土木研究所報告

第98号

ダム取付部風化岩の透水性について……今工誠也 西藤慎一…(1)

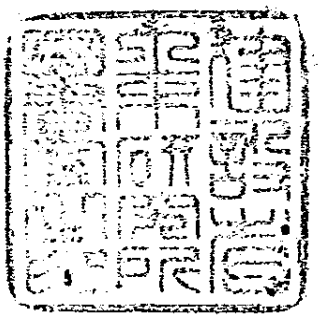
河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1)……佐吉芦藤川田清秀和一夫男…(13)

バケット型水叩の水理機能に関する実験的考察……村伊幸雄集院敏…(31)

連続ボックスガーターの応力解析に関する研究……田神原保憲二雄省掛哲男…(59)

単列ラジアル球軸受の静ラジアル荷重，撓み，遊隙の関係について……木村純…(109)

放射性同位元素を使用した地下水調査報告
——玉川温泉における地下溶透除毒工法に関する調査——……有泉昌 近藤紀徳 森芳…(123)



昭和32年12月

建設省土木研究所

正　誤　表

放射性同位元素を使用した地下水調査報告

頁	行	誤	正
2	24	現地には	現地は
〃	36	温泉を	温泉水を
〃	〃	粘土岩石類の	粘土岩石類との
3	表備考	剝られて	掘削されて
4	表—2 第5項	8.1×10^{-1}	8.1×10^{-2}
〃	下から 20	$Q'=\dfrac{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{注入水}-\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{注入水}}{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{湧出水}}$	$Q'=\dfrac{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{注入水}-\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{湧出水}}{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{注入水}}\times100$
〃	下から 15	$P=\dfrac{[Cl^-]_{注入水}-[Cl^-]_{注入毒水}}{[Cl^-]_{湧出水}}$	$P=\dfrac{[Cl^-]_{注入水}-[Cl^-]_{湧出水}}{[Cl^-]_{注入水}}$
5	18	リヨウ化パラヂウム	ヨー化パラヂウム
9	19	$6N^-$ アンモニア	$6N$ アンモニア
10	4	「参考用……であつた」	括孤を取る
12	15	空隙率を 35％ とすれば	の次に $k=3037$ cm/day を加える
12	表—4 標題	湧井口	湧出口
15	図—8 縦軸	$\times10^{-2}$	$\times\frac{1}{2}\times10^{-2}$
20	42	推定さる	推定される

土木研究所報告第98号

正　誤　表

連結ボックスガーターの応力解析に関する研究

頁	行	誤	正
2 (60)	上から1	続続桁	連続桁
3 (61)	下から 5, 6	$\sin\frac{i\pi x}{n}$	$\sin\frac{i}{n}\pi x$
4 (62)	上から4	$\left\{\frac{1}{(n-1)^4}+\frac{1}{(n-1)^4}+\cdots\cdots\right.$	$\left\{\frac{1}{(n-1)^4}+\frac{1}{(n+1)^4}+\cdots\cdots\right.$
6 (64)	8 式中後から1.3 項	$+\frac{1}{(4n-i)^3},\quad+\frac{1}{(6n-i)^4}$	$+\frac{1}{(4n+i)^3},\quad+\frac{1}{(6n+i)^3}$
7 (65)	上から 2 最後	$+\frac{1}{(2n-2)^3}$	$+\frac{1}{(2n+2)^3}$
〃	下から 12	$\sin\frac{m\pi x}{l}$	$\sin\frac{m\pi x'}{l}$
8 (66)	13 式	Oli	$\mathfrak{M}i$
11 (69)	下から6	$-\frac{a^2}{2}\alpha_{1i}\frac{DI_{1A}}{}$	$-\frac{a^3}{2}\rho_{1i}\frac{EI_{1A}}{}$
13 (71)	下から3	横断	横桁
14 (72)	上から5	$\frac{3}{n_1}$	$\frac{2}{n_1}$
15 (73)	44 式	i^B_{1+}	i^B_{1-}
〃	46 式	$\sum_{i=1}^{n_1-1}$	$\sum_{i=1}^{n_2-1}$
16 (74)	下から6	$\left\{H_{2i}R_{2i}\cdots\cdots\right.$	$\left\{H_{2i}P_{2i}\cdots\cdots\right.$
〃	47 式中下から3	$\left.\right\}2M_{1A}\left\{\cdots\cdots\right.$	$\left.\right\}-2n_{1A}\left\{\cdots\cdots\right.$
17 (75)	下から5	$\overline{GI_{HA}}$	$\overline{GI_{1tA}}$
18 (76)	上から4	$(-1)i\cdots\cdots$	$(-1)^i\cdots\cdots$
〃	〃	$M_{0A}+\frac{2}{n}\cdots\cdots$	$M_{1A}+\frac{2}{n}\cdots\cdots$
〃	〃	$M_{1B}-(-1)^i\cdots\cdots$	$M_{0B}-(-1)^i\cdots\cdots$
19 (77)	上から3	$F_A\left\{\frac{M_{0A}l_1}{3}+\cdots\cdots\right.$	$F_A\left\{\frac{M_{0A}l_1}{6}+\cdots\cdots\right.$
〃	上から8	$R_2{}^8\frac{I_{1A}}{I_{2B}}\cdots\cdots$	$R_2{}^i\frac{I_{2A}}{I_{2B}}\cdots\cdots$
〃	上から9	$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n_2-1}$	$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}$
〃	下から 2, 4	$\sum_{i=1}^{n_1-1}$	$\sum_{i=1}^{n_2-1}$
19 (77)	下から5	$\frac{I_{2B}}{I_{2B}}$	$\frac{I_{2A}}{I_{2B}}$
〃	〃 6	$-R_{1i}M_{0A}+(-)$	$-R_{1i}M_{0A}+(-1)$
〃	〃 9	$=\left\{\frac{M_{1B}l_2}{3}\right.$	$=\left\{-\frac{M_{1B}l_2}{3}\right.$
21 (79)	67 式中		$\left.\right\}$をつける
〃	68 式中	$R_{1i}M_{2A}$	$R_{2i}M_{2A}$
22 (80)	72 式中	$\sum_{i-1}^{n_2-1}$	$\sum_{i=1}^{n_1-1}$

頁	行	誤	正
22 (80)	72 式中	$\left\{\frac{l_1\frac{I_{1A}}{I_{1A}}}{3}\right.$	$\left\{\frac{l_1\frac{I_{2A}}{I_{1A}}}{3}\right.$
〃	下から 13	0.3085 cm^4	0.32085 cm^4
〃	〃 8	I_1	l_1
24 (82)	上から 8	$M_{1A}=M_{2B}$	$M_{1A}=M_{2A}$
〃	75 式	0.923961 M_2	0.923916 M_2
〃	下から 5	$\frac{2}{4}P\sin\frac{i\pi}{4}$	$\frac{2}{2}P\sin\frac{i\pi}{2}$
25 (83)	表—11	Aj_3	Aj_2
〃	図番	図—22 及び 23	図—22—1, 図—23—2 とす
27 (85)	上から 9	P_{2ii}	P_{2i}
〃	79 式中	$(-1)^iU_{2i}\cdots\cdots$	$(-1)^i$ をとる
〃	表—13	295.765	295.768
28 (86)	下から 14	$\frac{2}{4}\sin$	$\frac{2}{4}P\sin$
〃	81 式中	$M_{2A}=83.7861P$	$M_{1B}=83.7861\,P$
30 (88)	図番		図—28 と図—29を入れかえ
31 (89)	表—23 中	$M_{2B}=$	M_{2A}
32 (90)	表—28 中	$\mathfrak{A}_{1i}$ A_{1i}	$\mathfrak{A}_{2i}$ A_{2i}

ダム取付部風化岩の透水性について

建設技官　今　西　誠　也
建設技官　工　藤　慎　一

（昭和 31 年 10 月）

On the Permeability of Weathered rock in the Dam abutment

(October 1956)

S. IMANISHI
S. KUDŌ

Synopsis :

Foundation rock of Tōno Dam, located in Iwate Pref, is granit which is soundly exposed on the foundation and right abutment, but is badly weathered at the left abutment.

The weathered granit is so relatively loose and pervious, leakage through the left abutment must be expected, when the reservoir will be filled.

In order to make the dam safe and useful for the purpose intended, we measured the co-efficient of permeability of the weathered granit and determined the extent and the depth of concrete cut-off wall which is required to reduce the velocity of percolating water and prevent the piping within safe limits.

要　　旨

岩手県遠野ダムの基礎岩盤は花崗岩で，左岸台地はいちじるしい風化作用を受けて「マサ」状化している。このため貯水による「マサ」からの漏水，パイピングなどが懸念されたので，現地において「マサ」の透水係数を測定し，この値をもとにしてパイピングなどを起さないために必要な止水壁の長さについて検討した。

目　次

1. 緒　言……(1)
2. 地　質……(3)
3. 透水係数の測定方法ならびに測定結果……(4)
4. 予想浸潤線……(7)
5. 止水壁の長さについて……(10)
6. 結　語……(11)

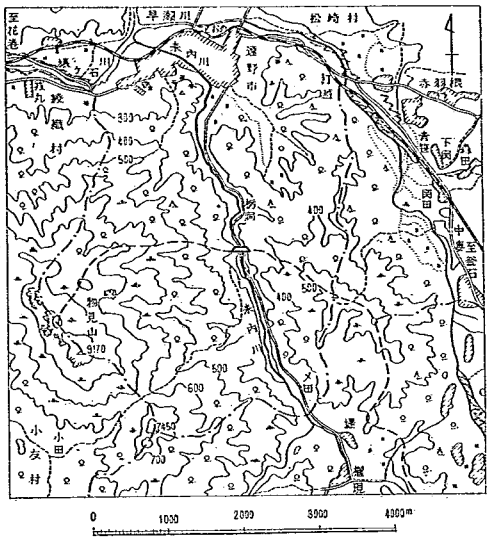
1. 緒　　言

岩手県土木部が施工中の遠野ダムは，遠野市栃洞地先において来内川を横断し，河床上26.5mの高さを有する洪水調節ダムであつて，これによつて計画洪水量205m³/secのうち110m³/secを調節して下流放水量を95m³/secに抑制しようとするものである。（図—1，2）

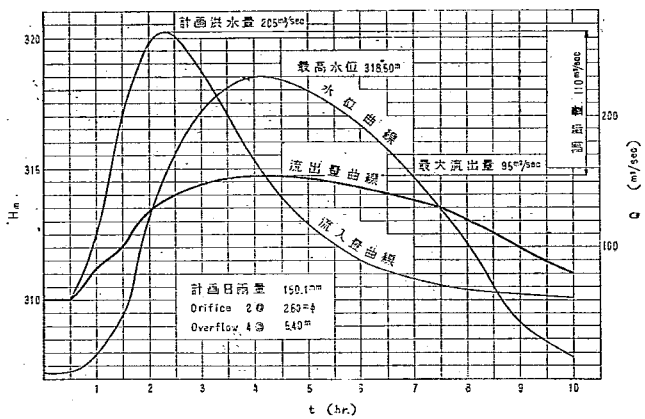
ダム地点の基礎岩盤は花崗岩であるが，左岸台地はいちじるしい風化作用を受けて「マサ」状化しており，貯水による「マサ」からの漏水，パイピングなどが懸念されたので，岩手県土木部の依頼により左岸台地において「マサ」の透水係数を測定し，この値をもとにして左岸台地を透水性の面から解析し，必要な止水壁の長さに関して考察をおこなつてみた。

透水性の解析にあたつては「マサ」状化した風化花崗岩をあたかも砂のような多孔性媒質とみなして，その中の水の流れは Darcy の法則，$Q=k\cdot\frac{Ah}{L}$ に従うものと考えた。ここに Q：水量，k：透水係数，h：水頭，L：滲透路長，A：断面積である。

なお，「マサ」は砂に近似した性質をもつているが，あくまでも花崗岩の風化したものであつて砂とまつたく同



図—1　平面図

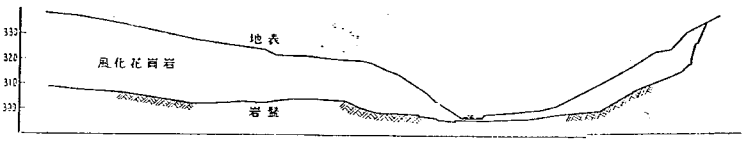


図—2　洪水調節図（其の一）アイオン型

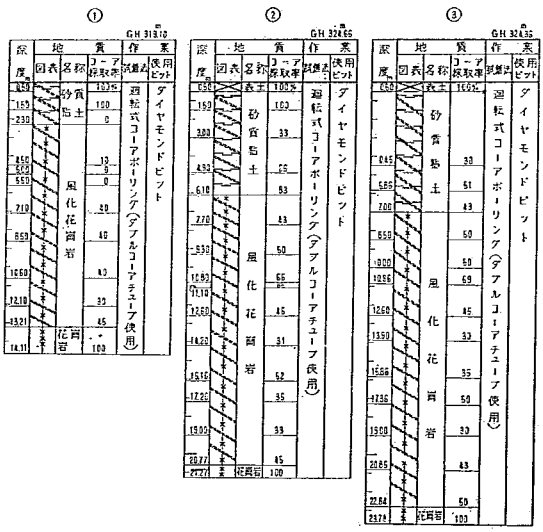
一ではあり得ない。それゆえ数学的解析によつて厳密な結果を導くという意味からは，その物質構造が一様でないとか，あるいは細部に未知の部分が多いという理由からかなり疑問の点も多い。しかし風化作用によつて崩壊した花崗岩は構成粒子が細分化され，各粒子間の空隙は縦横に連らなつているのであるから，空隙を通つて流動する水は多孔性媒質中を滲透する場合の様相を呈するから，問題を半定量的見地から取扱うことには十分意味があると思われる。

2. 地　　質

ダム地点は河床はもちろん左右両岸とも花崗岩が分布している。試掘横坑，ボーリング調査などによつて右岸は硬質で取付部の掘鑿土量は少ないが，左岸側の台地はいちじるしい風化を受けて「マサ」状となり，かつその「マサ」がほぼ水平に分布していることが判明した。図3，4で示すように花崗岩の岩盤は標高300m附近から緩やかな傾斜で山側に上昇している。したがつて花崗岩の岩盤にダムを取付けるには長い止水壁が必要とされた。



図—3　地質断面図



図—4—1 左岸地質柱状図　　図—4—2，3　左岸地質柱状図

一般に岩盤が新鮮な花崗岩である場合には耐圧強度も大であり，節理，亀裂も少なく，したがつて漏水の可能性も少ない。基礎岩盤としては耐久性，支持力，不透水性などについて何ら不安を与えないものが多い。しかし長石，雲母などが風化して「マサ」に近い状態になつている場合には漏水パイピングの問題に対して慎重な考慮をはらわなければならない。

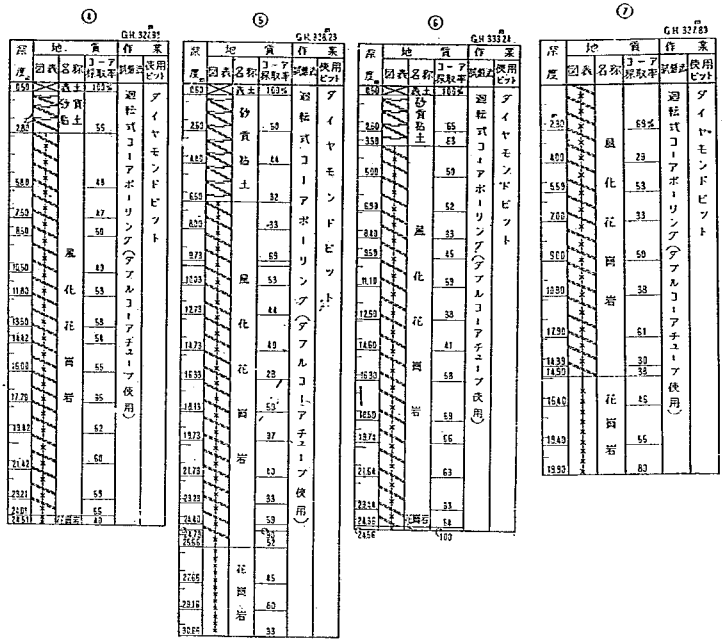
このような漏水，パイピングに対して懸念の多い地質の対策としては，効果，工期，工費について得失はあるが次のようなことが一般に考えられている。

(1)　ダム側岩盤から山側の岩盤に到達するまでコンクリートの止水壁を設ける。

(2)　(1)案のコンクリート止水壁のかわりにグラウチング（セメント，薬液）をおこなう。

(3)　台地上流側法面にフエーシングをおこなう。

以上三案が通常の場合考えられるが，台地を構成する「マサ」の性状いかんによつては，これらを組み合せたり，また軽減した工法を採用することも可能であると思われる。



図—4—4, 5, 6, 7

3. 透水係数の測定方法ならびに測定結果

現地における透水係数の測定はその自然状態の組織が乱されることのないように，次のような方法をもつておこなつた。

i）　試錐孔による方法

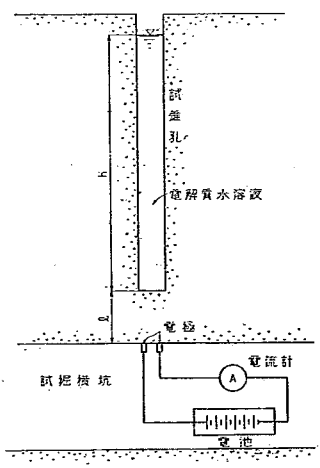
図—5に示すように，試掘横坑の天端から l なる長さを残して試錐孔を掘り，この試錐孔の中に電解質（塩化アンモニア）の水溶液を充たしておくと，この水溶液は長さ l なる層を滲透して横坑天端に滲出する。この位置にあらかじめ電極を設置してこれに電圧を加えておき，電流計を繋いでこの回路中を流れる電流を記録するようにしておくと，滲透水がこの位置に達した時電流計が振れ，その到達時刻が知れる。試錐孔中に電解液を充たしたときの時刻を記録するようにすれば，電解液が長さ l なる層中を滲透するのに要する時間を知ることができる。

いま試錐孔中の圧力水頭を h，透水層の透水係数を k，l なる層を滲透するのに要する時間を t とすれば，これは乾燥した砂層への非定常滲透流と同じと考えることができるから，Darcy の法則より

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{h+y}{y} \quad \cdots\cdots(1)$$

（ただし y は試錐孔底から鉛直下向きに正をとる）

と置くことができる。これを積分して



図—5　試錐孔による透水係数測定法

$$k=\frac{l+h\log\frac{h}{h+l}}{t}\quad\cdots\cdots(2)$$

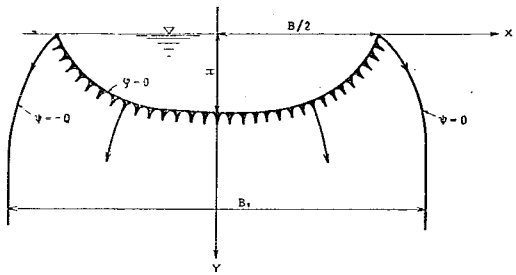
(2) 式より k を求めることができる。

ii) 試験溝による方法

一般に土の中に流れ込む水の状態は，複素共軛函数を用いると次のように表わされる。

$$\omega=\phi+i\psi=f(Z)=f(x+iy)$$

ここに ϕ, ψ はそれぞれ二次元流れにおける速度ポテンシャルおよび流れの函数を示す。図—6のような断面の溝からの滲透水が二次元で，かつ自由水面を有して流出する場合に適合する複素函数の関係は次式で表わされる。



図—6　地下水位の深い場合の溝からの滲透

$$Z=\frac{1}{k}\left(-Hke^{-\frac{\pi\omega}{Q}}-i\omega+\frac{Q}{2}\right)\quad\cdots\cdots(3)$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{k}\left(-Hke^{-\frac{\pi\phi}{Q}}\cos\frac{\pi\psi}{Q}-\psi+\frac{Q}{2}\right)\\ y&=\frac{1}{k}\left(-Hke^{-\frac{\pi\phi}{Q}}\sin\frac{\pi\psi}{Q}-\phi\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)'$$

式中 H は断面中央の溝の水深，Q は単位奥行当りの流出量を示す。二つの流線 $\psi=0$，$-Q$ は自由水面の流線であり，この流線上では

$$\phi=-ky\quad\cdots\cdots(4)$$

であるから，(3)′(4) 式より，自由水面の流線は次の二つの式で与えられる y 軸に関して対称な曲線となる。

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{k}\left(-Hke^{-\frac{\pi ky}{Q}}+\frac{Q}{2}\right)\\ x&=\frac{1}{k}\left(Hke^{-\frac{\pi ky}{Q}}-\frac{Q}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

溝の底部に沿つては $\phi=0$ であるからこれを (3)′ に代入して(3)式に適応するような溝の形を求めると次式が得られる。

$$\left(x-\frac{Q}{k\pi}\cos^{-1}\frac{y}{H}\right)^2+y^2=H^2\quad\cdots\cdots(6)$$

いま B を溝の断面の水面での巾とすると，$y=0$ においては $x=\frac{B}{2}$ であるから

$$\frac{Q}{k}=B+2H\quad\cdots\cdots(7)$$

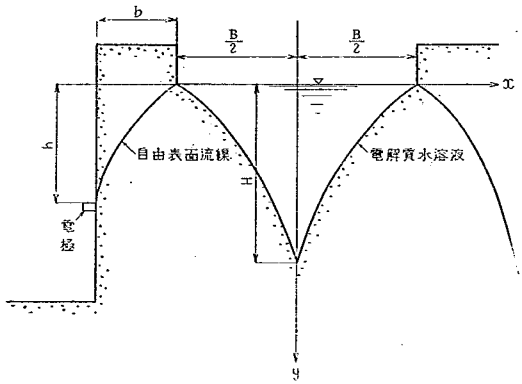
したがつて(5)式より自由表面の式は

$$\left.\begin{aligned}x&=He^{-\frac{\pi}{B+2H}y}+\frac{B+2H}{2}\\ x&=He^{-\frac{\pi}{B+2H}y}-\frac{B+2H}{2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)'$$

また(6)式より溝の断面の形を表わす式は

$$\left(x-\frac{B+2H}{\pi}\cos^{-1}\frac{y}{H}\right)^2+y^2=H^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)'$$

いまこのような断面をもつ溝を適当な長さに掘削してこれに電解質水溶液を充たし，断面方向に溝の縁から図—7のように厚さ b を隔てて垂直に壁を作ると電解質水溶液はその側壁に滲出する。この滲出面の上端と溝内の



図—7　試験溝による透水係数測定法

水位との高底差を h とすれば，k は(5)式より

$$k=-\frac{B+2H}{\pi}\log\left(1-\frac{b}{H}\right)$$

として与えられる。試錐孔による場合と同様にしてこの位置にあらかじめ電極を設置しておけば，自由表面に沿つて壁を滲透するに要する時間 t を測ることができる。この自由表面の速度ポテシンヤルは $\varphi=-ky$ であるから，

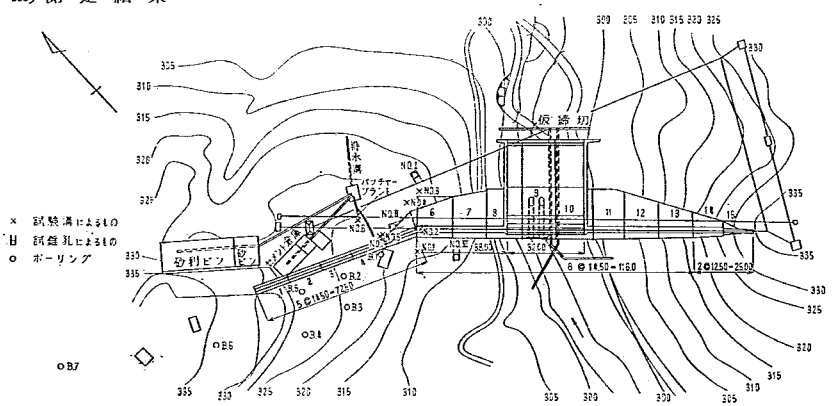
$$v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=k$$

$$v_y=\frac{h}{t}\qquad \text{であるから}$$

$$k=\frac{h}{t}$$

これから k を求めることができる。

iii) 測 定 結 果



図—8　透水試験測定個所及びボーリング個所

上記の方法により測定をおこなつた結果を表一1に測定個所を図一8に示す。この k の値は水温で変化を受け，温度が高くなると水の粘性が減ずるからそれだけ k は大きくなる。測定時の水温はまちまちであつたから比較の便のため15.5°Cの場合に換算した。換算に当つては水の粘性係数に基づく表一2の値によつた。実際に電解質水溶液の濃度も薄く，かつ必要なのは絶対値ではなくて相対比であるから，この表によつて換算をおこなつても，結果に大きな誤差をもたらすということはあり得ないと思う。

