う予定で計画中である．なお，本報告において残されているのは，模型雪を用いた風洞実験の相似性に関する問題である．

これは，従来，わが国においても，欧米その他諸外国においても，未解決の問題であり，実験報告もその点

がアイマイにされている．以下続報においては，推計学的方法によつてそれらの問題を解析し，模型雪を用いる方法の実用化を試み，更に防除雪工法の基本方式を確定したいと思う．

参考文献

1. 黒田正夫，木下是雄：風洞による人工吹雪の実験報告　日本雪氷協会論文集 1 (1940；昭和 15 年)，144～158．これは同一の内容が，

2. 理研彙報：19—8 (1940；昭和 15 年)，175．

3. 鉄道業務報告：28—26 (1940；昭和 15 年)，1 に発表されており，その概報，概要は，

4. 応用物理

5. 科学の実験

に掲載されている．

この研究によつて，これらの問題に対する実験的方法の端緒が開拓されたが，その相似性については考察されておらず現地実験と非常によく適合しているとのみ述べられているに過ぎない．なお，著者の一人によつて次の模型実験が行われている．

6. 黒田正夫：積雪崩模型実験報告 (1) 雪氷 3—7 (1941；昭和 16 年)，295～302，

7. 黒田正夫：人工雪崩　雪氷 6—5 (1944；昭和 19 年)，111～113

これに続いて現地模型で，

8. 稲積豊二：防雪柵と吹雪　日本雪氷協会論文集 1 (1940；昭和 15 年)，139～143

が行われ，更に，

9. 木村幸一郎，吉坂隆正：建物周囲の吹溜りと積雪状態に関する模型実験　雪氷 4—3，5，6，7 (1942；昭和 17 年)，96～99，133～140，160～165，203～208

の風洞模型実験が行われた．

なお最近は現地実験として，

10. 古川巌：吹雪溜りの研究　雪氷 9—6 (1947；昭和 22 年)，98～102

があり，吹溜りの現地観測に関しては，

11. 木村幸一郎：吹溜り積雪の現状調査　雪氷 10—2 (1948；昭和 23 年)，52～55

の報告がある．

以上の研究においては総て相似性の考察が明らかにされていない．そして相似性の考察としては，

12. 高橋浩一郎：雪の力学に於ける相似則について　雪氷 3—3 (1941；昭和 16 年)，105～108

があるが，これは流体現象の相似性ではなく静止粉体の相似性であり，その次元解析法に計算上の誤りが認められる．更に粉体を対象として流体現象の相似性を誘導したものに，

13. 今井一郎：吹雪の模型実験に於ける相似則について　雪氷 11—1 (1949；昭和 24 年)，14～16

があるが，その中で，Reynolds' number=const. という条件は不可能であるとしているのは誤りであり，現在においてはこの問題は一応解決されている．

欧米の文献においてもこの点はアイマイにされている．別に道路の防除雪に関する内外の諸文献は，日本雪氷協会から近刊される雪氷論文抄録の土木部門に列挙されている　そして，

14. 高橋浩一郎：大気の流れの模型実験　気象集誌　2—22 (1944；昭和 19 年)，13，

等の考察を経て，

15. 井上栄一：自然の風と風洞実験　応用力学　1—1 (1948；昭和 23 年)，15～21

によつて乱流相似性を風洞模型実験に応用する基礎が確立されたのである．

更に同一の著者によつて，

16. 井上栄一：自然の風と風洞実験（第2報）応用力学　4—22 (1951；昭和 26 年) 27～30

の研究が行われている．

その後，

17. 塩谷正雄，新井秀雄：ふぶき防止林の機能（第1報）鉄道業務研究資料　7—19 (1950；昭和 25 年)，4～6

18. 塩谷正雄，新井秀雄，林田千秋，小笠原泰造：ふぶき防止林の機能（第2報）鉄道業務研究資料　8—22 (1951；昭和 26 年)，3～8

が行われ，吹雪の実態については，

19. 平田徳太郎：吹雪について　雪氷　12—5 (1951；昭和 26 年)，165～167，

20. 高橋喜平：降雪の傾斜　雪氷　12—5 (1951；昭和 26 年)，168，

21. 平田徳太郎：雪片の降下速度についてのノート　雪氷 12—5 (1951；昭和26年)，168～169，等があり，なお類似現象である飛砂に関する研究として，

22. 林野局：海岸砂地造林に関する調査報告（飛砂の動態の物理学的研究）治山事業参考資料　I (1949；昭和 24 年)，1～71，

23. 林野庁：防災林に関する調査報告（防風並びに防砂に関する基礎的研究）治山事業参考資料　II (1950；昭和 25 年)，1～109，

24. 林野庁：海岸砂地造林に関する調査報告　第3報告（飛砂に関する実験）（七望海岸に於ける砂の移動状態の観測報告）（風の持つ垂直方向の乱れについて）治山事業参考資料　4(1951；昭和 26 年)，1～31

が，東京大学理工学研究所河田研究室において行われている．更に，類似現象として，

25. 金崎肇，久野光臣：障碍物による砂の堆積の実験　雪と生活—(資料)— 4—3(1952；昭和 27 年)，32～29

も行われている．

26 市　原　薫：道路と吹雪害　建設・全日本建設技術協会　21 (1949；昭和 24 年 5 月 1 日), 5
27. 東北地方建設局対雪調査研究小委員会　対雪調査報告　(1950；昭和 25 年), 6～12

附　　錄

推計的乱流相似性の誘導

§1.　地表風の運動を表わす微分方程式（運動量保存の微分方程式）

地表風の種々の現象を研究する為には，地球の表面上の一点に座標系の原点がある直角座標を考えればよい．地球は完全な球形であるとし，直角座標 x, y, z は座標軸 $-Oz$ の周りに一定の角速度 ω で廻転する座標系であるとする．この時地球は廻転しているから，重力の方向は勿論 z—軸とは一致しないのであるが，地球の廻転の角速度 $\omega \fallingdotseq 7.29\times10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}$ [(1)] が非常に小さい値であることゝ，重力の方向が z—軸となす角を Ψ とすれば，$\pi-\Psi \geqq 3\times10^{-2}$ が小さい値であることを考慮して，Euler 型の運動方程式を scalar 表現をすれば，その運動方程式は近似的に次の様になるのである．

たゞし，不等流，不定常，層流の仮定を導入しておく．

(2)
$$\frac{Du_0}{Dt_0}\equiv\frac{\partial u_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial u_0}{\partial z_0}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_0}+\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial x_0}+\nabla_0(\kappa_0\nabla_0 u_0)$$
$$+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial w_0}{\partial x_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)$$
$$+2\omega_0(\sin\lambda_0 v_0-\cos\lambda_0 w_0),$$
$$\frac{Dv_0}{Dt_0}\equiv\frac{\partial v_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial v_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial v_0}{\partial z_0}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y_0}+\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial y_0}+\nabla_0(\kappa_0\nabla_0 v_0)$$
$$+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial w_0}{\partial y_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial u_0}{\partial y_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)$$
$$-2\omega_0(\sin\lambda_0 u_0),$$
$$\frac{Dw_0}{Dt_0}\equiv\frac{\partial w_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial w_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0}$$
$$=-g_0-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial z_0}+\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial z_0}+\nabla_0(\kappa_0\nabla_0 w_0)$$
$$+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial u_0}{\partial z_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial v_0}{\partial z_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)$$
$$+2\omega_0(\cos\lambda_0 u_0)$$

とゝで，$\frac{Du_0}{Dt_0}$, $\frac{Dv_0}{Dt_0}$, $\frac{Dw_0}{Dt_0}$：地表風の実質部分が時刻 t_0 に (x_0, y_0, z_0) なる場所においてもつ加速度成分，

u_0：地表風の速度の x—軸方向成分，

v_0：　〃　　y—　〃　，

w_0 ： 地表風の速度の z 一軸方向成分，

t_0 ： 地表風の実質部分の運動中に示す時刻，

p_0 ： 地表風の圧力，

ρ_0 ：　〃　密度，

κ_0 ：　〃　乱れのある（乱子）動粘性係数，

$\equiv \frac{\eta_0}{\rho_0}$，$\eta_0$：乱れのある（乱子）粘性係数，

そして，

$$\theta_0 \equiv \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0}$$

θ_0 ： 微分演算記号，体積膨脹率で発散を表わし，

$$\nabla_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\partial}{\partial z_0}$$

∇_0 ： Hamilton 記号（または nabla）である．

更に，ω_0：地球の角速度　$\lambda : = \theta + \pi - \Psi$，地球の緯度，地球上の緯度が λ_0 なる地点の水平面内において，x 一軸を東方に，y 一軸を北方に向けてとり，z 一軸を鉛直上方（天頂方向）に向けてとつてある．

$$g_0 : \fallingdotseq g_0^0\left(1 - \frac{\gamma\omega_0^2}{g_0^0}\cos^2\theta_0\right),$$

g_0^0：極における重力の加速度，

γ_0：地球の半径，

θ_0：z 一軸と赤道面とのなす角，

これは粘性流体の運動を表現する Navier-Stokes の微分方程式の一般的な型式である．これらの微分方程式の右辺の最後の項は，座標軸の原点を地球表面上にとつた場合に，地球の自転の為に流体に働く Coriolis の力の影響を表わすものである．

（註　いま廻転座標系が静止座標系を角速度 W で廻転している場合を考える．

原点 0 を両系に共通な固定された点とする．

これは両系が三軸方向の相対速度を有しないことを意味していて，地球の自転の場合にはこの仮定で差支えない．

そうすると，位置 vector r である任意の点 p の両系に対する速度 V_1, V_2, の関係は，

$$V_1 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)_1 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_2 + W \times r \tag{3}$$

$$= V_2 + W \times r$$

であるから，V_1 を Scalar t について微分すれば加速度 a_1, a_2 には次の関係がある．

こゝで，$W \times r$ は vector 積（外積）を表わし，式の変形中には (3) の関係を考慮する．

$$a_1 \equiv \left(\frac{dV_1}{dt}\right)_1 = \left(\frac{dV_1}{dt}\right)_2 + W \times V_1 \tag{4}$$

$$=\left\{\frac{d}{dt}(V_2+W\times r)\right\}_2+W\times(V_2+W\times r)$$

$$=\left(\frac{dV_2}{dt}\right)_2+W\times\left(\frac{dr}{dt}\right)_2+\left(\frac{dW}{dt}\right)_2\times r+W\times V_2$$
$$+W\times(W\times r)$$

(5) ここで，$\left(\frac{dW}{dt}\right)_1=\left(\frac{dW}{dt}\right)_2+W\times W=\left(\frac{dW}{dt}\right)_2\equiv\frac{dW}{dt}$ であるから，

(6) $$a_1=\left(\frac{dV_2}{dt}\right)_2+W\times\left(\frac{dr}{dt}\right)_2+W\times V_2$$
$$+\frac{dW}{dt}\times r+W\times(W\times r)$$

$$=a_2+2W\times V_2+\frac{dW}{dt}\times r+W\times(W\times r)$$

これは Coriolis の定理である．

ここで角速度 W が一定ならば，

(7) $$\frac{dW}{dt}=0$$

である．

それで，

(8) $$a_2=a_1-2W\times V_2-W\times(W\times r)$$

となり，a_1 は静止座標系の加速度である．$-W\times(W\times r)$ は廻転軸に垂直に働く見掛けの遠心力で，地球の引力と合成され重力として流体に働くものである．$-2W\times V_2$ はいわゆる Coriolis の加速度で Scalar 表現をすれば，

(9) $$-2(\omega_y\cdot w-\omega_z\cdot v),$$
$$-2(\omega_z\cdot u-\omega_x\cdot w),$$
$$-2(\omega_x\cdot v-\omega_y\cdot u)$$

である．それ故，廻転座標系に対する Navier-Stokes の微分方程式は，静止座標系に Coriolis の加速度を加えればよいことになる．

いま，地上の緯度 λ の点を座標原点として，z-軸を鉛直方向に，y-軸を北に，x-軸を東にとれば，

(10) $$\omega_x=0,$$
$$\omega_y=\omega\cdot\cos\lambda,$$
$$\omega_z=\omega\cdot\sin\lambda$$

であるから，

(11) $$-2(\omega\cdot\cos\lambda\cdot w-\omega\cdot\sin\lambda\cdot v),$$

$$-2(\omega\cdot\sin\lambda\cdot u-0),$$

$$-2(0-\omega\cdot\cos\lambda\cdot u)$$

となるのである).

こゝで取扱う地表風の運動は，道路の防除雪の諸問題の立場から，距離を O(1, km) の範囲に限定してよい．その結果，次の様な種々の仮定を許容することが出来て，(2) の微分方程式を単純化することが出来る．

1° 乱れのある（乱子）動粘性係数 $\kappa_0\equiv\frac{\gamma_0}{\rho_0}$ の等方性と定常性の仮定

大気の異方性の為に，水平，鉛直方向の乱れのある（乱子）動粘性係数の値には，従来の観測結果によれば次の様な差異が現われている．（補遺 §1 参照）

$$\kappa_x=\kappa_y=O\ (5\times10^3,\ \text{c.g.s.}),$$

$$\kappa_z=O\ (10^5,\ \text{c.g.s.})$$

この様な等方性または異方性現象に関する相似性模型実験の解法については，その実験方法の許容限界から次の様な方法が考えられる．それは，

(13)
1° 等方性現象を異つた場において，等方的方法を使用して変換し，現象を再現する方法，

2° 等方性現象を異つた場において，異方的方法を使用して変換し，現象を再現する方法，

3° 異方性現象を異つた場において，等方的方法を使用して変換し，現象を再現する方法，

4° 異方性現象を異つた場において，異方的方法を使用して変換し，現象を再現する方法，

の四つの方法である．

いま，

(14)
$^*\varepsilon$：単位量的歪度（c.g.s. 絶対単位系的歪度），現象自体が不等方性即ち異方性の場合を歪が存在するといゝ，その度合を歪度と定義する，

$^{**}\varepsilon$：物理量的歪度（誘導単位系的歪度），

$^*\omega$：単位量的異方測度（c.g.s. 絶対単位系的測度），物理量の測定単位を現象に対応して異方性にする度合を異方測度と定義する，

$^{**}\omega$：物理量的異方測度（誘導単位系的測度）

と定義するならば，等方的方法というのは，前述の各歪度 $^*\varepsilon$, $^{**}\varepsilon$ 並びに各異方測度 $^*\omega$, $^{**}\omega$ が，

(15)
$$^*\varepsilon=O\ (1),$$
$$^{**}\varepsilon=O\ (1),$$
$$^*\omega=O\ (1),$$
$$^{**}\omega=O\ (1)$$

の各条件を満足することであり，異方的方法というのは，

(16)
$$^*\varepsilon\neq O\ (1),$$
$$^{**}\varepsilon\neq O\ (1),$$
$$^*\omega\neq O\ (1),$$

$$^{**}\omega \fallingdotseq O(1)$$

の各条件を満足することであるということが出来る．そしてそのいずれの場合においても，前述の各歪度 $^{*}\varepsilon$, $^{**}\varepsilon$ 並びに各異方測度 $^{*}\omega$, $^{**}\omega$ をその場の状態に対応して適当に組合わせて使用するのである．これは推計的相似性の条件から見れば，幾何量的相似性の各条件に相当するものである．

いわゆる実際問題として現地における実物模型実験というのは，幾何量的相似性に関しては前述の各歪度並びに各異方測度が，

$$^{(17)}\quad ^{*}\varepsilon \fallingdotseq O(1),$$

$$^{**}\varepsilon = O(1),$$

$$^{*}\omega \fallingdotseq O(1),$$

$$^{**}\omega = O(1)$$

であることに外ならないのである．(註　その場合には，更に物理量的相似性に関する各条件が満足されていなければならないということは勿論である)

いま考えている現象において，(13) の 4° の方法を使用するとすれば，その単位量的歪度 $^{*}\varepsilon$ は，その幾何量（長さの dimension $\equiv L$）について，

$$^{(18)}\quad ^{*}\varepsilon \fallingdotseq \alpha \fallingdotseq 220$$

になることを計算から求めることが出来る．(補遺 §1 参照)

以上の考察と数値から，等方性の仮定は不可能の様に考えられる．[19] しかしながら大気に異方性の生ずる理由は現象論的（巨視的）に，$O(10^{6}$, c.g.s.) の大きさの対流圏で行われる垂直方向の拡散に対して $O(10^{9}$c.g.s.) の大きさの移動性高気圧，移動性低気圧，気塊，等によって行われる水平方向の拡散の影響が大きい為であるとされているので，道路の防除雪の諸問題に対してはその範囲を $O(10^{5}$, c.g.s.) に限定することが出来て，その結果，等方性，定常性（時間的に変化しない条件）の仮定を許容しても差支えないものである．

2°　地表風の運動を論ずる場合に Coriolis の力の影響を無視する仮定

対象とする地表風の運動をその場において凡そ 30 min の範囲内に限定すれば，この仮定は可能である．

これを距離で表わせば，平均風速 15 m·sec^{-1} として，

$$^{(20)}\quad 15\ \mathrm{m\cdot sec^{-1}} \times 30 \times 60\ \mathrm{sec} = 27 \times 10^{3}\ \mathrm{m}$$

$$= 27\ \mathrm{km}$$

である．(補遺 §2 参照) 即ち，30 km 程度以内の現象を考える場合には，Coriolis の力による影響は省略することが出来る．

3°　地表風の運動を論ずる場合の非圧縮性の仮定

地表風を乱れのない流れとして，

$$^{(21)}\quad \text{Mach's number } M \equiv \frac{v}{a}$$

こゝで，v：地表風の風速，

a：　〃　　〃　　の局所音速，

は，最大値として $v=40\ \mathrm{m\cdot sec^{-1}}$ をとり，$a=340\ \mathrm{m\cdot sec^{-1}}$ と仮定して，

$$M=\frac{40}{340}<1 \tag{22}$$

であるから亜音速流と考えられ，気流を非圧縮性と仮定するために起る誤差は，

$$\frac{v^2}{a^2}=\frac{1,600}{115,600}=\mathcal{O}(10^{-2}) \tag{23}$$

である．（補遺 §3 参照）

それ故，道路の防除雪の諸問題を論ずる場合には，この仮定も許容してよいものである．

その時には，

1° の仮定条件から，

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)=0, \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial w_0}{\partial x_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial u_0}{\partial y_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial w_0}{\partial y_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial z_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_0}{\partial y_0}\frac{\partial v_0}{\partial z_0}-\frac{\partial\kappa_0}{\partial z_0}\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)=0.$$

となる．

そして，2° 仮定条件から，

$$-2(\omega_y\cdot w-\omega_z\cdot v)=0, \tag{25}$$

$$-2(\omega_z\cdot u-\omega_x\cdot w)=0,$$

$$-2(\omega_x\cdot v-\omega_y\cdot u)=0.$$

となる．

更に，3° の仮定条件から

$$\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial x_0}=0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial y_0}=0,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial(\kappa_0\theta_0)}{\partial z_0}=0.$$

となるのである.

以上に述べた3仮定条件によつて，微分方程式 (2) は次の様に単純化されるのである.

$$\frac{Du_0}{Dt_0}=\frac{\partial u_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial u_0}{\partial z_0}$$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_0}+\kappa_0\Delta_0 u_0,$$

$$\frac{Dv_0}{Dt_0}=\frac{\partial v_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial v_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial v_0}{\partial z_0}$$

$$=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y_0}+\kappa_0\Delta_0 v_0,$$

$$\frac{Dw_0}{Dt_0}=\frac{\partial w_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial w_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0}$$

$$=-g_0-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial z_0}+\kappa_0\Delta_0 w_0$$

こゝで，
$$\Delta_0\equiv\nabla_0^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$$

§2. 地表風の質量保存（連續）の微分方程式並びにその外の微分方程式

次に，地表風の運動に対する連續の微分方程式の一般型は，

$$\frac{D\rho_0}{Dt_0}+\rho_0\cdot\mathrm{div}(u_0,v_0,w_0)$$

$$=\frac{\partial\rho_0}{\partial t_0}+u_0\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}+v_0\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}+w_0\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}+\rho_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+\frac{\partial v_0}{\partial y_0}+\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)=0$$

である.

これは前述の仮定条件 1° に対応する大気の不等方性（異方性）並びに不定常性に関係なく，更に 2° に対応する流体に及ぼす Coriolis の加速度の影響はなく，廻転座標を考えた場合でも質量保存（連続）の微分方程式は (28) で表わすことが出来るのである.

その結果，仮定条件 3° のみが問題となり，それを前述の考察に基いて許容すれば (28) は，

$$\mathrm{div}(u_0,v_0,w_0)=\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+\frac{\partial v_0}{\partial y_0}+\frac{\partial w_0}{\partial z_0}=0$$

となるのである.

これらの外に，温度が変る様な場合には，自然体積変化と熱移動とを示す状態方程式，

$$p_0=R_0\cdot\rho_0\cdot T_0$$

こゝで，　R_0：地表風の場における気体常数で，各気体毎に異る，

T_0：絶対温度，273,16+$t°C$，

と示性式，

$$p_0 \doteqdot p_0(\rho_0) \tag{31}$$

とが与えられゝば，方程式の數は6箇となり，u, v, w, p, ρ, T の6箇の未知數は形の上では一応決定されるものである．そして更に，運動および連続の微分方程式を解く場合に表われて来る任意常數項を決定する為には微分方程式が空間について總て一次であるから，一つの拘束が与えられなければならない．速度または加速度についての境界条件は，次の様なものである．いま気流と接触する物体の表面を，

$$f_0(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \tag{32}$$

で表わせば，

$$\frac{Df_0}{Dt_0} = \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + u_0\frac{\partial f_0}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial f_0}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial f_0}{\partial z_0} = 0 \tag{33}$$

となり，これが所要の境界条件であつて，もし気流と接触する物体の表面が，時間と共に変化しないものとすれば，

$$u_0\frac{\partial f_0}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial f_0}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial f_0}{\partial z_0} = 0 \tag{34}$$

となり，これは気流の速度の物体の表面に垂直な成分は 0 でなければならないことを表わしている．

更に圧力 p_0 についても，一つの境界条件が必要であり，また時間 t_0 についても，一つの初期条件を必要とする．

前述の Navier-Stokes の微分方程式 (27) は，$u\frac{\partial u}{\partial x}$，$v\frac{\partial u}{\partial y}$，$w\frac{\partial u}{\partial z}$，等の様な項を含む非線型であつて，これらが有限値を有する為に一般的には省略出来ないので，現在のところ厳密解は得られてないのである．この解を実験的に求める立場として，模型実験の意義があるわけである．

こゝで更に，等方性または異方性現象に関する相似性模型実験の解法について考察する．それには実験的方法として，

1° 等方的方法，(35)

2° 異方的方法，

が考えられることは前述の通りである．そして，それには各歪度 $*\varepsilon$，$**\varepsilon$ 並びに各異方測度 $*\omega$，$**\omega$ を導入することが必要とされるのである．そこで，これらを諸境界条件および初期条件に関して考察すると，速度または加速度の境界条件 (34) を二次元的に考えれば，物体の表面が一つの流線となることを表わしている．その結果，異方的方法として各歪度 $*\varepsilon$，$**\varepsilon$ 並びに各異方測度 $*\omega$，$**\omega$ を使用する場合にはその流線を歪めることになるものである．(物体の表面の形状を歪めることによつて流線を歪める場合も含まれる．) それ故に，単純拡大，移動，廻転のみを前提として歪を考えていない等角写像の概念からいえば，各歪度 $*\varepsilon$，$**\varepsilon$ 並びは各異方測度 $*\omega$，$**\omega$ を使用することは，一般的には不合理となるのである．それは気流の速度分布の全く異つた状態を再現していると考えられるからである．云い換えれば，各歪度 $*\varepsilon$，$**\varepsilon$ 並びに各異方測度 $*\omega$，$**\omega$ を使用

することが許容される限界はポテンシヤル流; potential flow と見做される場合に限定されるということに外ならない．しかしながら実験的には，大気に乱流性があるので時間的平均をとつて，推計的に前述の各微分方程式が成立すると想定するのであるから，各歪度 $*\varepsilon$, $**\varepsilon$ 並びに各異方渦度 $*\omega$, $**\omega$ を使用することの許容限界は，推計的にポテンシヤル流; potential flow と見做される場合に迄その範囲を拡張する事が出来るのである．

§3. 風洞気流の運動を表わす（運動量保存の）微分方程式および風洞気流の質量保存（連続）の微分方程式並びにその外の微分方程式

風洞内に風洞気流の場を考えると，前述した地表風の場合の仮定条件 1°, 2°, 3° は，風洞気流の場においてもその儘適用することが出来るので，その運動量保存の微分方程式は，

$$(36)\quad \frac{Du_1}{Dt_1}=\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}$$

$$=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\kappa_1\Delta_1 u_1,$$

$$\frac{Dv_1}{Dt_1}=\frac{\partial v_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial v_1}{\partial z_1}$$

$$=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}+\kappa_1\Delta_1 v_1,$$

$$\frac{Dw_1}{Dt_1}=\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}$$

$$=-g_1-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\kappa_1\Delta_1 w_1$$

となる．

ここで，u_1：風洞気流の速度の x_1－軸方向成分，

v_1：〃 〃 y_1－ 〃 ，

w_1：〃 〃 z_1－ 〃 ，

t_1：風洞気流の実質部分の運動中に示す時刻，

$\frac{Du_1}{Dt_1}$, $\frac{Dv_1}{Dt_1}$, $\frac{Dw_1}{Dt_1}$：風洞気流の実質部分が時刻 t_1 に (x_1, y_1, z_1) なる場所においてもつ加速度成分，

g_1：風洞気流の場における重力の加速度，

p_1：風洞気流の圧力，

ρ_1：〃 密度，

κ_1：〃 の乱れのある（乱子）動粘性係数，

$\equiv\frac{\eta_1}{\rho_1}$, η_1：乱れのある（乱子）粘性係数，

そして，

$$\Delta_1\equiv\nabla_1^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

次に，地表風の場における時と全く同様にして，風洞気流の場における質量保存の微分方程式は次の様になる．

$$\overset{(37)}{\operatorname{div}(u_1, v_1, w_1)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

更に，風洞気流の場における自然体積変化と熱移動とを示す状態方程式は，地表風の場と全く同様にして

$$\overset{(38)}{p_1 = R_1 \cdot \rho_1 \cdot T_1}$$

こゝで，R_1：風洞気流の場における気体常数で，各気体毎に異る，

T_1：絶対温度，$273,16+t°C$，

となり，その示性式は，全く同様に，

$$\overset{(39)}{p_1 = p_1(\rho_1)}$$

である．

そして，速度または加速度についての境界条件も，地表風の場と全く同様にして，

$$\overset{(40)}{u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = 0}$$

と考えることが出来る．

更に圧力 p_1 についても，一つの境界条件が必要であり，また時間 t_1 についても，一つの初期条件を必要とすることは，地表風の場と全く同様である．

§4. 地表風の運動を表わす微分方程式（運動量保存の微分方程式）の乱流化

こゝでいう乱流とは，次の様な意味である．

例えば，地表風等の運動を前述の様に Euler の方法で観測すると，その速度および圧力等が時間的に不規則に，しかしながら推計的法則性に支配されて，平均の周りに変動していることを推定することが出来る．その場合に，その気流には乱れがあるといゝ，その現象を乱流と定義する．

地表風の場においては，その乱流性の為に，その速度および圧力等が平均の周りに時間的に変動しているのであるから，（前述の仮定条件 1°～3° を適用すれば，その外の変動は省略することが出来る．）その速度および圧力を，

$$\overset{(41)}{u_0 \equiv \bar{u}_0 + {}'u_0, \qquad w_0 \equiv \bar{w}_0 + {}'w_0,}$$
$$v_0 \equiv \bar{v}_0 + {}'v_0, \qquad p_0 \equiv \bar{p}_0 + {}'p_0$$

とおく．これは速度変動および圧力変動，

$$\overset{(42)}{{}'u_0 = u_0 - \bar{u}_0, \qquad {}'w = w_0 - \bar{w}_0,}$$
$$'v_0 = v_0 - \bar{v}_0, \qquad {}'p_0 = p_0 - \bar{p}_0$$

が，平均の周りに分布していることを表わしている．

こゝで，　$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{p}_0$：地表風の速度の各軸一方向成分，および圧力の時間的平均であり，

$'u_0, 'v_0, 'w_0, 'p_0$：それらの変動を表わす．更に，ここで平均というのは，

$$\bar{u}_0=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} u_0\cdot dt_0, \tag{43}$$

$$\bar{v}_0=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} v_0\cdot dt_0,$$

$$\bar{w}_0=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} w_0\cdot dt_0,$$

$$\bar{p}_0=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} p_0\cdot dt_0$$

である．この場合，ΔT_0 は十分に長く，その為に $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{p}_0$ は t_0 および ΔT_0 に無関係になつているものと仮定する．このことは，ΔT_0 を比較的短い時間に選んでも，各変動が速い為に，$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{p}_0$ の変化を無視することが出来ると考えてもよい．これは時間的平均として定常な流れを考えているものである．またはその速度および圧力 $v_0, v_0, w_0,$ および p_0 を時間 t_0 の偶然函数と考えて，その数学的期望値によつて，平均を定義してもよい．厳密には，

$$\bar{u}_0=\lim_{\Delta T_0\to\infty}\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} u_0\cdot dt_0, \tag{44}$$

$$\bar{v}_0=\lim_{\Delta T_0\to\infty}\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} v_0\cdot dt_0,$$

$$\bar{w}_0=\lim_{\Delta T_0\to\infty}\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} w_0\cdot dt_0,$$

$$\bar{p}_0=\lim_{\Delta T_0\to\infty}\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} p_0\cdot dt_0.$$

を考えるのである．大気の下層いわゆる地表風の場においては，

$$\Delta T_0 \geqq O(10^2,\ \text{c. g. s.}) \tag{45}$$

にとればよい．この時，(42) について，各速度および圧力変動の時間的平均を考えると，

$$\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} {}'u_0\cdot dt_0 \tag{46}$$

$$=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} u_0\cdot dt_0-\bar{u}_0\cdot\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} dt_0$$

$$=\bar{u}_0-\bar{u}_0=0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} {}'v_0\cdot dt_0$$

$$=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} v_0\cdot dt_0-\bar{v}_0\cdot\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} dt_0$$

$$=\bar{v}_0-\bar{v}_0=0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} w_0\cdot dt_0$$

$$=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} w_0\cdot dt_0-\overline{w}_0\cdot\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} dt_0$$

$$=\overline{w}_0-\overline{w}_0=0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} p_0\cdot dt_0$$

$$=\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} p_0\cdot dt_0-\overline{p}_0\cdot\frac{1}{\Delta T_0}\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} dt_0$$

$$=\overline{p}_0-\overline{p}_0=0$$

である.

次に，地表風の運動量保存の微分方程式を変形する．この時，単純化された連続の条件を考えて書き直すと(27)は，

$$(47)\quad \rho_0\frac{\partial u_0}{\partial t_0}=\frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\left(-p_0+2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)-\rho_0\cdot u_0\cdot u_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial y_0}+\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)-\rho_0\cdot u_0\cdot v_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0}+\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)-\rho_0\cdot u_0\cdot w_0\right\},$$

$$\rho_0\frac{\partial v_0}{\partial t_0}=\frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0}+\frac{\partial u_0}{\partial y_0}\right)-\rho_0\cdot v_0\cdot u_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\left(-p_0+2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)-\rho_0\cdot v_0\cdot v_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial v_0}{\partial z_0}+\frac{\partial w_0}{\partial y_0}\right)-\rho_0\cdot v_0\cdot w_0\right\},$$

$$\rho_0\frac{\partial w_0}{\partial t_0}=\frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+\frac{\partial u_0}{\partial z_0}\right)-\rho_0\cdot w_0\cdot u_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial w_0}{\partial y_0}+\frac{\partial v_0}{\partial z_0}\right)-\rho_0\cdot w_0\cdot v_0\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\left(-p_0+2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right)-\rho_0\cdot w_0\cdot w_0\right\}$$

の形に書き表わせる.

更に，単純化する為に，応力成分を用いて，

$$(48)\quad \widehat{x_0\cdot x_0}=-p_0+2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial u_0}{\partial x_0},$$

$$y_0\cdot x_0=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial y_0}+\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right),$$

$$\widehat{z_0 \cdot x_0} = \rho_0 \cdot \kappa_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial x_0} \right),$$

$$\widehat{x_0 \cdot y_0} = \rho_0 \cdot \kappa_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{\partial u_0}{\partial y_0} \right),$$

$$\widehat{y_0 \cdot y_0} = -p_0 + 2 \cdot \rho_0 \cdot \kappa_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0},$$

$$\widehat{z_0 \cdot y_0} = \rho \cdot \kappa_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial y_0} \right),$$

$$\widehat{x_0 \cdot z_0} = \rho_0 \cdot \kappa_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial u_0}{\partial z_0} \right),$$

$$\widehat{y_0 \cdot z_0} = \rho_0 \cdot \kappa_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y_0} + \frac{\partial v_0}{\partial z_0} \right),$$

$$\widehat{z_0 \cdot z_0} = -p_0 + 2 \cdot \rho_0 \cdot \kappa_0 \frac{\partial w_0}{\partial z_0}$$

とおけば，

(49)
$$\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} (\widehat{x_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot u_0 \cdot u_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\widehat{y_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0) + \frac{\partial}{\partial z_0} (\widehat{z_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot u_0 \cdot w_0),$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} (\widehat{x_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot v_0 \cdot u_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\widehat{y_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot v_0 \cdot v_0) + \frac{\partial}{\partial z_0} (\widehat{z_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot v_0 \cdot w_0),$$

$$\rho_0 \frac{\partial w_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} (\widehat{x_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot w_0 \cdot u_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\widehat{y_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot w_0 \cdot v_0) + \frac{\partial}{\partial z_0} (\widehat{z_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot w_0 \cdot w_0)$$

の様に変形することが出来る．こゝで地表風の運動量保存の微分方程式を乱流化する為に，時間的平均を考えて，時間 $\Delta T'_0$ について平均する．いま，

(50)
$$\overline{u_0 \cdot u_0} = \overline{(\bar{u}_0 + {}'u_0)(\bar{u}_0 + {}'u_0)} = \overline{(\bar{u}_0 \cdot \bar{u}_0 + {}'u_0 \cdot {}'u_0 + 2 \cdot \bar{u}_0 \cdot {}'u_0)}$$
$$= \bar{u}_0 \cdot \bar{u}_0 + \overline{{}'u_0 \cdot {}'u_0},$$

$$\overline{u_0 \cdot v_0} = \overline{(\bar{u}_0 + {}'u_0)(\bar{v}_0 + {}'v_0)} = \overline{(\bar{u}_0 \bar{v}_0 + {}'u_0 \cdot {}'v_0 + \bar{u}_0 \cdot {}'v_0 + \bar{v}_0 \cdot {}'u_0)}$$
$$= \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0 + \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0},$$

$$\overline{u_0 \cdot w_0} = \overline{(\bar{u}_0 + {}'u_0)(\bar{w}_0 + {}'w_0)} = \overline{(\bar{u}_0 \cdot \bar{w}_0 + {}'u_0 \cdot {}'w_0 + \bar{u}_0 \cdot {}'w_0 + \bar{w}_0 \cdot {}'u_0)}$$
$$= \bar{u}_0 \cdot \bar{w}_0 + \overline{{}'u_0 \cdot {}'w_0},$$

$$\overline{v_0 \cdot u_0} = \overline{u_0 \cdot v_0} = \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0 + \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0} = \bar{v}_0 \cdot \bar{u}_0 + \overline{{}'v_0 \cdot {}'u_0},$$

$$\overline{v_0 \cdot v_0} = \overline{(\bar{v}_0 + {}^{I}v_0)(\bar{v}_0 + {}^{I}v_0)} = \overline{(\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0 + {}^{I}v_0 \cdot {}^{I}v_0 + 2 \cdot \bar{v}_0 \cdot {}^{I}v_0)}$$
$$= \bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0 + \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}v_0},$$

$$\overline{v_0 \cdot w_0} = \overline{(\bar{v}_0 + {}^{I}v_0)(\bar{w}_0 + {}^{I}w_0)} = \overline{(\bar{v}_0 \cdot \bar{w}_0 + {}^{I}v_0 \cdot {}^{I}w_0 + \bar{v}_0 \cdot {}^{I}w_0 + \bar{w}_0 \cdot {}^{I}v_0)}$$
$$= \bar{v}_0 \cdot \bar{w} + \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}w_0},$$

$$\overline{w_0 \cdot u_0} = \overline{u_0 \cdot w_0} = \bar{u}_0 \cdot \bar{w}_0 + \overline{{}^{I}u_0 \cdot {}^{I}w_0} = \bar{w}_0 \cdot \bar{u}_0 + \overline{{}^{I}w_0 \cdot {}^{I}u_0},$$

$$\overline{w_0 \cdot v_0} = \overline{v_0 \cdot w_0} = \overline{v_0 \cdot w_0} + \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}w_0} = \bar{w}_0 \cdot \bar{v}_0 + \overline{{}^{I}w_0 \cdot {}^{I}v_0},$$

$$\overline{w_0 \cdot w_0} = \overline{(\bar{w}_0 + {}^{I}w_0)(\bar{w}_0 + {}^{I}w_0)} = \overline{(\bar{w}_0 \cdot \bar{w}_0 + {}^{I}w_0 \cdot {}^{I}w_0 + 2 \cdot \bar{w}_0 \cdot {}^{I}w_0)}$$
$$= \bar{w}_0 \cdot \bar{w}_0 + \overline{{}^{I}w_0 \cdot {}^{I}w_0}$$

の関係が求められるので，(49) に (50) を代入して，時間的平均をすると，

(51)
$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\overline{\overline{x_0 \cdot x_0}} - \rho_0 \cdot \bar{u}_0 \cdot \bar{u}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}u_0 \cdot {}^{I}u_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\overline{\overline{y_0 \cdot x_0}} - \rho_0 \cdot \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}u_0 \cdot {}^{I}v_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\overline{\overline{z_0 \cdot x_0}} - \rho_0 \cdot \bar{u}_0 \cdot \bar{w}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}u_0 \cdot {}^{I}w_0}\right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\overline{\overline{x_0 \cdot y_0}} - \rho_0 \cdot \bar{v}_0 \cdot \bar{u}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}u_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\overline{\overline{y_0 \cdot y_0}} - \rho_0 \cdot \bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}v_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\overline{\overline{z_0 \cdot y_0}} - \rho_0 \cdot v_0 \cdot w_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}w_0}\right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\overline{\overline{x_0 \cdot z_0}} - \rho_0 \cdot \bar{w}_0 \cdot \bar{u}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}w_0 \cdot {}^{I}u_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\overline{\overline{y_0 \cdot z_0}} - \rho_0 \cdot \bar{w}_0 \cdot \bar{v}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}v_0 \cdot {}^{I}v_0}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\overline{\overline{z_0 \cdot z_0}} - \rho_0 \cdot \bar{w}_0 \cdot \bar{w}_0 - \rho_0 \cdot \overline{{}^{I}w_0 \cdot {}^{I}w_0}\right)$$

の様に書き換えられる．これを (49) と比較すれば，乱れのある気流においては，乱れのない気流の粘性（分子粘性）による応力の対称 Tensor ($T^{\wedge}_{\mu_0}$) の代りに，乱れのある気流の粘性（乱子粘性）による応力の対称 Tensor ($T^{\wedge}_{\bar{v}_0}$) の時間的平均，

(52)
$$(\overline{T}^{\wedge}_{\bar{v}_0}) \equiv \begin{pmatrix} \overline{\overline{x_0 \cdot x_0}} & \overline{\overline{y_0 \cdot x_0}} & \overline{\overline{z_0 \cdot x_0}} \\ \overline{\overline{x_0 \cdot y_0}} & \overline{\overline{y_0 \cdot y_0}} & \overline{\overline{z_0 \cdot y_0}} \\ \overline{\overline{x_0 \cdot z_0}} & \overline{\overline{y_0 \cdot z_0}} & \overline{\overline{z_0 \cdot z_0}} \end{pmatrix}$$

を考え，更にその上に地表風の各速度および圧力の変動即ち乱れによる応力の対称 Tensor ($'T_0$) の時間的平均，

(53)
$$(\overline{'T_0}) \equiv \begin{pmatrix} -\rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'u_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'v_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'w_0} \\ -\rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'u_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'v_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'w_0} \\ -\rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'u_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'v_0} & -\rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'w_0} \end{pmatrix}$$

を重ね合せた構造を推定することが出来る．このことは，層流現象の運動量保存の微分方程式 (49) の粘性 (分子粘性) による応力の対称 Tensor (T_{μ_0}) の代りに，乱流現象の粘性 (乱子粘性) と各速度および圧力変動による応力の対称 Tensor の重合せ，

(54)
$$('T_{\eta_0}) \equiv (T_{\eta_0}) + ('T_0)$$

の時間的平均，

(55)
$$(\overline{'T_{\eta_0}}) \equiv \begin{pmatrix} \overline{x_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'u} & \overline{y_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'v_0} & \overline{z_0 \cdot x_0} - \rho_0 \cdot \overline{'u_0 \cdot 'w_0} \\ \overline{x_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'u_0} & \overline{y_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'v_0} & \overline{z_0 \cdot y_0} - \rho_0 \cdot \overline{'v_0 \cdot 'w_0} \\ \overline{x_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'u_0} & \overline{y_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'v_0} & \overline{z_0 \cdot z_0} - \rho_0 \cdot \overline{'w_0 \cdot 'w_0} \end{pmatrix}$$

を置き換えればよく，その結果から乱流現象において時間的平均を考えれば，その微分方程式は，層流現象の場合と同型にして考察出来ることが判る．この中で，($\overline{'T_0}$) は Reynolds' stresses (乱流の見掛けの応力) である．

なお，上述の結論は運動量の定理からも誘導することが出来る．

(註 (56) ある微小時間 dt_0 に面積 dA_0 を通過する流量は $dA_0 \cdot \rho_0 \cdot v_0 \cdot dt_0$ であり，運動量の x_0, y_0, z_0—各軸方向成分は $dA_0 \cdot \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0 \cdot dt_0, dA_0 \cdot \rho_0 \cdot v_0 \cdot v_0 \cdot dt_0, dA_0 \cdot \rho_0 \cdot w_0 \cdot v_0 \cdot dt_0$ である．これらの時間的平均は，

(57)
$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0 \cdot dt_0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0 \cdot dt_0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot w_0 \cdot dt_0$$

簡単の為に，$t_0=0$ として，

(58)
$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0 \cdot dt_0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot v_0 \cdot dt_0,$$

$$\frac{1}{\Delta T_0} dA_0 \int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot w_0 \cdot dt_0.$$

更に，(46) の関係を考慮する．

ここで，$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$=Const であり，$\lim_{t_0 \to +\infty} t_0 = \Delta T_0$ において，$\frac{1}{\Delta T_0}\int_0^{\Delta T} u'_0 \cdot dt_0 = 0$ とする．

そして，(50) の関係がある故，運動量の x_0-軸方向成分は，

(59)
$$\frac{1}{\Delta T_0} \cdot dA_0 \int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot u_0 \cdot u_0 \cdot dt_0$$

$$= dA_0\left(\frac{1}{\Delta T_0}\int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot dt_0 + \frac{1}{\Delta T_0}\int_0^{\Delta T_0} \rho_0 \cdot {}'u_0 \cdot {}'u_0 \cdot dt_0\right)$$

$$= dA_0(\rho_0 \cdot \overline{u}_0\overline{u}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'u_0})$$

となり，同様にして運動量の y_0, z_0-軸方向成分は，

$$dA_0(\rho_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \overline{v}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0}),$$

$$dA_0(\rho_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \overline{w}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'w_0})$$

である．

単位面積については，

(60)
$$\rho_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \overline{u}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'u_0},$$

$$\rho_0 \cdot \overline{u}_0\overline{v}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0},$$

$$\rho_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \overline{v}_0 + \rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'w_0}'$$

となる．この運動量の x_0, y_0, z_0 一軸方向成分の平均の符号を逆にしたものが，この平面に働く x_0 一軸方向の垂直応力 y_0, z_0 一軸方向の剪断応力である．しかも，乱流の乱れによつて生ずる項は $-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'u_0}$, $-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0}$, $-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0}$ であるから，(33) の Reynolds' stresses ($\overline{{}'T_0}$) が誘導されたわけである．)

更に，Reynolds' stresses ($\overline{{}'T_0}$) は (41) を考慮して，次の様に変形することが出来る．

(62)
$$-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'u_0} = -\rho_0\overline{(u_0-\overline{u}_0)(u_0-\overline{u}_0)} = -\rho_0\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)^2$$

$$\equiv -\rho_0 \cdot \sigma_{u_0}^2,$$

$$-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'v_0} = -\rho_0\overline{(u_0-\overline{u}_0)(v_0-\overline{v}_0)} = -\rho_0\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)(v_{0i}-\overline{v}_0)$$

$$= -\rho_0\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)^2}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(v_{0i}-\overline{v}_0)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)(v_{0i}-\overline{v}_0)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)^2}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(v_{0i}-\overline{v}_0)^2}}$$

$$\equiv -\rho_0 \cdot \sigma_{u_0} \cdot \sigma_{v_0} \cdot \gamma_{u_0 \cdot v_0},$$

$$-\rho_0 \cdot \overline{{}'u_0 \cdot {}'w_0} = -\rho_0\overline{(u_0-\overline{u}_0)(w_0-\overline{w}_0)} = -\rho_0 \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)(w_{0i}-\overline{w}_0)$$

$$= -\rho_0\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)^2}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(w_{0i}-\overline{w}_0)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)(w_{0i}-\overline{w}_0)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(u_{0i}-\overline{u}_0)^2}\quad\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(w_{0i}-\overline{w}_0)^2}}$$

$$\equiv -\rho\cdot\sigma_{u_0}\cdot\sigma_{w_0}\cdot\gamma_{u_0\cdot w_0},$$

以下全く同様にして，

$$-\rho_0\overline{{}^{I}v_0\cdot{}^{I}u_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{v_0}\cdot\sigma_{u_0}\cdot\gamma_{v_0\cdot u_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}^{I}u_0\cdot{}^{I}v_0},$$

$$-\rho_0\overline{{}^{I}v_0\cdot{}^{I}v_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{v0}^2,$$

$$-\rho_0\overline{{}^{I}v_0\cdot{}^{I}w_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{v_0}\cdot\sigma_{w_0}\cdot\gamma_{v_0\cdot w_0},$$

$$-\rho_0\overline{{}^{I}w_0\cdot{}^{I}u_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{w_0}\cdot\sigma_{u_0}\cdot\gamma_{w_0\cdot u_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}^{I}u_0\cdot{}^{I}w_0},$$

$$-\rho_0\overline{{}^{I}w_0\cdot{}^{I}v_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{w_0}\cdot\sigma_{v_0}\cdot\gamma_{w_0\cdot v_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}^{I}v_0\cdot{}^{I}w_0},$$

$$-\rho_0\overline{{}^{I}w_0\cdot{}^{I}w_0}=-\rho_0\cdot\sigma_{w0}^2$$

こゝで，

σ_{u0}^2, σ_{v0}^2, σ_{w0}^2：地表風の各一軸方向の分速度の母分散，

σ_u, σ_v, σ_w：地表風の各一軸方向の分速度の母標準偏差，

$\gamma_{u_0\cdot v_0}$, $\gamma_{u_0\cdot w_0}$, $\gamma_{v_0\cdot u_0}$, $\gamma_{v_0\cdot w_0}$, $\gamma_{w_0\cdot u_0}$, $\gamma_{w_0\cdot v_0}$：地表風の各一軸方向の分速度の母相関係数

こゝでは，母集団のみについて考えればよいが，無作為標本によつて母数を推定する場合には，(62) は更に変形しておくと計算に誤りが少い．それらの計算には総て簡便法を用いる（誤差法則を適当に組み合せる）．なおこの場合に，変動の代りに範囲；レインジを用い，係数によつて補正する方法は，その標本の大きさゝえ適当にとれば十分に実用になるものを迅速簡便に求められる利点がある．

例えば標本の大きさ $N=10$ ずつに限定すれば，それによつて母分散を推定する場合の効率は 0.8519 である．

（このレインジを用いる方法は，標本の大きさ N を出来るだけ小さくした方が効率がよい．同じ母数を二つの方法（例えば，母標準偏差をレインジから推定する方法と不偏分散（分散不偏推定値）の平方根 u を用いた場合）で推定した時，推定した値の母分散の小さい方を大きい方で除したものを，後者の前者に対する効率という）

即ち，レインジ；range によつて推定した母分散は変動によつて推定した母分散より 15 % だけ大きな値を推定しているに過ぎないことが判る．また，各分速度の頻度（または相対頻度）がいくつかの階級に分類されている場合には，上述の母分散の諸計算は簡約される．

以上の様にして，地表風の運動を表わす乱流の混合現象には Reynolds' stresses ($\overline{\rho T_0}$) が生ずることを推定することが出来るが，実際にその値を求めるには，地表風の各一軸方向の分速度の時間的平均を考え，その母平均と母分散とを推定しなければならないのである．その為に，混合輸送量は粘性の影響に一次的に比例するという T. V. Boussinesq の仮定をとり入れて，

$$(63),\quad \widehat{x_0\cdot x_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'u_0\cdot{}'u_0}=2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x_0},$$

$$\widehat{y_0\cdot x_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'u_0\cdot{}'v_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial y_0}+\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial x_0}\right),$$

$$\widehat{z_0\cdot x_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'u_0\cdot{}'w_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial z_0}+\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial x_0}\right),$$

$$\widehat{x_0\cdot y_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'v_0\cdot{}'u_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial x_0}+\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial y_0}\right),$$

$$\widehat{y_0\cdot y_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'v_0\cdot{}'v_0}=2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial y_0},$$

$$\widehat{z_0\cdot y_0}=-\rho\cdot\overline{{}'v_0\cdot{}'w_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial z_0}+\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial y_0}\right),$$

$$\widehat{x_0\cdot z_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'w_0\cdot{}'u_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial x_0}+\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial z_0}\right),$$

$$\widehat{y_0\cdot z_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'w_0\cdot{}'v_0}=\rho_0\cdot\kappa_0\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial y_0}+\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial z_0}\right),$$

$$\widehat{z_0\cdot z_0}=-\rho_0\cdot\overline{{}'w_0\cdot{}'w_0}=2\cdot\rho_0\cdot\kappa_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0}$$

とおくと，乱れのない気流の粘性による分子粘性抵抗を表わす微分方程式と同型にすることが出来る．

§5. 地表風の質量保存（連續）の微分方程式並びにその外の微分方程式の乱流化

次に（29）に（41）の関係を代入すれば，

$$(64)\quad \frac{\partial(\bar{u}_0+{}'u_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial(\bar{v}_0+{}'v_0)}{\partial y_0}+\frac{\partial(\bar{w}_0+{}'w_0)}{\partial z_0}=0$$

となり，時間的平均を考えてこれを時間 ΔT について平均すれば，

$$(65)\quad \frac{\partial\bar{u}_0}{\partial x_0}+\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial y_0}+\frac{\partial w_0}{\partial z_0}=0$$

である．結局，地表風の連続の微分方程式は乱流化してもその型は変らないのである．即ち，乱流現象において時間的平均を考えれば，その質量保存の微分方程式は，変動のない即ち層流の場合と全く同型であることが判る．

更に，地表風の場における状態方程式並びにその示性式（30）（31）に（41）の関係を代入すれば，

$$(66)\quad (\bar{p}_0+{}'p_0)=R_0(\bar{\rho}_0+{}'\rho_0)(\bar{T}_0+{}'T_0),$$

$$(67)\quad (\bar{p}_0+{}'p_0)=p_0(\bar{\rho}_0+{}'\rho_0)$$

となる．そこで時間的平均を考えて，これを時間 ΔT について平均すれば，

$$(68)\quad \bar{p}_0=R_0\cdot\bar{\rho}_0\cdot\bar{T}_0,$$

$$(69)\quad \bar{p}_0=p_0(\bar{\rho}_0)$$

である．そして，速度または加速度についての境界条件 (34) に (41) の関係を代入すれば，

$$(\overline{u}_0+{}'u_0)\frac{\partial f_0}{\partial x_0}+(\overline{v}_0+{}'v_0)\frac{\partial f_0}{\partial y_0}+(\overline{w}_0+{}'w_0)\frac{\partial f_0}{\partial z_0}=0 \tag{70}$$

となる．そこで時間的平均を考えてこれを時間 ΔT_0 について平均すれば，

$$\overline{u}_0\frac{\partial f_0}{\partial x_0}+\overline{v}_0\frac{\partial f_0}{\partial y_0}+\overline{w}_0\frac{\partial f_0}{\partial z_0}=0 \tag{71}$$

である．更に圧力 p_0 についての境界条件並びに時間 t_0 についての初期条件も，乱流化をして時間的平均を考えれば，それらの条件の型は変らない．それで以上の結果から，地表風の場における各微分方程式および諸境界条件並びに初期条件は乱流化しても時間的平均を考えれば，その型は変らないのである．それは時間的平均を考えれば，それらの微分方程式は，変動のない即ち層流の場合と全く同型であるということに外ならない．