4. 予想浸潤線

前にも述べたようにこの透水性をもつ風化層を取付け部にして堰堤築造を計画するとすれば，この風化層からなる台地の滲透水に対してなんらかの考慮をはらう必要があり，この部分に止水壁を入れるように設計することもまた一つの方法である。その際ダム本体より適当な距離の台地内部に不透水性の堅硬な岩盤が満水位以上にあれば止水壁をそれに取付けることによつて漏水をほとんど完全に防止でき，透水の問題について特別な考慮をはらう必要はないが，本地点のように適当な位置に岩盤が存在しないときは，台地そのものを自然の土堰堤とみなして，どのような長さの止水壁を入れればこの自然の土堰堤の安定が保てるか検討する必要がある。

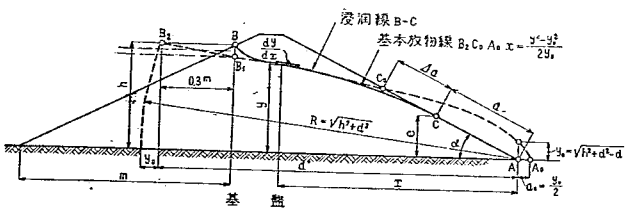
土堰堤内に滲透水が存在する場合この滲透水は重力の作用を受けて堤体の空隙を充たし，Darcy の法則にしたがつて流動するものと考えられる。土堰堤の安定度の判定には，堤体の各部が滲透水によつて生ずるその前後の水圧差に相当するだけの抵抗を有するか否かが重要なことであつて，このため堰堤の安定について考慮されなければならない問題は，この滲透水の占める範囲，その流動方向その流速などであると考えられる。このような考えに基づき止水壁の長さを決定するための一つの目安として以下に述べるような方法で台地を自然の土堰堤とみなした時の断面を求め，その断面について浸潤線を求めた。

まず自然の土堰堤としての断面を画くに際しては次のようにした。不透水性の花崗岩の基盤は水平であると仮定し，止水壁の基礎はこの岩盤に取付けるのであるから，滲透水はほとんど水平方向に動き，止水壁の終端を迂廻して下流側に向う径路をたどる。それゆえ平面図上において，ある長さの止水壁を仮定して，その止水壁の終端と湛水位を結ぶ最短距離を求めると，これは滲透水の上流側流路のうち最も流速の大きい径路となる。さらに止水壁の終端を廻わつて下流側に転じてからは，この終端から基盤までの最短径路をたどるものが最も流速が大きいと考えることができる。このようにして求めた径路に沿つて台地の断面を画くと，これは台地にある長さの止水壁を施し，台地を自然の土堰堤とみなした場合に，その土堰堤内の滲透水の動水勾配が最も急になると考えられるところの断面である。このような断面を持つ土堰堤の浸潤線を求めれば，台地に止水壁を施した場合の滲透水が下流側に浸出する時の状態を推定することできる。

浸潤線を求めるに当つては，最も理論的で，かつ実験結果とよく一致しているといわれる A. Casagrande の方法によつた。一般的に不透水性基盤の上に造られた均質材料で構成されている土堰堤の浸潤線は，特別な排水の手段が講じられていなければ堰堤基礎よりも上で下流側法面を切る。この場合の浸潤線の位置とそれが下流側法面を切る点とは堰堤の断面のみによつて決まり，堰堤を構成する物質が均質である限りその物質の透水性によつては影響されない。そして浸潤線は滲入点と滲出点においてはその境界条件によつてそれから離れるが一つの基本的な抛物線として示すことができる。

図一9において

B_1 は基本抛物線と上流側水面との交点



図一9 滲透線図

A は堰堤のダム先

C は堰堤の下流側法面と浸潤線との交点

d は B_2 から A までの水平距離
h は B_2 から A までの垂直距離
a は AC 間の距離で下流側法面の湿潤部分を示す
α は下流側排水面と水平基盤とのなす内部角
m は上流側湿潤法面の水平投影
堤体を構成する物質の透水係数を k とする。

土中を通過する滲透流は $Q=kiA$ なる Darcy の法則にしたがう。いま堰堤の基礎に沿つたある点の断面積 A が y によつて置換えられ，その点における動水勾配が浸潤線の傾斜 $\frac{dy}{dx}$ で示されるとき，堰堤を通る滲透流は次の等式で与えられる。

$$q = ky\frac{dy}{dx} \quad \cdots\cdots(8)$$

$\alpha=180°$ の場合に対する浸潤線は次式で表わすことができる。

$$x = \frac{y^2-y_0^2}{2y_0} \quad \cdots\cdots(9)$$

これは A を焦点とする A_1 を通る抛物線である。ただし，A_1 は A の垂直線上基盤から y_0 なる距離の点である。この抛物線は延長されて $y=h$ $x=d$ なる点 B_2 で水面と交叉する。ここに d は堰堤の基礎の長さから $0.7\times m$ を減じたものに等しい。等式(9)の x と y をそれぞれ h と d に置き換えると

$$y_0 = \sqrt{h^2+d^2}-d \quad \cdots\cdots(10)$$

y_0 の値はそれが AB_2 の斜距離と垂直に投影した距離との差であることから図解的にただちに決定できる。

基本抛物線と下流側法面との交点 C_0 は抛物線の極座標方程式から容易に見出しうる。

$$r = \frac{P}{1-\cos\theta} \quad \cdots\cdots(11)$$

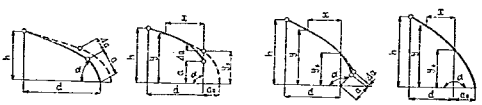
r =焦点から抛物線上への径の長さ
P =通径の $^1/_2$ の長さ
θ =抛物線の軸と径とのなす角

y, r, θ の特別な値について考えると

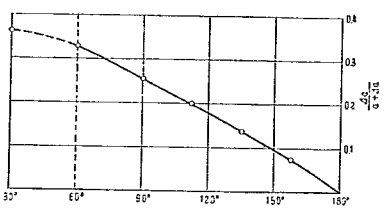
(11)式より　$a+\Delta a = \frac{y_0}{1-\cos\alpha}$ $\cdots\cdots(12)$

(10)及び(12)式より基本抛物線を描くことができる。

$\alpha<180°$ の時は下流法面に対する浸潤線の交点は基本抛物線との交点 C_0 より Δa だけ下の C 点になる。Casagrande が流線網によつて図解的に求めた α に対する Δa と $a+\Delta a$ の比を図—10(b)に示す。これより C 点



(a)



(b)

図—10

が求められるから，浸潤線は下流側はC点から漸次基本抛物線えと接してゆくように画かれ，上流側は上流法面と水面との交点Bから上流法面に垂直に入り基本抛物線に接する一つの短かい漸近線を画くことによつて完成される。堰堤の上流側法面が非常に急なとき，この漸近線は図とは逆向の彎曲をもつた曲線になる。

基本抛物線の式(9)から

$$y=\sqrt{2xy_0+y_0^2} \quad \cdots\cdots(13)$$

$\frac{dy}{dx}$の値を(8)式に代入すると

$$q=k\sqrt{2xy_0+y_0^2}\,\frac{y_0}{\sqrt{2xy_0+y_0^2}} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$q=ky_0 \quad \cdots\cdots(14)'$$

(14)式は$\alpha=180°$の場合の滲透量を与える。

(10)式で与えられたy_0の値を(14)'に代入すると

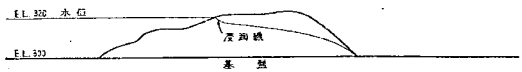
$$q=k(\sqrt{h^2+d^2}-d) \quad \cdots\cdots(15)$$

排水面の角度αが30°より小さい時は水量ならびにaは近似的に次式で求めることができる。

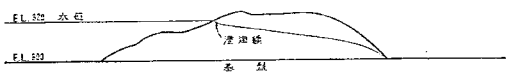
$$q=ka\sin^2\alpha$$

$$a=\sqrt{h^2+d^2}-\sqrt{d^2-h^2\cot^2\alpha}$$

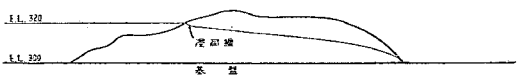
以上のような方法によつて湛水位をE.L.320mとし止水壁の長さをNo.6ブロックの終端より20m～80mと仮定して求めた浸潤線図を図—11—1～6に示す。なお浸潤線を画くに当つてはボーリングなどの結果より推して不



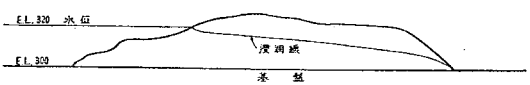
図—11—1　l=20mの場合



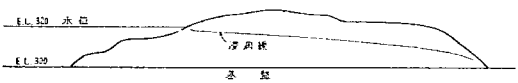
図—11—2　l=30m



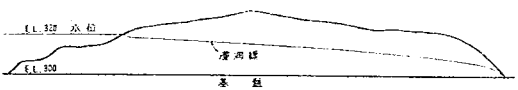
図—11—3　l=40m



図—11—4　l=50m



図—11—5　l=60m



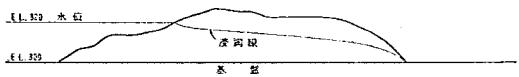
図—11—6　l=80m

透水性基盤の位置をE.L.300mとし，それが水平に連らなつているものと仮定した。また本地点のような「マサ」状風化岩盤の透水性は，堆積層などと異なり等方性であると考えられるので特別な考慮をはらうことはしなかつたが，もし媒質が非等方性であつて垂直方向の透水係数と水平方向の透水係数とがそれぞれk_v, k_hと異なるときは，堤体断面図は垂直方向はそのままにして水平方向を$\sqrt{k_v/k_h}$倍にし，等方性の場合の断面に置換えてから浸潤線を画き，さらにこれを原形に戻すようにしなければならない。また浸透水量ならびに流速の算出に当つても

$$k=\sqrt{k_h \cdot k_v}$$

なる値を用いなければならない。

求められた浸潤線図からDarcyの法則による $v=k\frac{h}{L}$ にしたがつて，おのおのの場合についての予想浸透流速を算出し併わせて単位巾当りの浸透量を求めてみた。その結果は表－3に示す。計算に当つては k の値は表－1の測定結果のうち最も大きい値をとり，かつ岩手県地方における最高水温が26°C程度であると仮定して26°Cに換算した時の値を用いた。（表－2参照）



図－12　$l=3$ ブロック迄

なお水量の算出に当つては滲透水は湿潤面の全面から出るのではなく，有効断面から漏出するのであるから透水係数の値は，流速算出の際に用いた透水係数によらずそれに有効空隙率を乗じたところの見かけの速度による透水係数 k_l を用いねばならない。したがつて

$k_l=\lambda k$　　λ：有効空隙率

通常考えられる有効空隙率は「マサ」の場合0.1～0.2程度である。

表－3の値は $\lambda=0.1$ として計算したものである。

5.　止水壁の長さについて

土および砂礫層上に石工ダムを築造すると若干の水はダムの下を通つて下流側に漏出する。その漏出個所での流速が大きいと基礎を構成する物質の粒子が漏水のため運び流され，したがつて滲透に対する抵抗が減少する。その結果流速は増大し，浸蝕はさらに大きくなつていつてついには堰堤自体の破壊を招く原因となる。こうした過程はパイピングとして知られていることであつて，パイピングを防止するには下流側に漏出するときの滲透水の流速が，基礎構成物質を動かすほどにならないように堰堤を設計することが必要である。そのためには滲透水の径路をその流速が安定値にまで弱まるような長さにすればよい。

前述の砂層中の水の流れに関するDarcyの公式 $Q=k\cdot\frac{hA}{L}$ において Q のかわりに $A\cdot V$ を代入すれば，この式は　　$L=k\frac{h}{V}$　　V：流速

構成物質を移動流失させて，その結果構造物を破壊に至らせるようなことなしに水が滲透しうる最大速度 Vm というものがそれぞれ与えられた種類の物質に対して一定の値で存在する。この Vm の値をその物質によつてきまる k と結び合わせて新らしい係数

$$C=\frac{k}{Vm}$$

とすれば　　$Ln=Ch$

と表わすことができる。ここに Ln は滲透径路の最短安全長で C は構成物質のいかんによつてきまる係数である。

E.W. Lane は砂礫層上に造られたダムが基礎砂礫層のパイピングによる破壊に対して安全であるための水位とクリープ線（ダムと基礎物質との境界線）の長さとの比 C を，多くの資料より求めた結果として表－4に示すような値を提唱している。ただし，これは基礎砂礫層などの堆積層においてはその透水性が水平方向にくらべ垂直方向の方がずつと小さく，そのためクリープ線は垂直部分が大きな効果を持ち，水平部分は同じ長さの垂直部分の $\frac{1}{3}$ の効果しか持たないと仮定したところのいわゆるウエイトをつけたクリープ比（Weighted creep ratio）である。しかし，このような観点からの最短安全長の決定はあくまでも経験的判断に基づいたものでしかなく，統計的資料だけに頼る他のあらゆる方法と同様に，安全率がまつたく不明のままで決定するという結果になる。したがつてある場合には安全率は過大となり，ある場合にはようやくすれすれのところにあるということになる。

一方 L.F. Harza はクイックサンド現象を起す水頭勾配の臨界値 i_F を求める理論式を次のごとく与えているが，

$$i_F=\frac{h}{L}(1-P)(S-1)\qquad P：空隙率\qquad S：比重$$

この値を基としてこれにある係数を乗じたものをパイピングを起さないための水位と滲透路長の安全比とするという説もある。(Engineering for Dams) そして，これにはL/hの値は5以上でなければならないとし，はなはだしく透水性の基礎で止水壁のない場合L/hは8以上，多くの場合10位が適当であるとしている。

浸透圧が構成物質の有効重量に打ちかつようになつたときに生ずる膨れ上がりはパイピング破壊の原因の一つとして考えられているが，このパイピング理論からすれば，パイピング破壊の特性は粒径にほとんど無関係であり，時間にもまつたく関係ないことになる。しかしながら，実際の経験では粒径が限界水頭にかなりの影響を与えていることは明らかであり，また時間にまつたく無関係であるとすれば，パイピングは湛水した時に起るか，あるいはまつたく起らないかであるということになる。こうしたことから Terzaghi などもパイピング破壊の大部分は膨れ上がりではなく，むしろ地下浸蝕によるものと思われると述べている。それゆえ前述のi_FよりL/hを求める方法もパインピングに対しては理論的根拠は薄く，その安全率は明らかでないといえるであろう。

パイピング破壊が上述のように地下浸蝕によるものであり，構成物質の粒径もまた限界水頭に関係あるものとすれば，パイピングに対する安全度の判断は J.D. Justinが求めたように各種の大きさの粒径に対する限界流速によつて行うのが最も理論的であるように思われる。

Justin は噴流で生ずる圧力が各種の大きさの粒子の有効重量に打ちかつようになるときの流速から理論的に算出したものを，パイピングを起すときの限界流速として近似的に用いることができることを提唱している。これによれば 0.001mm 程度の極めて細い粒径の物質をも移動させない限界流速は 0.3cm/sec で，いま安全係数を7とすると安全流速は0.043cm/secとなる。

前に求められた表—3の予想浸透流速から，この値に適合するものを求めれば必要な止水壁の長さを知ることができるわけであるが，ここで考えねばならぬことは表—3の浸透流速は，平均化されて測定せられた透水係数の値に基づく平均流速であるということである。実際には透水係数の値は測定して得られたものより数倍大きい値を有する部分もあると考えられるし，したがつて流速も平均流速より数倍早くなる部分が存在するわけで，流速が最も早くなる部分は平均流速の5倍と考えて予想される最大滲透流速を求めると，表—6のようになる。これより必要な止水壁の長さlは40m＜l＜50mとなる。これは当初の計画の3ブロックまでの長さに相当する。すなわち止水壁を3ブロックまで設ければ左岸台地におけるパイピングの懸念は除くことができ，透水性の問題に関してはこの風化層は十分その安定を保つことができるといえるであろう。

6. 結　　語

左岸台地において試錐孔ならびに試験溝によつて風化層の透水係数を求め，この透水係数値を基として左岸台地を透水性の面から解析し，必要な止水壁の長さを求めてみた。解析に際しては仮定的条件が多く含まれているため，いくぶんの不確かさはまぬがれ得ない。また透水係数の測定についていえば，その測定方法が小規模であるから対象とする山体全体についての透水性を知るためには多数の地点で測定を行うことが必要で，今回の調査では測定地点も少なかつたように思う。

止水壁の長さについては6ブロックの末端から約40数米を必要とするという結論を得た。これはほぼ3ブロックまでの長さに相当する。この結論は一応理論的な検討の結果得られたものであるが，現在の理論的解明の段階ではこれのみによつて設計をおこない，従来おこなわれていたような経験的知識に基づく設計法をまつたく無視してしまうということは，いくぶんの危険を冒すことにもなるのではないかと思われる。それゆえ，求められた止水壁の長さに対する浸潤線図（図—12）についてL/hの値を検討してみた。その結果L/hは約6.3となる。これは決して大きな値ということはできないかも知れないが，このダムが洪水調節用ダムであり，洪水調節に際しての水位変化（図—2参照）を考えれば，十分安全値の範囲内にあるものといえるであろう。

安全係数としてとつた7という値はいくぶん大きすぎるかも知れないが，今後地下浸蝕に対するこうした論拠を裏付けるところの実験が数多く行われることにより，さらに小さい値をとることができるようになるのではないかと思う。

なお止水壁のない部分に対してはある程度のグラウテイングを行い，下流側の湿潤面に対してもなんらかの方法で法面保護をおこなう必要があるであろう。

附　記

この測定をおこなうに際して電力研究所地質課田中課長ならびに矢作技師よりいろいろ御助力いただいたことを附記し，ここに感謝の意を表するものである。

表—1　透水係数測定値

測点	測定方法	測定時水温 (°C)	透水係数値 (cm/sec〔15.5°C〕)	測定点地盤高
No. 1	試験溝	12	1.6×10^{-2}	EL.305.84
No. 2	〃	12	3.7×10^{-2}	EL.311.08
No. 3	〃	10	5.6×10^{-3}	EL.309.00
No. 4	〃	13	3.2×10^{-2}	EL.314.06
No. 5	〃	18	3.1×10^{-2}	EL.317.80
No. 6	〃	18	4.1×10^{-2}	EL.317.59
No. 7	〃	16	2.3×10^{-2}	EL.317.80
No. Ⅰ	試錐孔	10	3.3×10^{-4}	EL.310.81
No. Ⅱ	〃	10	4.2×10^{-5}	EL.308.09
No. Ⅲ	〃	16	2.2×10^{-5}	EL.304.03

表—2　透水係数と温度変化の関係

温度(°C)	0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	15.5
係数	0.64	0.69	0.75	0.80	0.86	0.92	0.98	1.00
温度(°C)	17.5	20.0	22.5	25.0	27.5	30.0	32.5	35.0
係数	1.05	1.12	1.19	1.27	1.34	1.41	1.48	1.55

表—3　予想浸透流速並びに水量

止水壁の長さ ℓ (m)	流速 V (cm/sec)	水量 (巾1m当り) q (cm³/sec)
20	0.0136	121
30	0.0111	102
40	0.0090	85
50	0.0075	73
60	0.0065	64
80	0.0052	52

表—4　安全クリープ比

(水平クリープのウエイト⅓)

物質	クリープ比
極細砂又は沈泥	8.5
細砂	7.0
中砂	6.0
粗砂	5.0
細礫	4.0
中礫	3.5
小玉石交りの粗礫	3.0
若干の小玉石及礫交りの巨礫	2.5
軟質粘土	3.0
中質粘土	2.0
硬質粘土	1.8
極硬質粘土又は盤層	1.6

(E.W. Lane ; Trans of A.S.C.E vol 100)

表—5

パイピングを起さないための制限流速

土壌粒の直径 (mm)	限界流速 (ft/min)
1.0	19.4
0.8	17.4
0.5	13.8
0.3	9.6
0.1	6.0
0.08	5.5
0.05	4.3
0.03	3.4
0.01	1.94
0.001	0.6

(J.D. Justin, Trans. of A.S.C.E Vol 87)

表—6　予想最大浸透流速

止水壁の長さ ℓ (m)	最大流速 Vmax(cm/sec)
20	0.068
30	0.056
40	0.045
3ブロック	0.043
50	0.038
60	0.033
80	0.026

河床砂礫の送流運搬に関する研究（1）

（附　　表）

附表－1

No.	1 d (cm)	2 Q (l/sec)	3 H_o (cm)	4 v (cm/sec)	5 I	6 q_B (mg/cmsec)	7 ν (C.G.S.)	8 H (cm)	9 τ (gr/m2)	10 u_* (cm/sec)	11 $\frac{q_B}{\tau u_*}$	12 $\frac{du_*}{\nu}$	13 τ_c (gr/m2)	14 $\frac{\tau_c}{\tau}$	15 n	16 $f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	17 φ
1	0.1038	43	25.02	22.03	0.00024	0	0.0124	21.58	51.79	2.25	—	18.83			0.0253		
2	〃	60	23.87	32.23	0.00060	19.75	0.0126	20.95	125.7	3.51	0.448	28.91	48.0	0.382	0.0267	0.853	0.326
3	〃	60	21.40	35.95	0.00104	157.36	0.0126	19.35	201.2	4.44	1.76	26.59	48.0	0.238	0.0300	0.964	1.132
4	〃	50	22.16	28.93	0.00040	7.46	0.0124	19.03	76.12	2.73	0.359	22.85	46.6	0.612	0.0229	0.502	0.443
5	〃	50	19.31	33.20	0.00060	42.85	0.0124	16.84	101.0	3.15	1.347	26.37	48.0	0.475	0.0225	0.735	1.136
6	〃	70	28.13	31.90	0.00036	8.75	0.0133	23.14	83.30	2.86	0.367	22.31	46.6	0.559	0.0224	0.600	0.379
7	〃	70	23.93	37.50	0.00058	55.47	0.0133	20.16	116.9	3.38	1.402	26.40	48.0	0.411	0.0221	0.818	1.063
8	〃	80	33.41	23.94	0.00022	2.75	0.0131	27.85	61.27	2.45	0.183	19.42	46.6	0.760	0.0264	0.264	0.430
9	〃	80	31.07	25.75	0.00042	24.46	0.0131	27.51	115.5	3.36	0.631	26.62	48.0	0.416	0.0337	0.816	0.479
10	〃	80	26.81	38.26	0.00090	178.54	0.0131	23.69	213.20	4.57	1.834	36.21	49.4	0.231	0.0300	0.966	1.177
11	〃	100	34.98	36.65	0.00046	33.87	0.0133	28.60	131.6	3.59	0.718	28.05	48.0	0.365	0.0253	0.872	0.511
12	〃	100	29.63	43.27	0.00072	92.81	0.0133	24.70	177.8	4.18	1.248	32.61	49.4	0.278	0.0244	0.943	0.820
13	〃	110	37.07	38.04	0.00032	43.62	0.0131	27.71	88.67	2.95	1.668	23.40	46.6	0.525	0.0200	0.656	1.575
14	〃	110	37.97	42.77	0.00046	68.26	0.0131	25.42	116.9	3.38	1.728	26.80	48.0	0.411	0.0201	0.819	1.308
15	〃	120	37.81	40.69	0.00044	63.63	0.0108	29.52	129.9	3.57	1.370	34.35	49.4	0.380	0.0229	0.855	0.994
16	〃	120	32.70	47.05	0.00110	324.94	0.0108	28.20	310.2	5.52	1.898	53.10	53.4	0.172	0.0304	0.986	1.194
17	〃	130	35.29	47.23	0.00056	137.60	0.0151	27.18	152.2	3.86	2.34	26.55	48.0	0.315	0.0210	0.917	1.582
18	〃	140	39.63	45.29	0.00042	81.02	0.0151	29.03	121.9	3.45	1.93	23.72	46.6	0.382	0.0198	0.852	1.404
19	〃	140	37.54	47.81	0.00044	79.13	0.0151	29.62	189.6	4.31	0.968	29.60	48.0	0.254	0.0195	0.956	0.628
20	〃	140	34.33	52.28	0.00116	228.45	0.0151	29.00	336.4	5.74	1.183	39.45	50.7	0.150	0.0285	0.990	0.741
21	〃	150	38.91	49.42	0.00038	46.55	0.0151	26.19	99.52	3.12	1.500	21.46	46.6	0.468	0.0162	0.745	1.249
22	〃	150	35.95	53.49	0.00068	226.72	000151	27.36	186.0	4.27	2.86	29.33	48.0	0.258	0.0207	0.954	1.860
23	〃	160	37.29	55.01	0.00138	332.39	0.0150	31.82	439.1	6.56	1.155	45.46	52.1	0.118	0.0315	0.995	0.717
24	〃	170	41.35	52.71	0.00048	87.60	0.0148	26.17	125.6	3.51	1.985	24.61	46.6	0.370	0.0170	0.866	1.420
25	〃	170	37.40	58.28	0.00086	171.17	0.0148	28.90	248.5	4.94	1.398	34.67	49.4	0.198	0.0220	0.980	0.884
26	〃	180	42.44	54.38	0.00054	146.75	0.0150	30.03	162.2	3.99	2.27	27.60	48.0	0.296	0.0192	0.931	1.513
27	〃	180	41.79	55.22	0.00094	290.24	0.0150	33.57	315.6	5.56	1.657	38.50	50.7	0.161	0.0268	0.988	1.040
28	〃	190	43.64	55.82	0.00056	154.21	0.0165	30.78	172.4	4.11	2.18	25.90	48.0	0.278	0.0193	0.944	1.432
29	〃	190	41.31	58.97	0.00099	350.78	0.0165	32.72	323.9	5.63	1.926	35.43	49.4	0.153	0.0254	0.990	1.206
30	〃	200	43.73	58.63	0.00076	298.44	0.0146	32.70	248.5	4.94	2.43	35.15	49.4	0.198	0.0223	0.980	1.538

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/s ec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C.G.S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/s ec)	$\frac{q_B}{\tau u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
31	0.1038	120	34.87	44.12	0.00042	42.09	0.0143	25.95	109.0	3.27	1.183	23.75	46.6	0.427	0.0189	0.802	0.915
32	〃	130	34.34	48.53	0.00049	55.09	0.0147	25.09	122.9	3.47	1.292	24.50	46.6	0.378	0.0182	0.857	0.935
33	〃	130	32.33	51.55	0.00095	173.93	0.0147	26.65	253.2	4.98	1.380	35.16	49.4	0.195	0.0248	0.981	1.451
34	〃	130	30.81	54.09	0.00163	669.76	0.0147	26.93	439.0	6.56	2.33	46.36	52.1	0.118	0.0311	0.995	1.451
35	〃	140	36.87	48.68	0.00048	89.59	0.0132	26.97	129.5	3.56	1.942	28.20	48.0	0.370	0.0188	0.866	1.390
36	0.1038	140	35.09	51.15	0.00122	326.72	0.0132	30.04	366.5	5.99	1.486	47.13	49.4	0.134	0.0306	0.993	0.928
37	0.221	28	11.36	31.61	0.001175	0	0.0142	10.54	123.8	3.48	—	54.20			0.0242		
38	〃	75	17.29	55.61	0.00121	76.63	0.0139	14.46	175.0	4.14	1.056	65.90	119.6	0.683	0.0178	0.385	1.698
39	〃	75	17.74	54.20	0.001215	74.35	0.0139	14.95	182.4	4.23	0.964	67.30	122.5	0.672	0.0182	0.403	1.544
40	〃	75	17.78	54.08	0.00121	71.14	0.0139	14.97	181.1	4.21	0.932	66.9	119.6	0.661	0.0181	0.420	1.376
41	〃	100	22.94	55.89	0.000885	64.04	0.0138	18.15	160.6	3.97	1.003	63.6	119.6	0.745	0.0171	0.288	2.158
42	〃	100	22.69	56.50	0.000920	43.67	0.0138	18.00	165.5	4.03	0.655	64.5	119.6	0.722	0.0171	0.320	1.271
43	〃	100	22.11	57.99	0.000935	30.33	0.0138	17.42	162.8	3.99	0.467	64.0	119.6	0.735	0.0165	0.302	0.958
44	〃	125	23.75	67.48	0.001295	214.95	0.0137	18.80	243.5	4.88	1.809	78.8	125.4	0.491	0.0175	0.709	1.581
45	〃	125	25.15	63.72	0.00143	230.62	0.0137	20.69	295.8	5.38	1.450	86.9	131.3	0.444	0.0208	0.778	1.156
46	〃	150	31.13	61.78	0.001135	169.61	0.0136	24.87	282.1	5.26	1.144	85.5	128.4	0.455	0.0216	0.763	0.930
47	〃	150	31.65	60.76	0.00115	205.72	0.0136	25.48	293.0	5.36	1.311	87.0	131.3	0.448	0.0224	0.775	1.048
48	〃	150	32.37	59.41	0.00102	125.07	0.0136	25.70	262.0	5.07	0.943	82.4	128.4	0.490	0.0216	0.712	0.822
49	〃	175	32.64	68.74	0.00132	236.37	0.0131	25.73	339.8	5.77	1.207	97.4	134.2	0.395	0.0214	0.838	0.893
50	〃	175	31.84	70.46	0.00130	204.80	0.0131	24.78	322.0	5.62	1.131	94.7	134.2	0.417	0.0202	0.813	0.862
51	〃	175	35.79	62.69	0.00165	306.99	0.0131	30.20	498.3	7.00	0.880	117.1	140.1	0.282	0.0292	0.939	0.582
52	〃	200	36.70	69.87	0.001145	160.62	0.0136	27.84	318.9	5.59	0.902	90.9	131.3	0.412	0.0207	0.818	0.684
53	〃	200	37.45	68.47	0.001115	204.59	0.0136	28.51	318.0	5.58	1.155	90.7	131.3	0.413	0.0211	0.817	0.691
54	〃	200	40.16	63.85	0.001205	173.75	0.0136	32.00	385.5	6.14	0.734	99.8	134.2	0.348	0.0254	0.888	0.513
55	〃	225	37.12	77.71	0.001235	336.77	0.0137	27.21	336.0	5.74	1.745	92.7	131.3	0.391	0.0182	0.842	1.285
56	〃	250	42.42	75.56	0.002050	473.75	0.0137	35.02	718.0	8.39	0.788	135.1	146.0	0.203	0.0298	0.977	0.500
57	〃	100	21.85	58.68	0.000850	64.23	0.0144	16.79	142.6	3.74	1.205	57.6	116.8	0.818	0.0158	0.188	3.974
58	〃	100	21.99	58.30	0.000860	71.68	0.0144	16.99	146.0	3.78	1.298	58.1	116.8	0.800	0.0154	0.222	3.620
59	〃	100	22.73	56.40	0.000740	58.74	0.0144	17.22	127.4	3.53	1.282	54.2	113.8	0.893	0.0149	0.115	6.915
60	〃	125	27.00	59.35	0.000830	57.47	0.0141	20.52	170.4	4.09	0.826	64.2	119.6	0.702	0.0169	0.353	1.451

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
61	0.221	125	27.63	58.00	0.00077	82.98	0.0141	20.85	160.5	3.97	1.302	62.3	119.6	0.746	0.0168	0.287	2.815
62	〃	125	28.22	56.79	0.00072	88.17	0.0141	21.18	152.5	3.87	1.495	61.0	119.6	0.784	0.0168	0.230	4.032
63	〃	125	24.66	64.99	0.00106	107.61	0.0143	19.02	201.6	4.44	1.202	68.6	122.5	0.608	0.0166	0.515	1.447
64	〃	125	25.58	62.65	0.00102	151.77	0.0143	19.86	202.7	4.46	1.680	69.0	122.5	0.605	0.0173	0.518	2.012
65	〃	125	26.11	61.38	0.00109	130.96	0.0143	20.74	226.1	4.71	1.230	72.8	125.4	0.555	0.0189	0.605	1.260
66	〃	200	33.57	76.38	0.002085	518.73	0.0144	27.65	576.3	7.52	1.197	115.2	140.1	0.243	0.0254	0.962	0.772
67	〃	200	36.50	70.25	0.00160	407.21	0.0144	29.61	474.0	6.82	1.260	104.6	137.1	0.290	0.0253	0.935	0.836
68	〃	50	13.26	48.34	0.001335	13.07	0.0142	11.62	155.1	3.90	0.216	60.6	116.8	0.753	0.0180	0.273	0.491
69	〃	50	12.44	51.53	0.001295	7.87	0.0142	10.71	138.7	3.69	0.154	57.4	116.8	0.842	0.0158	0.160	0.597
70	〃	50	12.82	50.00	0.001280	14.96	0.0142	11.97	153.2	3.88	0.252	60.4	116.8	0.762	0.0174	0.260	0.602
71	〃	100	19.88	64.49	0.01455	227.78	0.0146	16.32	237.4	4.82	1.989	72.9	122.5	0.516	0.0177	0.673	1.831
72	〃	100	20.53	62.45	0.01585	301.83	0.0146	17.26	273.5	5.18	2.130	78.5	125.4	0.459	0.0198	0.757	1.744
73	〃	100	24.62	52.07	0.000665	13.26	0.0146	18.88	125.5	3.51	0.301	53.2	100.4	0.905	0.0163	0.106	1.762
74	〃	300	40.42	95.15	0.00220	1199.7	0.0142	30.92	680.0	8.17	2.160	127.3	143.0	0.210	0.0226	0.975	1.373
75	〃	300	47.42	81.11	0.00262	1124.1	0.0142	39.71	1041.0	10.10	1.069	157.0	148.8	0.143	0.0342	0.992	0.669
76	〃	300	46.82	82.15	0.00265	1029.2	0.0142	39.18	1038.0	10.08	0.984	156.6	148.8	0.143	0.0336	0.992	0.615
77	〃	275	44.40	79.41	0.00213	801.9	0.0145	36.25	772.1	8.70	1.193	132.4	143.0	0.186	0.0296	0.983	0.753
78	〃	275	46.62	75.63	0.00197	902.9	0.0145	38.20	752.3	8.59	1.398	131.0	143.0	0.190	0.0309	0.981	0.884
79	〃	275	42.13	83.68	0.00222	798.4	0.0145	34.05	756.0	8.61	1.226	131.1	143.0	0.190	0.0275	0.981	0.774
80	〃	325	46.78	89.07	0.00139	944.4	0.0135	32.74	455.0	6.68	3.110	109.5	137.2	0.302	0.0199	0.927	2.081
81	〃	325	46.80	89.03	0.00274	1158.1	0.0135	38.40	1052.0	10.15	1.083	166.0	151.8	0.144	0.0311	0.991	0.678
82	〃	325	47.31	88.07	0.00303	1775.9	0.0135	39.51	1196.0	10.82	1.371	177.1	151.8	0.127	0.0337	0.994	0.856
83	〃	350	48.63	92.27	0.00167	1244.8	0.0126	35.21	588.0	7.59	2.790	133.0	143.0	0.243	0.0219	0.962	1.798
84	〃	350	51.48	87.16	0.00180	1308.7	0.0126	39.20	705.6	8.32	2.231	145.8	146.0	0.207	0.0261	0.977	1.427
85	〃	100	22.00	58.28	0.00100	151.93	0.0104	17.52	175.2	4.14	2.096	88.1	131.3	0.750	0.0170	0.280	4.640
86	〃	100	24.18	53.02	0.00090	39.80	0.0104	19.57	176.0	4.15	0.545	88.2	131.3	0.746	0.0191	0.287	1.178
87	〃	100	24.98	51.32	0.00065	11.68	0.0104	19.18	124.6	3.49	0.269	74.2	125.4	1.006	0.0165	0.047	3.550
88	〃	100	22.10	58.01	0.00103	94.25	0.0104	17.74	182.7	4.23	1.220	89.9	131.3	0.719	0.0175	0.329	2.301
89	〃	80	22.19	46.22	0.00089	32.60	0.0106	18.71	166.5	4.04	0.480	84.3	128.4	0.771	0.0211	0.246	1.210
90	〃	80	20.12	50.70	0.00097	15.88	0.0106	16.82	163.1	4.00	0.243	83.4	128.4	0.787	0.0187	0.228	0.661

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{\gamma u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
91	0.221	80	19.00	53.98	0.00112	95.69	0.0106	15.84	177.4	4.17	1.293	86.9	131.3	0.740	0.0181	0.280	2.863
92	〃	80	21.05	48.72	0.00082	9.30	0.0106	17.25	141.4	3.72	0.177	77.6	125.4	0.888	0.0182	0.122	0.899
93	〃	90	24.10	47.88	0.00071	6.31	0.0100	19.38	137.6	3.67	0.125	81.1	128.4	0.932	0.0186	0.086	0.902
94	〃	90	23.06	50.04	0.00081	16.72	0.0100	18.68	151.3	3.85	0.287	85.1	128.4	0.848	0.0186	0.157	1.134
95	〃	90	22.00	52.45	0.00094	44.35	0.0100	18.00	169.2	4.07	0.644	89.9	131.3	0.776	0.0182	0.242	1.649
96	〃	90	21.25	54.20	0.00108	86.93	0.0100	17.60	190.0	4.32	1.058	95.5	134.2	0.706	0.0190	0.348	1.885
97	〃	70	21.29	42.15	0.00070	2.54	0.0104	17.82	124.7	3.50	0.058	74.4	125.4	1.005	0.0199	0.047	0.765
98	〃	70	21.45	41.84	0.00075	4.79	0.0104	18.17	136.2	3.65	0.096	77.6	125.4	0.921	0.0210	0.095	0.627
99	〃	70	19.55	45.90	0.00091	21.27	0.0104	16.56	150.7	3.84	0.368	81.6	128.4	0.852	0.0198	0.151	1.513
100	〃	70	18.10	49.58	0.00132	42.67	0.0104	15.75	207.9	4.51	0.455	95.9	134.2	0.646	0.0214	0.449	0.628
101	0.262	92	25.65	45.98	0.0006	0	0.0088	22.87	137.1	3.66	—	109	162.5		0.0199		
102	〃	150	29.44	65.32	0.00108	24.61	0.0080	22.71	245.3	4.90	0.205	161	180.0	0.734	0.0187	0.304	0.418
103	〃	150	28.31	67.93	0.00120	93.91	0.0080	22.00	264.0	5.09	0.698	167	180.0	0.682	0.0186	0.385	1.124
104	〃	150	27.82	69.13	0.00140	163.74	0.0080	22.15	310.0	5.51	0.959	181	183.1	0.591	0.0198	0.538	1.105
105	〃	150	26.23	73.32	0.00154	225.15	0.0080	20.80	320.2	5.60	1.256	183	183.1	0.573	0.0188	0.572	1.362
106	〃	150	26.13	73.60	0.00165	243.65	0.0080	20.96	345.8	5.82	1.208	191	186.4	0.539	0.0195	0.635	1.178
107	〃	100	22.80	56.23	0.00098	5.44	0.0082	18.35	179.8	4.20	0.072	134	172.8	0.961	0.0180	0.069	0.647
108	〃	100	22.20	57.75	0.00121	21.95	0.0082	18.35	222.0	4.67	0.212	149	172.8	0.779	0.0195	0.240	0.548
109	〃	100	21.48	59.69	0.00146	77.09	0.0082	18.07	263.9	5.08	0.574	162	180.0	0.682	0.0205	0.385	0.925
110	〃	100	20.60	62.24	0.00154	86.67	0.0082	17.26	265.8	5.10	0.639	163	180.0	0.678	0.0195	0.395	1.002
111	〃	100	19.62	65.34	0.00165	81.42	0.0082	16.37	270.5	5.15	0.584	165	180.0	0.666	0.0186	0.416	0.871
112	〃	125	28.73	55.78	0.00104	26.50	0.0082	23.41	243.6	4.89	0.220	156	176.0	0.723	0.0220	0.320	0.427
113	〃	125	27.24	58.83	0.00090	14.09	0.0082	21.15	190.4	4.32	0.171	138	172.8	0.907	0.0181	0.104	1.020
114	〃	125	23.51	68.17	0.00155	58.23	0.0082	19.16	297.0	5.40	0.363	173	180.0	0.606	0.0192	0.517	0.435
115	〃	125	21.11	75.91	0.00207	138.24	0.0082	17.42	360.5	5.94	0.646	190	186.4	0.518	0.0187	0.672	0.596
116	〃	125	20.32	78.87	0.00252	140.59	0.0082	17.07	430.1	6.50	0.530	208	186.4	0.434	0.0196	0.791	0.415
117	〃	175	34.88	64.32	0.00114	151.40	0.0082	27.41	312.3	5.53	0.880	177	180.0	0.576	0.0227	0.568	0.961
118	〃	175	32.46	69.12	0.00129	110.48	0.0082	25.42	328.0	5.67	0.594	181	183.1	0.558	0.0208	0.602	0.612
119	〃	175	31.78	70.60	0.00138	160.42	0.0082	25.01	345.1	5.82	0.800	186	183.1	0.531	0.0209	0.645	0.769
120	〃	175	29.26	76.68	0.00146	214.02	0.0082	22.50	328.5	5.68	1.146	181	183.1	0.558	0.0184	0.602	1.181

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_c (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{\tau u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
121	0.262	175	29.24	76.73	0.00205	298.17	0.0082	24.00	492.0	6.94	0.874	222	190.4	0.387	0.0231	0.848	0.739
122	〃	200	40.49	63.33	0.00103	70.60	0.0086	31.60	324.5	5.65	0.384	172	180.0	0.555	0.0235	0.605	0.393
123	〃	200	38.53	66.55	0.00102	117.98	0.0086	29.13	297.1	5.40	0.736	165	176.0	0.592	0.0211	0.538	0.848
124	〃	200	36.80	69.68	0.00130	160.04	0.0086	28.75	373.8	6.05	0.708	184	183.1	0.491	0.0227	0.710	0.619
125	〃	200	33.63	76.24	0.00168	234.80	0.0086	26.72	449.0	6.63	0.789	202	186.4	0.415	0.0223	0.818	0.599
126	〃	225	39.77	72.53	0.00096	106.72	0.0089	28.21	271.0	5.15	0.765	152	176.0	0.650	0.0184	0.441	1.076
127	〃	225	38.29	75.34	0.00107	143.27	0.0089	27.45	293.7	5.36	0.911	158	176.0	0.600	0.0184	0.527	1.072
128	〃	225	36.61	78.79	0.00134	210.05	0.0089	27.21	364.9	5.98	0.963	176	180.0	0.494	0.0196	0.706	0.847
129	〃	250	42.35	75.68	0.00099	124.20	0.0089	29.50	292.0	5.35	0.795	158	176.0	0.603	0.0184	0.520	0.948
130	〃	250	41.27	77.66	0.00142	181.48	0.0089	31.37	445.1	6.60	0.618	194	186.4	0.419	0.0224	0.812	0.472
131	〃	250	40.94	78.29	0.00184	275.48	0.0089	32.75	602.7	7.69	0.594	226	190.4	0.316	0.0260	0.918	0.406
132	〃	275	44.49	79.25	0.00135	251.99	0.0090	33.01	445.8	6.61	0.856	194	186.4	0.418	0.0222	0.813	0.652
133	〃	275	44.71	78.86	0.00152	366.88	0.0090	34.28	520.8	7.14	0.987	208	186.4	0.358	0.0242	0.879	0.697
134	〃	275	44.36	79.48	0.00182	491.93	0.0090	35.19	640.3	7.92	0.971	230	190.4	0.298	0.0268	0.930	0.647
135	〃	275	41.83	84.28	0.00278	123.39	0.0090	34.95	971.0	9.76	1.185	284	197.6	0.203	0.0311	0.978	0.751
136	〃	275	43.99	80.15	0.00256	838.49	0.0090	36.84	943.0	9.62	0.925	280	197.6	0.214	0.0325	0.974	0.539
137	〃	300	48.47	79.35	0.00151	553.89	0.0086	36.98	558.1	7.39	1.343	225	190.5	0.342	0.0253	0.892	0.933
138	〃	300	46.70	82.36	0.00188	846.11	0.0086	36.77	691.8	8.24	1.484	251	193.6	0.280	0.0270	0.941	0.978
139	〃	300	47.18	81.52	0.00206	612.16	0.0086	37.98	782.1	8.76	0.894	267	193.6	0.248	0.0292	0.959	0.528
140	〃	300	47.23	81.43	0.00245	1431.39	0.0086	39.12	958.2	9.70	1.540	295	201.0	0.214	0.0325	0.974	0.980
141	〃	325	50.63	82.30	0.00135	447.45	0.0086	36.87	497.9	6.98	1.287	213	186.5	0.374	0.0230	0.862	0.926
142	〃	325	51.28	81.25	0.00127	375.78	0.0090	36.95	469.1	6.78	1.181	195	186.5	0.398	0.0226	0.835	0.877
143	〃	325	47.80	87.17	0.00198	662.87	0.0090	37.68	746.0	8.505	1.045	248	193.6	0.260	0.0266	0.954	0.679
144	〃	325	47.19	88.30	0.00230	890.86	0.0090	37.60	864.3	9.200	1.120	268	193.6	0.224	0.0283	0.970	0.716
145	〃	225	42.93	67.19	0.00101	180.07	0.0110	32.23	325.7	5.65	0.979	135	173.0	0.531	0.0223	0.645	0.941
146	〃	225	40.72	70.84	0.00162	338.93	0.0110	33.00	534.8	7.24	0.876	172	180.0	0.337	0.0271	0.899	0.604
147	〃	225	38.15	75.61	0.00243	401.46	0.0110	32.20	782.2	8.76	0.586	206	186.5	0.318	0.0311	0.916	0.397
148	〃	225	38.09	75.73	0.00293	1440.72	0.0110	32.95	965.3	9.73	1.535	232	193.6	0.201	0.0341	0.978	0.973
149	〃	250	43.02	74.50	0.00084	197.61	0.0107	28.60	240.1	4.85	1.698	119	169.6	0.707	0.0169	0.348	3.026
150	〃	250	41.42	77.38	0.00195	514.52	0.0107	33.63	656.0	8.02	0.978	196	186.5	0.283	0.0276	0.938	0.647