§6. 風洞気流の運動を表わす（運動量保存の）微分方程式および風洞気流の質量保存（連續）の微分方程式並びにその外の微分方程式の乱流化

それらの各微分方程式の乱流化は，地表風の場と全く同様にして時間的平均を考えれば次の様に変形することが出来る．

風洞気流の運動量保存の微分方程式は，

$$\begin{aligned}
\rho_1\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial t_1}=&\frac{\partial}{\partial x_1}(\widehat{x_1\cdot x_1}-\rho_1\cdot\overline{u}_1\cdot\overline{u}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'u_1\cdot{}'u_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial y_1}(\widehat{y_1\cdot x_1}-\rho\cdot\overline{u}_1\cdot\overline{v}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'u_1\cdot{}'v_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial z_1}(\widehat{z_1\cdot x_1}-\rho_1\cdot\overline{u}_1\cdot\overline{w}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'u_1\cdot{}'w_1}),\\
\rho_1\frac{\partial\overline{v}_1}{\partial t_1}=&\frac{\partial}{\partial x_1}(\widehat{x_1\cdot y_1}-\rho_1\cdot\overline{v}_1\cdot\overline{u}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'v_1\cdot{}'u_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial y_1}(\widehat{y_1\cdot y_1}-\rho_1\cdot\overline{v}_1\cdot\overline{v}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'v_1\cdot{}'v_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial z_1}(\widehat{z_1\cdot y_1}-\rho_1\cdot\overline{v}_1\cdot\overline{w}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'v_1\cdot{}'w_1}),\\
\rho_1\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial t_1}=&\frac{\partial}{\partial x_1}(\widehat{x_1\cdot z_1}-\rho_1\cdot\overline{w}_1\cdot\overline{u}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'w_1\cdot{}'u_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial y_1}(\widehat{y_1\cdot z_1}-\rho_1\cdot\overline{w}_1\cdot\overline{v}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'w_1\cdot{}'v_1})\\
&+\frac{\partial}{\partial z_1}(\widehat{z_1\cdot z_1}-\rho_1\cdot\overline{w}_1\cdot\overline{w}_1-\rho_1\cdot\overline{{}'w_1\cdot{}'w_1})
\end{aligned} \tag{72}$$

となる．

こゝで，風洞気流の場における Reynolds' stresses（乱流の見掛けの応力）$\overline{{}'T_1}$ は，

$$(73)\quad ({}'\overline{T}_1)\equiv\begin{pmatrix} -\rho_1\cdot{}'u_1\cdot{}'u_1 & -\rho_1\cdot{}'u_1\cdot{}'v_1 & -\rho_1\cdot{}'u_1\cdot{}'w_1 \\ -\rho_1\cdot{}'v_1\cdot{}'u_1 & -\rho_1\cdot{}'v_1\cdot{}'v_1 & -\rho_1\cdot{}'v_1\cdot{}'w_1 \\ -\rho_1\cdot{}'w_1\cdot{}'u_1 & -\rho_1\cdot{}'w_1\cdot{}'v_1 & -\rho_1\cdot{}'w_1\cdot{}'w_1 \end{pmatrix}$$

であり，これは地表風の場と全く同様にして，

$$(74)\quad ({}'\overline{T}_1)\equiv\begin{pmatrix} -\rho_1\cdot\sigma_{u_1}^2 & -\rho_1\cdot\sigma_{u_1}\cdot\sigma_{v_1}\cdot\gamma_{u_1\cdot v_1} & -\rho_1\cdot\sigma_{w_1}\cdot\sigma_{w_1}\cdot\gamma_{u_1\cdot w_1} \\ -\rho_1\cdot\sigma_{v_1}\cdot\sigma_{u_1}\cdot\gamma_{v_1\cdot u_1} & -\rho_1\cdot\sigma_{v_1}^2 & -\rho_1\cdot\sigma_{v_1}\cdot\sigma_{w_1}\cdot\gamma_{v_1\cdot w_1} \\ -\rho_1\cdot\sigma_{w_1}\cdot\sigma_{u_1}\cdot\gamma_{w_1\cdot u_1} & -\rho_{w_1}\sigma_1\cdot\sigma_{v_1}\cdot\gamma_{w_1\cdot v_1} & -\rho_1\cdot\sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

と変形することが出来る．風洞気流の質量保存の微分方程式は，

$$(75)\quad \frac{\partial\overline{u}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\overline{v}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial z_1}=0$$

である．

更に，風洞気流の場における状態方程式並びにその示性式は，

$$(76)\quad \bar{p}_1=R_1\cdot\bar{\rho}_1\cdot\overline{T}_1,$$

$$(77)\quad \bar{p}_1=p_1(\bar{\rho}_1)$$

となり，速度または加速度についての境界条件は，

$$(78)\quad \overline{u}_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\overline{v}_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\overline{w}_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=0$$

である．そしてその圧力 p_1 についての境界条件並びに時間 t_1 についての初期条件も，乱流化をして時間的平均を考えれば，それらの条件の型は変らないのである．

§7. 乱流相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）の誘導

乱流相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）を誘導するに当り，前述の仮定条件 1° に関する乱れの強さの等方性と定常性の仮定を導入する．現象としては，乱れの強さの等方性と定常性の仮定条件が存在しているから，乱れのある（乱子）動粘性係数の等方性と定常性の仮定が誘導されるのである．その結果，地表風の場における Reynolds' stresses $({}'\overline{T}_0)$ は，

$$(79)\quad ({}'\overline{T}_1)\equiv\begin{pmatrix} -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 \\ -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 \\ -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 & -\rho_0\cdot\sigma_0^2 \end{pmatrix}$$

となり，風洞気流の場における Reynolds' stresses $({}'\overline{T}_1)$ は，

$$(80)\quad ({}'\overline{T}_1)\equiv\begin{pmatrix} -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 \\ -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 \\ -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 & -\rho_1\cdot\sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

である．こゝでこれらの各微分方程式はその中に表わされている速度，時刻，距離，重力の加速度，圧力，密度，乱れのある（乱子）動粘性係数，乱れの強さ等の物理量に対する単位の選定には全く無関係でなければな

らないから，それらの各微分方程式の諸変数に dimensionless の変数を導入する場合に，その単位の選定は全く自由である．それ故に，地表風の運動を表わす微分方程式 (51) の中の各物理量 $u_0, v_0, w_0, t_0, x_0, y_0, z_0, g_0, p_0, \rho_0, \kappa_0, \sigma_0$ を測定した場合に，それらの測定値がそれぞれ dimensionless になる様にその測定単位を選ぶことが出来る．それらの測定単位を，

$$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \qquad \bar{g}_0, \bar{p}_0, \qquad \bar{t}_0, \qquad \bar{\rho}_0, \bar{\kappa}_0, \bar{\sigma}_0, \qquad \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \tag{81}$$

とする．そして風洞気流の運動を表わす微分方程式 (72) の中の各物理量 $u_1, v_1, w_1, t_1, x_1, y_1, z_1, g_1, p_1, \rho_1, \kappa_1, \sigma_1$ をこの測定単位 (81) によつて測定した dimensionless の数値を，

$$\bar{V}, \ \bar{T}, \ \bar{L}, \qquad \bar{G}, \ \bar{P}, \qquad \bar{\rho}, \ \bar{\kappa}, \ \bar{\sigma} \tag{82}$$

とすれば，それらの物理量は，

$$\begin{aligned} &\bar{u}_1 = \bar{V} \cdot \bar{u}_0, \quad \bar{t}_1 = \bar{T} \cdot \bar{t}_0, \quad \bar{x}_1 = \bar{L} \cdot \bar{x}_0, \\ &\bar{v}_1 = \bar{V} \cdot \bar{v}_0 \qquad\qquad \bar{y}_1 = \bar{L} \cdot \bar{y}_0, \\ &\bar{w}_1 = \bar{V} \cdot \bar{w}_0, \qquad\qquad \bar{z}_1 = \bar{L} \cdot \bar{z}_0, \\ &\bar{g}_1 = \bar{G} \cdot \bar{g}_0, \quad \bar{\rho}_1 = \bar{\rho} \cdot \bar{\rho}_0, \\ &\bar{p}_1 = \bar{P} \cdot \bar{p}_0, \quad \bar{\kappa}_1 = \bar{\kappa} \cdot \bar{\kappa}_0, \\ &\qquad\qquad \sigma_1 = \bar{\sigma} \cdot \sigma_0 \end{aligned} \tag{83}$$

と書き表わすことが出来る．その結果，風洞気流の場において乱流相似性が成立する条件を求める為に (83) の関係をその微分方程式 (72) に代入する．その場合には，(72) は微分演算を行つた型が取扱い易いので，その結果次の様に書き換えておく．

$$\frac{D\bar{u}_1}{D\bar{t}_1} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}_1}$$

$$= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{\kappa}_1 \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{u}_1 - \bar{V}_1 \cdot \sigma_1^2,$$

$$\frac{D\bar{v}_1}{D\bar{t}_1} = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{t}_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}_1} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{z}_1}$$

$$= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{y}_1} + \bar{\kappa}_1 \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{v}_1 - \bar{V}_1 \cdot \sigma_1^2,$$

$$\frac{D\bar{w}_1}{D\bar{t}_1} = \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{t}_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{y}_1} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_1}$$

$$= -\bar{g}_1 - \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{y}_1} + \bar{\kappa}_1 \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{w}_1 - \bar{V}_1 \cdot \sigma_1^2$$

こゝで，

$$\overline{\nabla}_1^2 := \overline{\nabla}_1^2 := \frac{\partial^2}{\partial \overline{x}_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \overline{y}_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_1^2},$$

$$\overline{\nabla}_1 := \frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}+\frac{\partial}{\partial \overline{y}_1}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}$$

そこで (83) の関係を (84) の各項に代入すると，

$$(85)\quad \frac{D\overline{u}_1}{D\overline{t}_1}=\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\frac{D\overline{u}_0}{D\overline{t}_0};\qquad \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{t}_1}=\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{t}_0};$$

$$\overline{u}_1\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{x}_1}=\overline{V}\cdot\overline{u}_0\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{x}_0}=\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\overline{u}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{x}_0},$$

$$\overline{v}_1\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{y}_1}=\overline{V}\cdot\overline{v}_0\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{y}_0}=\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\overline{v}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{y}_0},$$

$$\overline{w}_1\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{z}_1}=\overline{V}\cdot\overline{w}_0\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{z}_0}=\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\overline{w}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{z}_0};$$

$$-\frac{1}{\overline{\rho}_1}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \overline{x}_1}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{1}{\overline{\rho}_0}\frac{\overline{p}}{\overline{L}}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{x}_0}=-\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}\frac{1}{\overline{\rho}_0}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{x}_0};$$

$$\overline{\kappa}_1\cdot\overline{Z}_1\cdot\overline{u}_1=\overline{\kappa}\cdot\overline{\kappa}_0\frac{\overline{V}}{\overline{L}^2}\overline{Z}_0\cdot\overline{u}_0=\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}\overline{\kappa}_0\cdot\overline{Z}_0\cdot\overline{u}_0;$$

$$\overline{\nabla}_1\cdot\sigma_1^2=\frac{\delta^2}{\overline{L}}\overline{\nabla}_0\cdot\sigma_0^2;$$

$$\overline{g}_1=\overline{G}\cdot\overline{g}_0\qquad \text{etc.}$$

となる．その結果，風洞気流の運動を表わす微分方程式 (84) は，

$$(86)\quad \frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{D\overline{u}_0}{D\overline{t}_0}\right)=\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{t}_0}\right)+\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\left(\overline{u}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{x}_0}+\overline{v}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{y}_0}+\overline{w}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{z}_0}\right)$$

$$=-\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}\left(\frac{1}{\overline{\rho}_0}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{x}_0}\right)+\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}(\overline{\kappa}_0\cdot\overline{Z}_0\cdot\overline{u}_0)-\frac{\delta^2}{\overline{L}}(\overline{\nabla}_0\cdot\sigma_0^2),$$

$$\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{D\overline{v}_0}{D\overline{t}_0}\right)=\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{\partial \overline{v}_0}{\partial \overline{t}_0}\right)+\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\left(\overline{u}_0\frac{\partial \overline{v}_0}{\partial \overline{x}_0}+\overline{v}_0\frac{\partial \overline{v}_0}{\partial \overline{y}_0}+\overline{w}_0\frac{\partial \overline{v}_0}{\partial \overline{z}_0}\right)$$

$$=-\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}\left(\frac{1}{\overline{\rho}_0}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{y}_0}\right)+\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}(\overline{\kappa}_0\cdot\overline{Z}_0\cdot\overline{v}_0)-\frac{\delta^2}{\overline{L}}(\overline{\nabla}_0\cdot\sigma_0^2),$$

$$\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{D\overline{w}_0}{D\overline{t}_0}\right)=\frac{\overline{V}}{\overline{T}}\left(\frac{\partial \overline{w}_0}{\partial \overline{t}_0}\right)+\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}\left(\overline{u}_0\frac{\partial \overline{w}_0}{\partial \overline{x}_0}+\overline{v}_0\frac{\partial \overline{w}_0}{\partial \overline{y}_0}+\overline{w}_0\frac{\partial \overline{w}_0}{\partial \overline{z}_0}\right)$$

$$=-\overline{G}(\overline{g}_0)-\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}\left(\frac{1}{\overline{\rho}_0}\frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{z}_0}\right)+\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}(\overline{\kappa}_0\cdot\overline{Z}_0\cdot\overline{w}_0)-\frac{\delta^2}{\overline{L}}(\overline{Z}_0\cdot\sigma_0^2)$$

と書き換えられる．一方地表風の運動を表わす微分方程式 (51) も微分演算を行つた型に書き換えると，

$$(87)\quad \frac{D\overline{u}_0}{D\overline{t}_0}=\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{t}_0}+\overline{u}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{x}_0}+\overline{v}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{y}_0}+\overline{w}_0\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial \overline{z}_0}$$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{x}_0}+\bar{\kappa}_0\cdot\bar{Z}_0\cdot\bar{u}_0-\bar{\nu}_0\cdot\sigma_0^2,$$

$$\frac{D\bar{v}_0}{D\bar{t}_0}=\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{t}_0}+\bar{u}_0\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{x}_0}+\bar{v}_0\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}_0}+\bar{w}_0\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{z}_0}$$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{x}_0}+\bar{\kappa}_0\cdot\bar{Z}_0\cdot\bar{v}_0-\bar{\nu}_0\cdot\sigma_0^2,$$

$$\frac{D\bar{w}_0}{D\bar{t}_0}=\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{t}_0}+\bar{u}_0\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}_0}+\bar{v}_0\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{y}_0}+\bar{w}_0\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}_0}$$

$$=-\bar{g}_0-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{w}_0}+\bar{\kappa}_0\cdot\bar{Z}_0\cdot\bar{w}_0-\bar{\nu}_0\cdot\sigma_0^2$$

である．いまこれらの異つた二つの場における現象が同一の推計的法則性即ち相似性を有する為には，二つの微分方程式（86）と（87）とが同一の解を有するものでなければならない．この場合においては，その型は同一であるから，相対応する各項の係数が相等しくなければならない．（相対応する各項の係数がことごとく ζ_0 倍（$\zeta_0:0$ でない実数）されている場合を考えても結果は同一である）それ故，相対応する各項の係数は，

$$(88)\quad \frac{\overline{V}}{\overline{T}}=\zeta_0 C,\qquad \frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}=\zeta_0 C,\qquad \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}=\zeta_0 C,$$

$$\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}=\zeta_0 C,\qquad \frac{\overline{\delta}^2}{\overline{L}}=\zeta_0 C,\qquad \overline{G}=\zeta_0 C,$$

である．

次に，風洞気流の場における質量保存の微分方程式（75）に前述の様な相似化を行う．

$$(89)\quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1}=\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}_0},\qquad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}_1}=\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}_0},\qquad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_1}=\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}_0}$$

であるから，その質量保存の微分方程式（75）は次の様になる．

$$(90)\quad \frac{\overline{V}}{\overline{L}}\left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}_0}\right)+\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}_0}\right)+\frac{\overline{V}}{\overline{L}}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}_0}\right)=0$$

一方地表風の場における質量保存の微分方程式は（前出 65）であり，それを前述と同様な相似化を行うと，

$$(91)\quad \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}_0}+\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}_0}+\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}_0}=0$$

である．それらについて前述の様に相対応する各項の係数の比較を行うと，

$$(92)\quad \frac{\overline{V}}{\overline{L}}=\zeta_0 C$$

である．更に，それら二つの場における状態方程式並びにそれ示性式は，前述の3項の仮定条件を許容する道路の防除雪工法の立場からして考慮する必要はないものである．また，それらの境界条件並びに初期条件はこの場合には影響はないものである．(93) それで結局，これらの異つた二つの場における現象が同一の推計的法則性即ち流体力学的相似性を有する時には，条件（88）並びに（92）が成立することが必要であり，また逆に条件

(88) 並びに (92) が成立するならば，これらの各微分方程式間には同一の推計的法則性が存在し，それらの各微分方程式は異つた二つの場に対応してそれを表現しているのである．それ故，以上を満足する条件(88)並びに (92) は，いま考えている現象の流体力学的相似性の完全条件（必要にして且つ十分な条件）に外ならない．その結果，条件 (88) から，

$$(94)\quad \frac{\overline{V}}{\overline{T}}=\frac{\overline{V}^2}{\overline{L}}=\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}\cdot\overline{L}}=\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}^2}=\frac{\overline{\delta}^2}{\overline{L}}=\overline{G}=\text{const.}$$

であるから，これらの各辺を dimensionless にする為に，その一つ $\frac{\overline{\delta}^2}{\overline{L}}$ （これはいずれの辺でも差支えないが，いま乱流現象を考えているのでその変動の測度としての母分散 $\overline{\delta}^2$ のある辺をとつた．しかもこれは同時に型が単簡である為である．）に注意して，次の様に無次元化を行う．(94) の各辺に $\overline{L}(\overline{L}\neq 0)$ を乗ずると，

$$(95)\quad \frac{\overline{V}\cdot\overline{L}}{\overline{T}}=\overline{V}^2=\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}}=\frac{\overline{\kappa}\cdot\overline{V}}{\overline{L}}=\overline{\delta}^2=\overline{G}\cdot\overline{L}=\text{const.}$$

となり，更に (95) の各辺に $\frac{1}{\overline{V}^2}\left(\frac{1}{\overline{V}^2}\neq 0\right)$ を乗ずると (95) は，

$$(96)\quad \frac{\overline{L}}{\overline{V}\cdot\overline{T}}=1=\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}\cdot\overline{V}^2}=\frac{\overline{\kappa}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}=\frac{\overline{\delta}^2}{\overline{V}^2}=\frac{\overline{G}\cdot\overline{L}}{\overline{V}^2}=\text{const.}$$

となる．又同様にして (92) の左辺に $\overline{T}(\overline{T}\neq 0)$ を乗ずると (92) は，

$$(97)\quad \frac{\overline{V}\cdot\overline{T}}{\overline{L}}=1=\text{const.}$$

となる．それで条件 (97) は (96) に包含せられることが判る．(98) ここで，$\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}\cdot\overline{V}^2}$ は考えている現象に特定な圧力 $\overline{P}$ とその動圧 $\left(\frac{\overline{\rho}\cdot\overline{V}^2}{2}\right)$ の 2 倍との比であり，いま問題としている流体力学的相似性には考慮する必要がない係数である．$\left(\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}\cdot\overline{V}^2}\right)$ は Newton's number $\overline{N}$ である．）更に $\frac{\overline{G}\cdot\overline{L}}{\overline{V}^2}$ はいわゆる Froude's number $\overline{F}$ の逆数であるが，これらの二つの気流の場における流体力学的相似性には質量力の影響を無視することが出来るから，この場合には考慮する必要がないものである．それ故に (96) は，

$$(99)\quad \frac{\overline{L}}{\overline{V}\cdot\overline{T}}=\frac{\overline{\kappa}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}=\frac{\overline{\delta}^2}{\overline{V}^2}=\text{const.}$$

と単純化される．これらの

$$\frac{\overline{L}}{\overline{V}\cdot\overline{T}}=\text{const.},\qquad \frac{\overline{\kappa}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}=\text{const.},\qquad \frac{\overline{\delta}^2}{\overline{V}}=\text{const.}$$

の関係は前述の相似化の条件を考慮すれば，相互に独立に満足されるべきものである．ここで，

$$\frac{\overline{L}}{\overline{V}\cdot\overline{T}}=\text{const.}$$

はこれらの異つた二つの場における現象が時間 $\overline{T}$ に対応していることを示すものである．そして，

$$\frac{\overline{\kappa}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}=\text{const.}$$

はいわゆる Reynolds' number の逆数であり，

$$\frac{\hat{\delta}^2}{\overline{V}^2}={}^0_2\text{const.}$$

は速度変動即ち乱れの強さの二乗を表わすものである．それ故に，

$$\overset{(100)}{}\frac{\overline{\hat{k}}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}={}^0_2\text{const.}$$

の条件は乱流相似性（厳密に云えば，乱流現象における流体力学的相似性即ち推計的法則性であり，それには幾何量的相似性を前提としている．）の必要条件であつて，

$$\overset{(101)}{}\frac{\hat{\delta}^2}{\overline{V}^2}={}^0_2\text{const.}$$

の条件はその十分条件となるものである．そして更にこれらの必要にして且つ十分な条件（即ち完全条件）の下において，その異つた二つの場における現象が時間 $\overline{T}$ に対応しているのである．こゝで，乱れの強さ，

$$\overset{(102)}{}{}_1T\equiv\frac{\hat{\delta}}{\overline{V}}={}^0_3\text{const.}$$

の条件は，層流現象（整流現象，分子混合）の場合について考察すれば，その Mach's number,

$$\overset{(103)}{}M\equiv\frac{\overline{V}}{a}={}^2_0\text{const.}$$

の条件に対応するものである．こゝで，a：局所音速である．

次に，上述の推計的乱流相似性の物理量的完全条件（必要にして且つ十分な条件）を適用する場合の方法とその自由度について考察する．いま，前述の幾何量的相似性の諸条件を前提として仮定しておく．前述の様に推計的乱流相似性の必要条件は，乱流 Reynold's number（または乱子 Reynolds' number）

$$\overset{(\text{前出 }100)}{}{}^{\overline{\hat{k}}}R^{-1}\equiv\frac{\overline{\hat{k}}}{\overline{V}\cdot\overline{L}}={}^0_2\text{const.}$$

である．これを地表風の場と風洞気流の場とにおいて再現させる為には，地表風の場における乱流 Reynolds' number ${}^{\overline{\hat{k}}}R_0$ と風洞気流の場における乱流 Reynolds' number ${}^{\overline{\hat{k}}}R_1$ とが相等しく，即ち，

$$\overset{(104)}{}{}^{\overline{\hat{k}}}R_0^{-1}\equiv\frac{\overline{\hat{k}}_0}{\overline{V}_0\cdot\overline{L}_0}\equiv\frac{\overline{\hat{k}}_1}{\overline{V}_1\cdot\overline{L}_1}\equiv\overline{V}R_1^{-1}$$

であることが必要である．それ故，その自由度 ${}^{R}_{\hat{k}}n$ は，

$$\overset{(105)}{}{}^{R}_{\overline{\hat{k}}}n\equiv{}^{R}_{\hat{k}}N-1=6-1=5$$

である．更にこれらの現象におけるその十分条件は，速度変動即ち乱れの強さ，

$$\overset{(\text{前出 }101)}{}\overline{I}^2\equiv\frac{a^2}{V^2}={}^0_2\text{const.}$$

である．いま地表風の場と風洞気流の場とにおいて乱流相似性を推計的に再現させる為には，地表風の場における乱れの強さ $\overline{I}_0^2$ と風洞気流の場における乱れの強さ $\overline{I}_1^2$ とが相等しく，即ち，

$$\overset{(106)}{}\overline{I}_0^2\equiv\frac{\hat{\delta}_0{}^2}{\overline{V}_0^2}\equiv\frac{\hat{\delta}_1{}^2}{\overline{V}_1^2}\equiv\overline{I}_1^2$$

であれば十分である．それ故，その自由度 $\overline{f}^2_n$ は，

$$^{(107)}\quad \overline{f}^2_n \equiv \overline{f}^2_N - 1 = 4 - 1 = 3$$

である．更に，これらの異つた二つの場における現象について時間 T の対応を考えると，(前出 99) から，前述と同様にして，

$$^{(108)}\quad \overline{Z}_0 \equiv \frac{\overline{L}_0}{\overline{\nu}_0 \cdot \overline{T}_0} \equiv \frac{\overline{L}_1}{\overline{\nu}_1 \cdot \overline{T}_1} \equiv \overline{Z}_1$$

である．それ故，その自由度 $\overline{z}_n$ は，

$$^{(109)}\quad \overline{z}_n \equiv \overline{z}_N - 1 = 6 - 1 = 5$$

である．そして，これらの各条件は前述の様に相互に独立に満足されなければならないのである．なお，

こゝで $\overline{L}_0$ 並びに $\overline{L}_1$ は，

$\overline{L}_0$：地表風の場における代表的長さをとり，

$\overline{L}_1$：$\overline{L}_0$ に対応した風洞気流の場における代表的長さをとればよいのである．

補遺　大気の異方性と Coriolis の力，更に気流の圧縮性の影響

こゝにおいては，大気の異方性と Coriolis の力更に気流の圧縮性の影響について，前述の様に附録において考察した範囲の内，特に考慮するべき問題に関して論及する．

§1.　大気の異方性による乱れのある（乱子）拡散（混合）現象

大気の異方性については，現象論的（巨視的）に，$O(10^6, \text{c.g.s.})$ の大きさの対流圏で行われる垂直方向の拡散（混合）に対して，$O(10^5, \text{c.g.s.})$ の大きさの移動性高気圧，移動性低気圧，気塊等によつて行われる水平方向の拡散の影響として説明されている．

乱流の乱れによる乱子粘性係数の水平 x, y 一軸方向成分 κ_x, κ_y を求めるには種々の方法が考えられるが，こゝでは拡散（混合）現象における，

$$^{(1)}\quad \overline{Y^2} \equiv 2 \cdot \overline{\nu} \cdot \overline{T}, \text{，(分子拡散（混合）現象における場合)，}$$

$$^{(2)}\quad \overline{Y^2} \equiv 2 \cdot \overline{\kappa} \cdot \overline{T}, \text{，(乱子拡散（混合）現象における場合)}$$

こゝで，Y：気流の場において最初の時刻 $t=0$ に距離 $y=0$ にあつた気体塊が，時刻 $t=0$ から時刻 $t=T$ 迄に y 一軸方向に移動した距離，$\overline{\nu}, \overline{\kappa}$：前出の通り

を用いて，

$$^{(3)}\quad \overline{\kappa}_x \equiv \overline{\kappa}_y \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{T}}\overline{Y^2}$$

から求めると次の様な値になる．

北支那地帯から東南東に飛来する黄砂の拡散について，毎日の天気図から求められた結果は，*

---

* 高橋浩一郎：大気の流れの模型実験　気象集誌（1944；Syw. 19 n.），13

$$Y=300\sqrt{T} \tag{4}$$

こゝで, Y : km, T : day

である. この (4) を c.g.s. 絶対単位系に単位変換すれば,

$$Y^2 \fallingdotseq 1.04\times10^{10}\cdot T \tag{5}$$

$$\fallingdotseq 10^{10}\cdot T$$

となり,

$$\frac{Y^2}{T} \fallingdotseq 10^{10} \tag{6}$$

であるから, これを (前出 3) に代入すると,

$$\overline{\kappa}_x \equiv \overline{\kappa}_y \equiv \frac{1}{2}10^{10}=5\times10^9 \ \mathrm{cm^2\cdot sec^{-1}} \tag{7}$$

である.