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mgc/msec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{\tau u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
151	0.262	250	39.84	80.45	0.00294	1011.287	0.0107	34.00	1000.0	9.90	1.022	242	193.6	0.194	0.0328	0.981	0.646
152	〃	200	38.07	67.35	0.00112	113.73	0.0108	29.25	327.5	5.67	0.613	138	173.0	0.528	0.0219	0.654	0.581
153	〃	200	36.62	70.02	0.00136	146.22	0.0108	28.83	392.1	6.20	0.598	150	176.0	0.449	0.0230	0.773	0.480
154	〃	200	34.48	74.36	0.00166	415.64	0.0108	27.58	457.8	6.70	1.355	163	180.0	0.394	0.0232	0.839	1.002
155	〃	200	33.54	76.45	0.00268	685.95	0.0108	28.63	767.4	8.68	1.030	210	186.5	0.243	0.0296	0.962	0.664
156	〃	175	34.80	64.47	0.00106	172.40	0.0123	26.93	285.3	5.29	1.143	113	166.5	0.583	0.0211	0.552	1.283
157	〃	175	32.93	68.13	0.00148	272.54	0.0123	26.63	394.2	6.22	1.111	132	173.0	0.438	0.0234	0.786	0.878
158	〃	175	31.97	70.18	0.00194	356.81	0.0123	26.75	518.8	7.13	0.966	152	176.0	0.339	0.0261	0.896	0.669
159	〃	200	40.23	63.73	0.00082	94.48	0.0125	29.38	240.9	4.86	0.807	102	163.2	0.675	0.0199	0.399	1.254
160	〃	200	39.22	65.38	0.00105	83.20	0.0125	30.10	316.0	5.56	0.473	116	166.5	0.526	0.0223	0.655	0.448
161	〃	200	38.45	66.69	0.00121	150.23	0.0125	30.16	365.0	5.98	0.688	125	169.6	0.465	0.0235	0.749	0.569
162	〃	200	37.48	68.41	0.00156	195.20	0.0125	30.58	477.0	6.84	0.598	143	173.0	0.362	0.0262	0.873	0.425
163	〃	200	37.79	67.85	0.00178	448.74	0.0125	31.52	516.0	7.42	1.076	155	176.0	0.342	0.0288	0.893	0.747
164	0.376	82	18.08	58.13	0.00141	0	—	15.24	214.9	4.59	—	—			0.0185		
165	〃	150	28.78	66.83	0.00138	25.07	0.0101	23.13	319.2	5.59	0.141	208	268	0.838	0.0209	0.167	0.523
166	〃	150	27.71	69.40	0.00160	67.29	0.0101	22.58	361.2	5.95	0.313	222	273	0.755	0.0214	0.273	0.712
167	〃	150	30.53	62.99	0.00120	7.13	0.0101	24.48	293.8	5.37	0.045	200	268	0.912	0.0220	0.100	0.279
168	〃	200	37.66	68.09	0.00108	37.46	0.0101	28.54	308.2	5.50	0.221	205	268	0.869	0.0209	0.138	0.993
169	〃	200	34.98	73.30	0.00133	105.46	0.0101	26.89	357.3	5.92	0.498	220	273	0.764	0.0207	0.258	1.197
170	〃	200	32.91	77.91	0.00162	157.60	0.0101	25.50	413.0	6.37	0.600	237	278	0.674	0.0208	0.400	0.931
171	〃	200	31.93	80.30	0.00197	292.81	0.0101	25.59	504.1	7.03	0.829	262	278	0.552	0.0223	0.610	0.844
172	〃	250	40.32	79.49	0.00132	231.21	0.0100	29.73	392.4	6.20	0.951	233	278	0.709	0.0203	0.344	1.714
173	〃	250	39.19	81.78	0.00156	305.52	0.0100	29.70	463.5	6.74	0.979	253	278	0.600	0.0215	0.527	1.152
174	〃	250	40.55	79.04	0.00152	164.95	0.0097	31.03	471.9	6.80	0.514	264	278	0.590	0.0226	0.543	0.586
175	〃	250	39.33	81.49	0.00195	244.54	0.0097	31.36	611.7	7.75	0.516	300	288	0.471	0.0250	0.739	0.971
176	〃	250	38.72	82.78	0.00211	484.14	0.0097	31.10	656.2	8.02	0.907	311	288	0.438	0.0255	0.786	0.716
177	〃	250	37.02	86.58	0.00207	400.26	0.0097	29.09	602.0	7.68	0.866	298	288	0.478	0.0231	0.732	0.734
178	〃	250	37.69	85.04	0.00220	491.38	0.0097	30.12	663.0	8.07	0.919	313	288	0.434	0.0248	0.790	0.723
179	〃	300	47.00	81.83	0.00124	155.49	0.0104	33.49	415.1	6.38	0.588	231	278	0.670	0.0208	0.408	0.895
180	〃	300	46.24	83.18	0.00140	306.16	0.0104	33.74	472.3	6.80	0.954	244	278	0.589	0.0218	0.546	1.084

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{\tau u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
181	0.376	300	44.28	86.86	0.00152	442.30	0.0104	31.49	478.8	6.85	1.348	248	278	0.581	0.0208	0.556	1.503
182	〃	300	42.95	89.55	0.00170	500.39	0.0104	31.79	540.1	7.28	1.272	263	278	0.515	0.0214	0.674	1.170
183	〃	300	39.90	96.39	0.00284	625.67	0.0104	31.98	908.0	9.44	0.730	342	288	0.318	0.0259	0.916	0.494
184	〃	350	47.04	95.39	0.00160	273.59	0.0097	32.99	527.9	7.20	0.722	279	283	0.537	0.0200	0.638	0.702
185	〃	350	45.38	98.88	0.00212	684.87	0.0097	33.93	719.3	8.40	1.131	326	288	0.401	0.0227	0.831	0.845
186	〃	350	44.11	101.73	0.00240	816.12	0.0097	33.42	802.1	8.87	1.147	344	288	0.359	0.0232	0.873	0.816
187	〃	350	43.88	102.26	0.00244	897.67	0.0097	32.12	783.9	8.77	1.308	340	288	0.367	0.0227	0.871	0.931
188	〃	350	42.59	105.36	0.00244	1095.01	0.0097	32.02	781.8	8.76	1.600	340	288	0.368	0.0219	0.870	1.139
189	〃	400	51.84	98.92	0.00194	962.20	0.0097	37.67	730.6	8.47	1.556	328	288	0.394	0.0232	0.839	1.150
190	〃	400	50.47	101.61	0.00256	1529.65	0.0097	38.82	993.9	9.87	1.561	381	298	0.299	0.0265	0.929	1.042
191	〃	325	46.30	89.99	0.00128	296.42	0.0098	31.34	401.2	6.27	1.180	240	278	0.693	0.0184	0.368	1.987
192	〃	325	42.74	97.49	0.00168	420.06	0.0098	30.01	504.1	7.03	1.186	272	278	0.552	0.0188	0.608	1.209
193	〃	325	42.75	97.46	0.00251	464.57	0.0098	33.33	836.7	9.06	0.616	347	293	0.350	0.0247	0.886	0.431
194	〃	275	44.13	79.89	0.00137	156.45	0.0096	32.80	449.5	6.64	0.524	260	278	0.619	0.0227	0.496	0.656
195	〃	275	42.83	82.32	0.00159	283.84	0.0096	32.50	516.8	7.12	0.772	279	283	0.548	0.0229	0.620	0.773
196	〃	275	42.91	82.16	0.00165	585.79	0.0096	32.90	543.1	7.30	1.478	286	283	0.522	0.0236	0.659	1.391
197	〃	275	41.63	84.69	0.00172	416.51	0.0096	31.79	546.8	7.32	1.040	287	283	0.518	0.0228	0.670	0.962
198	0.376	275	40.93	86.10	0.00162	422.96	0.0096	30.55	495.0	6.97	1.225	273	283	0.572	0.0212	0.572	1.327
199	〃	225	39.93	72.24	0.00090	21.61	0.0102	27.85	250.0	4.95	0.175	183	263.1	1.051	0.0177	0.060	1.808
200	〃	225	37.68	76.56	0.00107	44.57	0.0102	26.71	285.9	5.29	0.295	195	268	0.937	0.0177	0.084	2.178
201	〃	225	37.04	77.88	0.00117	107.75	0.0102	26.75	312.7	5.54	0.622	204	268	0.856	0.0182	0.149	2.589
202	〃	225	34.87	82.72	0.00118	176.81	0.0102	24.27	286.3	5.30	1.165	196	268	0.936	0.0162	0.085	8.500
203	〃	225	34.04	84.74	0.00159	148.74	0.0102	23.71	377.0	6.08	0.650	224	273	0.724	0.0180	0.318	1.268
204	〃	175	33.36	67.25	0.00095	13.83	0.0097	27.27	259.0	5.04	0.106	195	268	1.034	0.0193	0.037	1.777
205	〃	175	32.04	70.02	0.00103	35.03	0.0097	26.20	277.0	5.14	0.252	199	268	0.968	0.0188	0.067	2.331
206	〃	175	30.72	73.03	0.00113	104.29	0.0097	22.74	257.1	5.02	0.816	195	268	1.042	0.0173	0.038	13.320
207	〃	175	29.24	76.73	0.00162	154.08	0.0097	23.00	372.7	6.04	0.685	234	278	0.747	0.0197	0.287	1.482
208	〃	175	27.86	80.53	0.00188	225.57	0.0097	22.12	416.2	6.39	0.849	244	278	0.667	0.0197	0.416	1.266
209	〃	175	32.91	68.17	0.00121	5.76	0.0096	25.66	310.6	5.52	0.034	216	268.5	0.862	0.0206	0.143	0.148
210	〃	175	33.14	67.70	0.00098	18.91	0.0096	24.49	239.8	4.85	0.163	190	268.5	1.117	0.0181	0.015	0.674

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
No.	d (cm)	Q (l/sec)	H_o (cm)	v (cm/sec)	I	q_B (mg/cmsec)	ν (C. G. S.)	H (cm)	τ (gr/m2)	u_* (cm/sec)	$\frac{q_B}{\tau u_*}$	$\frac{du_*}{\nu}$	τ_c (gr/m2)	$\frac{\tau_c}{\tau}$	n	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	φ
211	0.376	175	30.77	72.91	0.00149	53.84	0.0096	24.26	361.6	5.95	0.256	233	278	0.770	0.0206	0.250	0.636
212	〃	175	28.61	78.42	0.00150	117.40	0.0096	21.93	329.1	5.68	0.629	222	273	0.828	0.0180	0.177	2.204
213	〃	200	37.78	67.87	0.00095	8.71	0.0091	27.77	263.7	5.08	0.065	210	268.5	1.015	0.0193	0.044	0.917
214	〃	200	36.57	70.11	0.00107	18.27	0.0091	27.23	291.6	5.35	0.117	221	273	0.936	0.0196	0.085	0.853
215	〃	200	35.32	72.60	0.00118	33.69	0.0091	26.53	313.2	5.54	0.195	229	273	0.870	0.0195	0.136	0.890
216	0.458	82	19.38	54.25	0.00169	0	—	17.00	287.2	5.31	—	—			0.0232		
217	〃	128	25.39	64.63	0.00125	0	—	20.29	253.7	4.98	—	—			0.0189		
218	〃	150	25.31	75.98	0.00183	16.56	0.0085	20.46	374.6	6.06	0.073	327	350	0.936	0.0196	0.084	0.539
219	〃	150	24.63	78.08	0.00180	10.39	0.0085	19.65	353.8	5.89	0.050	317	350	0.992	0.0184	0.052	0.596
220	〃	150	24.55	78.33	0.00180	14.93	0.0085	19.35	348.3	5.84	0.074	315	350	1.006	0.0181	0.047	0.977
221	〃	175	28.98	77.42	0.00171	43.34	0.0081	22.93	392.2	6.12	0.181	346	357	0.910	0.0200	0.102	1.101
222	〃	175	28.90	77.63	0.00177	34.53	0.0081	23.03	407.9	6.33	0.134	358	357	0.874	0.0204	0.132	0.630
223	〃	175	28.99	77.39	0.00173	40.27	0.0081	23.01	398.2	6.25	0.162	353	357	0.896	0.0202	0.114	0.881
224	〃	175	27.97	80.21	0.00188	99.88	0.0081	22.25	418.2	6.40	0.372	362	357	0.853	0.0198	0.151	1.527
225	〃	175	27.93	80.33	0.00191	109.94	0.0081	22.30	426.0	6.46	0.400	365	357	0.838	0.0200	0.168	1.476
226	〃	175	27.57	81.38	0.00187	108.45	0.0081	21.79	407.8	6.32	0.421	357	357	0.874	0.0193	0.133	1.963
227	〃	200	31.18	82.24	0.00178	66.81	0.0086	24.29	432.2	6.51	0.238	347	357	0.825	0.0200	0.180	0.821
228	〃	200	31.35	81.79	0.00176	61.05	0.0086	24.42	430.0	6.49	0.219	345	357	0.830	0.0200	0.175	0.776
229	〃	200	31.17	82.26	0.00180	64.82	0.0086	24.34	438.1	6.56	0.225	349	357	0.815	0.0201	0.191	0.731
230	〃	200	29.41	87.18	0.00196	89.91	0.0086	22.81	447.1	6.62	0.304	352	357	0.798	0.0190	0.213	0.885
231	〃	200	29.62	86.57	0.00195	131.34	0.0086	23.02	449.0	6.64	0.441	353	357	0.794	0.0192	0.218	1.255
232	〃	200	29.48	86.98	0.00184	156.73	0.0086	22.53	415.0	6.38	0.593	339	357	0.859	0.0183	0.148	2.487
233	〃	225	32.31	89.28	0.00210	242.53	0.0082	25.19	529.0	7.20	0.637	402	363	0.686	0.0205	0.381	0.994
234	〃	225	32.15	89.72	0.00208	156.29	0.0082	25.28	525.9	7.18	0.415	401	363	0.690	0.0203	0.373	0.690
235	〃	225	31.78	90.77	0.00191	161.70	0.0082	24.06	495.0	6.97	0.470	389	363	0.734	0.0186	0.303	0.962
236	〃	250	35.43	90.46	0.00205	298.48	0.0092	27.32	560.2	7.41	0.718	368	363	0.648	0.0211	0.448	0.995
237	〃	250	36.90	86.86	0.00195	167.60	0.0092	28.68	559.1	7.40	0.405	367	363	0.650	0.0221	0.442	0.568
238	〃	250	36.99	86.65	0.00195	216.20	0.0092	28.75	560.8	7.42	0.520	369	363	0.646	0.0222	0.449	0.719
239	〃	275	36.54	96.49	0.00214	342.19	0.0097	27.60	590.6	7.61	0.763	359	357	0.604	0.0203	0.518	0.913
240	〃	275	36.83	95.73	0.00202	326.54	0.0097	27.53	556.2	7.48	0.786	353	357	0.641	0.0199	0.453	1.076
241	〃	275	36.61	96.30	0.00203	280.97	0.0097	27.34	555.3	7.48	0.678	353	357	0.642	0.0197	0.452	0.931
242	〃	300	39.32	97.83	0.00232	503.26	0.0093	30.10	698.2	8.28	0.871	408	363	0.520	0.0221	0.665	0.813
243	〃	300	39.39	97.64	0.00205	390.19	0.0093	29.30	600.7	7.68	0.848	378	363	0.604	0.0205	0.518	1.016
244	〃	300	38.15	100.82	0.00205	329.88	0.0093	28.11	576.2	7.52	0.762	370	363	0.630	0.0193	0.475	0.995
245	〃	350	42.28	106.13	0.00218	400.06	—	30.52	665.8	8.09	0.744	—			0.0199		
246	〃	503	42.08	106.63	0.00190	490.74	—	29.08	552.3	7.36	1.208	—			0.0179		

附表－2

実験番号	1 — 黄		1 — 赤		1 — 緑		2 — 緑		2 — 白	
観測区間	s gr	P	s gr	P	s gr	P	s gr	P	s gr	P
No. 1—3										
4										
5										
No. 2—1	230.548	0.801								
2	68.216	0.926								
3	92.755	0.892								
4	60.883	0.920								
5	61.576	0.913								
No. 3—1	129.150	0.799								
2	88.143	0.828	52.048	0.948	1.013	0.913				
3	29.204	0.931	77.065	0.920	0.363	0.966				
4	14.773	0.963	41.264	0.953	—	1.000	39.984	0.742	33.253	0.713
5	10.954	0.971	28.391	0.966	—	1.000	28.224	0.754	20.099	0.756
No. 4—1	9.257	0.975	34.675	0.958	0.638	0.938	14.027	0.838	10.299	0.835
2	13.450	0.963	42.539	0.945	0.692	0.929	6.777	0.907	3.664	0.891
3	21.016	0.939	56.565	0.923	0.781	0.913	5.818	0.912	6.378	0.906
4	23.309	0.929	76.406	0.887	0.473	0.942	8.085	0.865	5.565	0.868
5	35.502	0.883	106.531	0.823	1.146	0.852	9.286	0.821	7.299	0.800
No. 5—1	41.817	0.844	97.270	0.803	1.275	0.807	7.781	0.818	8.323	0.714
2	24.806	0.890	46.690	0.883	0.403	0.924	4.223	0.879	3.923	0.812
3	13.627	0.932	22.390	0.936	0.591	0.880	3.676	0.880	2.137	0.874
4	9.377	0.950	17.097	0.948	0.249	0.942	3.714	0.862	3.403	0.770
5	10.356	0.942	14.847	0.952	0.501	0.877	2.592	0.888	3.258	0.713
No. 6—1	20.309	0.879	39.544	0.867	0.226	0.936	2.695	0.869	1.606	0.802
2	28.617	0.805	56.195	0.781	1.462	0.563	2.525	0.859	1.337	0.794
3	33.651	0.716	66.136	0.670	0.242	0.872	2.082	0.865	0.950	0.816
4	14.071	0.834	30.569	0.772	0.230	0.859	1.355	0.898	0.486	0.884
5	11.649	0.835	17.165	0.835	—	1.000	2.572	0.786	0.474	0.873
No. 7—1	13.803	0.766	18.651	0.785	0.292	0.793	2.385	0.747	0.811	0.750
2	8.362	0.815	15.470	0.773	—	1.000	2.472	0.649	0.209	0.914
3	17.240	0.533	22.719	0.569	0.675	0.397	2.076	0.545	0.531	0.762
4	12.967	0.342	18.765	0.374	0.264	0.407	2.287	0.081	1.343	0.209
5	6.731		11.213		0.181		0.201		0.356	

sは水路の長さ1mの区間内に存在した染色砂の重量

註 $$Pi = \frac{\sum_{i+1}^{\infty} s}{\sum_{i}^{\infty} s}$$

実験番号	3 — 赤		3 — 青		4 — 黄		4 — 青	
観測区間	s gr	P	s gr	P	s gr	P	s gr	P
No 1—3	2.369	0.964	3.101	0.940				
4	19.119	0.701	12.895	0.737				
5	27.540	0.386	23.251	0.356				
No. 2—1	1.591	0.908	1.448	0.887	3486	0.602	404	0.337
2	0.386	0.975	0.951	0.917	1438	0.727	91.0	0.557
3	3.422	0.777	1.874	0.820	1362	0.644	43.32	0.631
4	7.118	0.401	4.386	0.488	109	0.956	2.52	0.965
5	0.713	0.851	0.287	0.931	316	0.886	10.63	0.848
No. 3—1	1.880	0.537	1.719	0.558	169	0.917	10.40	0.824
2	0.805	0.631	0.552	0.745	423	0.774	13.11	0.731
3	0.406	0.705	0.421	0.740	470	0.676	14.33	0.597
4	0.731	0.245	0.798	0.333	439	0.552	7.89	0.629
5	0.237		0.398		306	0.435	6.89	0.484
No. 4—1					68.3	0.710	1.74	0.731
2					56.62	0.662	1.55	0.672
3					44.10	0.602	1.21	0.618
4					33.85	0.492	0.90	0.542
5					28.85	0.119	0.64	0.399
No. 5—1					1.795	0.538	0.251	0.409
2					1.703	0.185	0.120	0.310
3					0.265	0.315	0.047	0.130
4					0.070	0.426	—	1.000
5					0.052		0.007	

河床砂礫の掃流運搬に関する研究（1）

建設技官　佐藤清一
建設技官　吉川秀夫
建設技官　芦田和男

（昭和 31 年 10 月）

Study on the bed-load transportation (1)

(October 1956)

S. Sato
H. Kikkawa
K. Ashida

Synopsis :

Analysing the physical meaning of the results of our experiments of bed-load transportation we found a relation between bed-load function and the coefficient of roughness and gained a semi-experimental formula for computation of bed-load which covered the results of experiments both by ourselves and Dr. Giberts.

要　旨

著者等は流砂の規模が大きく河床抵抗のかなり大きい部分を含めて掃流砂の実験を行つてきた。さらに染色砂りにより河床砂礫の掃流運搬の機構を考察し，掃流砂についての理論的検討を加え，Gilberts 及び著者等の資料を一貫的に説明し得る掃流流砂量の実験公式を導いた。

目　次

1. 緒言……（1）
2. 実験……（3）
〔1〕実験装置……（3）
〔2〕測定方法……（3）
〔3〕測定結果……（4）
3. 理論……（4）
〔1〕掃流物質の概念……（4）
〔2〕掃流流砂の物理的機構……（5）
〔3〕理論的考察……（7）
4. 掃流流砂量の実用算定公式……(14)
5. 結論……(17)

1. 緒　　言

流砂の問題は河道の安定を支配する重要な問題である。さらに安定な河道の設計，貯水池の土砂堆積河川分合流点の処理，護岸水制等の有効な施工，放水路，捷水路等の人為作用にもとづく河床変化の推定，用水の取入れ，内水の排除等広範囲の河川水理の問題はほとんどすべて直接，間接に流砂の問題に関係しており，流砂の問題の解明を見なければ，十分に将来的な計画も含めた治水，利水の合理的な河川の処理を期することはできない流砂の問題が近年各国において盛に研究されているのはこのゆえである。

しかしこれらの多くの研究にもかかわらず実際河川の問題にあまり応用されていないのは，自然河川にまで十分に信頼して適用し得る一般的な流砂量公式が求められていないことによるものである。この一般的な流砂量公式を求め得たならば，二次元的な問題はそれを用いて計算することにより解決されるであろう。さらに三次元的な問題になると計算のみによつて解決することが困難になつてくる場合もあろうが，このような場合でも，一般的な流砂量公式を基礎とした相似律による移動河床の模型実験を行うことにより問題は解決されるであろう。かくして，河川改修計画を総合的合理的にたてることができる。

本研究の目的はこのように重要であると考えられる一般的な流砂量式を求めることにある。

流送土砂は浮游流砂と掃流流砂に分けられるが，河川の河口部附近，貯水池等で河床附近の粒径が非常に小さい所を除いては河床の安定を支配するものは掃流流砂と考えられる。

一方掃流流砂量に関する従来の研究は 1879 年 Du Boys[1] が掃流力の概念を出して以来盛になり Gilbert[1] が 1909～1914年 掃流砂に関する広範な実験を行つてこの問題に一歩を進めた。

その後実に数多くの実験公式が出されているが何れも物理的機構の考察がなされておらずそれぞれの実験の行

なわれた条件に対しては正しいとしてもその範囲を越えて通用するのに困難を感ずる。

最近 H.A. Einstein[3] はかなり独創的に流砂の物理的機構を考察しながら流砂量公式を導いている。Einstein の考察は極めて巧妙であり多くの示唆に富むものではあるが，その仮定中にはかなり無理と考えられる点もあり流砂量の規模が大きくなると誤差が大きいとされている。

さらに椿井東一郎[4] 氏は物理的機構を考察して実験結果を無次元的な一般法則にまとめることを合理的な解決の第一歩としなければならぬことを強調し Gilbert の実験に対して無次元解析により掃流流砂量公式を求めている。この研究も非常に興味あるものであり，この分野に一歩を進めたとはいえ使用している実験値が小水路に限られているため自然河川に適用する場合にはさらに広範囲の実測資料も含めて一貫的に説明し得るものでなければならないと考えられる。

この事は椿氏の研究に限らず従来の研究がほとんどすべて小水路の実験にもとづいているため共通して言い得ることである。

そこでわれわれは 1951 年より 1955 年に至る 5 年間にわたり染色砂により流砂の物理的機構を考察するための実験を行い，さらに大型水路により Gilbert の実験に含まれていない大規模の流砂および河床抵抗のかなり大きい部分をも含めて掃流流砂量の実験を行つた。これによつて流砂の物理的機構を考察しながら河床附近の乱流理論にもとづいて理論を発展させ，これらを一貫的に説明し得る流砂量公式を導いた。

さらに粒径の大きい部分について混合粒径も含めた流砂実験を継続中であり，現地観測についても1954年1955年の 2 年間利根川において洪水時の掃流流砂の実測を行つたが，これ等については現在資料の整理中であり，近く発表することとし，ここに一応の結論を得たので報告し各氏の御批判を仰ぎ，今後の研究に一歩を進めようとするものである。

なお本文において用いる記号は次の通りで本文及び図表に特記しない限りそれらの単位は次のごとくである。

a $=8.5+5.75\log_{10}\frac{y_0}{k_s}$ (無次元)

b $=\frac{u_b}{U}$ (無次元)

B_0 (cm) 実験水路の幅
C (cm/sec) 粒子の沈降速度
C_L (無次元) 揚力係数
d (cm) 粒径
g (cm/sec²) 重力の加速度
H_0 (cm) 実験水路の水深
H (cm) 水深（二次元）
I (無次元) 水面勾配
k_s (cm) 相当粗度
N (cm²) 河床附近の粒子濃度，河床の単位面積上の掃流層内の粒子の全体積
n (m/sec) Manning の粗度係数
n_w (m/sec) 側壁の粗度係数 (Manning)
P (無次元) 掃流砂の移動確率
p (gr/cm²) 河床附近の瞬間揚圧力
$\bar{P}$ (gr/cm²) 同上平均値
ΔP (gr/cm²) 同上変動値
P_c (gr/cm²) 砂粒子を浮き上げる限界揚圧力
(P_c) (gr/cm²) 限界掃流力発生等の揚圧力の平均値
Q (l/sec) 実験水路の流量
q_B (gr/sec cm) 単位幅当りの掃流砂量
S (gr) 実験水路の長さ 1 mの区間内に存在した染色砂の重量

T $=\frac{1}{t_c}e^{-t_c^2}$ (無次元)

t_c $=\frac{c}{\sqrt{2k^2\frac{t}{\rho}}}$ (無次元)

t (sec) 時間
$\bar{u}$ (cm/sec) y点における流速(時間的平均)
u_b (cm/sec) 河床附近の瞬間流速
$\bar{u}_b$ (cm/sec) 同上の（時間的）平均値
u_{bc} (cm/sec) 粒子浮揚の河床附近の限界流速
U_b (cm/sec) 掃流層の平均流速

$u_{*}=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ (cm/sec) 摩擦速度

v (cm/sec) 水路の平均流速
w (gr/cm³)$=\rho g$ 流体の単位重量
y (cm) 理論河床からの距離
y_0 (cm) 河床の近傍の理論河床からの距離
$\frac{du_{*}}{\nu}$ (無元) 砂粒子の Reynolds 数
γ (無元) 河床の単位面積中，揚圧力及び有効に働く面積
ν (c.g.s) 動粘性係数
ρ (gr.sec²/cm⁴) 流体の密度
ρ_s (gr.sec²/cm⁴) 砂の密度

$\sigma=\frac{\left(\sqrt{\overline{\Delta P^2}}\right)_c}{(\bar{P})_c}$

$\sqrt{\overline{\Delta P^2}}=\frac{\Sigma(\Delta P^2)}{n}$ (gr/cm²) 揚圧力の変動値の標準偏差

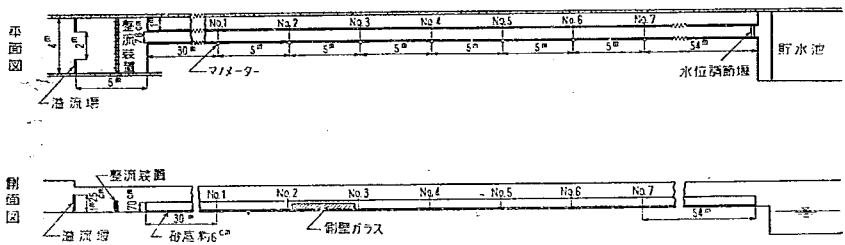
τ (gr/cm²) 床剪断力　　τ_c (gr/cm²) 限界河床剪断力，限界掃流力

φ (無元) 掃流砂量係数　　ψ (無元) 限界掃流力の係数

2. 実　　験

〔1〕 実験装置

実験に用いた水路は図—1に示すごとく全長114m，水路巾B_0= 78 cm，平均河床勾配$\frac{1}{1000}$の滑らかなモルタル仕上げとした。床面に厚さ約6 cm～10cm程度に所定の勾配で均一粒径の砂を敷き，No 2～No 3 の区間で後述の掃流採砂器により流砂量を測定した。砂は上流端から補給しない方法を取つたが上流区間をかなりさけて

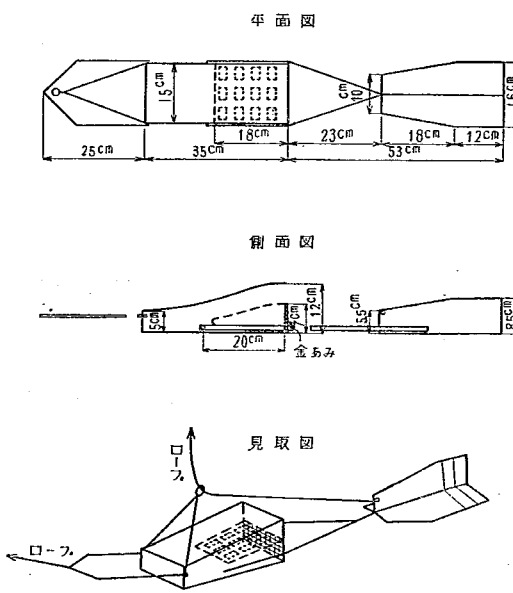


図—1 実 験 水 路

測定しており，適当な時間で測定を完了することにしたので河床条件は変らないとして差し支えないと考えられる。

〔2〕 測定方法

流量の測定は上流の溢流堰によつた。水深の測定は砂漣の発生により各点におい異なり正確に求めることが困難であるが流砂量を測定するのと同一時間に図—1に示した各測点において行いその平均として求めた。この実験では全水深がかなり大きいのでこのような取り扱いが許容し得る，水面勾配の測定は，野外実験であること，側壁の影響，砂漣の影響により水面が多少振動するので瞬間的な波を消すため側壁を通して静圧をマノメーターに誘導し，この読みにより求めた水面勾配の測定は水深の測定よりも入念を要するので流砂量測定の時間をはさんで前後回の測定を繰返した。流砂量の測定は測定装置を挿入することによりその附近の水流に変化を与えないように配慮しなければならない。このため図—2に示すごとき掃流採砂器を用いた。この型は最初Bogardi[5]が考察したものである。ここで特に配慮している所は採砂器に流入した水をできるだけ抵抗少なく流出させることであり，このため出口上部の流出口は流入口と同一の断面積を取つている。出口下部は細い金網で，中段の粗い目の金網とに限られた部分に流入土砂を溜める。中段の金網は一たん筐に溜つた土砂がまき上りによつて流出することを防ぐために設けたものである。この採砂器を用いる場合特に注意すべき点は河床と採砂器が充分に接着すること，採砂器を持ち上げる場合流入した土砂が水と同



図—2 掃流砂採取器

時に流出しないようにすること，河床土砂をすくい取らないように注意することである。このためNo 2，No 3の間の側壁をガラス張りとし河床附近の状況を観察しながら上部より吊つているロープと前方に引張つているロープを操作しうまく採砂することが出来た。これによつて採砂器の流入口附近に流下してきた土砂は流入口附近で特に堆積することもなく，又採砂器の側方に周り込んで逃げ去る様な現象も起らず採砂方法は充分に信頼し得るものと思われる。

河床に砂漣が発生する場合には砂漣の前面では渦のために砂粒子は，上流の砂漣前面にまきま込れ砂粒子の下流方向の運動は少くしたがつて採砂量は少なく，砂漣の山の所では不連続的に多く採砂されるのでなるべく砂漣の一波長について採砂することが望ましい。しかし砂漣の波長は場所により一定しているとも限らないし上記の採砂方法では一波長についてそつくり採砂するということも不可能であるので砂漣の山が過ぎてから次の砂漣の谷が至る間に前後10回程度の観測を繰り返しその平均として流砂量を求めた。

1回の採砂時間は採砂器の大きさと流砂量の程度により定まるものであろうが，あまり時間をかけると河床条件が異なつてくるので30秒～60秒とした。なお側壁の影響をできるだけ除外するため採砂は水路の中央附近で行つた。

〔3〕 測定結果

行つた実験の範囲は表－1のごとくであり，測定結果を附表－1に示す。なお引つづき粒径6 mm～50mmの範囲の砂利について実験中であるが本文には含まれていない。

表－1 実験の範囲

d (mm)	Q (l/sec)	τ (gr/m²)	q_B (gr/sec·cm)	種類
1.038	43～200	60～515	0～0.67	36
2.21	28～350	133～1280	0～1.8	64
2.62	90～325	154～1170	0～1.44	63
3.76	80～400	255～1300	0～1.53	52
4.58	80～350	320～910	0～0.5	31

3. 理論

〔1〕 掃流物質の概念

流送土砂は普通浮游流砂と掃流流砂に分けて考えられている。しかし両者の区別は明確ではない。 ShaankとSlotboom[6] は掃流物質とは河床にそつて移動する流送土砂の中で比較的粗い部分，浮游物とは横断面全体にわたつて分布している細い部分で両者は実験的観測方法における差異に過ぎぬと述べている。

さらに H.A. Einstein, Aloin G Anderson, Toe W. Johnson[7] 等は1939年 Enoree riverの実測の結果，掃流と浮游の区別について興味ある考察をなしている。

この観測方法は河床附近を流れている比較的粗い部分については河床に設けた穴から管路を通してPumpにより排除し沈砂池で篩分け，それより細い上部に分布しているものに対しては採水器により採砂し全流砂量を測定するものであるが，篩分けの結果，ある粒径（この場合には 0.35 mm）より大きいものと小さいものとではそれぞれ流量に対する運搬量の関係が異なり，しかもこの分岐点になる粒径は河床材料の粒度曲線の折点（粒径小なる方）になることを見い出している。これによれば浮游物質の粒径範囲はほとんど河床には見い出されず河床砂はほとんど掃流として運搬され，河床に見い出される粒度曲線の折点より小さい粒径のものはこれ等砂礫の間の空隙を満しているに過ぎないと考えられる。このことは掃流物質についてかなり明らかな概念を与えるものである。

さらに H.A. Einstein [8] は彼の掃流に対する理論の展開にあたり掃流物質を次の如く定義している。

掃流物質とは河床層中を移動する河床物質である。ここに河床層とは河床直上約2粒径の厚さである。この定義にしたがえば河床粒子より細いすべての粒子は掃流物質から除外されている。 Einstein は実際目的に対しては河床物質の最も細い10%（重量で）を除外してもさしつかえないと述べている。

河床の安定を支配するものは河床砂礫の運動であるから上記の掃流の定義は非常に有効である。また上記の定義は実際河川において掃流砂を測定するに際し，河床材料を調査しどの程度の採砂器を使用すればよいかと言う観測方法に対して明確な結論を与えるもので，先に Shaank と Slotboom が与えた掃流物質の定義をもこの中

に含むものである。

〔2〕 掃流流砂の物理的機構

河床砂礫はそこに働く掃流力がある値に達すると移動し始める。ここの粒子は転動，滑動，時には小跳躍により移動し，さらに掃流力が増加すると砂漣が発生し河床面は波状になる。この波の背面はかなりゆるやかで前面は比較的急であり，この場合のここの粒子は砂漣の山の部分から前面に落ち込み見掛上砂漣が前進しながら流下する。砂漣の山の下流側には下流側から砂漣前面に向う渦を生じ砂漣の山の所からかなり下流に落下した砂礫も砂漣前面にひきつけられる。

さらに掃流力が増加すると砂漣は消失しあたかも河床が篩で掃きならされたようになり流砂運動も活潑になる。[9]

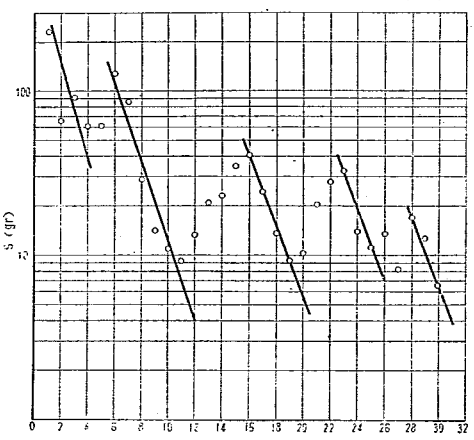
普通は砂漣は下流側に前進しながら流下するものであるが，場合によつては見掛上上流側に前進しながら流下することも観測されている。[10]

このように砂礫の運動はかなり複雑であるので砂礫運動を肉眼で追跡しその物理的機構を調べるためには染色砂による方法がよい。 Einstein もこの方法により物理的機構をかなり明らかにしているが，われわれも同様な立場からこの実験を行つた。行つた実験の範囲は表—2 のごとくである。これを表－3に示すごとく敷き並べ一定時間通水した後，散布地点から下流に砂を全部取り出しその分布を調べた。その結果の一例を図－3に示す。

表—2　染色砂実験の範囲

実験番号	色	流　量 (l/sec)	平均掃流力(gr/m²)	粒　径 (mm)	通水時間 (hr)	摘　要
1	黄	96.8	380	3.76	6	砂漣発生せず
1	赤	96.8	380	3.76	6	
1	緑	96.8	380	3.76	6	
2	緑	188.0	440	3.76	3	
2	白	188.0	440	3.76	3	
3	赤	132.0	300	2.21	1.7	
3	青	132.0	300	2.21	1.7	
4	黄	113.8	—	2.21	2.5	
4	青	113.8	—	2.21	2.5	

註　平均掃流力の欄は大約の値を示すものであり他のものに比し精度が悪い。



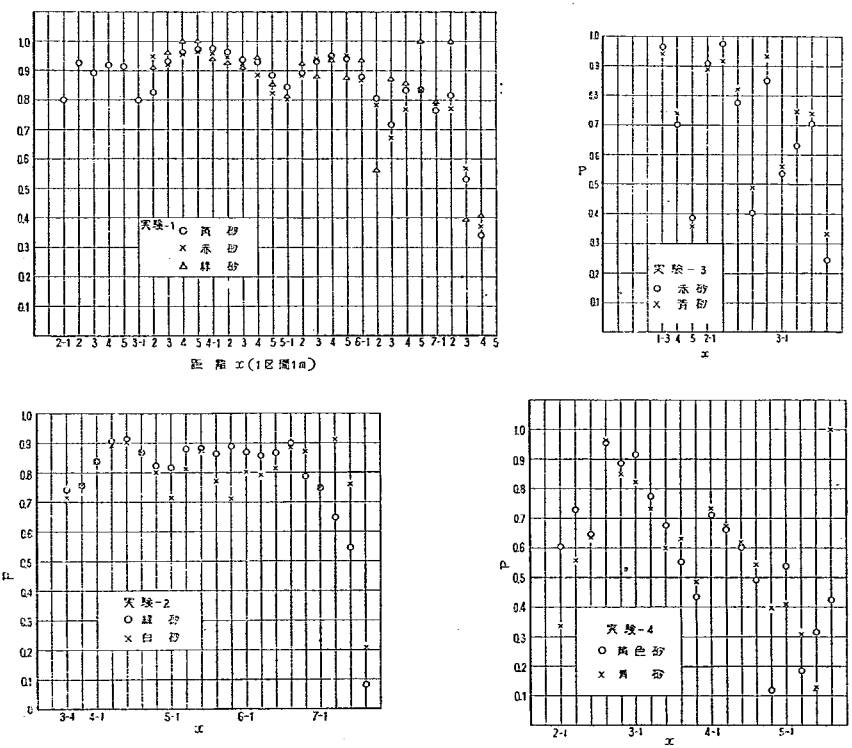
図—3　染色砂の分布の一例

実験1－黄，色砂 (d=3.76mm)，4kg，表面散布，平均掃流力 380gr/m²，通水時間 6hr，S(gr)は水路の長さ1mの区間に存在した染色砂の重量

この場合には目に見えるごとき砂漣は発生していなかつたが染色砂の分布は波状をし呈ている。このように砂漣の発生しない前に粒子運動が波状を呈している事は粒子運動と砂漣との間の相互関係を考える上に一つの暗示を与えるものである。しかしわれわれの今の目的に対しては流砂機構の概念とその統計的な性質を導入すれば足りるのでこの点特に追究して研究を行なはなかつた。図－3における実験では染色砂は散布地点から30m以上下流には見い出し得なかつた。この場合粒子の最先端の移動速度は1～2 mm/sec の程度であり，河床附近の流速の数 cm/sec の程度に比して非常に小さいことが分る。このことは砂漣の発生のいかんにかかわらずほとんど同様であつた。この事実は移動砂の運動が断続的であり，一つの粒子に着目するならば水理量が粒子を動かすに十分になつた時，粒子は移動し，ある距離移動した後粒子は止まり，これらの過程を繰り返しながら流下して行くと言うことによつて説明し得る。

すなわち河床附近の流速と粒子が実際に移動した距離を時間で除した見掛上の速さとの比は，その粒子が全時間の中で河床附近に浮き上つている時間と河床上に止まつている時間との割合によつて決定される。

これは粒子の移動確率とも考えられるものであるが実験の結果移動確率を計算したしたものを附表－2に示す。この場合の移動確率としては次の如く定めた。すなわち区間（1区間は1m間隔）の移動確率はその区間より1つ下流の区間（$i+1$区間）より下流に流下した全染色砂の重量と，i区間より下流に流下した全染色砂の重量との比である。この定義にしたがえば移動確率はある区間に存在した染色砂の全粒子の中どれだけの部分が下流に流下したかを表わす。附表－2を図示すると図－4のごとくなる。



図－4　染色砂の移動確率

移動確率Pの値は同一の実験に対してはその散き並べ方法のいかんにかかわらずほぼ一定している。又砂漣の発生していない実験－1，－2 に対しては方向にほぼ一定している。砂漣の発生している実験－3，－4 に対して x

はPの値はx方行に甚だしく変化している。これは砂漣運動により染色砂が砂漣の山の所に多く谷の所にはほとんど見い出されないことによるものでこの場合の移動確率は粒子の実際の移動確率を表わしていないと考えられる。以上の考察によりある水理量に対する粒子の移動確率は凡ての点でほぼ一定していると推定される。

この事は H.A. Einstein の考え方を実験的に裏書きするものであり，流砂量に対する水理量の統計的な取り扱いを可能にするもので非常に重要な事実である。

なおPが各点で一定しているとすれば染色砂の分布の函数形は容易に求めることができる。

すなわち

$$1-P_i=\frac{\sum_{i}^{i+1}s}{\sum_{i}^{\infty}s} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここにsは距離xの函数であるから $s=f(x)$ とおき各区間を dx で置き変えれば1式は

$$(1-P)\,dx=\frac{\int_{x}^{x+dx}f(x)dx}{\int_{x}^{\infty}f(x)dx}$$

ここに $\int_{0}^{x}f(x)dx=F(x)$ とおけば

$$(1-P)dx=\frac{F(x+dx)-F(x)}{F(\infty)-F(x)}$$

$F(x+dx)=F(x)+F'(x)dx$ であるから，これを上式に代入して積分し，積分常数を導入して

$$f(x)=f(0)e^{-(1-P)x} \quad \cdots\cdots (2)$$

を得る。

すなわち分布量は距離方向に指数函数的に減少して行く。図—3に示した分布図からそれぞれの波の区間に対してこの関係が成立していることを伺うことができる。

これらの事実はアイソトープ等の使用により流砂の研究を行おうとする場合ある示唆を与える。しかし上に定義した移動確率は時間，距離の要素を含めたものであり物理的にその意味が不明であり，これを粒子の絶対的な移動確率と結びつけることは甚だ困難であるので，したがつて染色砂の分布から直接流砂量を求めることは甚だ困難であろう。又砂漣が発生している場合には移動確率の値が非常に変化するので，この場合にはさらに困難となり実際的には不可能に近い。

次に肉眼による観察について述べよう。掃流力をちく時増して行けば始め静止していた河床砂はその場所で振動を始める。この附近になれば河床の所々において一つ二つ移動する流砂が見受けられるようになる。この場合はまだ限界掃流力以下の状態にある。さらに掃流力を増せば所々において，振動していた粒子が移動を開始するようになる。この場合に粒子の移動はその粒子が河床からごくわずか浮き上りかなりの速度で振動する。この速度は河床附近の速度とほぼ等しいことが知られた。この粒子は一時に数 cm ないし数 10cm 移動し河床に着く。この距離は H. A. Einstein の仮定している如き 100. d (dは粒径) と言つた簡単な関係にはなくかなり変化する。粒子が河床に着く場合，他の粒子に衝突し，この粒子を移動状態におく現象も観察されたがこの量は比較的少ない。さらに掃流力を増すと場所により粒子運動が活潑になる所，割合に活潑でない所が現われこれが砂漣らしきものを形成する。さらに掃流力を増せば，この砂漣はちく時発達し，その高さも大きく波長も長くなる。この時期には粒子運動は非常に活潑になつており，移動している粒子は砂漣の山を越えて前面に滑り落ちつく時砂漣の山を前進させる。砂漣の山を越えてかなり下流に落下した粒子も砂漣前面に発生している渦により砂漣の前面に引きつけられる。時には砂漣の山を越えてかなり下流に落下しそのまま次の砂漣の背面に前進して行く粒子もあるが，この量は非常に少ない。

このように，砂漣の発生している場合の粒子運動は非常に複雑なように見受けられるが個々の粒子の運動については砂漣が発生していない場合と同様に河床からごくわずか浮き上り周りの流体によつて運ばれている。

〔3〕 理論的考察

以上の考察により粒子移動の機構がある程度説明し得た。これにより乱流水中においては粒子は先ず水の乱れによりごくわずか浮き上り，周りの流体により運ばれるとすることは妥当であると考えられる。それ故単位時間に河床粒子が浮き上る割合と河床附近の速度を決定すれば掃流流砂量を求め得る。

以下に取り扱う方法は先ず粒子の浮き上る機構を考察して河床附近の粒子濃度を求め，これと河床附近の流速

との積により掃流流砂量を求めんとするものである。

まず粒子の浮き上る機構について考える。乱流水中においては水粒子は乱水により横方向に，又鉛直方向に，絶えず変動しながら移動していることは周知の事実であるが，河床の掃流層附近においても河床砂のため層流境界層は破られて乱流境界層になり，水粒子はたえず変動しながら移動していると考えて差し支えない。この乱れのためにそこにある物体に働く揚圧力も絶えず変動している。それ故，粒子の浮き上る条件として次の2つのことが考えられる。

i) 水塊の乱れによる垂直速度成分が粒子の沈降速度より大きくなつた時，粒子は浮き上る。

ii) 水塊の乱れによつておこる揚圧力が粒子の重量よりも大きくなつた時，粒子は浮き上る。

Lane 及び Kalinske[11] は i) の考え方を取り，Einstein は ii) の考え方を取つている。揚圧力の変動は乱水により起こるものでこの両者は結局同じであるが，前者は垂直速度成分が正規誤差分布法則にしたがつて分布するとしており，後者は揚圧力の変動が正規誤差分布法則にしたがつて分布するとしている所に差異が出てくる。この両者は共に実験により求められたものであり，そのどちらが正しいかは早急に論ずることができないが，その法則に従つて求めた現象が事実を良く説明し得るかどうかによつて決定することができる。

Kalinske 及び Van Priest[12] の実験によれば河床附近の乱れによる垂直速度成分は統計的に正規誤差分布法則にしたがつて分布するとしている。この考え方を取れば一様粒径の河床についての河床附近の粒子濃度 N は次式で表わされる。

$$N \propto T \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに

$$T = \frac{1}{t_c} e^{-t_c^2} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$t_c = \sqrt{\frac{c}{2k^2\frac{\tau}{\rho}}} \quad \cdots\cdots(5)$$

c ＝粒子の沈降速度

τ ＝河床剪断力

N ＝河床附近の粒子濃度

ρ ＝流体密度

c が余り大きくないとすれば $e^{-t_c^2} \fallingdotseq 1$ であるから濃度は河床剪断力の平方根に比例することになる。

しかるに彼等が実際河川について調べた結果では

$$N \propto T^n \quad \cdots\cdots(6)$$

の方が実際に良く適合していることがわかつた。彼等の結果によれば $n=1.61$ であつた。又妻伊川の実測[13]では $n=2.0$ となつている。その他の例を見ても n は2に近い値である。このことより河床附近の粒子濃度は河床剪断力の平方根，すなわち摩擦速度 ($u_*=\sqrt{\tau/\rho}$) に比例するというよりは河床剪断力に比例すると考えた方が妥当である。