それ故, 大気の異方性によつて, 観測結果から水平, 鉛直方向の乱れによる (乱子) 動粘性係数の値に次の様な差異が表われて来るのである.

(前出附録 12)

$$\overline{\kappa}_x \equiv \overline{\kappa}_y = O(5\times10^9, \mathrm{c.g.s.})$$

$$\overline{\kappa}_z = O(10^5, \mathrm{c.g.s.})$$

これらの異方性 (不等方性) 現象に関する模型実験の方法は前述附録の通りである.

いま, 大気が特に水平運動をしている場合には,

$$w=0 \tag{8}$$

であり, (前出附録 10) において,

$$l \equiv 2\cdot\omega\cdot\sin\lambda \tag{9}$$

とおき, $2\cdot\omega\cdot\cos\lambda\cdot u$ を重力の加速度 g に比較して省略すれば, Coriolis の加速度は,

$$l\cdot v, \quad -l\cdot u \tag{10}$$

で表わすことが出来る.

その結果, これらの気流の場における運動量保存の微分方程式は,

$$\frac{Du}{Dt}=l\cdot v-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\kappa_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{11}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=-l\cdot u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\kappa_x\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\kappa_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\frac{Dw}{Dt}=0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

こゝで,

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

であり, その外の記号も前出の通りである.

そして，κ_x：気流の乱れによる（乱子）動粘性係数の x 一軸方向成分，

κ_y：　〃　　〃　　〃　　y 一　〃，

κ_z：　〃　　〃　　〃　　z 一　〃，

となる．更に気流の非圧縮性，

$$\rho=\text{const.} \tag{12}$$

を仮定として導入すると，その質量保存の微分方程式は，

$$\operatorname{div}(u,v,w)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{13}$$

である．

こゝにおいて，

$$Z\equiv\alpha\cdot z,\qquad W\equiv\alpha\cdot w \tag{14}$$

則ち，

$$z\equiv\frac{Z}{\alpha},\qquad w\equiv\frac{W}{\alpha} \tag{15}$$

の変換を行うと，(11) は，

$$\frac{Du}{Dt}=lv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa_x\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\alpha^2\cdot\kappa_z\frac{\partial^2u}{\partial Z^2}, \tag{16}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=-l\cdot u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\kappa_x\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)+\alpha^2\cdot\kappa_z\frac{\partial^2v}{\partial Z^2},$$

$$\frac{Dw}{Dt}=0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

となり，更に (13) は，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0 \tag{17}$$

と書き換えられる．

そこで，これらが等方性現象を表現する為の完全条件(必要にして且つ十分な条件)は，(前出 16) における

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad\frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

の各項の係数が相等しいことであるから，

$$\kappa_x\equiv\alpha^2\cdot\kappa_z \tag{18}$$

である．これを，

$$\alpha^2\equiv\frac{\kappa_x}{\kappa_z} \tag{19}$$

として，(前出附録 12) を代入すれば，

$$\alpha^2\equiv\frac{\kappa_x}{\kappa_z}=\frac{5\times10^9}{10^5}=5\times10^4 \tag{20}$$

$$\therefore \quad \alpha \fallingdotseq 220 \qquad \text{(前出附録18)}$$

となる.

次に，気流の乱れのある（乱子）粘性の推計的影響を表わす乱れのある（乱子）粘性係数について，その異方性現象に関する模型実験の方法は前述の通りであるが，こゝで注意しなければならないのは，以上は乱れのある（乱子）動粘性係数 κ の値が（前出附録 12）で表わされる様な大規模な現象についての考察であつて，道路の防除雪等を対象とした場合には，（前出附録 19）における考察から，

$$\kappa_x = O(10^3,\ \text{c.g.s.}) \qquad (21)$$

であり，更に $\kappa_x = \kappa_y$ の値も，もつと小規模な拡散現象から測定して，α の値を決定することが必要である.

§2. Coriolis の力の影響

次に，Coriolis の力の影響について考察する.

こゝで，Coriolis の力の垂直 z 一軸方向成分は，重力の加速度 g に比較して省略出来るので，二次元的に単純化することが出来る.

更に，粘性の影響も省略すれば（前出 11）は，

$$\frac{Du}{Dt} = l \cdot v - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (22)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -l \cdot u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (23)$$

となる．そこでこの (22) 並びに (23) から，(22)$+i\times$(23) を作ると，

$$\frac{D(u+i\cdot v)}{Dt} = -i \cdot l(u+i\cdot v) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right) \qquad (24)$$

こゝで，　$i = \sqrt{-1}$

が得られる．更に，

$$V = u + i \cdot v \qquad (25)$$

とおけば，

$$\frac{DV}{Dt} = -i \cdot l \cdot V - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}\right) \qquad (26)$$

と書き換えられる．こゝで更に，

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (27)$$

と単純化すると（26）は，

$$\frac{DV}{Dt} + i \cdot l \cdot V = 0 \qquad (28)$$

となり，これは線型一次の微分方程式であるから，(29) 初期条件を $t=0$ の時，$V=V_0$ とすれば，その解は，

$$V = V_0 \cdot e^{-i \cdot l \cdot t} = -V_0(\cos l \cdot t + i \cdot \sin l \cdot t) \qquad (30)$$

である．これは気流が Corinlis の力によつて等速円運動をすることを表わしている．

(31) その初速は $|V_0|$，週期 T_ω は $\frac{2\cdot\pi}{l}$ である．こゝで，

(前出 9)　$$l \equiv 2\cdot\omega\cdot\sin\lambda$$

を考慮すると，

(32)　$$T_\omega = \frac{2\cdot\pi}{l} = \frac{2\cdot\pi}{2\cdot\omega\cdot\sin\lambda} = \frac{\pi}{\omega\cdot\sin\lambda}$$

これに，

(33)　$$\pi = 3.14,$$

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{86164} = 7.29\times10^{-5}\cdot\mathrm{sec}^{-1}：\text{地球の週転の角速度},$$

$$\sin\lambda = \sin 35^\circ = 5.74\times10^{-1}：\text{緯度 } \lambda = 35^\circ \text{ と仮定する}$$

を代入すると，

(34)　$$T_\omega = \frac{3.14\times10^5\times10^1}{7.29\times5.74} \fallingdotseq 75\times10^3\cdot\mathrm{sec}$$

次に，円弧が直線と見做せる範囲を考えると，

(35)　$$\sin\lambda = \frac{\lambda^1}{1!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^n\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots\cdots,\ (-\infty < \lambda < +\infty)$$

を，

(36)　$$\sin\lambda \fallingdotseq \lambda$$

とした場合には，

(37)　$\lambda \fallingdotseq \pm 10^\circ$ に対して 10^{-3} 以内の誤差であるから，

中心角 $\lambda = 10^\circ$ 以下に対する円弧を直線と見做すことにする．そこで，この直線運動に要する時間 $'T_\omega$ は，

(38)　$$'T_\omega = T_\omega\times\frac{10}{360} = 75\times10^3\times\frac{10}{360} \fallingdotseq 2080\ \mathrm{sec}$$

$$\fallingdotseq 35\ \mathrm{min}$$

これは，この気流の場において，凡そ 30 min 程度の運動に対しては，Coriolis の力の影響を省略してよいことを表わしている．これを距離で表わせば，風速 $15\mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-1}$ として，

(39)　$$15\mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-1}\times30\times60\ \mathrm{sec} = 27\times10^3\mathrm{m}$$

$$= 27\ \mathrm{km}$$

である．

(40) 即ち，30 km 程度；O(30，10^3·c. g. s.)以内の現象を考察する場合には，Coriolis の力による影響は省略することが出来るのである．

§3.　気流の圧縮性の影響

以上は，前述の附録 §1 における仮定 3° の気流の不圧縮性即ち，

(前出12) $\rho=\text{const.}$

を導入して問題を取り扱つて来たのであるが，実際に気流の様な圧縮性のものについては，この仮定がどの程度迄許容されるものであろうか？ その結論は，前述の附録§1の様に，

(前出附録23) $\dfrac{v^2}{a^2}$ の程度；$O\left(\dfrac{v^2}{a^2}\right)$

において誤差の影響が現われて来るのである．そこで一応その結果を誘導してみると次の様になる．

本質的に異る所はないものであるから，こゝでも現象を二次元的に単純化して考え，次の様な仮定を導入する．

(41) 1°° 気流は定常流であると仮定する．その時にそこにおいて密度が変化する即ち密度がその場の状態函数であるとすると，それは一段に断熱変化と考えることが出来る．

2°° 気流は渦無してあると仮定する．それは速度ポテンシャル；velocity potential が存在することに外ならない．

3°° 気流の場において粘性と重力の影響を省略することが出来ると仮定する．その結果，その運動量保存の微分方程式において粘性と重力の影響の項が消去される．

その結果，仮定条件 1°° から，

(42) $$p\cdot\rho^{-\gamma}=p_0\cdot\rho_0^{-\gamma}$$

こゝで，p, p_0：同一の流線上の二点の圧力，

ρ, ρ_0：同一の流線上の二点の密度，

γ：定圧比熱を c_p，

定積比熱を c_v とすれば，

$\gamma=\dfrac{c_p}{c_v}$ で，大気の場合は $\gamma=1.4$ である．

であり，

(43) $$p_0\cdot\rho_0^{-\gamma}\equiv k$$

とすると (42) は，

(44) $$p\cdot\rho^{-\gamma}=k$$

として表わすことが出来る．

更に，定常流であるから，

(45) $$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0$$

である．

次に，この場合の気流の示性方程式は，

(46) $$\rho=f(p)$$

で表わされると考えられるから，

$$(47)\quad \int^{p}\frac{dp}{f(p)}=\int^{p}\frac{dp}{\rho}\equiv P$$

とすると（前出 41）仮定条件 3°° によつて，気流の場における運動量保存の微分方程式は，

$$(48)\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$(49)\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

で表わすことが出来る．こゝで，

$$(50)\quad (48)\times dx+(49)\times dy$$

を作ると，

$$(51)\quad u\frac{\partial u}{\partial x}dx+u\frac{\partial v}{\partial x}dy+v\frac{\partial u}{\partial y}dx+v\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$=-\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)$$

こゝで更に，仮定条件 2°° から速度ポテンシャル；velocity potential φ を考えると，

$$(52)\quad u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

の様に表わされるから，これを（51）に代入すれば，

$$(53)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx=-\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)$$

となり，これはまた，

$$(54)\quad \frac{1}{2}d\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}=-dP$$

と書き換えられる．この（54）の積分は

$$(55)\quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}=-P+C$$

ここで，C：積分常数

であり，更に，

$$(56)\quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}+\int^{p}\frac{dp}{\rho}=C$$

こゝで，C：積分常数

となる．

これは速度ポテンシャル；velocity potential φ を用いて書き表わした D. Bernoulli の定理である．

次に，質量保存の微分方程式は，

$$(57)\quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\cdot v)=0$$

で表わされる．これに (52) を代入すれば，

$$(58)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

となる．こゝで，(56) を x および y についてそれぞれ偏微分すると，

$$(59)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}=0$$

が得られる．そこで，

$$(60)\quad \frac{dp}{d\rho}=\gamma\frac{p}{\rho}=a^2$$

こゝで，a：局所音速である．

とおく．これを (59) に代入すれば，

$$(61)\quad \frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=-\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

が得られるから，更にこれを (58) に代入すると，

$$(62)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y}\right\}$$

となる．これは，

$$(63)\quad \left\{1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left\{1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

$$-\frac{2}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y}=0$$

となり，更に（前出 52）を代入して，

$$(64)\quad \left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{u\cdot v}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y}=0$$

と書き換えられる．そこで，これを気流が不圧縮性の場合のポテンシャル微分方程式；potential differential equation,

$$(65)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

に対応させる為の条件を考える．そこで，

$$u^2+v^2 \equiv V^2 \tag{66}$$

として，気流の速度 V が局所音速 a に比較して小さく，その結果，

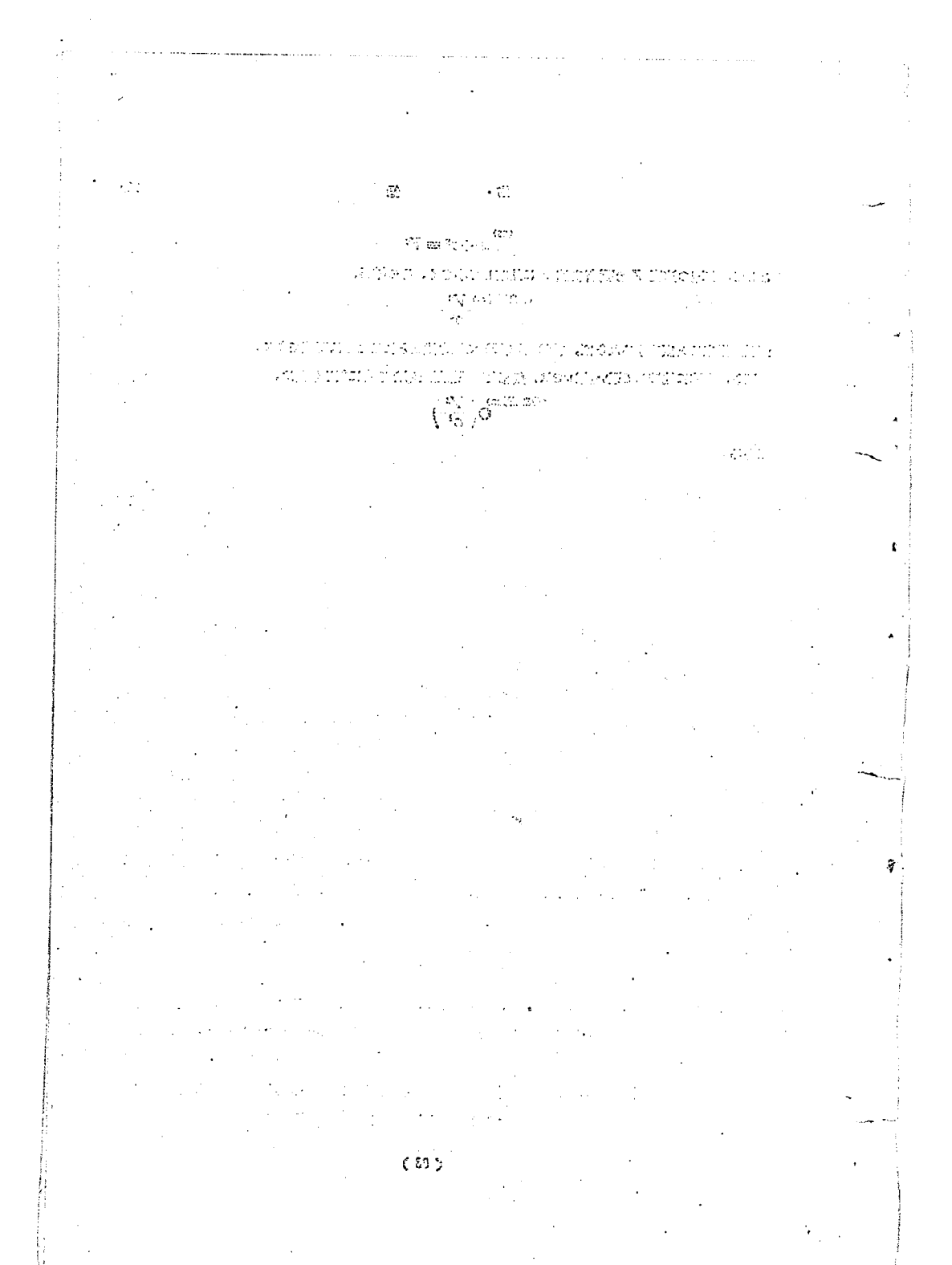
$$\frac{V^2}{a^2} \tag{前出附録23}$$

が省略出来ると仮定するならば，(64) が (65) で置き換えられることは明瞭である．

即ち，音速に比較して遅い流れでは，気流を不圧縮性と考える為に起る誤差は，

$$O\left(\frac{V^2}{a^2}\right) \tag{前出附録23}$$

である．



国道4号線道路良好度調査報告

建設省土木研究所道路研究室
建設省道路局企画課

序

本報告は道路局企画課，土木研究所道路研究室が主体となり，東北地方建設局および関係各府県の御協力を得て国道4号線について良好度を調査した結果をとりまとめたものである．従来実施して来た他の国道との比較検討については改めて報告する予定である．報告の作製は小川哲夫技官，山田敏照の両君が担当した．

道路研究室長　谷　藤　技　官

目　次

Ⅰ 要　旨……(2)
Ⅱ 調査の概要……(2)
〔1〕 試験路線……(2)
〔2〕 調査日程……(3)
〔3〕 調査に用いた器械……(4)
(1) 道路試験車……(4)
(2) ガソリン消費量計……(4)
(3) 振動分類計……(4)
(4) ベドメーター……(4)
(5) 3成分加速度計……(4)
(6) 其の他……(4)
〔4〕 調査の方法……(4)
(1) 試験速度……(4)
(2) 測定区間長……(4)
(3) 測定項目……(5)
Ⅲ 調査結果……(5)
〔1〕 全行程各区間ごとの府県別，路面種別ごとの集計結果……(5)
〔2〕 全行程路面種別ごとの集計結果……(8)
〔3〕 調査結果の考察……(9)
(1) 舗装種別ごとの速度の平均値について……(9)
(2) 舗装種別ごとのガソリン消費率の平均値について……(11)
(3) 振動分類計による個数率分布について……(12)
(4) 速度変化との関係について……(14)
(5) 速度とガソリン消費率の関係……(16)
Ⅳ 結　語……(17)

Ⅰ 要 旨

近時自動車交通が時代の脚光を浴びて，交通機関として道路の重要性が漸く世人に認められるようになつた．道路は産業，経済，文化の発展に重要な役割を有していることは今更特記する必要もない．吾々の日常生活には凡そその目的を成すのになくてはならないものとして溶け込み，それ故にその有難味が忘れられてきた．

戦後，急激な車輛の増加に伴い重車輛交通が日を追つて増し，その必要性に迫られて世情の落付きと共に道路も改良され，25年度見返資金の振当てによつて一層拍車がかけられた．一方高速自動車道路も計画され完成すれば，鉄道に劣らぬ輸送能力を持つようになり，産業の開発も一段と進歩することになろう．

道路を使用する車輛が多くなり，重車輛交通が増すにつれ道路の需要度が高くなつてくる．それに従つて道路交通の経済性が云々されるようになると道路の良好度が問題になつてくる．道路の良好度と云つてもこれを数的に表現する事は困難である．一般に道路の良好度は線形，幅員，勾配，路面状態に分けて考えることが出来る．これらの要素が相関連して自動車の速度，燃料消費量，維持修繕費等に影響を与える．

この報告書は国道4号線について本研究室，道路局企画課，運輸省自動車局道路調査課，東北地建，福島，宮城，岩手，青森県の協力を得てこれらの影響を求めるため，本研究所々管の道路試験車を走らせて試験した結果を示すものである．

この報告書では次の事項を明らかにした．

（1） 舗装種別ごとの速度の危険率 $\alpha=1\%$ の信頼限界を求めた．

（2） 舗装種別ごとのガソリン消費率 (cc/km) の危険率 $\alpha=1\%$ の信頼限界を求めた．

（3） 振動分類計 (Vibration Sorter) による衝撃率分布が Poisson's 分布に当てはまるかを検定した．

（4） Poisson's 分布の特性として，λ が母平均であると同時に母分散を表わすから，二路線の振動分類計の比較に λ の値を用いることが出来る．

（5） 平均走行速度 V による母数 λ の変化を検討した．

（6） 速度とガソリン消費率の関係を求めた．

以上の結果は極めて簡単な走行試験によつたもので，これらの値，および特性は各路面についてなお今後実験計画法に基いた合理的（危険率の明らかな）精密な繰返し試験を行い，各路面の及ぼす影響を研究し，道路良好度判定の基準としたいと考える．

Ⅱ 調査の概要

調査は昭和 26 年 7 月 17 日より 8 月 1 日の 16 日間にわたり，国道 4 号線（東京―仙台―青森）間往復約 1440km について行つた．調査の概要を各項別に述べれば次のようである．

〔1〕 試験路線

国道4号線は東京都日本橋に始まつて宇都宮，福島，仙台，盛岡を経て青森市に至る陸羽街道と呼ばれる路線で，国道5号線とは福島市で分岐し，岩沼で国道6号線と合している．

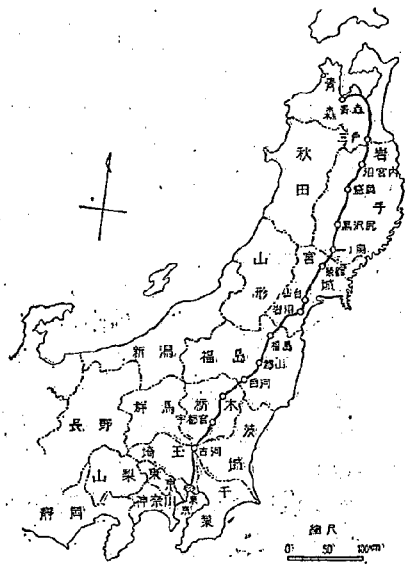
全線について改良済舗装区間は約 20 %，未改良区間は約 50 %，残りの 30 % が改良済砂利道になつている．岩手，青森県境から三戸間の一部分を除けば概して良好な路線であるが，砂利道の維持補修が行き届かないで荒れるがまゝに酷使され自動車交通に支障を来たすような箇所もあり，舗装区間についてもパッチングその他の補修が行われている処が多い．山地部が多いので自動車のすれ違いに支障を生ずるような箇所，急峻な勾配部分が所処にあつた．又勾配部分に続いて鉄道と平面交叉する踏切番もない見透しのわるい危険な箇所があつた．又勾配部分で，折角補修しても豪雨に会うと直ぐ破壊されるような部分があつた．これらは早急に危険を除き舗装をする等の処置をしなければならない．

調査路線の概要および主な都邑を図—1 に示した．

〔2〕 調 査 日 程

調査を行つた日程は表—1 に示すようである．一日中雨の日は僅か1日の極めて良い天候に恵まれたが，夏期のこととて気温は相当に高く，調査期間中 23°C—35°C の変化があり，調査員に苦痛を覚えさせるようなこともあつた．

表中の気温は調査時の測定最低温度と最高温度を示す．又走行粁，走行時間は試験区間の実走行粁，実走行時間である．



図—1　調査路線並に主要都邑

表—1　調　査　日　程

月日(曜)	天　候	気温(°C)	調査区間	走行粁	走行時間 分 秒	備　考
7.17(火)	曇	24—27	東京都日本橋—西那須野町	147.64	242—11.3	乗員 15 名
7.18(水)	晴後曇小雨晴	23—29	西那須野町—福島市	119.50	215—06.3	乗員 14—19 名
7.19(木)	晴	資料整理および車輌整備				
7.20(金)	晴	27—31	福島市—築館町	141.12	227—15.7	乗員 17—20 名
7.21(土)	小　雨	27—28	築館町—盛岡市	116.115	185—14.2	乗員 17—19 名
7.22(日)	小雨後曇	資料整理および車輌整備				
7.23(月)	晴	28—31	盛岡市—三戸市	90.483	174—29.0	乗員 15—19 名
7.24(火)	晴	26.4—28	三戸市—青森市	105.268	208—55.6	乗員 14—16 名
7.25(水)	晴	資料整理および車輌整備				
7.26(木)	曇後雨晴	27—29.5	青森市—福岡町	121.496	243—03.1	乗員 14—20 名

7.27(金)	曇	26—33	福岡町—花巻町	111.925	193—01.6	乗員16—17名
7.28(土)	晴	資料整理および車輌整備				
7.29(日)	晴	29—35	花巻町—仙台市	139.255	207—46.8	乗員14—20名
7.30(月)	晴	29.5—32.5	仙台市—郡山市	126.325	203—21.8	乗員16—17名
7.31(火)	曇	26.5—30.4	郡山市—宇都宮市	117.870	186—52.1	乗員12—19名
8. 1(水)	晴	28.2—29.6	宇都宮市—東京都日本橋	103.255	159—38.2	乗員12名

〔3〕 調査に用いた器械

調査に用いた器械は，従来の調査に用いたものと同様のものであるので器械の説明を省略し列挙するに止める．(詳細説明は彙報第13号，第12号参照)．

(1) 道路試験車 ： ニッサン 180 型トラック改造バス型

調査時重量 5270~5750 kg　　既走行粁 12000 km

(2) ガソリン消費量計 ： 重力落下方式

容量 1500 cc　最小1目盛 20 cc　2本1組

容量 500 cc　最小1目盛 5 cc　2本1組

(3) 振動分類計 (Vibration Sorter) ： AVS-B型

最小分類範囲 0.1 g　　自己振動数 15 cy/sec

* 註 振動分類区間は 0.15~0.3 g, 0.3~0.5 g, 0.5~0.7 g, 0.7~1.0 g, 1.0 g 以上とした．

(4) ペドメーター (Pedometer)

* 註 0.2 g, 0.3 g, 0.4 g の3箇を用いた．

(5) 3成分加速度計

(6) 其の他

走行距離は試験車に装備してある距離計によつた．

走行時間は1分読みストップウォッチを用いて測定した．

気温は一般に用いる水銀温度計によつた．

〔4〕 調査の方法

調査の方法は路線を改良，未改良の別，路面種別（砂利道，簡易舗装道，アスファルト高級舗装道，コンクリート舗装道）勾配部平坦部の別，主要物件を目標として路面状態，区間の特性を失わない位置に測点を設けて区切り，この区間ごとに平均値を求めた．