次に掃流実験の資料から逆に河床附近の濃度が河床剪断力とどのような関係にあるかを調べよう。

河床附近の粒子濃度が仮に河床剪断力に比例するとすれば，最も単純な考え方として単位幅当りの掃流流砂量 q_B は

$$q_B \propto u_* \cdot N \propto u_*(\tau-\tau_c) = \tau u_*\left(1-\frac{\tau_c}{\tau}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

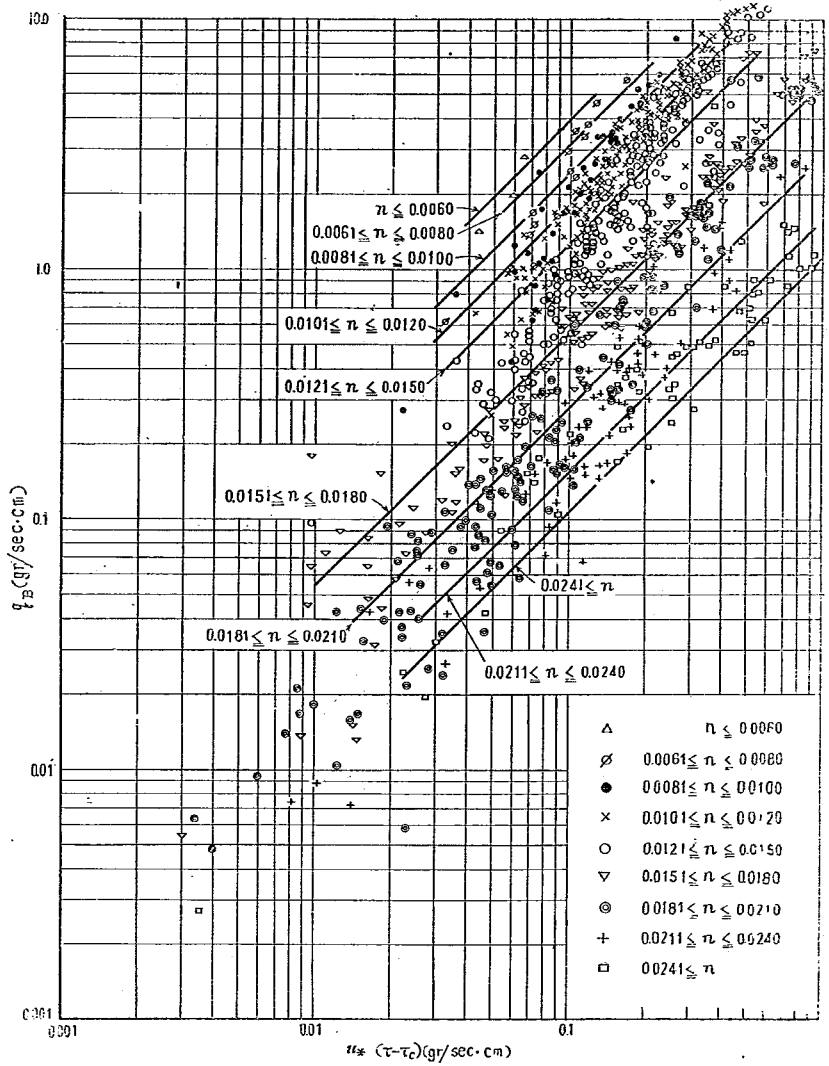
で表わし得ることが期待される。ただし τ_c は限界掃流力である。土研および Gilbert の資料について調べれば $q_B \sim U_*(\tau-\tau_c)$ の関係は図—5のごとくで，Manning の粗度係数 n の一定範囲に対してはそれぞれ(7)式が成立しているものと考えられる。粗度係数が減少する程係数は増加している。これは河床附近の流速と摩擦速度との比が粗度係数が減少するにつれて増加することによるものと思われる。

今かりに河床附近の水理量をデイメンション的に組みたててこの係数を統一する経験法則が求まつたとしても，(7)式の物理的意味が明瞭でないから，この関係を流砂の規模が大きい実際河川にまで外挿することは危険である。

そこで著者は揚圧力の変動値が正規誤差分布法則に従うという点では Einstein と同様の仮定に立つが，その理論の展開においては Einstein の妥当でないと思われる仮定，不明な仮定をやめて，彼とは異つた方法で掃流流砂公式を導いてみよう。

河床附近の流速は乱れにより時々刻々変り，これにより揚圧力が変動することは前記の通りである。今揚圧力を p，その平均値を $\overline{p}$，変動値を Δp とし，河床上ごく近傍において適当に定めた位置の瞬間速度を u_b，その平均値を $\overline{u_b}$ とすれば，揚圧力の瞬間値は

$$p = C_L\frac{\rho}{2}u_b^2 \quad \cdots\cdots(8)$$



図—5　$q_B \sim u_*(\tau-\tau_c)$

で表わされ，揚圧力の平均値は近似的に

$$\overline{p} = C_L \frac{\rho}{2} \overline{u_b}^2 \quad \cdots\cdots(9)$$

であらわされる。又変動値は

$$\Delta p = p - \overline{p} = C_L \frac{\rho}{2}(u_b^2 - \overline{u_b}^2) = C_L \frac{\rho}{2} \overline{u_b}^2 \left(\frac{u_b}{\overline{u_b}^2} - 1 \right) \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに　C_L　揚力係数

C_L の値は Einstein と El Samni の実測りによれば，理論河床から 0.35d (d=粒径) の位置の u_b の値について C_L=0.178 となつている。

さらに彼らは揚圧力の変動値は正規誤差分布法則に従うものであり，垂直速度成分の変動値の分布は非対称になる筈であるとしている。したがつて

$$f(\Delta p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}e^{-\frac{\Delta p^2}{2\overline{\Delta p^2}}} \quad \cdots\cdots(11)$$

ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta p)d\Delta p=1,\quad \sqrt{\overline{\Delta p^2}}=\text{標準偏差}$$

であり，$[f(\Delta p)d\Delta p]$ なる量は揚圧力の変動値が Δp と $\Delta p+d\Delta p$ との間の大きさである時間の全時間に対する割合を示す。

P_0 を粒子を浮き上げるに要する限界揚圧力，河床単位面積の中，揚圧力が効果的に働く面積を γ，δt 時間の中，揚圧力が効果的に働く時間を $\delta t'$とすれば，δt 時間に流水が揚圧力により粒子に効果的に与えた力積は単位面積について

$$\delta t'\cdot\gamma\int_{p_c}^{\infty} pf(p)dp \qquad \text{となる。}$$

一方単位面積上の掃流層内の粒子の全体積を N とし，粒子の密度を ρs とすれば，重力が δt 時間内に鉛直下方に与える力積は

$N(\rho_s-\rho)g\cdot\delta t$ である。

しかるに掃流運動が平衡している場合を考えているから，揚圧力が鉛直上方に与える力積は重力が鉛直下方に与える力積に等しくなければならない。

すなわち

$$\delta t'\cdot\gamma\int_{p_c}^{\infty} pf(p)dp=N(\rho_s-\rho\phi)g\cdot\delta t \quad \cdots\cdots(12)$$

特定の粒子に着目するならば，それが河床にとまつている場合には，河床に支持されているという条件により，流体によつては鉛直下方には運動量を受けず，上向きの運動量のみ有効に受けることになるが，それが一たん浮き上れば揚圧力の変動値が正規誤差法則にしたがうという性質上，流体によつて鉛直上方に受ける運動量と下方に受ける運動量は平均的に見て等しいから，この間における運動量は無効となる。すなわち $\delta t'$ と δt との比は粒子が河床に存在する時間と浮き上つている時間との割合によつて定まるものである。しかるに河床にある全粒子に着目するならば，一つの粒子が浮き上ると，そこには新たな粒子が現われ，流体の力を受けることになるから，河床表面にある全粒子は常に乱水を受ける場合におかれていると考えてよい。

ゆえに $\delta t'=\delta t$ である。

それ故

$$N(\rho_s-\rho)\cdot g=\gamma\int_{p_c}^{\infty} pf(P)dp \quad \cdots\cdots(13)$$

しかるに

$$f(p)dp=f(\Delta p)\overbrace{d\Delta p} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$p=\overline{p}+\Delta p \quad \cdots\cdots(15)$$

であるから (13) 式に (14), (15) 式を代入すれば

$$N(\rho_s-\rho)\cdot g=\gamma\int_{\Delta p_c}^{\infty}(\overline{p}+\Delta p)f(\Delta p)d(\Delta p) \quad \cdots\cdots(16)$$

ここに $\Delta p_0=p_0-\overline{p}$ $\cdots\cdots(17)$

今 $$I_1=\overline{p}\int_{\Delta p_c}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}e^{-\frac{\Delta p^2}{2\overline{\Delta p^2}}}d(\Delta p) \quad \cdots\cdots(18)$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\overline{\Delta p^2}}\,e^{-\frac{\Delta p_c^2}{2\overline{\Delta p^2}}} \quad \cdots\cdots(19)$$

とおけば (16) 式は

$$N(\rho_s-\rho)g=\tau(I_1+I_2)\quad\cdots\cdots(20)$$

となる。

I_1, I_2 を求めるためには

次に p_0, Δp_0 等について考えなければならない。揚圧力のために一粒子の砂に働く力は

$$p\cdot\frac{\pi}{4}d^2$$

一粒子の水中における重量は

$$(\rho_s-\rho)\frac{\pi}{6}d^3\cdot g$$

一方揚圧力はたえず変動しており，その変動が正規誤差分布に従うものとすれば，変動値はどのような大きなものでもあり得，このような考え方のもとには粒子が移動しない限界としての限界掃流力は存在しない。しかし実際的には変動値が大きくなるとその頻度は急激に減少するから限界状態を定義してもさしつかえない。従来の限界掃流力の定義を見ると流砂の運動がかなり一般的に見られるようになつた状態とか砂礫が動き始める状態等かなりあいまいであるが，ここでは揚圧力の変動値が標準偏差の2倍の所の圧力が粒子重量にうちかつ掃流力を以て限界掃流力と定義する。この定義にしたがえば拾上げ確率は2～3％となり限界掃流力の従来の考え方とほぼ同じ値を与えるものと考えられる。ちなみに限界掃流力として標準偏差を取れば拾上げ確率16％となつて運動はかなり活潑であり，標準偏差の4倍を取れば 0.003％となりほとんど浮揚しない状態である。

限界揚圧力を，p_0，限界掃流力の時の平均揚圧力を $(\bar{p})_0$ とすれば

$$p_0=(1+2\sigma)(\bar{p})_0\quad\cdots\cdots(21)$$

ただし　$\delta=\dfrac{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}{\bar{p}}$　であり，これは限界時に於ても成立するものと考えられる。

(9)式より

$$p_0=(1+2\sigma)\frac{C_L\rho}{2}\overline{u_{bc}}^2\quad\cdots\cdots(22)$$

$\overline{u_{bc}}$ ＝粒子浮揚の河床附近の限界流速

したがつて限界状態に対して

$$p_0=(1+2\sigma)(\bar{p}_0=\frac{2}{3}(\rho s-\rho)\cdot g\cdot d\quad\cdots\cdots(23)$$

一方粗い壁面にそつた乱流理論にしたがえば，流速分布は

$$\frac{\bar{u}}{u_*}=8.5+5.75\log_{10}\frac{y}{k_s}\quad\cdots\cdots(24)$$

であらわされる。

ここに　y ＝理論河床よりの距離

$\bar{u}$ ＝y 点における速度

k_s ＝相当粗度

(9)式におけるその位置として理論河床から y_0 の距離を取れば

$$\overline{u_b}=(8.5+5.75\log_{10}\frac{y_0}{k_s})u_*=au_*\quad\cdots\cdots(25)$$

$$a=8.5+5.75\log_{10}\frac{y_0}{k_s}$$

(24)式を(9)式に代入すれば

$$\bar{p}=\frac{C_La^2\rho}{2}u_*^2=\frac{C_La^2}{2}\cdot\tau\quad\cdots\cdots(26)$$

限界状態に対しては(26)式は

$$(\bar{p})_0=\frac{(C_La^2)_0}{2}\tau_c\quad\cdots\cdots(27)$$

ここに $(C_La^2)_0$：限界掃流時における C_La^2 の値

したがつて限界掃流力 τ_c は，(23)，(27)により次式によつて表わされる。

$$\tau_c=\frac{4}{3(C_La^2)_0(1+2\sigma)}(\rho_s-\rho)gd\quad\cdots\cdots(28)$$

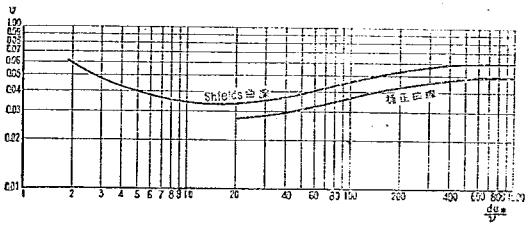
従来の研究によれば，一定粒径に対してはほぼ一定の限界掃流力の値が考えられ，しかもその値は粒径に直線比例するものとされ，次の形で表わされるのが普通である。すなわち

$$\tau_c=\psi(\rho_s-\rho)gd\quad\cdots\cdots(29)$$

ψはジメンションのない係数で，一般に 0.02～0.07 の間に変化するものとされている。ψの値がこの様に幅をもつていることは，White[15]，栗原氏[16]等によつても指摘されている如く，乱れの強さが関係している一方，実験者の限界掃流力に対する定義の差異が大いに関係していると考えられる。われわれの研究では(9)，(10)両式を比較してわかる如く，係数ψの物理的意義は

$$\psi=\frac{4}{3(C_L a^2)(1+2\sigma)}$$

によつて示唆される。一定粒径に対してほぼ一定の限界掃流力が存在するということは，一定粒径に対して$(C_L a^2)_c$およびσの値がほぼ一定することに相当する。



図－6 ψ函数

Shields[17]によれば，係数ψは，図－6の Shields 曲線に示す如く，砂粒子の Reynolds 数 du_*/ν の函数であるとされている。われわれの実験においては，前述の定義の如き限界掃流状態の粒子移動について$\tau_c=(\rho g H_0 I)\sigma$($H_0$は実験水路の水深）を求めると Shields の曲線に割合よく一致する。しかしこのτ_cの値は水路の水深をそのまま用いたものであり，側壁の粗度の影響が入つている。そこで後に述べる如き方法で側壁の影響を除いた補正水深Hを用いて$\tau_c=(\rho g H I)\sigma$によつて求めると図－6の補正曲線に示す如き関係となる。この補正曲線は Shields 曲線に示された資料とわれわれの資料から側壁の影響を補正して求めたものであり，Shields の値の約0.8倍である。

さて，(17)，(9)，(10)，(11)式によれば

$$\Delta p_c=(1+2\sigma)\frac{(C_L a^2)_\sigma}{2}\tau_c-\frac{C_L a^2}{2}\tau=\frac{C_L a^2}{2}\left\{(1+2\sigma)\frac{(C_L a^2)_\sigma}{C_L a^2}\tau_c-\tau\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

(10)および(20)式により

$$\sqrt{\overline{\Delta p^2}}=C_L\frac{\rho}{2}\overline{u_b^2}\sqrt{\left(\frac{\overline{u_b^2}}{\overline{u_b^2}}-1\right)}=\frac{C_L a^2}{2}\cdot\tau\cdot\sigma \quad \cdots\cdots(21)$$

ここに $\left(\frac{\overline{u_b^2}}{\overline{u_b^2}}-1\right)^2=\sigma^2$

したがつて

$$\frac{\Delta p_\sigma}{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}=\frac{1}{\sigma}\left\{(1+2\sigma)\frac{(C_L a^2)_\sigma}{(C_L a^2)}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\} \quad \cdots\cdots(21)$$

(18)式に，(20)，(21)式を代入して$\frac{\Delta p}{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}=t$とおけば

$$I_1=\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\tau\int_{\frac{\Delta p_\sigma}{\sqrt{\overline{\Delta p^2}}}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\tau\int_{\frac{1}{\sigma}\left\{(1+2\sigma)\frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

同様にして(19)式により

$$I_2=\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma\cdot\tau\,e^{-\frac{\Delta p_\sigma^2}{2\Delta p^2}}=\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma\cdot\tau\,e^{-\frac{\left\{(1+2\sigma)\frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\}^2}{2\sigma^2}}$$

ゆえに(22)式により

$$N(\rho_s-\rho)g=\gamma\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\tau\left\{\sigma\, e^{-\frac{\left\{(1+2\sigma)\frac{(\sigma_{La^2})_c}{\sigma_{La^2}}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\}^2}{2\sigma^2}}+\int_{\frac{1}{\sigma}\left\{(1+2\sigma)\frac{(\sigma_{La^2})_c}{\sigma_{La^2}}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}$$

ここに

$$\sigma\, e^{-\frac{\left\{(1+2\sigma)\frac{(\sigma_{La^2})_c}{\sigma_{La^2}}-1\right\}^2}{2\sigma^2}}+\int_{\frac{1}{\sigma}\left\{(1+2\sigma)\frac{(\sigma_{La^2})_c}{\sigma_{La^2}}\frac{\tau_c}{\tau}-1\right\}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)\cdots\cdots(34)$$

とおけば

$$N(\rho_s-\rho)\cdot g=\gamma\cdot\frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\tau}}F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)\cdot\tau$$

$\frac{\tau_c}{\tau}\to 0$ の場合には $F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$ は一定となり N は河床剪断力に比例する。

掃流層の平均流速を $\overline{u_b}=b\cdot u_*$ であらわせず単位巾当り単位時間の掃流流砂量 q_B（重量単位）は

$$q_B=N\rho_s\cdot g\overline{u_b}$$

すなわち

$$q_B=\gamma\frac{bC_L a^2}{2\sqrt{2\tau}}\frac{\rho_s}{\rho_s-\rho}F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)\cdot\tau\cdot u_*\cdots\cdots(35)$$

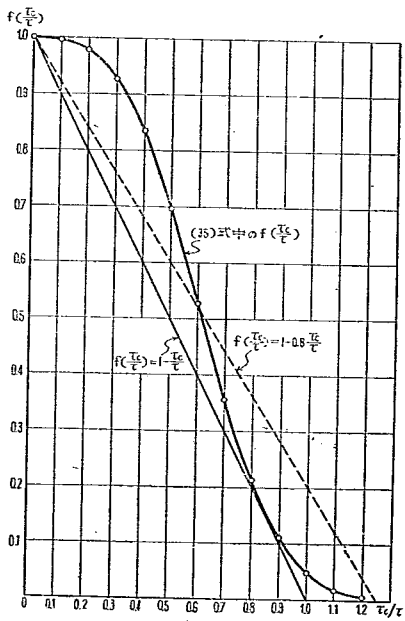
となる。

(34)式において，一般には $C_L a^2\fallingdotseq(C_L a^2)_c$ であると考えられるが，これについては将来詳細に研究することとし，ここでは一応 $C_L a^2\fallingdotseq(C_L a^2)_c$ と仮定する。又 El Samni[18] の実測によれば圧力変動に関する σ は，$\sigma=\frac{1}{2}$，この値を(34)式に代入して $F(\tau_c/\tau)$ を計算すると表—4のごとくなり，F は次式によつて表わされる。

$$F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)=F(0)\cdot f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)=2.517f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)\cdots\cdots(36)$$

表—4

τ_c/τ	$F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$	$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)$
0.0	2.517	1.000
0.1	2.509	0.996
0.15	2.490	0.990
0.20	2.463	0.980
0.25	2.414	0.959
0.30	2.333	0.926
0.35	2.237	0.889
0.40	2.102	0.835
0.45	1.940	0.771
0.50	1.753	0.698
0.55	1.545	0.614
0.60	1.325	0.526
0.65	1.104	0.439
0.70	0.894	0.356
0.75	0.703	0.279
0.80	0.531	0.212
0.85	0.391	0.155
0.90	0.277	0.111
0.95	0.189	0.0752
1.00	0.125	0.0497
1.10	0.04855	0.0193
1.20	0.01618	0.00644



図—7　f 函数

したがつて(6)式は

$$q_B=\varphi\frac{\rho_s}{\rho_s-\rho}f\left(\frac{\tau c}{\tau}\right)\cdot\tau u_* \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\varphi=\frac{2.517}{2\sqrt{2\pi}}\gamma^{\frac{1}{2}}C_La^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

となる。 $f\left(\frac{\tau c}{\tau}\right)$ の $\frac{\tau c}{\tau}$ に対する関係は図—7に示す如くである。

掃流流砂量が(7)式で示した関係で表わされるものとするが，この場合の $f\ (\tau c/\tau)$ は

$$f\left(\frac{\tau c}{\tau}\right)=1-\frac{\tau c}{\tau}$$

となり図—7に示す如くである。図からわかる如く，この函数値 f は(6)式中の f に対し，$\tau c/\tau=0.8\sim0.9$ のところで一致するが $\tau c/\tau=0.4$ の附近で最大の差を生じその比はほぼ 1 : 1.4 に達する。しかし全体的に見て経験的に示された $f\ (\tau c/\tau)=1-(\tau c/\tau)$ なる函数はほぼ妥当なものであるといえよう。

また椿氏[19]は砂礫の移動してる状態における τc は静止の状態の τc とは多少異なり少し小さい値になつているとして

$$f\left(\frac{\tau c}{\tau}\right)=1-0.8\frac{\tau c}{\tau}$$

なる函数形をとつているが，これは図—7からわかる如く，(6)式の f 函数のほぼ平均を示すものと解してよい。

結局(6)式によれば，掃流砂量は剪断力と摩擦速度との積，すなわち $(HI)^{\frac{3}{2}}$ に比例し，(6)式にしたがい $\tau c/\tau$ の増加にともなつて減少する。

ここに比例係数 ψ は(6)式に示す如く γ, b, C_L, a の函数となつているので，これらの値が次に研究されねばならない。

この中まづ γ は，均一粒径の砂粒河床に対しては White[20]によつて

$$\gamma=0.35$$

と与えられている。C_La^2 については，El Samni によつて $C_L=0.178$, $a=6.1$ と一応与えられているので $C_La^2=6.4$ となるが，一方 $\varphi=0.05$ として(4)と(6)式から求めると $C_La^2=13$ となり，かなりの差異がある。

これは主として y_0 の定め方の差によるものと考えられる。すなわち河床近傍においては流速が水深方面に急激に変化し，y_0 が少し異なれば(6)式における a，したがつて C_La^2 はかなり大きく変化する。仮に y_0 の値を El Samni が定めた値と少し異なる値 $y_0\fallingdotseq k_s$ の程度とすれば $C_La^2\fallingdotseq13$ となり $\psi=0.05$ として(4)と(6)式から求めた値と一致する。

現段階においては y_0 の値を正確に決定することができないのでこれ以上の考察は今後にまつことにするが，上述の考察によつても C_La^2 の値がほぼ一定していることは言い得るし，さらに y_0 の大きさの程度を示唆し得るであろう。

次に B は掃流層の流速と摩擦速度との比であり現段階ではまだ明確な内容を示すことができないが，a とほぼ同程度の値を持つていると考えられる。係数 a は(6)式によつても知られるごとく主として河床粗度 k_s の函数と考えられ k_s が増加するにつれて減少する。一方抵抗係数も主として k_s の函数と考えられ k_s が増加するにつれて増加する。したがつて係数 a 及び a によつて決定される係数 φ は主として抵抗係数の函数と考えることができよう。

4. 掃流流砂量の実用算定公式

上述の如く(6)式の係数 ψ は主として流体抵抗に関係すると考えられるので，この関係を次に調べてみることとする。流体抵抗として Manning の粗度係数を考えると

$$n=\frac{R^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{g}\left(8.5-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa}\log e\frac{R}{k_s}\right)}$$

ここに κ: Kármán の常数

R: 径深

であらわされこれと(6)式と比較すると径深の一定の値に対してほぼ

$$a\propto\frac{1}{n}$$

の関係が成立するであろうと考えられる。さらに R が変化しても河床粗度が一定であればほぼ一定の n の値を得ることが従来の経験によつて知られているから，この場合にも上式の関係は変らないと予測される。一方(6)式