(1) 試験速度

速度は一定としないでその路線を走るのに最も都合のよい速度とした．走行速度を一定としないことは運転者の精神，肉体的疲労を軽減するためであり，又走行速度そのものが路面の良好度，線形の良否に支配されその影響をうけると考えられることからこの方式をとつた．

(2) 測定区間長

前述のように路面状況の変る点で区切り，出来得る限り 1 km 以上となるように定め，変化の少い区間については相当長距離として，区間の特性を失わないようにするため止むを得ないときは短区間とした．

(3) 測定項目

走行距離計による区間長の測定，その所要走行時間，ガソリン消費量，振動分類計およびベドメーターに依る垂直方向振動数（路面不陸によつてうける衝撃回数）3 成分加速度計に依る自動車々体の上下，前後，左右の振動状態，気温を測定した．

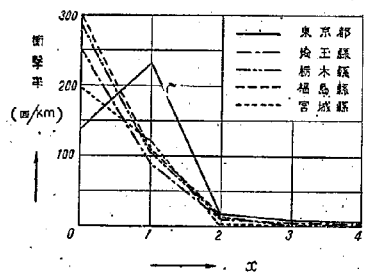
Ⅲ 調 査 結 果

〔1〕 全行程各区間ごとの府県別，路面種別ごとの集計結果

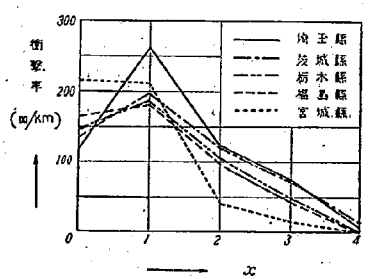
各区間は前述の如く舗装種別ごと，改良，未改良の別，平坦地と勾配部分の境界等で全延長を 177 区間とした．これらを一々掲げるのは冗長に過ぎるので，府県別，路面種別ごとにまとめ集計した結果を表—2 に示す．

長区間のガソリン消費量の測定には大型ガソリン消費量計（容量 1500 cc）を用いた．この最小 1 目盛は 20 cc なので，コンクリート舗装区間から砂利道区間の路面状態のわるい区間に入ると，油面が振動し読みに多少の誤差が入るが連続走行のため止むを得なかつた．精密に測定せんとするならば区間毎に一旦停車し測定するようにしなければならない．鉄道の踏切，車輛のすれ違い等のために停車するときは，コックの切換えをしてこの影響を出来得る限り避けた．

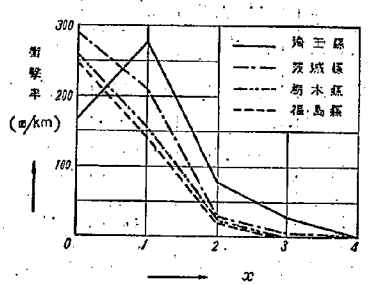
表中に出てくる記号は C＝コンクリート舗装，A＝アスファルト高級舗装，a は簡易舗装，G＝砂利道であり，a+C，C+A+G は路面の種別が頻雑に変るためこれを一括したものである．



(a) コンクリート舗装



(b) 砂利道



(c) 簡易舗装

図—2 振動分類計に依る衝撃率分布図

表—2 （東京—青森間）府県別路面種別

路面種別	県名	距離 km	走行時間 分 秒	速度 km/hr	燃料 消費量 cc	燃料 消費率 cc/km	燃料 走行率 km/l
C	東京都	0.170	0 15.0	40.8	39	229	4.36
A		1.980	4 32.3	26.2	415	210	4.77
C+A		12.080	23 28.8	30.9	2695	223	4.49
C	埼玉県	11.275	16 24.6	41.2	2245	199	5.02
a		14.750	23 59.3	36.9	3255	221	4.53
G		12.690	18 52.0	40.4	3209	253	3.96
a+C		1.010	1 42.0	35.6	198	196	5.10
a	茨城県	1.495	2 37.8	34.1	349	233	4.29
G		4.970	8 23.4	35.6	1348	272	3.68
C	栃木県	12.925	19 37.3	39.5	2665	206	4.85
A		0.450	0 42.7	37.9	65	145	6.92
a		12.440	21 35.0	34.6	2601	209	4.78
G		83.840	130 25.0	38.6	21886	261	3.84
C+AB		0.395	0 36.0	39.5	60	152	6.59
a+C		7.270	10 13.4	42.7	1493	205	4.87
C	福島県	11.510	21 08.4	32.7	2641	230	4.36
A		1.215	2 18.1	31.7	265	218	4.59
a		3.795	5 36.0	40.7	772	203	4.92
G		92.645	157 44.1	35.3	21599	233	4.30
C+a		2.955	5 48.7	30.5	647	219	4.57
C+G		2.140	5 08.4	25.7	514	240	4.16
C	宮城県	28.815	38 36.9	44.8	6041	210	4.77
a		3.875	6 44.2	34.5	901	233	4.30
G		83.755	133 11.7	37.7	20462	244	4.09
C+A		9.840	17 19.5	34.1	2072	211	4.75
a+C+G		5.495	8 53.8	37.1	1260	230	4.36
C	岩手県	20.370	32 04.8	38.8	4422	218	4.69
A		1.320	3 01.4	26.1	315	239	4.20
G		127.060	227 16.6	33.6	32580	256	3.90
C+a		14.625	22 11.2	39.5	3336	228	4.39
a+A		0.720	1 48.0	24.0	169	235	4.26
C+G		12.620	21 51.1	34.7	2983	237	4.23
C	青森県	14.650	23 53.0	36.8	3166	216	4.63
G		92.796	194 13.8	28.7	2722	294	3.41
A+G		3.985	7 46.4	30.8	940	236	4.24

ごとの測定結果集計　往復平均

衝撃率（回/km）/衝撃回数（回）ペドメーター			衝撃率（回/km）/衝撃回数（回）振動分類計				
0.2g	0.3g	0.4g	0.15～0.3g	0.3～0.5g	0.5～0.7g	0.7～1.0g	1.0g以上
153/26	24/4	9/1.5	136/23	235/40	15/2.5	9.8/1.5	9.8/2
203/401	45/89	21/41	284/557	264/523	91/180	42/83	1.0/2
169/2037	6.5/79	2.8/34	240/2902	203/2459	38/465	8.9/107	0.3/4
93/1048	4.3/49	2.6/29	255/2872	94/1056	13/146	6.4/72	0.5/5.5
205/3027	27/395	12/176	167/2469	277/4087	78/1157	29/423	1.3/19
274/3470	58/739	38/483	114/1444	263/3335	125/1583	75/951	8.6/109
135/136	0/0	1/1	205/207	175/177	37/37	2/2	1.5/1.5
140/209	5/7.5	2/3	291/435	209/312	25/37	4/6	0/0
294/1459	83/414	45/222	133/661	193/961	117/580	72/356	11/55
83/1075	0.7/9.5	0.5/6.5	286/3691	108/1392	11/146	1.4/18	0.1/1.5
185/83	0/0	0/0	189/85	104/47	45/20	24/11	2.2/1
145/1800	10/129	5.6/70	262/3264	159/1979	27/335	6.6/82	0.5/6.5
298/25005	61/5108	28/2381	143/12019	185/15520	105/8766	50/4234	2.6/222
134/53	0/0	0/0	253/100	159/63	6.3/2.5	1.3/0.5	0/0
62/452	0.1/0.5	0/0	294/2140	53/388	2.9/21	0.3/2	0/0
107/1228	0.8/9	0.2/2.5	303/3485	113/1306	20/235	1.7/20	0/0
103/125	0.4/0.5	0/0	305/371	227/276	12/15	3/3.5	0/0
119/453	2.1/8	3.2/12	248/942	144/546	22/83	2.5/9.5	0.1/0.5
258/23899	41/3760	20/1833	164/15226	181/16766	99/9142	43/3946	1.6/144
90/267	7.1/21	4.1/12	303/895	136/402	36/105	6.8/20	0.3/1
291/622	36/77	23/50	239/511	323/691	87/187	29/61	1.2/2.5
115/3323	4.1/119	2.6/76	199/5744	123/3540	2.5/724	5.5/159	0.3/8
193/748	15/58	5.2/20					
267/22342	49/4102	24/1969					
128/1260	11/108	7.6/75	215/2118	213/2098	42/410	15/151	0.5/5
244/1339	42/232	23/126					
133/2763	8.5/177	4.3/89					
88/116	1.1/1.5	0.8/1					
229/29145	36/4589	19/2451					
113/1653	7/83	3/41					
275/198	22/16	14/10					
235/2969	31/395	15/187					
149/2176	16/237	13/190					
305/28270	69/6405	46/4286					
230/917	41/162	23/90					

表—2 について路面種別ごとの振動分類計の衝撃率(回/km)を縦軸に，振動分類区分の (0.15～0.3 g) : 0, (0.3～0.5 g) : 1, (0.5～0.7 g) : 2, (0.7～1.0 g) : 3, (1.0 g 以上) : 4 を横軸 x に対応させその分布状態を示すと図—2, (a), (b), (c) に示すような型をとる.

この図から判るように舗装道路の衝撃率は $x=0$ に於て最も多く $x=1, 2, \cdots\cdots$ と急激に減少している. 砂利道では $x=1$ に対応する衝撃率が最も多く $x=0, 2, \cdots\cdots$ と減少している. このことから舗装道においては g の小さい衝撃率が大きい値を示し，大きい g の衝撃率は小さい値をとる. 砂利道においては 0.3～0.5 g 附近の衝撃率が最も多く 0.15～0.3 g 附近がこれにつぎ，g が大きくなるにつれて減少する.

〔2〕 全行程路面種別ごとの集計結果

〔1〕の全行程各区間ごとの府県別，路面種別ごとの集計結果を更に路面種別ごとに集計したのが表—3 である.

表—3 の 1, 2 と分けたのは，仙台以北で振動分類計の作動が不調のため集計することが出来ないので完全作動の東京一仙台間を全項にわたつて集計し，仙台以北は振動分類計の衝撃率の項のみ除いて集計したため表を 2 分した. 表—3 の 2 の最下欄に総計を求めておいた.

此の結果のガソリン消費量を比較してみると，アスファルト高級舗装が最も低く，次にコンクリート舗装，簡易舗装，砂利道の順位をとつてアスファルト高級舗装が最も経済的な値を示している.

衝撃率については相対的に舗装道路が低い値を示し，自動車に与える振動の少い事を示し，乗心地のよいこ

表—3 の 1 (東京—仙台間) 路面種別ごと

路面種別	区間	距離 km	走行時間 分 秒	速度 km/hr	燃料 消費量 cc	燃料 消費率 cc/km	燃料 走行率 km/l
C	東京一仙台	64.695	95 32.2	40.6	13629	211	4.75
A	〃	3.645	7 33.2	29.0	745	204	4.89
a	〃	32.480	53 48.1	36.2	6977	215	4.66
G	〃	194.145	315 24.5	36.9	47844	246	4.06

表—3 の 2 (東京一青森間) 路面種別ごと

路面種別	区間	距離 km	走行時間 分 秒	速度 km/hr	燃料 消費量 cc	燃料 消費率 cc/km	燃料 走行率 km/l
C	東京一青森	100.075	151 29.9	39.7	21217	212	4.72
A	〃	4.965	10 34.5	28.2	984	198	5.05
a	〃	36.355	60 32.2	33.4	7877	217	4.62
G	〃	497.756	870 06.3	34.3	128303	258	3.88
C+A+AB+a	〃	48.895	83 12.1	35.2	10669	218	4.58
C+A+a+G	〃	24.240	43 39.7	33.3	5697	235	4.26
総計	〃	712.286	20 19 34.7	35.1	174746	245	4.08

とを物語つている.

表—3 の2は全区間を集計したものであるが，表—3 の 1 と同じことが云える.

〔3〕 調査結果の考察

調査の結果については〔1〕〔2〕で述べたが，調査結果について若干の計算を施し，二，三考察を進めてみる.

(1) 舗装種別ごとの速度の平均値について

東京都中央区日本橋—仙台—青森市終点までの，県別，路面種別ごとの集計結果は算術平均によつて算出したが，今この各区間ごとの測定値から平均値の信頼限界を求め，速度の項について路面種別ごとの平均値にどれ位の差があるか，又各区間の測定値が平均値の範囲内に落ちるか，若しその範囲より高い値を示すならば 4 号線の平均値よりよい道路であると云いうる.

今，速度 V の測定値を $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_\infty$ の無限母集団と見做して，その分布型を正規型と規定する.（若し正規型でなくても，中心極限定理によつて無作為標本の大きさ N が

$$N = O(30)$$

こゝで，$O(\cdots)$：Ordnung の略号

以上であれば，その想定は近似的に成立する）. その中から無作為標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_N$ (O_N : $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$) を抽出する.（母集団と標本とを峻別し，無作為標本によつてその母集団常数（母数）を推定することが，すべての科学的研究の本質である.）

の測定結果集計　往復平均

衝撃率(回/km)/衝撃回数 ペドメーター			衝撃率(回/km)/衝撃回数　振動分類計				
0.2g	0.3g	0.4g	0.15～0.3g	0.3～0.5g	0.5～0.7g	0.7～1.0g	1.0g 以上
103/6699	2.9/190	1.8/115	244/15814	113/7333	21/1352	4.2/270	0.3/17
167/608	22/79	11/41	278/1012	232/846	59/215	27/98	0.8/3
169/5487	17/539	8/261	219/7110	213/6923	50/1611	16/520	0.8/26
271/52581	50/9614	24/4700	151/29349	188/36581	103/20071	49/9487	2.7/530

の測定結果集計　往復平均

衝撃率(回/km)/衝撃回数 ペドメーター			衝撃率(回/km)/衝撃回数　振動分類計				
0.2g	0.3g	0.4g	0.15～0.3g	0.3～0.5g	0.5～0.7g	0.7～1.0g	1.0g 以上
116/11648	6.5/654	3.9/393					
146/724	18/91	8.5/42					
171/6235	16/597	7.7/280					
268/133587	50/25115	27/13624					
124/6055	6.3/307	3.5/172					
241/5846	36/865	18/448					

O_N : x_1, x_2,……, x_N 即ち無作為標本 x_1, x_2, x_3,……, x_N の標本平均 $\bar{x}$ は,

$$E(x)=m$$

こゝで $E(\cdots)$: は期待値，平均として，を表わす.

で母平均に平均として一致するから，速度 V の平均は

$$m=E(x)\equiv\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\equiv\frac{1}{N}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_N)\cdots\cdots(1)$$

次に無作為標本 x_1, x_2, ……, x_N の不偏分散 u_x^2 は

$$u_x^2\equiv\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2-N\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{N-1}\left\{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2\right\}\cdots\cdots(2)$$

で表わされ，不偏分散の平方根 u_x は

$$u_x=\sqrt{\frac{1}{N-1}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}\cdots\cdots(3)$$

である.

上述の $\bar{x}$, u_x^2, u の計算を簡便にするため次のような置換えをする.

$$y_i=ax_i+b$$

但 $a\neq0$, b は整数

$$\bar{x}=\frac{\bar{y}-b}{a}\cdots\cdots(4)$$

$$u_x^2=\frac{u_y^2}{a^2}\cdots\cdots(5)$$

これらによつて，速度 V の平均の信頼限界（危険率（有意水準）α %）は次の式で求められる.

$$\bar{x}-t_\alpha\cdot\frac{u_x}{\sqrt{N}}\leqq m\leqq\bar{x}+t_\alpha\cdot\frac{u_x}{\sqrt{N}}\cdots\cdots(6)$$

こゝで t_α : は無作為標本の大きさ N（又は自由度 $f\equiv N-1$）並びに危険率 $\alpha=5$ % および 1 % に対応した $P_r\{|t|\geqq t_0\}=\alpha$ となる t_0 の値（t_α の値）は t 分布表参照.

危険率 α % とは，そのように断定した場合に危険率は α % である．即ち云い換えれば 100 回の断定中に α 回誤りを犯す危険があるということである.

以上の計算をコンクリート舗装，簡易舗装，砂利道について行つた結果を表—4 に示す.

表—4

舗装種別	N	$\sum_{i=1}^{N}y_i$	$(\sum_{i=1}^{N}y_i)^2$	$\sum_{i=1}^{N}y_i^2$	$\bar{y}$	b	$\bar{x}$	u_x	t_α
コンクリート舗装	29	80.00	6400.00	1782.88	2.76	35	37.76	6.93	2.76
簡易舗装	22	27.90	778.41	340.29	1.27	35	36.27	3.81	2.83
砂利道	98	25.30	640.09	3074.93	0.17	35	35.17	5.62	2.58

表—4 から路面種別ごとの危険率 1% の信頼限界は次のような値になる.

コンクリート舗装：34.20 km/hr ≦ m ≦ 41.32 km/hr

簡易舗装：33.97 km/hr ≦ m ≦ 38.57 km/hr

砂利道：33.71 km/hr ≦ m ≦ 36.63 km/hr.

この結果をみると，コンクリート舗装道に比して簡易舗装道では約 1% の減速，砂利道では約 1.5% の減速となつている．このことからコンクリート舗装道で平均速度 V で走ることの出来る自動車は，簡易舗装道では平均何 km/hr 位出せるか，又砂利道ではどの程度までの速度が出せるだろうかの凡そその推測が出来る．然し乍らこのとき路面の状況，交通頻度の問題が直接影響してくる．交通頻度については2車線以上の幅員のある道路ではこの影響は考えなくてもよい．なお，正規分布の特性から，ある2路線の走行速度についての路面の良好度が同一であるかどうかを比較するには，その平均と母分散とを比較すればよい．そして有意差があるかどうかは，速度 V の母分散の均一性が保障されていることを調べた上で，合理的に(或る危険率の下で)比較することが出来る．

市街地の路面の多くはコンクリート舗装，簡易舗装であるので，速度制限および交通信号の影響が入り砂利道との大きい差は見出されなかつた．砂利道と同様の状況にある郊外道路のみについて計算すれば，相当の差の現われてくることが考えられる．

この計算に使用した区間走行平均速度（母集団標本）は，乗員に不快を覚えさせたり，積荷破損の惧れのあるような速度ではなく，各々の区間を最も爽快な走りよい速度で走らせた結果に於ける値である．

(2) 舗装種別ごとのガソリン消費率の平均値について

(1) の項で行つたのと同じ方法を用いて計算した結果を表—5 に示す．

表—5

舗装種別	N	$\sum_{i=1}^{N} y_i$	$(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2$	$\sum_{i=1}^{N} y_i^2$	$\bar{y}$	b	$\bar{x}$	u_x	t_a
コンクリート舗装	33	279.00	77841.00	12593.00	8.45	210	218.45	17.88	2.58
簡易舗装	22	123.00	8835.00	15129.00	5.59	210	215.59	19.69	2.83
砂利道	97	603.00	369664.00	92642.00	6.27	250	256.27	29.56	2.58

表—5 の値からガソリン消費率の危険率 1% の信頼限界は次の値をとる．

コンクリート舗装：210.43 cc ≦ m ≦ 226.47 cc

簡易舗装：203.71 cc ≦ m ≦ 227.47 cc

砂利道：248.61 cc ≦ m ≦ 263.93 cc

この結果から，舗装道の平均値は殆ど差異を認められないが，砂利道の信頼限界は全く異つた大きい値をとつている．信頼限界下限の 248.61 cc はコンクリート舗装道の下限より 38.18 cc，上限より 22.14 cc 多くなつている．単にこのガソリン消費率の面から考えても，舗装道路が如何に経済的であるかが判る．交通量の多い砂利道では到底耐えきれず維持補修費がかさむ許りでなく，ガソリン消費率の面からしても甚だ不経済であ

ると云いうる.

上記舗装道の平均値に於て簡易舗装道がコンクリート舗装道よりよい値を示したのは,路線全体について分布を考えてみると市街地に於ける制限速度,交叉点ごとの停車,それにつれてミッションの切り換えを行うため,これの影響する処が大であると考えられる.

(3) 振動分類計 (Vibration Sorter) による衝撃率分布について

振動分類計による衝撃率分布を何れかの函数型で想定することが出来れば,標本による函数型の特性値をもつて母数の推定ができ,この値から路面の良好度を表わすことができると考える. 又この項が速度 V と関係をもちその型が一つの方程式で表わされゝば,どんな速度で走つた場合の測定値からでも容易に判定できる.

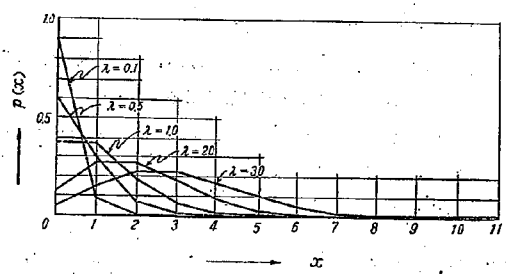
実験観測の場合においてその現象が起ることは稀であつて,しかもその確率と標本の大きさとの積が一定であるときは,母集団の型の想定として Poisson's 分布をとるべきで,振動分類計の測定結果についてこの観察をしてみるとかなり合うことが認められる.

変数 X が x なる負でない整数値をとる確率が

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\cdots\cdots(7)\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots n)$$

で与えられるときは, X の分布は Poisson's 分布に従つているという.

上式の λ に 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, なる値を与えその各々に対して $P(x)$ の値が, x の値の変化と如何に関係するかを示すと表—6 および図—3 のようになる.



図—3 . λ の変化に対して x に対応する $P(x)$ の値の関係

Poisson's 分布函数

表—6　$P(x)$ の値

x \ λ	0.1	0.5	1	2	3
0	0.9048	0.6065	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.0905	0.3033	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.0045	0.0758	0.1839	0.2707	0.2240
3	0.0002	0.0126	0.0613	0.1804	0.2240
4		0.0016	0.0153	0.0902	0.1680
5		0.0002	0.0031	0.0361	0.1008
6			0.0005	0.0120	0.0504
7			0.0001	0.0034	0.0216
8				0.0009	0.0081
9				0.0002	0.0027
10					0.0008
11					0.0002

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad (x=0,1,2,3,\cdots\cdots,n)$$

が

$$P(x+1)=\frac{\lambda}{x+1}P(x) \qquad \cdots\cdots(8)$$

即ち

$$\lambda=\frac{P(x+1)}{P(x)}(x+1) \qquad \cdots\cdots(9)$$

なる性質を有することは容易に知られる．この性質は測定によつて得た度数分布に Poisson's 函数をあてはめて望みがあるかどうか鑑別基準として用いられる．即ち測定の結果

x	0	1	2	3 ……	n	計
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$……	$f(n)$	N

なる度数分布を得たとすれば

$$m_1'=\sum_{x=0}^{n}x\cdot f(x)\Big/\sum_{x=0}^{n}f(x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{x\cdot f(x)}{N} \qquad \cdots\cdots(10)$$

を算出し

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1) \qquad (x=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$$

が何れも m'_1 にほぼ等しいと認めうるかどうかを検べるのである．而し $f(x)/N$ を $P(x)$ の近似値 m_1' を $\mu_1'=\sum_{x=0}^{\infty}xP(x)=\lambda$ の近似値と見做すのである．

振動分類計の分類区間 0.15～0.3 g，0.3～0.5 g，0.5～0.7 g，0.7～1.0 g，1.0 g 以上の 5 つを x=0，1，2，3，4，に対応させて測定結果を計算してみるとかなりの適合度を見出す．

路面種別ごとに適合度を見たものの内1例を掲げれば表―7 のようである．

表―7 のコンクリート舗装は埼玉県北葛飾郡高野村地先，簡易舗装は茨城県古河町，砂利道は栃木県小山町

表―7　$P(x)$ と相対度数の値

x	コンクリート舗装		簡易舗装		砂利道	
	$P(x)$	相対度数	$P(x)$	相対度数	$P(x)$	相対度数
0	0.7734	0.7821	0.5718	0.5739	0.2709	0.2529
1	0.1988	0.1933	0.3196	0.3149	0.3538	0.3669
2	0.0255	0.0132	0.0894	0.0914	0.2310	0.2224
3	0.0022	0.0088	0.0167	0.0183	0.1006	0.1369
4	0.0001	0.0026	0.0024	0.0015	0.0328	0.0209
計						

地先で測定したものである.

あてはまりのよさの検定は全区間にわたつて行つた. 計算に用いた標本は km 当りの衝撃率の往復平均の値を用いたが, 全く加工されない測定値をそのまゝ用いても支障なくその方がよい. 上表に掲げたのは適合するものの内, 各々の路面種別から一つゞつを掲げたのであつて, 全部があてはまつたのではない.

測定に当つては, 区間ごとに停車し, 完全作動に依る測定を行い, 測定結果の大部分があてはまるならば, Poisson's 分布に従うとして母数の推定を行つて支障えないが, 今回の測定回数のみからではここに断定することが出来ない.

(4) 速度変化と λ の関係について

(3) の項で考察を加えた振動分類計の衝撃率分布が Poisson's 分布法則に従うものとして, λ の特性を考えてみる. 先ずコンクリート舗装の λ は 0.5 を越えるものが少く, 殆んど 0.5 以下の値になつている. 又簡易舗装についても同様 0.5 内外の低い値を示している. 砂利道に於ける λ の値は 0.7 以上 1.5 までの広い幅に値をとつている.

次に λ が路面種別によつて速度 V と相関 (線型) があるかどうかを検べてみる.

コンクリート舗装, 簡易舗装の資料は少いので資料の多い砂利道について検定を次のようにする.

最初に等平均の仮説の検定を行う.

k を 2 にとり V の値を観察してみると 27 km/hr 附近で分けるのが望ましいと考えられるので

$$V_{\mathrm{I}} \leqq 27\ \mathrm{km/hr} \leqq V_{\mathrm{II}}$$

とし, λ の値は小数点以下 3 桁の小さい数字なので計算を簡便にするため

$$y = aV + b \qquad \text{但し} \quad a = 1000$$
$$b = -1000$$

と置き換えを施す. 計算に先立ち表—8 を作る.