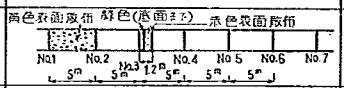
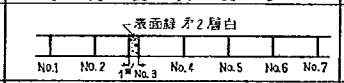
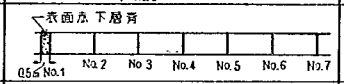
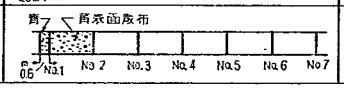
における係数 b が前記した如く係数 a の大きさの程度であるとすると

$$\varphi \propto a^3 \propto \left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad \cdots\cdots(37)$$

の関係が期待される，しかもこの関係は径深 R の大きさによつてそれほど変化しない。

元来粗度係数 n は次元的に無次元でなく，物理的意味の不明確なものであり，従つて φ を n の函数として表わすことは次元的にみても正しくないのであるが上述した意味で今回は実用的見地から φ と n の関係を調べてみる。

表—3

実験番号	染色砂敷並べ方法	染色砂重量
1		赤，黄，緑，砂 各 4 kg
2		白砂 6.8 kg 緑 7.81 kg
3		青，赤，砂 各 4 kg
4		黄，青，砂 各 180 kg

われわれの実験による測定値および計算値は附表—1に示す通りである。附表—1中，(1)欄は粒径，(2)欄は流量で水路上流の溢流堰によつて測定したものである。(4)欄は平均流速で流量を全断面 $(B_0\ H_0)$ で除して求めたものである。(6)欄は掃流砂量で，前述の掃流採砂器でとらえたものを採砂器の幅，採砂時間で割り，単位巾当り，単位時間の値にしたものである。実験の水深 H_0 は水路巾 B_0 に比して無視出来ない大きさであつたので河床に働く剪断力には側壁の影響が入つているはずである。従つて二次元理論に適用するためには実測値から側壁の影響を除去し補正する必要がある。その方法として Einstein[21] の用いた方法を採用した。すなわち側壁の影響を除去した補正水深 H は

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0\left(1-\frac{2R_W}{B_0}\right) \\ R_W &= \left(n_W\frac{v}{\sqrt{I}}\right)^{1.5} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(38)$$

で計算し，これを(8)の欄に示してある。上式中 n_W は側壁の Manning の粗度係数で，われわれの実験の場合には $n_W=0.01$ である。(9)欄はこの H に相当する底面剪断力で $\tau=\rho gHI$ によつて計算したものである。(10)欄は摩擦速度 $u_*=\sqrt{\tau/\rho}=\sqrt{gHI}$ である。(12)欄は限界掃流力係数 ψ の変数とされる砂粒子の Reynolds 数である。(13)欄は式(29)と図—6の補正曲線とによつて求めた限界掃流力であり，(15)欄は

$$n=\frac{H^{\frac{2}{3}}I^{\frac{1}{2}}}{V}$$

によつて計算した Manning の粗度係数で m，sec 単位のものである。(16)欄は(14)欄により図—7を用いて求めた f，(17)欄は

$$\varphi=\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s}\,\frac{q_B}{f\left(\frac{\tau c}{\tau}\right)\cdot\tau u_*}$$

によつて計算した φ の値である。

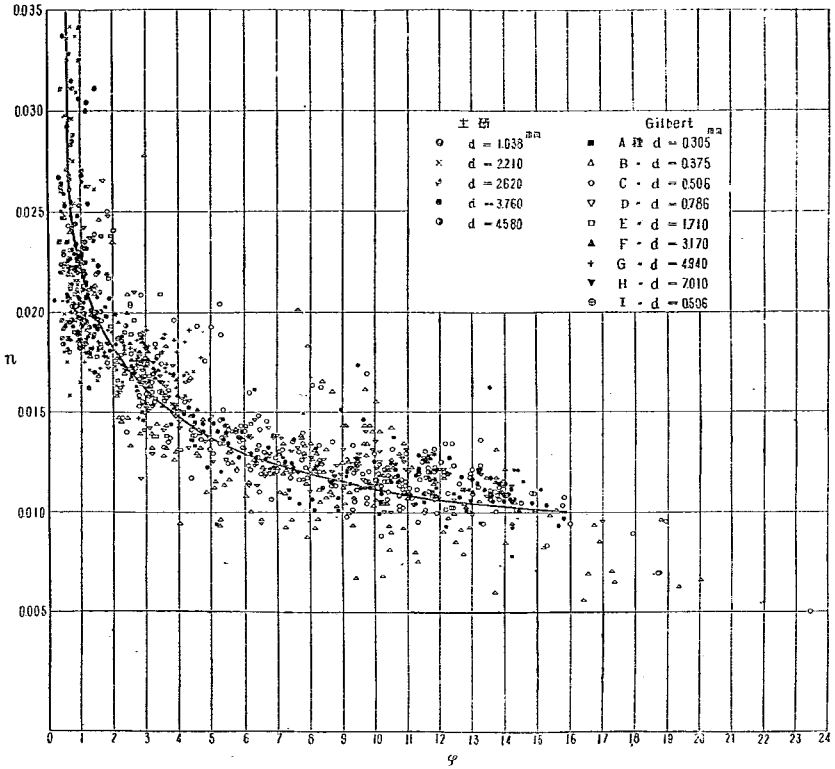
そこで φ と n の関係を調べると図—8の如くなり，両者は一定の関係にあるものとしても実用上差しつかえないと思われる。しかもこの関係は，粒径，水深，Froude 数等がかなり大きな範囲にまたがつているにもかかわらずこれらによる系統的な差が表われていないこと，また Gilbert の資料とわれわれの資料との間に系統的な差異を生じていないことからして十分信頼すべきものといえよう。点のばらつきは専ら採砂の誤差に基因するものと考えられる。

そこで φ と n の関係は図—8の平均曲線に従い次の実験式によつて表わすことができ(37)式の関係がほぼ成立していると考えられる。

$$\varphi=0.62\left(\frac{1}{40n}\right)^{3.5} \quad \cdots\cdots(39)$$

n=Manning の粗度係数 (m，sec 単位)

すなわち φ の値は n が大となるにしたがつて急激に減少する性質があることがわかる。しかし n の値がほぼ 0.025 以上になると φ の値は殆ど変らず一定とみなしてさしつかえない。すなわち φ は n に無関係となる。このことは特に注目に値する事実である。



図－8　φ と n の関係

したがつて n が 0.025 以上の場合には φ の値は次元のない数値

$$\varphi=0.62 \quad (n \geqq 0.025) \cdots\cdots (40)$$

となり，確定する。n が 0.025 以下である場合には次元的に不合理の点はあるが φ は(39)式によつて表わされる。この点今後の n の研究とあいまつてさらに追究する予定であるが，現在すでに本文に述べたものより大きな範囲の粒径（d=10～40mm）および混合粒径について行つている実験，および利根川における現地観測によつてもこれらの式の成立することが確かめられつつあり，実用掃流砂量公式として十分役に立つものであると信じられる。

なお，実際の河川では多くの場合

$n \geqq 0.025$　　したがつて　　$\varphi=0.62$

$\frac{du_*}{\nu} > 500$　　したがつて　　$\varphi \fallingdotseq 0.05$

$\frac{\tau_c}{\tau} \leqq 0.2$　　したがつて　　$f\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right) \fallingdotseq 1$

$p_s \fallingdotseq 2.6$　　したがつて　　$\frac{\rho_s}{\rho_s-\rho} \fallingdotseq 1.625$

であるからこのような場合には(39)式は簡単になり次式で表わすことができる。

$$q_B \fallingdotseq \tau u_* \cdots\cdots (41)$$

さらにまた

$$\tau=\rho gHI,\quad u_*=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}=\sqrt{gHI}$$

であるから単位幅当りの掃流砂量は

$$q_B=w\sqrt{g}\,(HI)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(42)$$

によつて表わされる。ここに w は流体の単位重量である。

したがつて河川の全断面についての掃流砂量 Q_B は河幅 B について (42) 式を積分し

$$Q_B=w\sqrt{g}\int_0^B (HI)^{\frac{3}{2}}\,dB \quad \cdots\cdots(43)$$

によつて求めることができる。

5. 結　　論

以上を取りまとめ要約すれば次の如くである。

(a) 粒径 1.038, 2.21, 2.62, 3.76, 4.58 mm (比重約 2.65) の 5 種類の均一粒径の砂に対して実験を行い，実測資料の解析に際してはさらに Gilbert の資料 (粒径 0.3048 mm～7.010 mm) をも用いた。

(b) 掃流流砂量の測定は図—2 に示すごときハンガリー型の掃流採砂器によつた。この採砂は実験においては，充分使用し得る方法であるが，自然河川に適用する場合は多少改良すべき点があることを知つた。これについては次回に発表する予定である。

(c) 個々の粒子の移動速度がほぼ河床流速に等しいにもかかわらず，河床砂の見掛上の移動速度は砂連発生の如何にかかわらず河床流速に比して非常に遅く，河床流速が数 cm/sec の場合，1～2 mm/sec の程度である。

このことは粒子の移動が断続的であり，掃流流砂と河床砂との間に交換をくりかえしながら移動していることに基因する。

(d) 染色砂による実験の結果，河床砂の流下距離方向への分布は指数法則的に減少すること，またこのことは粒子の移動確率がすべての点で一定であることから求められることを知つた。

(e) 実験的には，河床附近の粒子濃度は河床剪断力に比例すると考えてよい。これを，粒子に働く揚圧力が粒子重量に打ち克つ時に移動するという仮定によつて理論的に導くことができた。ただし揚圧力の変動は Einstein と El Samni に従い正規誤差分布法則にしたがうものとした。

(f) 従来経験的に割合に良く合うとされている式

$$G\propto\tau u_*\left(1-\frac{\tau_c}{\tau}\right)$$

の比例係数は一定値ではなく，粗度係数によつて変化するものであることを実験によつて知つた。

(g) 砂粒子に対し揚圧力が鉛直上方に与える力積が重力が鉛直下方に与える力積に等しいときに掃流運搬は平衡の状態にあるという考えにもとづいて掃流砂量の式(39)を誘導した。

(h) 限界掃流力は一般に知られている(39)式の形をもつて表わすことができるが，その係数 φ は(39)式の如く揚力係数その他水理量の函数になることを知つた。

(i) Shields によれば ψ は du_*/ν の函数になるが，二次元の τ_c を求めるには彼の函数を補正して図—6 の補正曲線を用いるべきである。

(j) (39)式の $f\,(\tau_c/\tau)$ は理論的に導くことができる。その形は(39)式であり，$\sigma=1/2$ として計算すると図—7 に示す如くである。

(k) (39)式の係数 φ は河床附近における流速分布のしかた，掃流層の厚さ，河床附近の乱れによる揚圧力の係数等に支配されるものである。したがつて主として流れの抵抗に関係しているものと考えられる。

(l) 実験の結果から φ は(39)の如く Manning の粗度係数 n のみの函数で表わしうることを知つた。φ は無次元の量であるから(39)式の形は不合理であるけれども実用としてはさしつかえない。φ の値は n が増すにしたがつて急激に減少する。

(m) n が 0.025 より大なる場合には φ は n に無関係である。この場合には φ の値は次元的にも合理的に確定し(40)式の如くになる。

(n) 実際の多くの河においては簡単な式(41)または(40)式を用いることができる。

参　考　文　献

1) P. Du Boys; Etudes du Regime du Rhone et láction excercee Par les Eaux sur un Lit a Fond de Graviers Undefiniment Affouillable. Annales des Pont et Chausses, Series 5, Vol. 18, 1879

2) G. K. Gilbert; The transportation of debris by running water. U. S. Geological Survey Professional Paper 86, 1914
3) H. A. Einstein; The bed-load function for sediment transportation in open channel flow. U. S. Dept. of Agri., Tech. Bull. 1026, 1950.
4) 椿東一郎; 水路床砂礫の掃流量について 流体工学研究所報告 第7巻4号。
5) Bogardi; Mesure du débit solide des rivieres en Hongrie. La Houille Blanche Mars-Avril 1951
6) E. M. H. Shaank and G. Slotboom; Enkele Mededeelingen Betreffende de zand Beweeging op den Neder-Rijn-De Ingenieur No. 51, 1937
(Jrans. A. G. U. 1940. "A distinction between bed-load and suspended load in natural Streams" の中に H. A. Einstein 等により簡単に紹介されている。
7) H. A. Einstein, Aloin G. Anderson and Joe W. Johnson; A distinction between bed-load and suspended load in natural Streams. Jrans. American Geophisical Union 1940
8) H. A. Einstein; 文献 (3)
9) 安芸皎一・佐藤清一; 砂粒河床模型実験の基本に関する実験並に限界掃流力に関する研究, 土木研究所報告, 48号, 昭和11年2月
10) G. K. Gilbert. 文献 (2)
11) E. W. Lane and A. A. Kalinske; The relation of suspended to bed matenial in river. Jrans. Amer. Creoph. union 1939
12) A. A. Kalinske and Van Priest; Application of statistical theory to turbulence to hydraulic problems. for 5th Inter. Congress Applied Mechanics, 1939.
13) 吉川秀夫; 浮游流砂に関する2, 3の考察, 土木研究所報告83号
14) Einstein and El Samni; Hydraudynamic forces on a rough wall. Reviews of Modern Physics Vol. 21, 1949
15) White; Equilibrium of grains on bed of stream. Preceedings Royal Society Vol. 174 A 1940.
16) 栗原道徳; 限界掃流力について, 流体工学研究所報告第4巻3号
17) A. Shields; Mitteilungen der Preusishen Versuchanstalt fiir Wasserbau und Schiffbau. Heft 26. 1936.
18) 文献 (14)
19) 椿東一郎; 文献 (4)
20) White. 文献 (15)
21) H. A. Einstein; 文献 (3)

バケツト型水叩の水理機能に関する実験的考察

建設技官　村　幸雄

建設技官　伊集院　敏

（昭和 32 年 3 月）

The Experimental Study of the Bucket Type Energy Dissipator

(March 1957)

Y. MURA
S. IJUIN

Synopsis :

The bucket type energy dissipator has recently been used in many dams, but we have had little information of its hydraulic actions. In this paper, we first defined those three flow conditions in the bucket which are designated "spray", "roller" and "submergence" conditions respectively, and investigated the various flow patterns in the roller condition. Secondly, we investigated the pressure distributions on the surfaces of the bucket curve and sill, and based on this investigation, tried to establish a formula of calculating the exact flow depth in the stilling basin, where spray ceases and roller begins. Lastly, we described the other data available to design the bucket, and mentioned briefly the several modified types of the bucket. The fundamental data presented here in this paper are furnished mainly from the hydraulic model test of Akiba Dam.

要　旨

バケツト型水叩が最近多くのダムに用いられるようになつたがその水理的作用はまだ殆んど判つていない。本論文では先ず「飛散」「巻込」及び「潜流」と呼ばれている3つの流況を定義し，巻込状況における種々の流況を研究した。第2に我々はバケツトカーブの表面の圧力分布を調査しこの調査に基いて水脈飛散が止み巻込が始る状態の減勢池の水深を計算しうる式を作成せんと試みた。最后にバケツトを設計するに役立つ諸資料について述べ且つ簡単に若干の変形バケツトについて記述した。ここに記した基礎資料は主として秋葉ダムの水理実験の時に得られたものを用いている。

目　次

1. 緒　論……(1)
2. 視察的機能……(2)
3. バケツトに働らく圧力……(8)
4. 飛散巻込臨界水深……(13)
5. 下流流況および洗堀の特徴……(21)
6. 附属構造物および細部形状……(24)
7. 特殊形状を有するバケツト型水叩…(25)
8. 結　語……(27)

1. 緒　論

従来，ダム余水吐趾部につくられる減勢機構としては，一般の跳水型水叩が多く用いられてきた。跳水型水叩は，ふるくより研究の対象としてもつともよく解明され，その機能も理想的なものであるが，ダムの高さや流量が次第に大きくなりつつある現状では，跳水長従つて水叩長が非常に長くなり，地形的又は経済的制約のために建設困難な例を生じる。このような場合に跳水長を減少させるためには，逆傾斜水叩や阻柱阻板の使用等種々の手段が考えられているが，下流水路の水位が高い場合には，ここにのべるバケツト型水叩を用いると有利であろう。とくに下流の水位が非常に高く，普通の跳水型水叩では河床附近に高速潜流を生じる危険があるときにはバケツト型水叩を採用して好結果を得ている例が多く，水叩長の短縮と潜流現象の防止という二大特徴のため

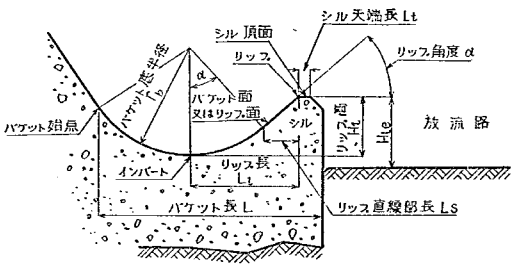
に，この型の水叩の各種減勢方式中における比重は，次第に重くなりつつある現状といえる。

比較的低いダムでは，かなりふるくからこの型の水叩を採用したという記録があるが，高ダムで用いられたのは，Grand Coulee Dam が最初である。その後米国では，Buggs Island Dam, Dale Hollow Dam, Wolf Creek Dam, Center Hill Dam, Clark Hill Dam, 等あいついでバケット型水叩を採用し，又採用はしなくても，Phillpot Dam, Whitney Dam 等では，一応水理実験の対象に採り上げられた。このように多くのダムに関連して，バケット型水叩に関する研究がおこなわれたのであるから，すでに体系的資料がえられていることと思うのであるが，不幸にして我々の目にふれるものは，そのごく一部の出版された結果にすぎず，いまだに水理模型実験を唯一のたよりとしている現状である。そこでここには，本邦五十里ダムおよび秋葉ダムの水理模型試験からえられた資料を基礎とし，佐久間ダムおよび米国の Waterways Experiment Station で扱われたいくつかの実験報告の内容を参考として，バケット型水叩の水理的機能につき，若干の考察を試みた。

2. 視察的機能

〔1〕 バケット型水叩の形状

バケット型水叩はその歴史が浅く，したがつて各部の名称や機能に関する使用用語が統一されていない。たとえばバケット型水叩の呼び名にしても，Upturned bucket, Inverted bucket, 又は単に Bucket 等と種々ある。ここでは説明の便宜上，なるべく今までの慣習を重んじて，図一1にしめすような名称を与える。なおこの図にしめすのは，もつとも一般的なバケット形状であるが，この他，いろいろ変つた形状を考えることが出来る。そのような特殊形状をもつバケットの中，実用の対象として問題になるのは，主として樋型バケット (Notched bucket) か複合円形バケットであろう。しかし本文の主な研究対象としては，図一1のような普通形状のもののみをとり上げ，特殊形状を有するバケットについては，最後に簡単にふれるだけに止どめる。



図一1　一般的バケット形状説明図

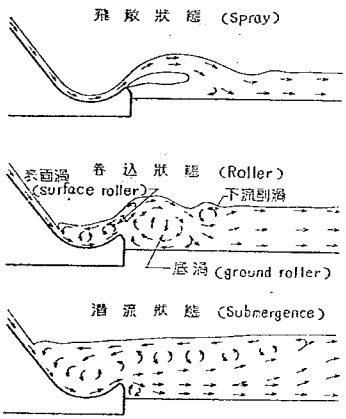
〔2〕 バケット型水叩で見られる流況

1. 飛散，巻込，潜流の三態

バケット型水叩で普通見られる流況を大別すると，図2にしめすような，飛散，巻込，潜流の三種となる。

飛散 (spray) 状態では，余水吐流が，ほとんど減勢されずに下流水上方に放出される。いわゆる放散型水叩 (flip bucket) に見られる流況と同じもので，高エネルギーの水がそのまま放散された場合，その水脈落下点には著じるしい侵蝕力がくわわり，大きい洗掘を生じるものと考えられる。したがつて，飛散状態でバケットを操作することは，避けなければならない。

次に巻込 (roller) 状態では，リップ上に大きな水面隆起 (バケット波と呼ぶことにする) を生じる。このバケット波の上流側には，余水吐流の上にかぶさる表面渦 (surface roller) ができる。これは，一般の跳水現象でみられる渦と似ていて，これによつて，余水吐流の速度エネルギーはかなり消散するが，その間の主水脈の拡散は，視察的にいつて跳水の場合ほど顕著ではない。リップ下流のバケット波下辺には，バケット型水叩の最大の特徴といわれる底渦 (ground roller) が出来る。底渦は，表面渦とまつたく異なつた流況をしめし，気泡をあまり混入していないが，余水吐水脈下面と接触している部分での減勢効果が期待されるので，大きいほど好ましいとされている。なお底渦の発生は，余水吐水脈を河床からひきはなしてはね上げて



図—2　飛散，巻込，潜流各流況説明図

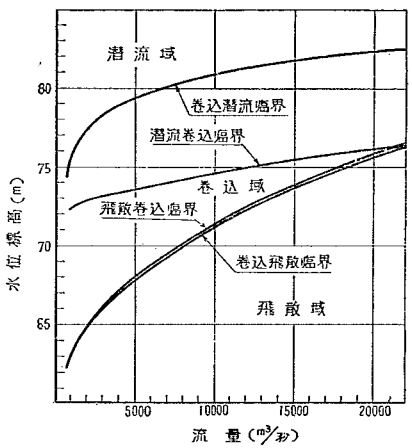
いる証左であつて，巻込状態と潜流状態を区別する最大の特徴である。

潜流（submergence）状態は，余水吐水脈が下流水の下にもぐりこんで，底渦や顕著な乱れをしめす表面渦が消え，ほとんど減速されない高速水脈が，はるか下流まで河床をはつて進む現象である。このような状態では，河床流速がきわめて大きく，しかもリップのすぐ下流がもつとも大きい侵蝕力を受けるので非常に危険であり，バケット型水叩の設計に当つては，潜流状態を生じないよう充分注意しなければならない。Buggs Island Dam 実験[1]や秋葉ダム実験の結果をみると，同流量，同下流水位のもとで，潜流状態の方が，巻込状態より二倍も大きい底流速をしめしている。

2. 臨界水深（下流水深の変動にともなう流況の変化）

バケットの形状，下流の地形，バケットに流入する余水吐流の水理的性質が固定された場合，流況は下流水位に影響されて変化する。下流水位を低い方から次第に高めていくと，流況は，一般に飛散状態から巻込状態を経て潜流状態へと変化するが，いくら水位を高めても潜流状態にならぬ場合とか，巻込状態がなくて，飛散状態からすぐ潜流状態にかわる場合がある。

下流水位を次第に低めていつた場合の流況変化は，この逆である。このような流況変化を生じる際の下流水位は，大体一定しており，しかも流況変化にはあまり遷移的な段階がなく，比較的鋭敏である。したがつて，流況変化を生じるさいの下流水位を臨界水位と名づけ，その前に変化前の流況と変化後の流況をしめす語を冠してよぶことにする。すなわち，飛散巻込臨界水位は，飛散状態から巻込状態へ流況が変化するさいの下流水位をしめす。このようにして定義される臨界水位は，六種考えられる。そして飛散巻込よりも巻込飛散，巻込潜流よりも潜流巻込，飛散潜流よりも潜流飛散の方が，低い臨界水位を与える。すなわち一度得られた安定した流況は，なかなか他の状態にかわりにくい。これらの臨界水位相互の関係の一例として，Buggs Island Dam 実験でえられた結果を，図—3に転載する。図—3で，高流量の場合に巻込領域がほとんどなくなつているが，このような状態が極端になつた場合には，潜流飛散臨界水位を生ずるものと推定される。飛散潜流臨界水位を生じるような場合には，Ⅵ—〔1〕にのべるように，バケットというよりむしろ逆傾斜水叩とみなされるし，又バケット操作の対象は巻込状態であるから，このような状態を招来するバケットは，今後論議の対象としない。

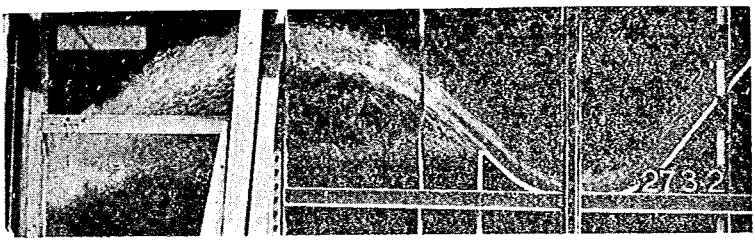


図—3　各種臨界水深の相互関係（Buggs Island Dam の例）

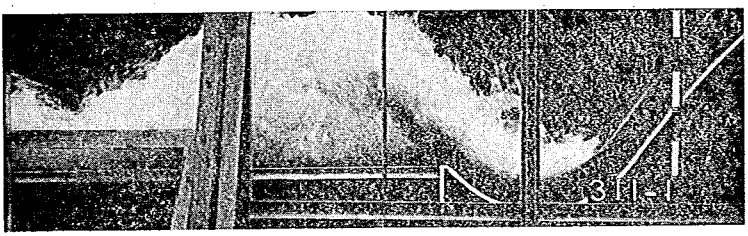
我々が設計したバケットの適否を検討するに当つて，最初に考慮せねばならぬのは，予想される下流水位の安定した値（以下便宜上正常下流水位とよぶ）が，飛散巻込臨界水位と潜流巻込臨界水位との中間，すなわち完全巻込領域内にあるかどうかということである。余水吐放流の状態を考えると，最初は流量が非常に小さいため，バケット内に湛えられた水量だけで充分に余水吐流の流速エネルギーを減殺出来る。余水吐流量の増加にともない下流水位は上昇するが，下流水位がその流量に対応する所要正常下流水位に達するまでには，流量増加との間に若干の遅れがあるから，下流河床がリップより高いとか，副ダムその他の脊水によつて，つねに充分高い下流水位が保証されている場合をのぞけば，一時的な飛散状態となるであろう。

しかし下流水位はすぐに上昇し，飛散巻込臨界水位以上になると，再び巻込流況となるであろう。この場合，もし正常下流水位が巻込飛散臨界水位より高くても飛散巻込臨界水位より低いというと，正規の操作状態が飛散状態となつてしまうおそれがある。一方正常下流水位が，潜流巻込臨界水位より高くても巻込潜流臨界水位より低ければ，放流量増加の段階では潜流を生じないであろう。潜流巻込臨界水位と巻込潜流臨界水位との差は，図—3からもわかるように一般に非常に大きく，したがつて正常下流水位がかなり高い場合，これをしいて潜流巻込臨界水位以下におさえるよう設計しなくても，巻込潜流臨界水位より或程度低くなるようにすればよいであろ

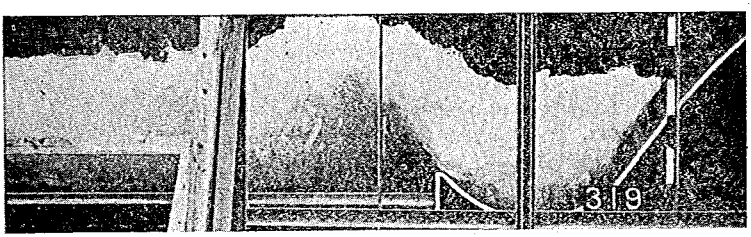
1) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Technical Memorandum No. 2-281 : Bucket Type Energy Dissipator, Buggs Island Dam, Roanoke River, Virginia and North Garolina, Model Investigation.