表—8 $\longrightarrow i$

	V_1	V_2	y_1	y_2	y_1^2	y_2^2
	1.306	0.917	306	− 83	93636	6889
	1.033	1.366	33	366	1089	133956
	0.914	1.500	− 86	500	7396	250000
	0.952	1.243	− 48	243	2304	59049
	1.406	1.282	406	282	164836	79524
$\downarrow$	0.941	1.069	− 59	69	3481	4761
j	0.778	1.144	− 222	144	49284	20736
	1.027	1.301	27	301	729	90601
		1.157		157		24649
		1.315		315		99225
計	8.375	12.294	357	2294	322755	765390
単位	8	10				

$$\bar{x}_1=\left(\frac{\sum y_{1j}}{n_1}+1000\right)\Big/1000=1.045$$

$$\bar{x}_2=\left(\frac{\sum y_{2j}}{n_2}+1000\right)\Big/1000=1.229$$

$$u_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{j_1}(y_{1j}-\bar{y}_1)^2=\frac{1}{n_1-1}\left(\sum_{j_1}y_{1j}^2-n_1\bar{y}_{1j}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n_1-1}\left\{\sum_{j_1}y_{1j}^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{j_1}y_{1j}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\left(322.755-\frac{1}{8}127449\right)=43.832$$

$$u^2=\frac{u_1^2}{a^2}=\frac{43832}{(1000)^2}=0.044$$

$$v_2^2=26571.8$$

$$v^2=0.027$$

$u^2>v^2$ であるから u^2/v^2 を F_0 として

$$F_0=\frac{u^2}{v^2}=\frac{0.044}{0.027}=1.63\begin{cases}n_1=7\\n_2=9\end{cases}$$

を得る．統計数値表（統計科学研究会編）から

$$\alpha=5\%\begin{cases}n_1=7\\n_2=9\end{cases}\quad\text{のとき}\quad F_0^7(0.05)=3.2327,\ \therefore F_0<F_0^7(0.05)$$

であるから危険率5％で等分散の仮説を棄却することが出来ない．（u^2, v^2 が同一の母分散の推定値であるという仮説が否定出来ない）それ故に V_{I}, V_{II} を母分散の同一な正規母集団からの無作為標本と見做して，等平均の仮説

$$H_0:\ m_1=m_2$$

の検定を次のように行うことが出来る．その方法は実験計画法の一元配置法によつて F 分布を用いる．

$$CF=\frac{T^2}{N}=\frac{(2651)^2}{18}=390433$$

$$S_{VR}=\sum\sum x_{ij}^2-CF=1088145-390433=697712$$

$$S_V=\frac{1}{b}\sum T_i^2-CF=\left(\frac{1}{n_1}T_{1i}^2+\frac{1}{n_2}T_{2i}^2\right)-CF$$

$$=\left(\frac{1}{8}127449+\frac{1}{10}5262436\right)-390433=151741.725$$

$$S_{R(V)}=S_R=S_{VR}-S_V=697712-151741.725$$

要因分析表

要　因	$S.S$	$D.F$	$M.S$
V	151741.73	1	151741.73
$R(V)$	54590.27	16	34123.14
VR	697712.00	17	

$$F_0=\frac{V}{R(V)}=\frac{151741.73}{34123.14}=4.447$$

$$F_{n2}^{n1}=F_{16}^{1}=4.49$$

$$\therefore\quad F_0<F_{n2}^{n1}$$

$$t^2=F$$

$$\sqrt{4.447}=t=2.109$$

t が自由度 n の t 分布をするならば

$$F=t^2 \text{ は自由度 } n_1=1 \quad n_2=n=16$$

の F 分布をなすから

$$t=\sqrt{F}=2.109$$

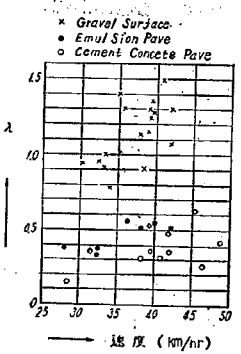
であり t 分布表から $P_r\{|t|>t_0\}=\alpha$ となる α は 0.05 と 0.10 との間にあることが判る．それ故に危険率（有意水準）α を

$$0.05<\alpha<0.10$$

とすることを許せば次のようなことが推定出来る．

速度 V が変化することによつて λ の値も変化する．しかし V と λ とはこの場合線型とは認められない．V と λ との共変関係は実験計画法に基いて合理的に求めることが出来るから，資料も少いのでこゝでは以上の範囲に止めて後日の実験研究に譲り度い．

速度と λ の関係は判然と見出すことは出来なかつたが横軸に速度 V を縦軸に λ をとつてプロットしてみると図—4 に示すようである．



図—4

(5) 速度とガソリン消費率の関係

ガソリン消費率は同一路面については速度の増加に従い減少するが，ある速度に達すると再び増加するようになる．このガソリン消費率の最も少い附近の速度を経済速度と呼ぶ．

路面種別ごとに種々の道路状態の区間を走つた結果についてはどのような傾向があるか，今各区間の測定結果を横軸に速度 V を，縦軸にガソリン消費率 cc/km をとり Graph 用紙にプロットしたのが図—5 (a),(b),(c) である．(図面を一つにすると煩雑になるので路面種別ごとにして 3 つに分けた．)

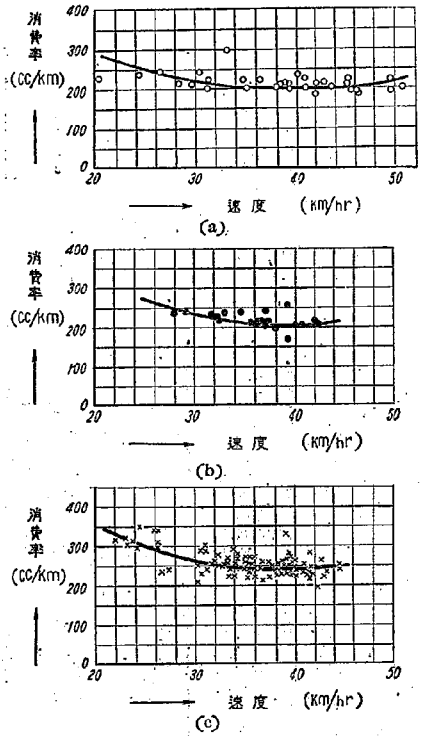
この図をみると曲線で示すような傾向のあることが認められる．種々の区間の測定結果に於いても，速度の増加と共に消費率は減少し，ある速度に達すると又増加することが判る．

同一路面について速度を変えて繰り返し走行試験を行つたときの経済速度が，コンクリート舗装，簡易舗装，路面良好と認められる砂利道で32～35 km/hr となつているが，このような箇々のものを綜合した結果は 40 km/hr 内外の高速度にずれていることが判る．

全区間の平均をみると前にも述べたようにコンクリート舗装が優位を示し，高級舗装から砂利道へと順次増加している．こゝにおいても又この傾向が表われている．

市街地に於いては速度の制限をうけ，交通信号による停車があり，又軌道等により速度は低くなり，ガソリン消費率は増加する．又路面状態が悪いと速度が出せなくなり，このためガソリン消費率は増加する．ともあれ路面は平滑で走行の容易であることが要求される．

以上調査結果について考察を加え，今後の課題について少しく述べた．むすびの後に参考までに三成分加速度計に依つて記録した自動車の振動状態を，主なものについて集録した．それを図—6に示す．



図—5　速度とガソリン消費率の関係

Ⅳ 結　　語

以上述べた結果を要約すれば次のようである．

（1） 舗装種別ごとの速度 V の危険率 1 % の信頼限界は

コンクリート舗装 ： $34.20\ \text{km/hr} \leqq m \leqq 41.32\ \text{km/hr}$

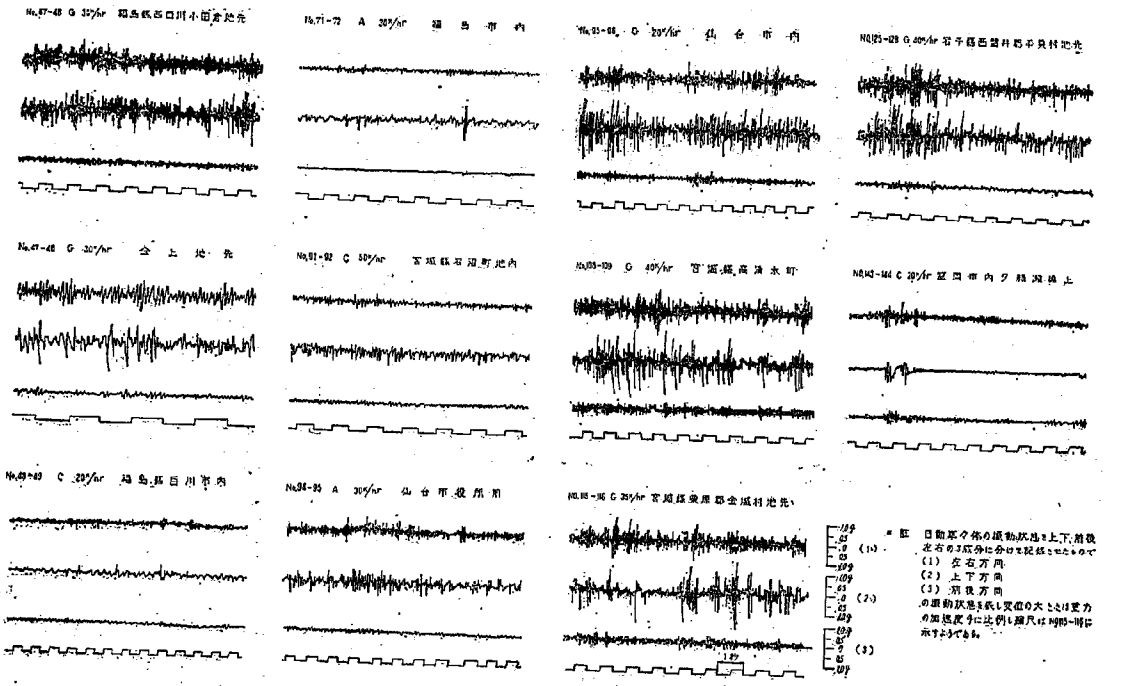
簡易舗装 ： $33.97\ \text{km/hr} \leqq m \leqq 38.57\ \text{km/hr}$

砂利道 ： $33.71\ \text{km/hr} \leqq m \leqq 36.63\ \text{km/hr}$

でコンクリート舗装が最もよい値を示し，砂利道に比し舗装道路の走りよいことが云える．

（2） 上記の数値によりある道路に於ける速度は平均値よりよい値をとるかどうかによつて，この項についての良好度の比較ができる．

（3） 舗装種別ごとのガソリン消費率の危険率 1 % の信頼限界は



図—6 三成分加速度計に依る記録

コンクリート舗装 ： $210.43\,cc \leqq m \leqq 226.47\,cc$

簡易舗装 ： $203.71\,cc \leqq m \leqq 227.47\,cc$

砂利道 ： $248.61\,cc \leqq m \leqq 263.93\,cc$

で舗装道路の経済的効果はコンクリート舗装に於ては下限比較 38.18 cc/km，簡易舗装では 44.9 cc/km で表わされるが，市街地に於ける速度制限，交通信号の影響を除けばコンクリート舗装が最もよい値を示すと考えられる．

（4） 振動分類計による衝撃率分布の母集団の型は Poisson's 分布にかなり適合する．

（5） 危険率 α を $0.05 < \alpha < 0.10$ とすることを許せば速度 V が変化することによつて λ も変化すると云える．V と λ はこの場合線型関係にあるとは認められないが，この関係は今後の実験研究で明らかにしたい．

（6） V と λ の共変関係が路面種別ごとに求めることが出来るならば，任意の速度の走行試験で路面不陸による衝撃率の面から良好度の判定ができる．

（7） 種々の路面を総合的にみた速度とガソリン消費率の関係に於けるガソリン消費率の少い速度は，個々の路面に於ける繰返試験による経済速度より多少高い速度へずれる傾向がある．

以上は簡単な走行試験によつた結果であるが一応所期の目的を達することが出来た．道路良好度の判定規準路面の運輸経済に及ぼす影響は今後の実験計画法に基いた合理的繰返し精密試験によつて明らかにしたい．

茶臼山地辷り防止堰堤に関する研究

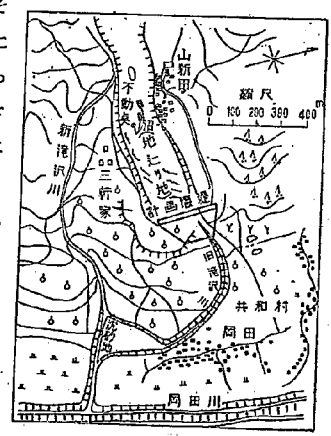
建設技官　福岡正巳
長野県技師　水島尚一

目　次

Ⅰ　緒　論……（1）
Ⅱ　地辷り防止堰堤の設計計算……（2）
Ⅲ　模型実験（その1）……（7）
Ⅳ　考察並びに将来の研究事項……（14）
Ⅴ　模型実験（その2）……（21）
Ⅵ　模型実験（その3）……（22）
Ⅶ　結　語……（24）

Ⅰ　緒　論

茶臼山地辷りは旧滝沢川の谷間に昭和24年築造した高さ8mの堰堤を越え，下流岡田部落を一呑みにせんとする形式となつたので，被害を僅少にとゞめるため，此の方向に向う泥流の勢力をそぎ，沈砂池側へ導くために旧滝沢川の谷に土堰堤を計画した．本報告の最初の部分はその設計計算について述べた．計算は堰堤に支えられた土の受働土圧による破壊と，斜面を考えた場合の辷りに対する安定について実施したのであるが，この二つの間の関聯性が不明瞭のため，関東ローム，茶臼山粘土を，一方をガラス張りにした箱につめ，之を傾斜せしめ破壊を生ぜしめるという方法で模型実験を行つた．その結果，堰堤の土を支える側の面（擁壁面）の最下端並びに地辷りを起す斜面の基盤が非常に重要な役割を果していることを認めた．この場合受働土圧による破壊は起らなかつた．次に擁壁面の下部に間隙を造り，この部分の圧力を波少せしめ自由に土を外側に流出せしめた．この場合もわづかに土の移動があつたに過ぎない．更に受働土圧の実験として普通行われているように砂，並びに之に若干のグリースを混合したものを裏込に用い擁壁を裏込の方に向つて押しつける如く移動せしめた．その結果は明らかに受働土圧による破壊を生じた．次に裏込を堰堤に向つて移動させた．この場合堰堤の強度は擁壁面に紙を当てて保護することによつて著しく増大することが認められた．



茶臼山尖端部平面図

本実験は主として著者の一人，水島技師が内地留学のため当研究所に派遣中に担当実施したものである．

Ⅱ　地辷り防止堰堤の設計計算

〔1〕 一般的説明

地辷り防止工事は辷り土塊につき水分を減少せしめる等の手段によつて抵抗を増大する方法と，尖端部に堰堤を設けて之を阻止しようとする方法とがある．両者共極めて古くより行われている工法であり，処によつては可成の成功を収めている．茶臼山の場合には水分の減少による抵抗の増大を図る工法は今のところ不可能であり，従つて被害を最小限にとゞめんとする場合，地辷り防止堰堤によるより仕方がない．これについては既に昭和 23 年に計画を立案したことがあるが，諸種の事情のため実行に移されなかつた．今回再び同様の案が提出されたので設計についての研究を行つた．以下は力学的計算の部分のみを摘記したものである．計算方法は斜面の安定計算と擁壁の受働土圧についての計算の二様がある．

〔2〕 斜面の安定論による計算

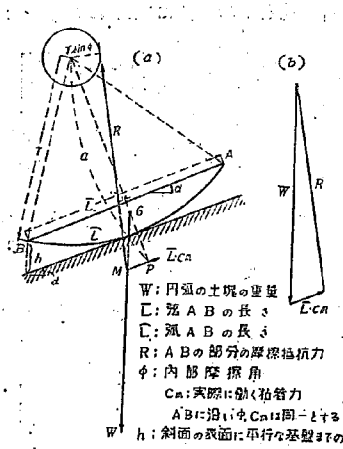
(1) 摩擦円法による斜面の安定計算　斜面の安定は摩擦円法に基いて計算する．摩擦円法の原理は円形滑り面の合反力は，その円と同心で半径 $r\sin\phi$ の円に接するという仮定に基くものである．

粘着力 c_m が弧 AB に沿つて一定であると仮定するときはその合力の大きさは $\bar{L}\cdot c_m$ である．

$$a\cdot\bar{L}\cdot c_m = r\cdot\widehat{L}\cdot c_m \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\text{or}\qquad a = r\cdot\frac{\widehat{L}}{\bar{L}} \quad\cdots\cdots(1)'$$

なる点 P を求める．P を通り AB に平行にして $\bar{L}\cdot c_m$ の大きさを有するベクトルは粘着力の合力を表わす．重心 G を通る鉛直線と前記のベクトルとの交点 M から滑り円の中心 0 を中心とし，半径 $r\sin\phi$ を有する円に切線を引けば之が弧に沿う摩擦力（反力）R の方向となる．図—1 (b) の如く滑り体の重力 W，粘着力の合力 $\bar{L}\cdot c_m$，反力 R を用いて力の三角形を造れば之が滑り体の釣合を表わす．



図—1 円形辷り面

以上は滑り体の釣合が成立する範囲内に於て正しいが，仮りに c_m が実験から求めた土の粘着力 c を越えると滑動を生ずる．即ち

$$c_m < c \cdots\cdots \text{安定}$$

$$c_m > c \cdots\cdots \text{不安定}$$

である．

(2) 地滑り最大深さ，地表法面長さ，粘着力間の一般的関係　円弧形の滑動体が限界の釣合にある場合近似的に次式が成立する．[1]

1) 山口昇：土の力学 p. 110

$$\tan\phi+\frac{2c}{wh\cos\alpha}\sec\alpha-\frac{4}{3}\frac{\bar{L}^2}{\bar{L}^2+4h^2\cos^2\alpha}\tan\phi=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

之から

$$c=K\frac{\bar{L}^2h\cos\alpha-12h^3\cos^3\alpha}{\bar{L}^2+4h^2\cos^2\alpha} \quad\cdots\cdots(2)$$

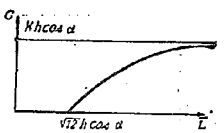
但し

$$K=\frac{1}{6}w\cos^2\alpha\tan\phi \quad\cdots\cdots(3)$$

h を一定とした場合 c と $\bar{L}$ との関係は次の図で表わされる.(図—2)

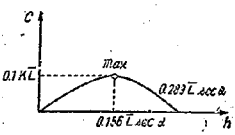
次に $\bar{L}$ を一定として $c-h$ の関係を求めると図—3 のようになる.

即ち地表面法長が定まっている場合深さ 0.156 $\bar{L}\sec\alpha$ のところを通る円が最も危険な滑り面を与えることがわかる. 此の時 c の極大値は 0.1 $k\bar{L}$ となり, 之は斜面の長さに比例して増大するから斜面長の長い法面程危険であることがわかる.



図—2 地表法面長さ $\bar{L}$ と粘着力 c の関係

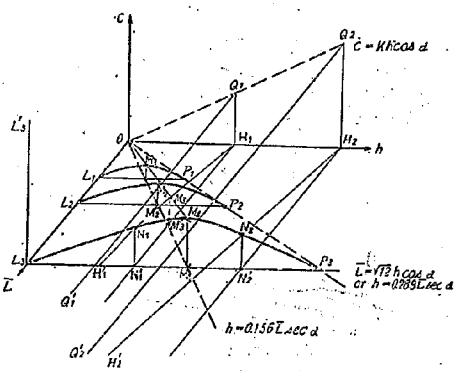
図—4 に於て $\bar{L}=\overline{OL_3}$, $h=\overline{OH_2}$ で表わされるような斜面は辷りの地表面長さは $\overline{OL_3}$ となるが地辷り最大深さは $\overline{OH_2}$ より浅く $\overline{L_3M_4'}$ となる. ところが $\bar{L}=\overline{OL_3}$, $h=\overline{OH_1}$ となると地辷り最大深さは $\overline{OH_1}$ となり基盤のために影響を受ける. 極限平衡に相当する粘着力も $\overline{M_4M_4'}$ から $\overline{N_1N_1'}$ に低下し, 安全度を増す.



図—3 地辷り深さ h 粘着力 c の関係

以上のことを取りまとめると斜面の表面から之に平行な基盤までの深さは法面の安定に影響をあたえ, 斜面長が同一である場合にはある深さまでは深さの増大と共に安定度は減少し, この極限深さより深い場合も最も危険な面は極限深さを通る円弧であるということがわかる.

(3) 茶臼山での計算結果 茶臼山には頭々の土が賦存し, 之等については既に土質試験を完了した. その結果から尖端部の堰堤の安定計算には次の数値を用いるのが最も適当であるように考えられる.



図—4 地辷り最大深さ地表法面長さ粘着力間の関係

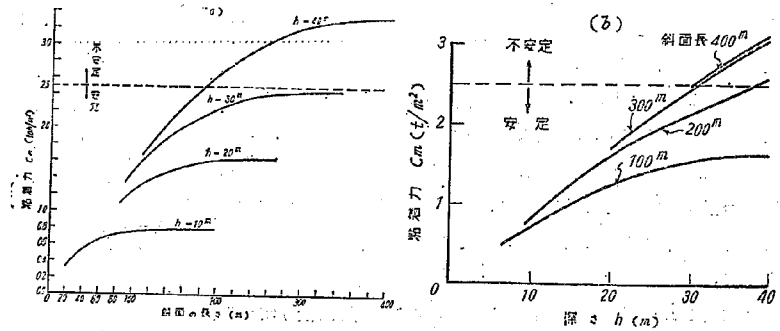
内部摩擦力 $\phi=1°$

粘着力 $c=2.5$ ton/m²

単位体積重量 $w=1.8$ ton/m³

この値は山新田から尖端部迄の泥流の運動状況からも十分確かめ得るものである. 谷の勾配即ち泥流の基礎

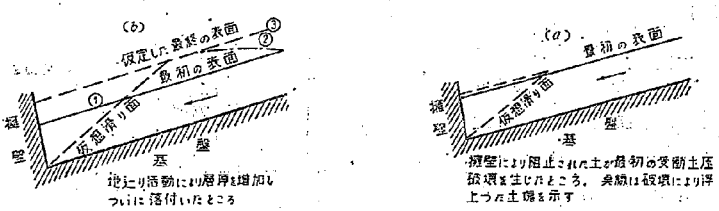
の勾配は表面の勾配とほゞ同一であると仮定する．之は実測の結果から α=約 8°50′ となる．図—1 に於ける基盤迄の深さ h，仮想辷り面の弦の長さ（即ち斜面長）と粘着力 c_m との関係を上記の仮定を用いて計算すると図—5 の如くなる．（図—5 は (1) 摩擦円法による計算のところで述べた方法で求めたものである）．



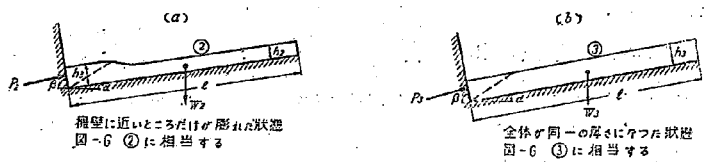
図—5　摩擦円法による斜面安定計算結果

(3) 擁壁の安定論による計算

図—6 に示すように最初の滑り面が生じてから層厚を増すのであるが，その順序として擁壁に近い部分か



図—6



図—7

ら順次厚さを増大すると考えると表面は ①，②，③ の順序に変化し ③ で落ち付くことになる．

l：斜面長，h_1：最初の地辷り厚，h_3：最後の地辷り厚，α：傾斜角，β：壁面の傾斜角，w：土の見掛比重，

W_2，W_3：土の全重量，P_2，P_3：擁壁の反力，ϕ：土の内部摩擦角，c：粘着力

とし，W の基盤面の方向の分力はすべて基盤面の反力と平衡を保つと仮定すれば，P_2，P_3 はそれぞれ次式で

表わされる.

$$P_2 = W_2 \cos\alpha(\tan\alpha - \tan\phi) - cl$$

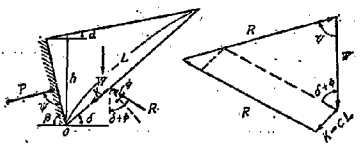
$$= wh_2 l \cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\phi) - cl \cdots\cdots (1)$$

$$P_3 = wh_3 l \cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\phi) - cl \cdots\cdots (2)$$

但し壁面で土は滑らないとする.

擁壁の反力 P は次式で表わされる.[2] (図—8 参照)

$$P = \frac{\sin(\delta+\phi)}{\sin(\delta+\phi+\psi)} W + \frac{\cos\phi}{\sin(\delta+\phi+\psi)} K \cdots (3)$$



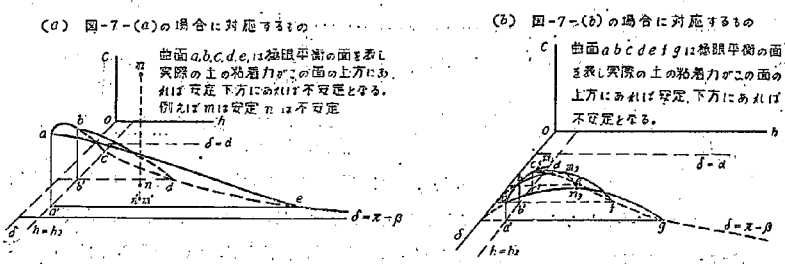
図—8　受働土圧による破壊

$$W = \frac{wh^2}{2} \frac{\sin(\beta+\delta)\cos^2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\delta-\alpha)} \cdots\cdots (4)$$

$$L = h \frac{\cos\alpha}{\sin(\delta-\alpha)} \cdots\cdots (5)$$

$$P = whl \cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\phi) - cl \cdots\cdots (6)$$

(3)～(6) の式の c, δ, h, の三つに着目して之等の関係を立体図に表わせば図—9 のようになる. 茶臼山の



図—9　受働土圧破壊に於ける c, δ, h 間の関係

場合の計算結果を図示すれば図—10, 11 となる.

〔4〕 壁面と土とのとりに対する安定性の計算

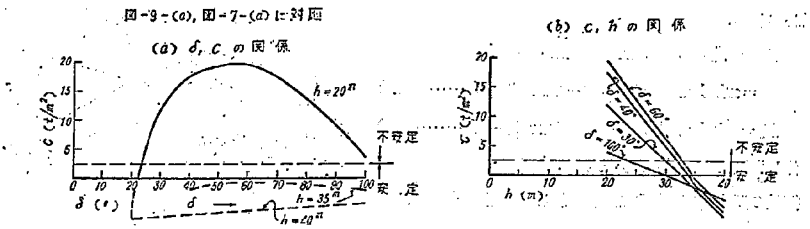
土塊の壁面に及ぼす圧力を P とした場合, その分力たる摩擦力 F および粘着力 K は図—12 の如く表わされる. 又 h, r, α, β, を図の如くする. なお $k = \tau c'$, 但し c' は壁と土との粘着力, ϕ' は壁と土との摩擦角.

図—7—(a) に相当する場合には次式が成立する.

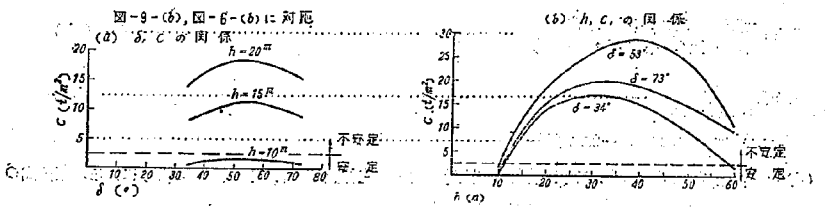
$$c' = \left[w\frac{h_2}{h_3} l \cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\phi) - \frac{cl}{h_3} \right] \frac{\sin(2\alpha+2\beta+\phi') - \sin\phi'}{2\cos^2\phi'\cos\alpha} \cdots\cdots (1)$$

図—7—(b) に相当する場合には次式が成立する.

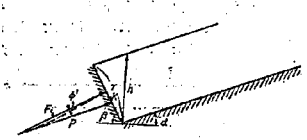
[2] 山口昇: 土の力学 p. 95



図—10　受働土圧破壊の計算結果



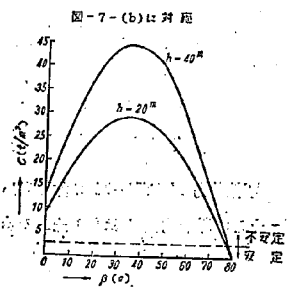
図—11　受働土圧破壊の計算結果



図—12　壁面と土との滑り

$$c'=\left[wl\cos^2\alpha(\tan\alpha-\tan\phi)-\frac{cl}{l_3}\right]\times\frac{\sin(2\alpha+2\beta+\phi')-\sin\phi'}{2\cos^2\phi'\cos\alpha}\quad\cdots\cdots(2)$$

β, l_3 を変数と考えれば c' の値との関係は前と同様に曲面で表わされるが，今回は之を省略し，たゞ実際の場合図—7—(b) の条件に於ける c'～h, β 間の関係を図示した（図—13）．之から $\beta \fallingdotseq 80°$ 以上なら大抵の場合安定なることを知る．



図—13　壁面と土との滑りに対する安定度
壁面の水平に対する傾角 β(°)
と粘着力 c(t/m²)の関係

〔5〕 考　　察

以上の計算結果を取り纒めて若干の考察を加える．先ず基礎として用いた理論であるが之等は何れも古く且つ既に一般に知られているところであり，その欠点や特長については今更こゝに繰返す必要はないと思う．たゞ之等のものは簡単であるだけに諸種の基本的事項間の関係がある程度はつきりつかみうるという特長はこゝに特筆してよいであろう．

堰堤により阻止された地こりの運動を図—5, 10, 11, 13 によつて調べてみる．先ず壁面の傾斜が約 35° のとき最も危険であり，約 80° 以上となれば土層がどんなに深くなつても壁面に於ける滑動に対して安全であるということがわかる．このようなことから壁面の傾斜を 80° として設計をたてる．次に地こり土塊の安定を三つの方法で考えてみる．一

つは擁壁による受働土圧破壊であり，他の一つは斜面の滑り面破壊である．図—10 に従えば最初の地層厚を 20 m とすれば直ちに破壊を生じ図—7—(a) のようになる．図—10—(b) から図—7—(a) の h_3 が約 33 m となれば一応安定することになる．ところで土が土方から補充されて来る場合には次第に図—7—(b) のようになつて来る．そうすれば図—11 に従つて平衡が破れ翼に厚さを増大する．堤壁の高さを限りなく高くし，土を無限に補給するとすれば約 90～100 m の高さがなければ安定点に達しない．他方に於て，滑り面破壊に対する安定を考えるとき，地層厚さが 30 m 以上になるまで殆んど心配なしということになり，殊に斜面長の短い滑りは殆んど考えなくてもよろしいということになる．

以上の諸論を要約すれば厚さ 20 m の地辷りを堰堤により堰き止めるときには滑り破壊の危険性はなく受働土圧破壊のみが心配となる．土砂の無限の補給を考えれば如何に高い堰堤を築いても遂には乗り越えるに到ることが想像される．

実際の場合は地形より判断して地辷りは堰堤に堰き止められれば沈砂地の方向に主力が向うから図—7—(b) のようになることは先ずないと考えられ，図—7—(a) のようになるとすれば堰高 35 m のものでほゞ満足な結果がえられようということになる．ところで堰堤附近の受働土圧破壊と辷り面破壊についての研究が見当らないので果して実際上述のような計算をしてよろしいのかどうかということになるので以下実験によつて検討してみたのである．

Ⅲ 模型実験（その 1）

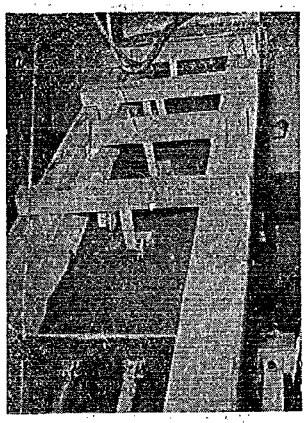
〔1〕目　的

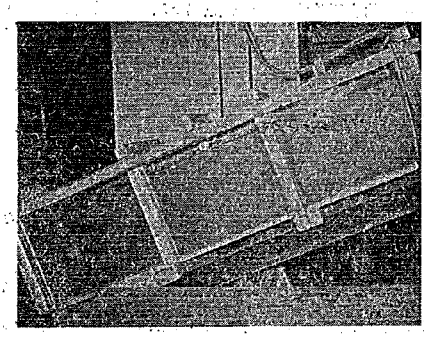
堰堤に依る裏込の受働土圧破壊と斜面の円形辷り面による破壊との関係を明らかにするために行つたものである．

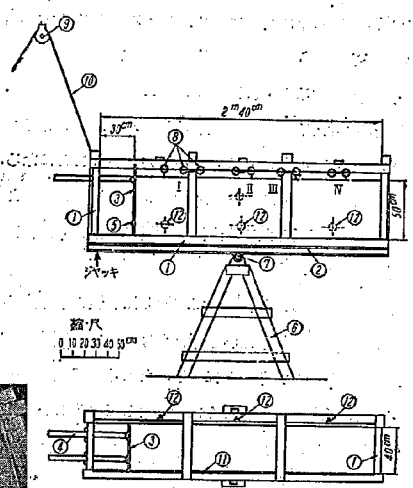
主働土圧については既に幾多の研究があり，壁面の土圧，滑り面の状況等も相当わかつているようであるが受働土圧については余り研究されていない．之は受働土圧破壊が一般には生じ難いことによるものと思われる．純粋の受働土圧破壊の実例には未だ遭遇したことはなかつたので壁面を裏込の方向に移動させる幾多の実験や考え方についても深く研究の目を向けたことはなかつた．而るに今回の如き場合は受働土圧破壊の生ずる可能性の極めて濃いものであり，之が如何なる形に於て起り得るかということは甚だ興味深いものということが出来よう．又滑り面破壊についても諸説があるが何れも無限斜面の破壊というものを取り扱つたものが多く擁壁に一端を押えられた斜面のものは殆んどない．最近 Base failure なる現象が一般に認められて来たが之も斜面の下端を破壊し得る土で支持した斜面と考えればやはり一端を押えられた斜面の安定ということになる．こゝには不動にして破壊し得ない壁によつて支えられた斜面に関する実験のみを記載した．

〔2〕設　備

実験に用いた設備は図—14 に示す．木箱　内法 .40 m×.50 m×2.10 m の一側を硝子張にし，中の土の移動状況が見えるようにした．擁壁に相当するものとして真鍮板を用い，その角度を変化し得る様に蝶を設けた（下から 10 cm のところ）．木箱を台の上に載せ傾斜は一端に取付けたジャッキとワイヤーロープ，滑車の組

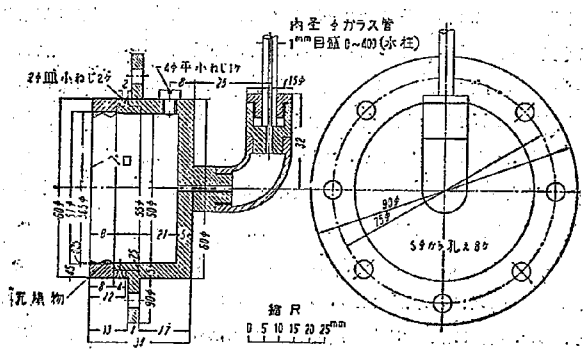






凡例
① 木箱(杉板)　⑦ 鉸
② I 型 鋼　⑧ ダイヤルゲージ
③ 鼠 鉄 板　⑨ 滑 車
④ 支 棒　⑩ ワイヤーロープ
⑤ 鉸　⑪ ガラス板
⑥ 木 製 台　⑫ 土 圧 計

図—14 地こり実験設備



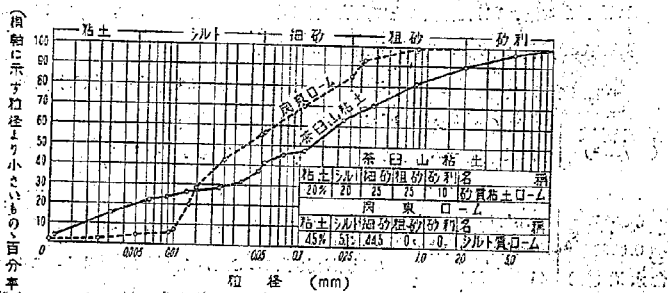
図—15 土 圧 計

合せに依つて調節出来るようにした．表面の移動(斜面方向並びに之と垂直の方向)はダイヤルゲージで測定した．地中の移動は側面に 5 cm 間隔に石灰又はパテで標点をつけ，ガラス板を通して之が見えるようにした．土圧計は図—15 に示すようなもので，ベローズの膜面の変形を毛細管に依つて拡大する構造になつている．

〔3〕 材　料

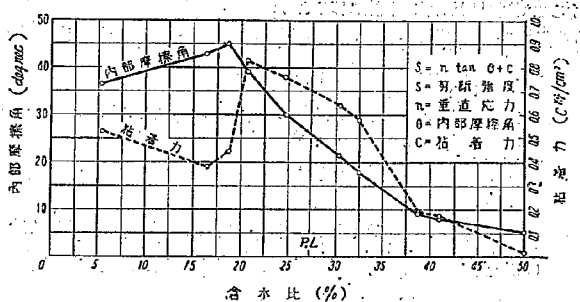
材料には茶臼山粘土と共に比較の意味で関東ロームを使用した．

（1） 茶臼山粘土　土性名称——砂質粘土ローム（U. S. Public Road Administration の分類による）（図—16），比重 2.57，塑性限界 27，液性限界 64，塑性指数 37，収縮限界 26，採取時の含水比 42 %，内部



図—16　模型実験用土の粒径加積曲線

摩擦角 8°50′，粘着力 0.2 kg/cm² (剪断試験は山口式三つ箱剪断——大型並びに豆型，一面剪断試験機を用い圧密低速剪断を実施した．試験結果は豆型，一面，大型の順に弱く出たが大差はなかつた)．含水比と剪断強度との関係を調べるために空気乾燥した土に水を加え，加える水量を変化せしめて試験を行つた．試験機は一面剪断試験機では強度が大となり剪断されないので豆型剪断試験機を使つた．その結果は図—17 に示す．



図—17　含水比と剪断強度との関係

供試体の突固め回数 10 回，落下高 30 cm，層数 1，モールド並びにランマーは JIS 型である．又空気乾燥した土に順次水を加え，突固め試験を行つた（モールド JIS 型，層数 3，ランマ 4.54 kg，落下高 30 cm，各層の突固め回数 25 回）．この結果より実験箱に試料を詰めるのに 50 % 前後の含水比なら詰込方法の影響は

殆んどないと考えられる．含水比 51％ の時の剪断強度並びに密度ほつきの通り，

内部摩擦角 5°30′，粘着力 0.05 t/m²，単位体積重量 1.76 t/m³．

（2）関東ローム　土性名称―シルト質ローム（図―16），土粒子の比重 2.71，塑性限界 74，液性限界 117，塑性指数 43，含水比 120％ の時の剪断強度は圧密迅速剪断試験（一面剪断使用）で，内部摩擦角 0°，粘着力 0，単位体積重量 1.4 ton/m³ であつた．ロームの剪断試験を行うとき，変形の増加に従つて水が絞り出されてなかなか正確な値がつかめない．

（3）杉板と粘土或はロームとの粘着力　実験に用いた箱は杉板で造つてあるので，之と材料との粘着力とを測定した．かんなをかけた杉板の上に真鍮の枠の中に入れた材料をのせ，この上に荷重をかけて横に引張るといつた要領で試験を行つた．その結果は表―1 の如くである．

表―1

垂直荷重 (kg/cm²)	粘着力 (kg/cm²)	
	粘　土	ローム
0.0209	0.0100	0.0045
0.0236	0.0105	0.0075
0.0362	0.0110	0.0070
含水比 (%)	44	118

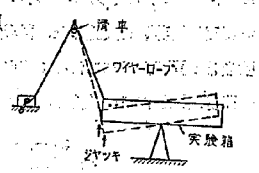
この結果から実験に際して採用すべき板と材料との粘着力は次の値をとればほゞ満足であると思われる．

粘　土……0.10 ton/m²

ローム……0.05 ton/m²

〔3〕実験方法

実験箱を水平にして置いて試料土を詰める．この際ガラス板に面した土中に 5 cm 間隔で標示点（石灰又はパテ）を入れる．他の側面には側圧を測るために土圧計を入れる．土圧計は 3 ケで底面より 10 cm の高さにはめ込んだ．図―18 で初め実線のように置いてあつた箱をワイヤーロープとジャッキで点線のように徐々に傾ける．この時の角度は箱に取り付けた角度測定装置により測定する．角度は 5°，10°，15°，20°，25°，30° の順に階段的に増加させ，各段階に於ては変形が全く停止するまで観測を続け次の段階に移るようにした．土の表面の移動はダイヤルゲージで測定する．ダイヤルゲージは初めは水平方向 4 ケ，垂直方向 2 ケで測定したが後に垂直方向を 5 ケにした．表面測定用のダイヤルゲージは測定圧を少くするためスプリングを取り外しておいた．箱を傾けるにはジャッキの方がワイヤーロープよりも滑らかに操作出来た．

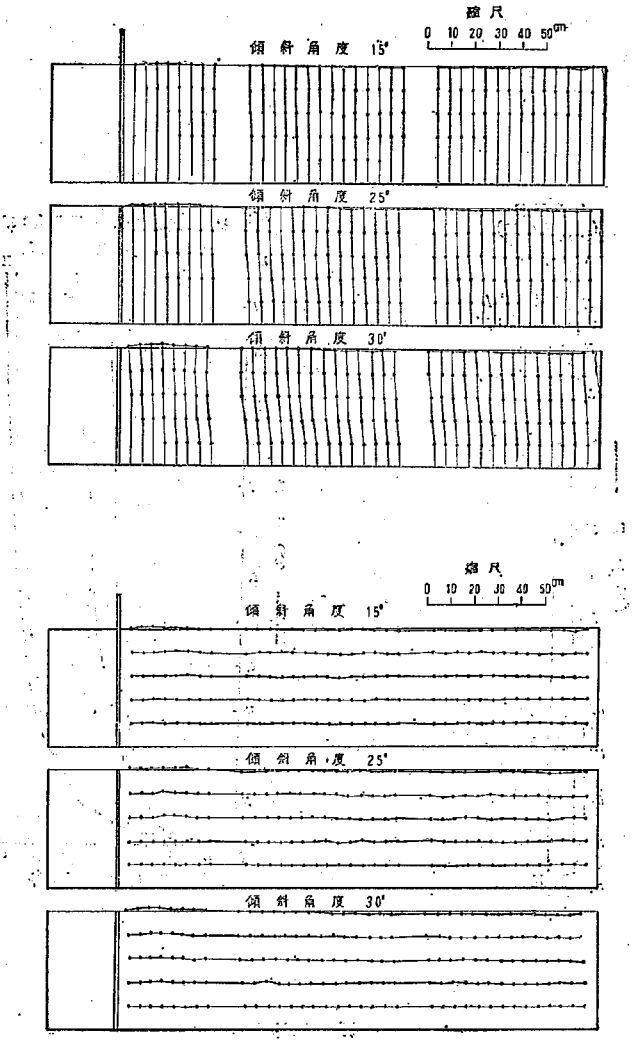


図―18　実験方法

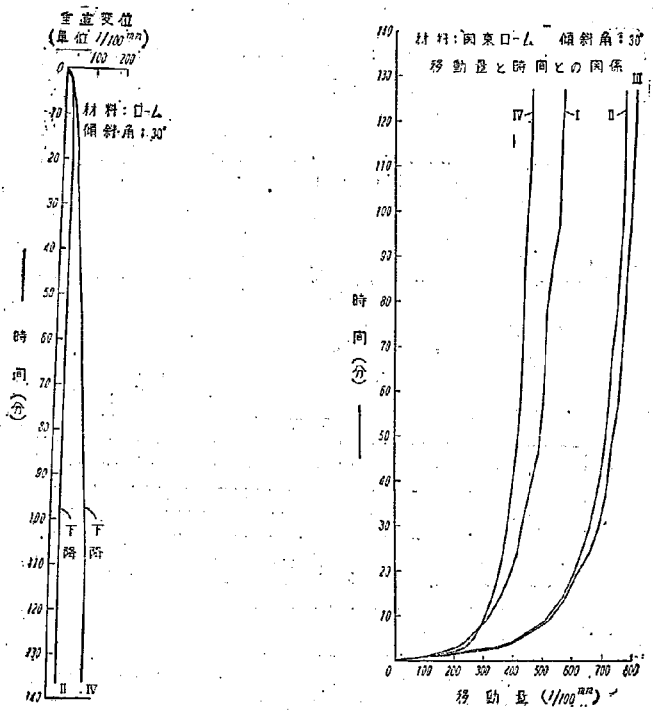
〔4〕結　果

実験結果は図―19，20 に示す．図―19 (a) は関東ローム，図―20 (a) は茶臼山粘土の変形を示す．之等はガラス張りを通して標点の位置を求め，之等を縦或は横に結んで描いたものであり，傾斜角度と共に変形が次第に大きくなつている模様がよくわかる．

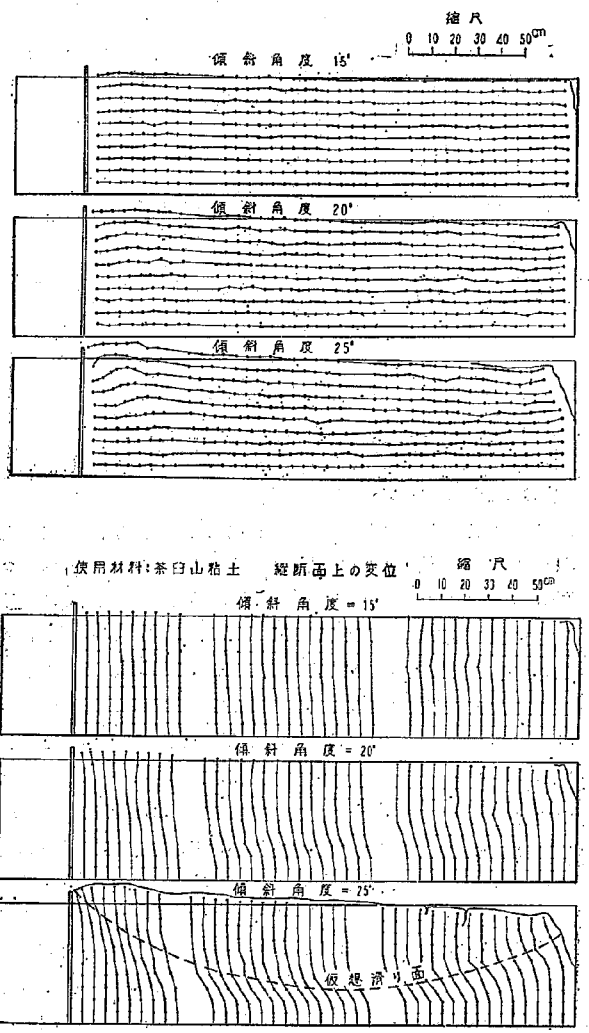
図―19 (b) は関東ローム，図―20 (b) は茶臼山粘土の表面の変形をダイヤルゲージで測定した結果を示す．図中 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ とあるのは図―14 のダイヤルゲージの位置に於ける移動量を示す．


縮尺
0 10 20 30 40 50cm
傾斜角度 15°
傾斜角度 25°
傾斜角度 30°
縮尺
0 10 20 30 40 50cm
傾斜角度 15°
傾斜角度 25°
傾斜角度 30°

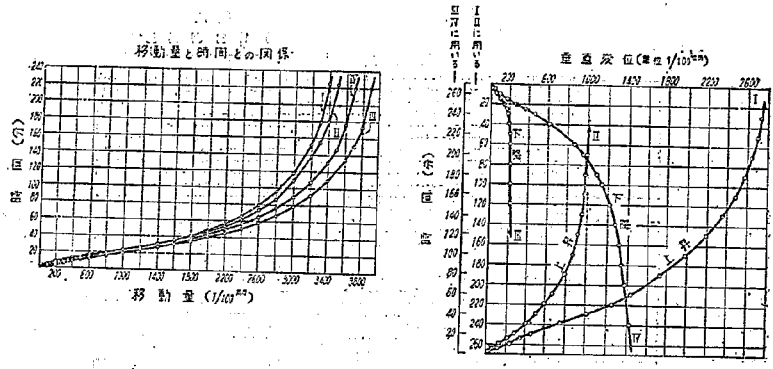
図—19 (a)


重錘変位
(単位 1/100mm)
0
100
200
材料：ローム
傾斜角 1:30°
時間(分)
下降
下降
I
II
III
IV
材料：関東ローム 傾斜角 1:30°
移動量と時間との関係
時間(分)
移動量 (1/100mm)

図—19 (b)


縮尺
0 10 20 30 40 50cm
傾斜角度 15°
傾斜角度 20°
傾斜角度 25°
使用材料：茶臼山粘土　縦断面上の変位
縮尺
0 10 20 30 40 50cm
傾斜角度＝15°
傾斜角度＝20°
傾斜角度＝25°
仮想滑り面

図—20 (a)



図—20 (b)

Ⅳ　考察並びに将来の研究事項

実験結果から次のことが考察される．

（1）実験の目的は滑りと受働土圧との関係を調べるということであるが，之に対する実験方法は二通り考えられる．一つは実験箱に土を詰め之を傾斜せしめて変形の状況を調べる方法で，他の一つは斜に保つた箱に材料をつめ，或は斜にしても殆んど変形を生じない硬さで詰めた後箱を所定の傾斜にし，材料に水分の変化を生ぜしめ，又は表面に荷重を加えて変形又は破壊を生ぜしめる方法である．第一の方法は今迄地ごり実験として普通に採用された形であり実験方法は簡単である．第二の方法は実際の状況を更に一層正確に再現するものであろうけれども実験はやゝ困難であり，今迄に鉄道技術研究所の斎藤技官が龍生で実施された他に例を聞かない．第一の方法をこゝで採用したわけは主として時間，費用等の点からである．今後適当な機会に第二の方法を実施し，更に完全なものにしたい意向である．第一の方法を採用した場合先ず問題になつて来るのは詰め方である．この点については前述したように成るべく詰め方の影響のないような含水量を選んである．次に傾斜の仕方である．今回は5度ずつ段階的に増加していつたのであるが，之と段階の切り方を変え，或は又各段階の停止時間を短縮したり等したときに如何なる変化が起るかをしらべる必要がある．そこで茶臼山粘土で3日間かゝつて 25° の傾斜にしたのと，10分間で同じく 25° の傾斜を与えたのとを比較した．この場合の結果としては前者の方が大きく出た．このことについて考えてみると，この様な箱の中に土を入れて傾けるということは，ある特定の境界条件並びに重力の場に於て物質の変形を求める実験を行うことである．ところで弾性体の小さな変形では変形前に境界条件は大した変化はなく従つて時間的な因子は事実上無視して差支えない．ところでプラスチックな物質では境界条件は時間と共に変化し，変形と境界条件とが相伴つて変化するというような複雑な状況を呈する．この実験のような状態で，時間をゆつくりかけた場合と速くした場合とで変形量が違うのは変形に対する境界条件としての束縛力が変形の進行と共に，即ち時間と共に弱くなつて行くからだ

表—2　表面の斜面方向の移動並に伸縮量

関東ローム　単位 $\frac{1}{100}$ mm

位置＼傾斜角		10°	15°	20°	25°	30°	摘要
	Ⅰ	75	340	(320)	405	228	ダイヤルゲージ設置点は下の方から逐次Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, と符号をつけた
	Ⅱ	280	320	(350)	430	312	
	Ⅲ	340	315	340	440	325	
	Ⅳ	180	50	130	210	235	
間隔	0～Ⅰ	−75	−340	(−320)	−405	−228	縮
	Ⅰ～Ⅱ	−205	−80	(−30)	−25	−84	縮
	Ⅱ～Ⅲ	+40	+5	(+10)	−10	−13	伸～縮
	Ⅲ～Ⅳ	+160	+265	+210	+230	+40	伸
	Ⅳ～	+180	+50	+130	+210	+235	伸

表—3　表面の斜面方向の移動量並に伸縮量

関東ローム　傾斜角 30°　単位 $\frac{1}{100}$ mm

位置＼経過時間(分)		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	摘要
	Ⅰ	128	156	172	185	196	200	204	209	218	224	225	227	
	Ⅱ	210	244	263	275	284	290	294	300	304	308	311	311	
	Ⅲ	214	250	275	286	295	304	308	311	316	320	323	325	
	Ⅳ	123	141	151	159	166	171	204	209	218	224	226	223	
間隔	0～Ⅰ	−128	−156	−172	−185	−196	−200	−204	−209	−218	−224	−225	−227	縮. 次第に増大
	Ⅰ～Ⅱ	−82	−88	−91	−90	−88	−90	−90	−91	−86	−84	−86	−84	縮. 殆んど不変
	Ⅱ～Ⅲ	−4	−6	−12	−11	−11	−14	−14	−11	−12	−12	−12	−14	縮. 30′以後殆んど不変
	Ⅲ～Ⅳ	+91	+109	+124	+127	+129	+133	+104	+102	+98	+96	+97	+97	伸. 殆んど不変
	Ⅳ～	+123	+141	+151	+159	+166	+171	+204	+209	+218	+224	+226	+228	伸. 次第に増大

表—4　表面の斜面方向の移動量並びに伸縮量

茶臼山　単位 $\frac{1}{100}$ mm

位置並びに間隔＼傾斜角	10°	15°	20°	25°	摘要
Ⅰ	280	1050	2400	3380	
Ⅱ	323	1280	2840	3690	
Ⅲ	360	1275	3000	3890	

Ⅳ	110	940	2320	3500	
0～Ⅰ	−280	−1050	−2400	−3380	縮
Ⅰ～Ⅱ	− 43	− 750	− 440	− 310	縮
Ⅱ～Ⅲ	− 37	(+5)	− 160	− 200	縮
Ⅲ～Ⅳ	+250	+ 335	+ 680	+ 390	伸
Ⅳ～	+110	+ 940	+2320	+3500	伸

表—5 表面の斜面方向の移動量並びに伸縮量

茶臼山 傾斜角 20° 単位 $\frac{1}{100}$ mm

位置並びに間隔＼経過時間	10′	20′	30′	40′	50′	60′	70′	80′	90′	100′	110′	120′	摘要
Ⅰ	1260	1500	1780	1920	2008	2070	2132	2175	2210	2244	2274	2300	
Ⅱ	1560	1970	2194	2360	2482	2580	2654	2718	2765	2804	2844	2872	
Ⅲ	1530	1930	2140	2296	2414	2508	2585	2630	2680	2740	2728	2748	
Ⅳ	1280	1510	1800	1884	1958	2022	2070	2104	2138	2164	2192	2020	
0～Ⅰ	−1260	−1500	−1780	−1920	−2008	−2070	−2132	−2175	−2210	−2244	−2274	−2300	縮．次第にます
Ⅰ～Ⅱ	− 300	− 470	− 414	− 440	− 474	− 510	− 522	− 543	− 555	− 560	− 570	− 572	縮．〃
Ⅱ～Ⅲ	+ 30	+ 40	+ 54	+ 54	+ 68	+ 72	+ 69	+ 88	+ 85	+ 64	+ 116	+ 124	伸．〃
Ⅲ～Ⅳ	+ 250	+ 420	+ 412	+ 412	+ 456	+ 486	+ 515	+ 526	+ 542	+ 576	+ 536	+ 528	伸．〃
Ⅳ～	+1280	+1510	+1800	+1884	+1958	+2022	+2070	+2104	+2138	+2164	+2192	+2220	伸．〃

と考えてはどうだろうか．他の種類の実験でも之と同様の現象が見られる．例えば圧密試験の場合はそうである．第二の実験方法に最も接近せしめるためには速度を極めて遠くすればよいように一応は考えられる．ところが第二の方法を採用した場合は土の敲化又は荷重の速度と，空間的にどういう順序にどれ程の時間をかけて作用を拡大して行くかということが大いに問題となり，もしこの様な手続が斜面の破壊乃至変形に決定的な影響をもつて来るようになれば擁壁と斜面というような組合せだけでは一般的に変形乃至破壊に対する結論を得られないということになり，甚だむづかしいことになる．傾斜速度をかえた実験だけで結論を出すのは早急であるが，今のところ変形乃至破壊の機構そのものについて根本的変化があらわれるとは思われない（但し極端な場合は除く）．そこで暫定的にこのような実験で満足できるとしておこう．

（2） 変形の観測結果を二つに分けて見て行く．第一は変形——時間の関係他の一つは変形——傾斜角度の関係である．変形——時間の関係としては図—20 に示すように最初は急激な変化が起り，次第に落ち付いて行く．その速度の変化状況についていえばプラスチックな性質の大きい茶臼山粘土はプラスチシテイの少い関東ローム に比して変形量は大きく，又落ち付くまでの時間も長い．ダイヤルゲージを用いた表面の斜面方向の

変形量観測の結果をまとめて表—2~5 を得た．これから次のことがいえる．

1) 表—2 から斜面の移動を測定すれば何れの点も下方に移動することは確かであるが，下方の部分即ち擁壁に近い部分は縮み，上方の部分即ち擁壁から遠い部分は伸びる．中間の部分即ち Ⅱ～Ⅲ の部分では最初伸びていたが次には縮んで来た．之は伸縮のない点が次第に上方に向つて移動したということを表わしている．表—4 は同様のことを茶臼山土について調べたもので，これからも上と同じ結論をうる．両者の相違点は前者に於ては伸縮のない点が Ⅱ～Ⅱ 附近にあるのに対し，後者に於ては伸縮のない点が Ⅱ～Ⅲ より上方に存在するということである．ロームに比して茶臼山土はプラスチックであるから，一般にプラスチックな性質の土の方が伸縮のない点が上の方に出て来るということが云えそうであろう．この事実は将来地辷り地に於て check し何れか利用の途がありそうに思える．ロームの場合伸縮のない点が次第に上方に移つたということは見方によつては塑性変形が次第に進行したことを示すものと解釈出来ないこともないであろう．

2) 表—3, 5 は表面の斜面方向の移動量並びに伸縮量と時間との関係をしらべたものである．関東ロームでは伸縮は主として縁端の局部的なものであり，中央部に於ては伸縮が殆んど行われない．之に反し，茶臼山粘土では伸縮量は長時間に亘つて漸次増大して行き，plastic の性質の強大さを如実に物語つている．

3) Taylor 博士は[3]

$$\tau=(\bar{\sigma}_{ff}+\sigma_i)\left(\tan\theta+f\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\cdots\cdots(1)$$

τ：剪断応力，$\bar{\sigma}_{ff}$：滑り面に直角に働く粒子間の垂直応力 (intergranular normal stress)，σ_i：intrinsic stress と称せられるある常数，θ：内部摩擦角，f：常数，ε：剪断歪，t：時間．

式 (1) を提案した．

之を書きかえて

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{f}\left[\frac{\tau}{\bar{\sigma}_{ff}+\sigma_i}-\tan\theta\right]\cdots\cdots(1)'$$

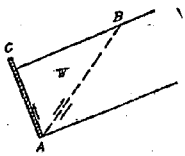
f, τ, σ_i, θ が時間に関係しないとすれば $d\varepsilon/dt$ は $\bar{\sigma}_{ff}$ の変化に応じて漸次変化していく．この実験に於ては土は殆んど飽水しているので傾斜を変化した途端には若干間隙水圧の増大を招来し，$\bar{\sigma}_{ff}$ は透水性の大きい関東ロームの方が茶臼山土より速やかに増し，それだけ $d\varepsilon/dt$ は速やく減少する．(実際の地辷りでは本実験の如き単一の円形滑り面からなる地辷りの他に縦横に連つた多数の地辷りが地辷り群をなすことがあり，全体としていわゆる creap 現象がみられることもある．伸縮しない点の上下運動と地辷り運動の進行状態，辷りに関係する物質の力学的性質との関係を把握することは将来の研究問題であろう．)

次にダイヤルゲージを用いて測つた斜面と直角方向の変形，即ち隆起沈降観測の結果から表面下端部は隆起し上端部が沈降することがわかる．云いかえれば表面は傾斜運動を起すということが出来よう．その速度は傾斜角変更当初は急激であつて次第に落ち付いて来ることは斜面の方向の変形と同様である．

以上の如き表面の変形運動は既に茶臼山地辷り地帯に於て観測された現象と全く相一致する．

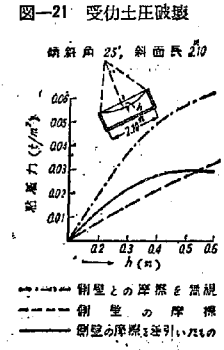
3) Taylor : Soil Mechanics,

（3） 次に変形――傾斜角度の関係についてしらべてみる．之等については既に（2）に於て若干考察した．関東ロームは茶臼山土に比較してはるかに少い変形量しか示さなかつた．図―20 で見ると土塊内部の相対的変位（或は変形）の最も大きいのは表面の最下部即ち擁壁との接触部と最上部即ち箱との接触部であり，下部では圧縮された土が上方に向つて膨れ上り，上部では表面は沈下すると共に箱との間にV字型の間隙を生ずる．又上部 IV のダイヤルゲージの取付台の足がある部分にも亀裂が発生する．上部の表面には引張応力が生ずることは移動観測の結果明らかであるがこの応力により最も弱い点に亀裂が発生すると考えられる．一番弱い点が箱との接触部であることは間違いない．変形の最も少いのは基盤に相当する箱の底面附近であり，上端と下端部では特にその巾が広い．この様な部分では殆んど肉眼で認められる程度の変形は起らない．表面並びにガラス面に共に直角な断面に於ける速度の分布を見ると地表面では速く底では遅く，この間漸進的な変化をしている．角度が緩い時にはこの間殆んど不連続性は認められず従つていわゆる辷り面は存在しない．ところが茶臼山土 25° の傾斜に於ては直径約 4 m の稍々明瞭な辷り帯となつて現れた．これから見ると相当プラスチックな土でも変形が進むにつれて辷り面乃至辷り帯を生ずることがわかる．



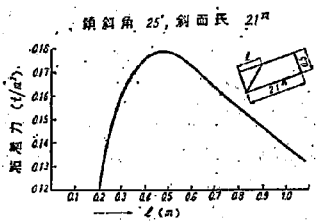
図―21　受働土圧破壊

一方当初予定していた受働土圧破壊については全然その気配はなかつた．実は擁壁面の最下端，又は下端から約 10 cm 上方にある鋲の部分を起点とする辷り面が発生することを大いに期待していたわけであつたが現実は全く予期に反した．図―21 に於て楔形の土 W が受働土圧破壊を生ずるためには AB 面に沿つて矢印の方向に相対変位が起らなければならないが本実験の場合到底このようなことが起り得ないことは今にして考えればむしろ当然なことと思われて来るのである．

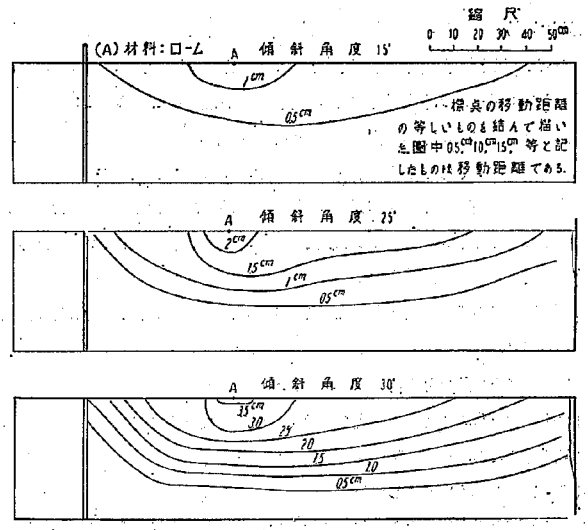


図―22　茶臼山粘土を用いた地辷り実験において円形滑り面説で計算した結果

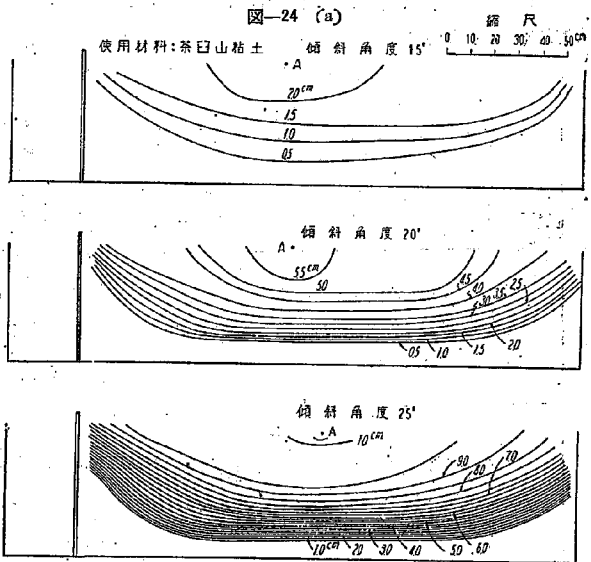
粘土の塑性変形については別の報告に，受働土圧破壊については本報告中に後程述べることにし，こゝでは設計計算の項について行つたと同様な計算を行つて見る．唯相違点は板と土との摩擦力を考慮に入れたということだけである．先ず茶臼山粘土について円形滑り面説に従つて計算した結果を図示すれば図―22 の如くなる．之から見ると深さ $h=0.4$ m が最も危険な滑り面となりその時の粘着力は 0.03 ton/m² となつている．実験に於てはこの計算結果とほゞ相一致し $h=0.35$ m を有する滑り面が発生している．剪断試験結果から $c=0.05$ ton/m² を得ているが之もほゞ良好な値を示している．（図―20 参照）参考のために受働土圧破壊を仮定したときの安定計算結果を図―23 に示した．之から見ると当然受働土圧破壊が起る筈であるが上記のような理由により実際は起らない．関東ロームの場合は強度が大きすぎて滑り面の発生を見るに到らなかつたため計算も省略する．



図―23　茶臼山粘土を用いた地辷り実験において受働土圧破壊を仮定して計算した結果



図—24 (a)



堰堤の移動距離の等しいものと結んで描いた。図中 0.5cm 1.0cm 1.5cm 等と記したものは移動距離である。線の間隔の接近した所が辷り帯である。

図—24 (b)

（4） 変形の状況を見易くするために標点の移動から求めた土粒子の運動方向を連ね，水理学で取り扱う流線の如きものを描いた（以下簡単に流線網と仮称する）．之を図—24 に示す．図の A 点は粒子間の相対変位がない点であり ダイヤルゲージの伸縮測定結果から伸縮のない点として求めたものに相当するわけである．

（5） 標点の移動から最大並びに最小の歪を生じた方向を求め，この方向を互に直交する二つの曲線群を以て表わしたのが図—25 である．（之を主歪方向線図と仮称する）．

（6） 土圧計の測定結果の一例を図—26 に示す．傾斜角度をかえた後下部では 最初土圧が急激に上昇するがやがて落ちつく．上部の土圧計の読みは殆んど不変である．表面の伸縮と対比すれば興味がある．

（7） 将来の研究事項

1） 擁壁の下部，鉸から下の部分を取り除き或は之を種々な支承条件の下で保持しその影響をみること——模型実験（その 2）で実施．

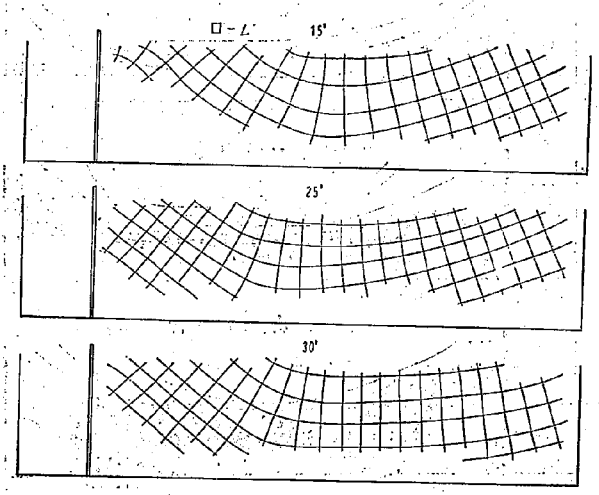
2） 擁壁の鉸より上の部分の角度を変化せしめること．

3） 擁壁自体可動性を有せしめること——模型実験（その 3）で一部実施．

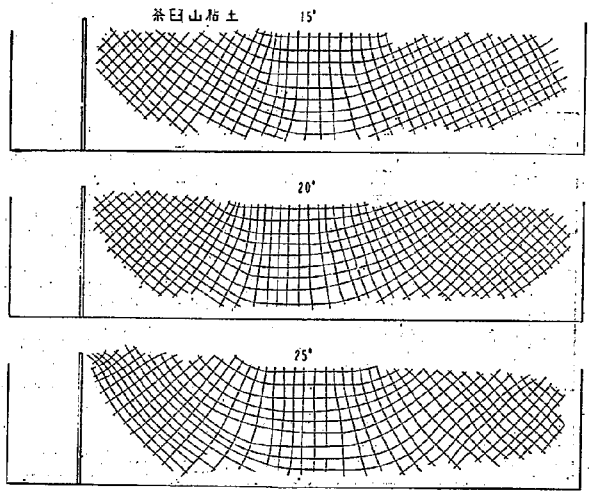
4） 受働土圧を実測すること．

5） 土を成層状態にしたり不均一質にして行う．

6） 土にベントナイト等を混合し，水を注加して軟化せしめ，或は地下水面の上昇下降の状況を現示して実験する．この場合間隙水圧をも測定する．

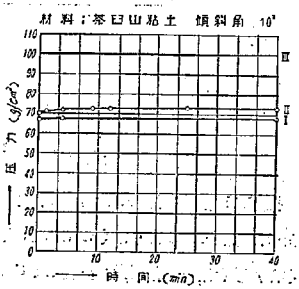


図—25 主歪方向線図



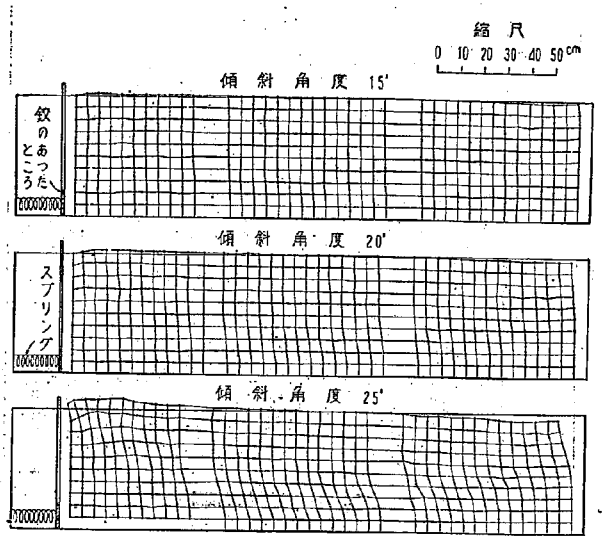
図—25　主歪方向線図

V　模型実験（その2）



図—26　土圧計測定結果

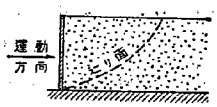
模型実験（その1）に於て受働土圧破壊が生じなかつたのは図—21 における AB 線に沿う相対変位が起り得なかつたからであると考え，之を生ぜしめる目的で擁壁の鉸から下の帯状の板の部分を鉸のピンを取外して上部と絶縁し，スプリングで支持し，前と同様の実験を行つた．その結果は図—27 に示す．（ダイヤルゲージによる変位，土圧計による土圧，板の変位の実測結果は略す）これによるとスプリングの弾性のために鉸より上の擁壁は僅かに押し出されてやがて平衡を保つてしまう．押し出されただけこの附近の土が乱されるわけであるが，この乱れは遠方に伝わらないで前の実験とほゞ同様な円形滑り面帯があらわれる．最後にスプリングを取り外して見たが土が今迄より一層多く外にはみ出したというだけで大勢には何等の影響もなかつた．これは箱の底と土との強い粘着力，鉸の上の擁壁の下端との摩擦力が強く利いているためであろう．次にスプリングの最も弱い場合としてスプリングをつけずに実験してみると擁壁下端附近の土はスプリングの有る場合より更に広範囲に乱され，表面の擁壁面に近い部分の膨れ上りが減少し，擁壁が上方に持ち上げられるかのように感じた．茶臼山の泥流に浮んで 200 m も流れている砂防堰堤はこのようにして浮き上つたのだろうと想像される．この実験の結果から擁壁の下端の支持状況並びに箱の底が受働土圧や滑りに重大な関係のあることがわかつた．この問題に関する更に進んだ研究は今後に譲る．



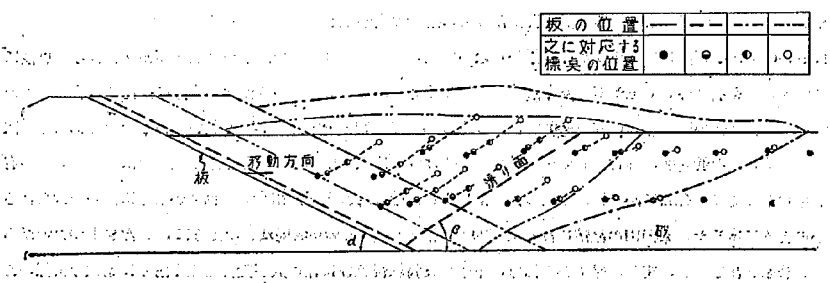
図—27

Ⅵ 模型実験（その3）

擁壁に可動性を持たせた場合の受動土圧破壊の実験の中で一般に広く行われたのは 図—28 のようなものである．砂並びにグリースを混ぜて多少粘着性を与えた砂を用い，傾斜角を変化せしめて行つた実験結果は図—29 に示す．

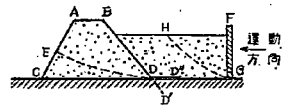


図—28 受働土圧破壊の実験—普通行われているもの



図—29

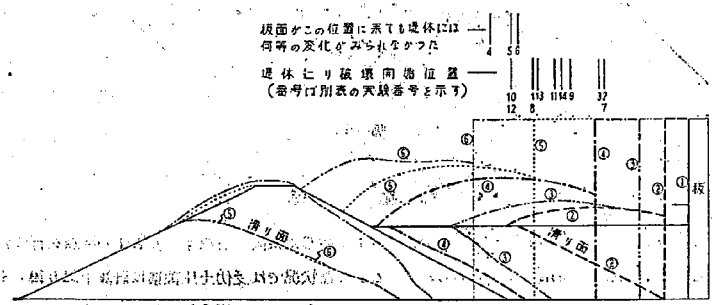
次に多少趣をかえ，板 FG を矢印の方向に動かす．(図—30) この場合最初 GH のように破壊面が生じ土は次第に盛り上る．G が D′附近に来れば DE の如き破壊面を生じ堰堤がこわれる．この様な型式の実験結果を図—31 に示す．図—30 の BD 面を保護すれば堰堤が破壊に



図—30　受働土圧破壊の実験
—板を逆に動かす

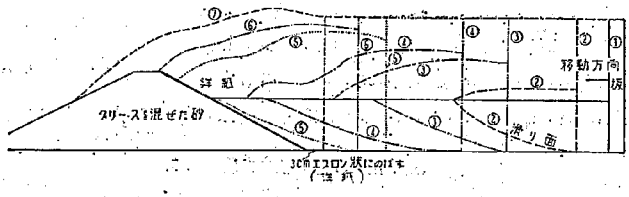
(別　表)　図—31 受働土圧破壊 No. 1.

実験 No.	堤体材料	基礎	地辷り土	表並裏法勾配	法面保護	摘要
1	(砂)+(グリース)	板	砂	1:2	なし	図—31 (a)
2	〃	〃	〃	1:1	〃	堤全体が動く
3	〃	〃	〃	〃	ボール紙	〃
4	〃	〃	〃	1:2	〃	不動
5	〃	〃	〃	1:2	ボール紙（粗面を上にする）	〃
6	〃	〃	〃	〃	ボール紙（小さな矩	不動
7	〃	〃	〃	〃	形に切つたもの）	堤全体が動く
8	〃	〃	〃	〃	洋紙	堤体に龜裂
9	〃	(砂)+(グリース)	〃	〃	なし	堤体に龜裂と移動
10	〃	〃	〃	〃	No. 6, 7 と同じ	〃
11	〃	〃	(砂)+(グリース)	〃	なし	基礎にも龜裂発生
12	〃	〃	〃	〃	No. 10 と同じ	底面に僅かな龜裂
13	〃	〃	〃	〃	洋紙（エプロン状にする）	不動
14	〃 よくじめ固める	〃	〃	〃	なし	堤体に龜裂発生 しめ固めの効果大なり

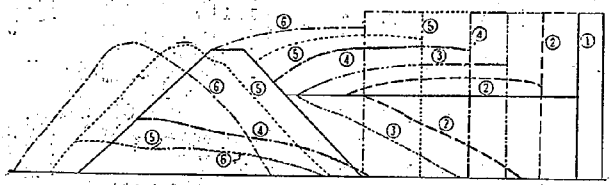


図—31

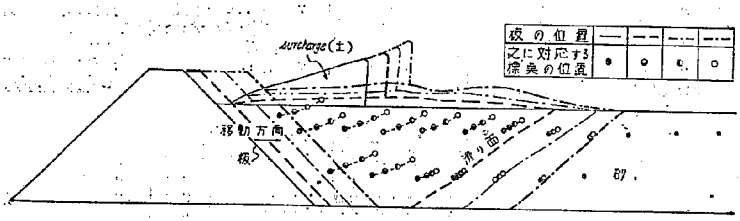
対して相当の抵抗力を示すようになるだろうと思われたので，BD 面に洋紙をのせ，又コンクリート版を想定して矩形に切つたボール紙を敷いてみたが果して相当な効果を表わした．特に D 部のところの構造は重要で DD′ の如く根入をするか DD″ の如くエプロン状にするのが効果的であることがわかつた．(図—32) 裏込の一部を内部摩擦角の大きい小石でおきかえこの部分の破壊を防ぎ擁壁面での滑りや受働土圧破壊を防止した場合，surcharge を加えた場合について普通の受働土圧破壊を行つた結果も参考のためにかゝげておく．(図—33)



図—32 (a)



図—32 (b)



図—33

Ⅶ 結　　語

茶臼山地辷り防止用土堰堤の設計計算を行い，その中に生じた疑問を解決すべく若干の実験を行つた．その結果によると土が運動して堰堤にせきとめられているような状況では受働土圧破壊は計算上起り得ても実際上は起らない．均一質の土では円形辷り面が唯一の破壊方式である．この場合辷り面の一端は堰堤と表面との接触点附近にある．茶臼山の場合図—5 (b) から地層厚さ約 30 m になれば斜面長 300～400 m の辷りを生ずる．ところが実際は沈砂池の方向に大勢が向うから 30～35 m を越すとしても大した量ではなかろう．又斜面長も 200 m 以下となるであろう．こう考えてみると一応高さ 30～35 m の土堰堤を旧滝沢川の谷間に設けてみることもあながち無理ではないように思える．その構造上特に留意を要するのは擁壁面を施工の許す限り急勾配とし（約 80°）表面には補強の意味でコンクリート版を張る（実際その 3 による）．又裏込には現場にある石を集めて詰めるようにする．施工は短期間に全堰堤を築くというのではなく，押し出した土砂を用い長期に亘り除々に施工して行く．この間絶えず地辷りの運動状況を観測し，工事をしながら次の段階の準備をすそ

ために土質力学を有効に利用するならば必ずや実現可能となるであろう．ゆつくり施工することは土堰堤の安定のためにも必要である．

しかしながらこの様にして土堰堤により最も損害の大きな土地を守り地辷りの方向を転ぜしめるということも経済的な考慮なくしては実施不能であり，本報告はこの点に全然触れていないのであるから，この工事の絶対的必要性を説くものでないこと勿論である．

なお本報告により斜面の辷りと受働土圧破壊との関係，斜面を支持する擁壁の辷りに対する影響がいくらかでも明らかにされたと思う．この部分は河川堤防，築堤の安定にも利用し得よう．即ち法面の安定度を増す意味で法尻に力杭を打つ工法は適当であるという結論を得る．