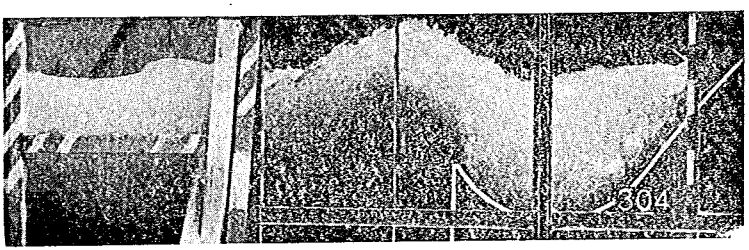
飛散状態



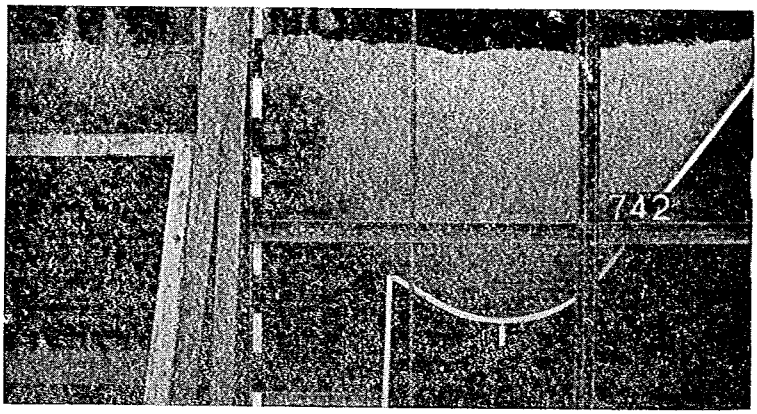
V・ローラー状態



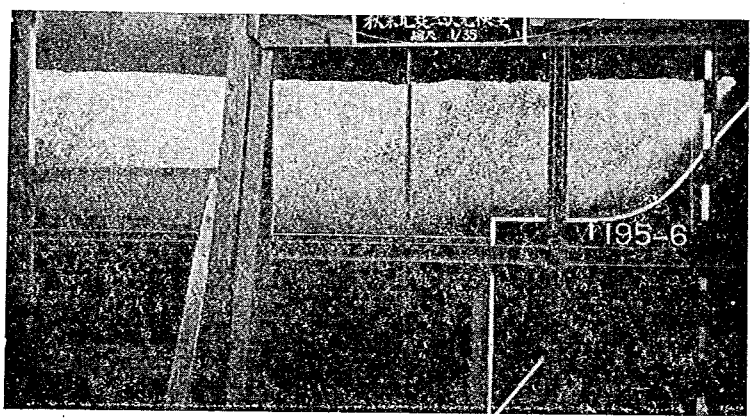
T・ローラー状態



F・ローラー状態



C・ローラー状態



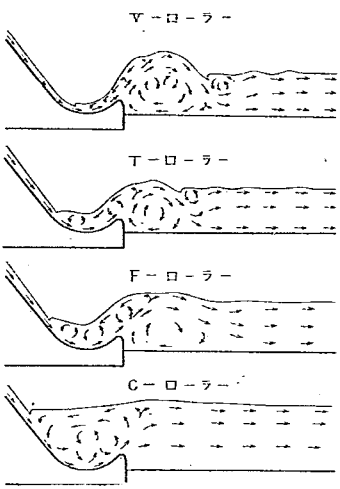
潜　流　状　態

う。この余裕は，余水吐放流の減水時に一時的に生じる正常下流水位以上の水位，および門扉の不均衡操作や下流平面流況の影響などを考慮して定めらるべき性質のものである。

3.　巻込流況の諸相

これまではバケットの流況を三種に大別してのべてきたが，バケット操作が巻込流況の場合に限定されるとなると，巻込状態の流況について更に詳しく観察する必要がある。秋葉ダム水理模型実験における流況観察の結果，同じ巻込流況にもいろいろな状態があることがわかつた。とくに，一部の巻込によつて表面渦が形成されながらも，全体としては飛散の状態にあるというような変則的な流況も見られたが，このようなものをのぞき，バケットの操作状態として採用しうる程度の流況の中で，我々は巻込状態をさらに四種に大別し，それぞれV，T，F，Cの名称を与えた（図—4および参考写真参照）。

Vローラーでは，バケット波の乱れが著じるしく，高い荒れた波を生じ，早く小さい底渦が出来る。Tローラ



図—4　巻込流況の諸相説明図

ーは，Vローラーとあまり違わないが，全体としておだやかな流況をしめす典型的な巻込状態である。Fローラーは，下流渦が消えて，主水脈が下流水の上にのつて流れるような流況をしめし，底渦の形成がやや不明確になつた場合をいう。又Cローラーとは，巻込作用によつて生ずる乱れがほとんどバケット内部に限定され，バケット波の隆起が非常に低くなつて認めにくくなり，底渦も判別できず，全体としてきわめておだやかな流況を呈する場合をさす。

一般に，下流水位を低い方から次第に高めていくにつれ，バケット流況は，Vローラーから順次T，F，Cローラーに移行していくが，このような段階をたどらずに，T又はFローラーから潜流状態に変化する場合や，飛散状態から直ちにFローラーに変化する場合がある。

バケット操作に当つてどのような巻込状態が好ましいかといえば，底流速が小さいという点からみて，F又はCローラーであるが，Fローラーから潜流状態に変化する場合が考えられるので一概にはいえない。

諸種の状況を勘案して定むべきであるが，いずれにせよVローラー状態はあまり好ましくなく，Cローラー状態は現実の問題として非常に生じがたいから，T又はFローラー状態をえらぶのが普通であろう。

〔3〕 流況と諸要素との関係

従来の諸実験の結果から，バケット機能に重要な影響をおよぼす要素として，下流水位の他に，バケット半径 r_0，リップ角度 α，リップ高 H_t，リップと放流路床の標高差 H_{te}，クレストからインバートまでの落差 D 等が見出だされた。この中クレストからインバートまでの落差は，バケットに流入する余水吐流の性質を決定するものであつて，インバート射流の水深 h_0 と平均流速 V_0 とを用いて，水理条件におきかえられる。そこで，バケット機能に重要な関係をもつ要素は，形状条件 r_0，α，H_t，H_{te} と，水理条件 h_0，V_0，h_d ということができる。ここで h_d は，下流水位をしめす。このほか1)でのべるように，バケット各部の寸法が，流況にいろいろな影響をおよぼすのであるが，主として考慮せねばならぬのは，上記の各要素である。

1. 秋葉ダム水理模型実験における測定資料範囲

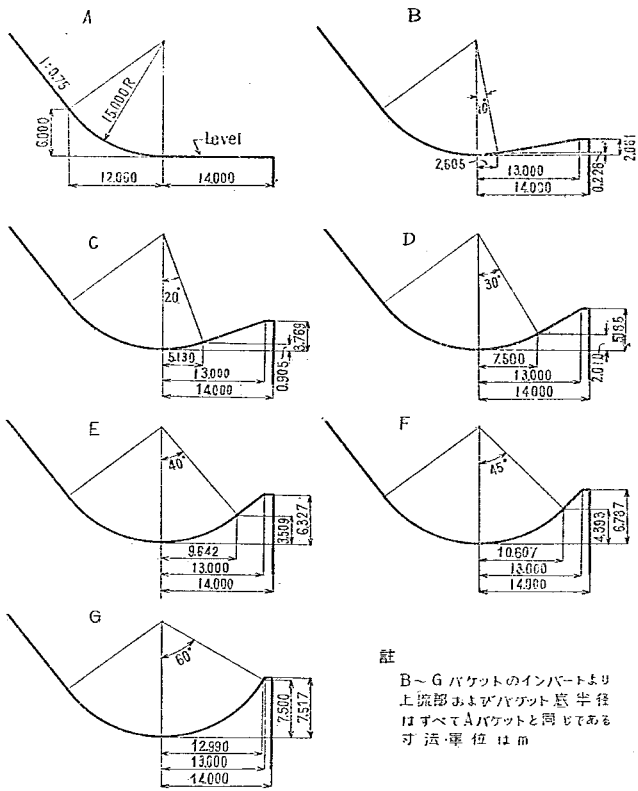
従来の実験による測定資料の不足を補ない，バケット型水叩の一般的な水理現象を把握するために，秋葉ダム部分模型で，かなり広範囲にわたる諸種の資料を測定した。本文の基礎資料となつているものは，主として，秋葉ダム水理模型実験の第一，五，六期の三実験にもとづくものであるが，その測定資料の範囲を表—1に掲げる。

表—1　秋葉ダム水理模型実験に於ける測定資料の範囲

	バケット単位巾当り流量 q (m^3/秒)	バケットインバード露出射流			バケット形状条件			
		水深 h_0 (m)	平均流速 V_0 (m/秒)	フルード数 F_0	α (度)	$Rr=r_0/h_0$	$R_t=H_t/h_0$	$Re=H_{te}/h_0$
最　大	105.77	4.75	29.44	8.28	60	28.85	9.17	28.85
最　小	9.62	0.52	18.50	3.26	0	3.16	0	0

この表にしめす数値は，原型尺度に換算された値であり，形状条件として用いた記号は，前節の記載にしたがつている。なお今後本文中にしめす数値は，とくにことわらないかぎり原型尺度に換算したものであり，又記号もとくに支障のないかぎり同一のものを使う。

本文中バケット現象の一般的傾向について量的にのべてあるものは，大体本表の範囲内で適用しうるものであるが，これらの範囲をこえて外挿的に推定することも，勿論或程度まではかまわないであろう。又このようなインバート露出射流の範囲を与える結果となつた，クレストからインバートまでの落差 D の範囲は，29.5～59.5mであつた。実験に用いられたバケットは，図—5にしめすような七種で，バケット長が一定になるよう設計して



図—5　秋葉ダム水理模型実験で使用されたバケット模型縦断形状

ある。これらの模型や施設の詳細については，秋葉ダム水理模型実験報告を参照されたい。

2. リップ角度とリップ高

リップ角度は余水吐流のはね上げに関係し，大きいほど潜流状態を生じにくいことは明らかである。潜流発生の可能性は，単にリップ角度のみでなく，リップと放流路床の段高差やリップ高にも関係するが，本実験の範囲内では，40度以上のリップ角の場合，いかなる条件のもとでも潜流現象を生じなかつた。又30度の場合には，わずかではあるが高落差高下流水位のもとで潜流状態を生じ，20度以下のリップ角度では，H_{te} が小さいとほとんどあらゆる条件で潜流状態を生じ，しかも多くは飛散潜流臨界水位が観測され巻込状態を生じなかつた。

一般に使われる，α=30～45 度のバケットでは，きわめて高い下流水位でも潜流現象を生じにくいので，一般の本邦河川のように，ダム地点の河川勾配が急で下流水位が極端に高くならない場合には，潜流状態の発生は非常にまれであろうとの推測のもとに，ここでは，もつぱら飛散巻込臨界水位の追求に努力した。

なお参考までに，他の実験例を簡単にのべると，潜流発生の可能性を生じるようになる限界のリップ角度は，Buggs Island Dam では約35度，Center Hill Dam[2] では19～27度であつた。又佐久間ダム[3] では約14度でも

2) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Technical Memorandum No. 202-1 : Model Studies of Spillway and Bucket for Center Hill Dam, Caney Fork River, Tennessee.

3) 電源開発株式会社土木部土木試験報告水理 S KM—003 : 佐久間ダム水理模型実験報告（Ⅲ） Upturned Bucket 2次元実験一続

潜流を生じなかつた。限界角度にこのような大きい差ができるのは，第一に正常下流水位の相違によると考えられるが，そのほかに D や H_{te} の影響も見逃がせない。リツプ高 H_t もリツプ角度と同様な効果をもち，高いほど潜流を生じにくくなる。これについては，実験をおこなつていないが，Buggs Island Dam 実験でその例が報告されている。

以上のような傾向からみて，リツプ角が大きいほど潜流の危険はなくなるが，しかしバケツト波は高く荒れたものとなり，バケツト波から下流の主水脈の落下角度が大きくなるため，その落下点の流況は非常に乱れたものとなる。とくに60度程度の大角度バケツトとなると，表面渦を生じながらリツプから下流が飛散状態となる変則的巻込を生じ，この状態を消すには非常に高い下流水位を保たねばならなくなる。一方小角度バケツトでは，H_{te} が充分大きいと大角度のときよりおだやかな外観的流況を呈し，容易にFローラー状態となる利点がある。又表面渦や底渦の水平長は，一般にリツプ角が大きいほど小さくなるので，リツプ角を大きくするほど，減勢池の長さを短かくすることができる。

3. リツプと放流路床の標高差

これは底渦の発生に関係し，一般に H_{te} が大きいほど大きい底渦を生じ，潜流状態になりにくい。潜流を生じるおそれがあるのは，大体 $H_{te}<5$ mの場合にかぎられ，これが10m以上の場合には，リツプ角度の大小にかかわらず潜流状態を生じなかつた。

H_{te} と底渦水平長の関係をみると，流量の影響がかなり大きいので明確なことはいえないが，H_{te} がある程度の大きさに達すると，底渦水平長が急激に増大するようである。底渦が非常に大きくなると，その下面流速が落ちてFローラー状態になりやすく，洗掘の上からも好ましい。又 H_{te} が0～3mの場合，飛散巻込臨界水位が安定せず，下流水位が低いとリツプのすぐ下流に小さく激しい底渦を生じ，主水脈のはね上げ角度が断続的に変化して不安定な流況を生じた。

4. バケツト底半径

バケツト半径は，リツプ高とともにバケツト谷積を支配する要素であつて，従来大きいほど減勢効果があると考えられてきた。これに関しては，とくに比較実験をやつていないが，Grand Coulee Dam[4]や佐久間ダム[5]に関する実験の結果では，ある程度以上大きくしてもそれほどの効果は期待できないようである。無論小さすぎることは危険であるが，最小限どこまで小さくできるかは明確な判定方法がなく，まだもとめられていない。

これまでの実例からみると，大体15m程度のものが圧倒的に多く，まれに約12m (Buggs Island Dam) とか20m（佐久間ダム，五十里ダム）という例外が散見される。秋葉ダムでは15mを用いたが，別に欠陥は発見されなかつた。

5. クレストからインバートまでの落差

本節の最初にのべたように，落差 Dは，バケツトに突入する射流の性質に影響する。流況は，突入水脈の流速エネルギーの増大につれて荒れたものとなる。

潜流状態も落差が大きいほど生じやすいし，又流量が大きいほど起りやすい。しかし実際上の問題としては，インバート標高が下るにつれて，インバート標高と相対的な正常下流水深がそれだけ大きくなるので，正常下流水位時の流況は，潜流にならぬかぎり，インバート標高が低いほどおだやかになる傾向を有する。

3. バケツトに働らく圧力

バケツトの構造的設計や飛散巻込臨界水深の算定には，バケツトの各部にかかる水圧を知る必要がある。

バケツトで水圧がかかる部分としては，バケツト面，シル下流面，シル頂面，側壁面が考えられ，又流況によつてそれらの推定法も変つてくるから，かなり複雑かつ困難な問題となるが，以下順を追つてこれらに関する実験値に考察をくわえてみる。

〔1〕 飛散状態におけるバケツト面圧力

バケツト面は，一般に円弧曲線と直線で構成された縦断形を有する。今もしバケツト内の水面形状が与えられれば，直線部の圧力強度 P_{bs} は，その点の水深 h を用いて（1）式により容易に計算されるであろう。

但し γ は水の単位容積当りの重量である。

$$P_{bs}=\gamma \cdot h \cos \alpha \quad \cdots\cdots (1)$$

4) Civil Engineering Nov. 1936 : Experiments Aid in Design at Grand Coulee.

5) 電源開発株式会社土木部土木試験報告，水理SKM—001： 佐久間ダム水理模型実験（1），Upturned Bucket 2次元実験

表—2　バケット面圧力計算値実験値比較表

クレストからバケット迄の落差 D(m)	リップ角α(度) / 資料 / バケット単位巾当り流量 q (m²/秒)	測点	0		10		20		30		40		45	
			計算値	測定値	計算値	測定値	計算値	測定値	計算値	測定値	計算値	測定値	計算値	測定値
34.5	48.08	3	10.24	11.09	10.24	12.31	10.24	11.33	10.24	11.72	10.24	11.02	10.24	11.05
		5	10.56	10.35	10.56	9.86	10.56	10.57	10.56	12.72	10.56	13.08	10.56	10.67
		6	10.60	6.00	10.60	11.05	10.60	10.21	10.60	10.88	10.60	10.18	10.60	11.34
		10	1.96	2.97	1.95	2.43	1.87	7.57	10.37	10.67	10.34	11.03	10.33	11.26
		13	1.96	2.69	1.98	2.30	1.92	2.74	1.79	2.51	9.77	5.98	9.80	8.60
	86.54	3	19.68	19.65	19.68	20.47	19.68	19.73	19.68	19.66	19.68	19.56	19.68	19.33
		5	20.24	18.79	20.24		20.24	20.04	20.24	21.09	20.24	20.43	20.24	19.79
		6	20.31	11.48	20.31	18.58	20.31	19.53	20.31	19.94	20.31	19.91	20.31	20.43
		10	3.52	5.35	3.51	5.69	3.36	13.14	19.88	18.01	19.85	19.75	19.83	19.42
		13	3.52	4.34	3.55	3.17	3.44	4.53	3.19	5.98	18.91	12.28	18.84	14.33
59.5	48.08	3	11.23	14.60	11.23	15.44	11.23	15.33	11.23	14.60			11.23	13.82
		5	11.53	13.82	11.53	11.56	11.53	13.30	11.53	16.17			11.53	15.26
		6	11.56	7.81	11.56	13.62	11.56	13.51	11.56	13.37			11.56	15.99
		10	1.70	4.41	1.69	4.79	1.62	9.68	11.34	14.34			11.30	13.67
		13	1.70	3.82	1.71	2.42	1.65	3.94	1.53	3.47			10.81	12.58
	86.54	3	21.79	25.87	21.79	25.70	21.79	24.26	21.79	26.36			21.79	25.78
		5	22.30	22.29	22.30	17.02	22.30	24.15	22.30	28.14			22.30	25.84
		6	22.37	13.83	22.37	22.69	22.37	24.47	22.37	25.48			22.37	26.33
		10	2.96	6.23	2.94	8.17	2.82	16.44	22.00	16.97			21.93	23.84
		13	2.96	5.11	2.96	3.60	2.86	5.38	2.66	0.46			20.71	20.02

(註)　数値は測点よりの圧力水頭高 (m)，測点については図—6参照のこと

飛散状態の場合でも，その水面形を厳密にもとめようとすると困難であるが，設計を目的とする場合には簡単な近似値を用いて充分であろう。次に彎曲部では，いわゆる遠心圧力が加わる。これには幾種類かの式がこれまで研究者達によつて提案されているが[6]，ここでは荒木正夫氏により誘導された（2）式[7]を基礎として，実験値との比較を試みた。まづ凹型彎曲底面上を流れる流体中の，底面からyの法線距離をもつ点の圧力強度pは，バケット単位巾当り流量をq，その点の彎曲に対する法線と鉛直とのなす角をθ，重力による加速度をgとすれば，次式で表わされる。

$$-\frac{p}{\gamma}=(h-y)\cos\theta+\frac{q^2(h-y)(2r_b-h-y)}{2g(r_b-y)^2(r_b-h)^2\log^2\left(1-\frac{h}{r_b}\right)} \quad \cdots\cdots(2)$$

6) D. B. Gumensky : Design of Side Walls in Chutes and Spillways, Trans. ASCE. Vol.119, 1954, 井田至春：鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れ，土木学会論文集第39号等。

7) 荒木正夫：彎曲底面開水路上を流れる，底面に垂直方向の速度成分を無視出来ない定常流れ，土木学論文集第24号。

したがつて，底面すなわちバケット面の圧力強度 p_{bc} は

$$\frac{p_{bc}}{\gamma}=h\cos\theta+\frac{q^2h\,(2r_b-h)}{2g\,r_b^2\,(r_b-h)^2\log^2\left(1-\frac{h}{r_b}\right)}\quad\cdots\cdots(3)$$

本例では，（3）式の計算に当つて，バケット面上の流れの勢力損失を無視し，流れの位置エネルギーの増加がそのまま運動エネルギーの減少になるという仮定のもとに，h をもとめた。

計算と実験の結果とは，曲線部と直線部の接続部をのぞけば，かなりよく一致する（表—2参照）。接続点附近では，流線とバケット底面との曲率半径の間に仮定した関係が乱されているため，計算値が実際とよく合わないのであろう。とくに接点より下流の直線領域では，なかなか静水圧的分布とならぬもののようで，かなり下流の測点まで遠心力の影響がおよんでいる。このような過渡領域の圧力分布の例を，図—6にしめす。

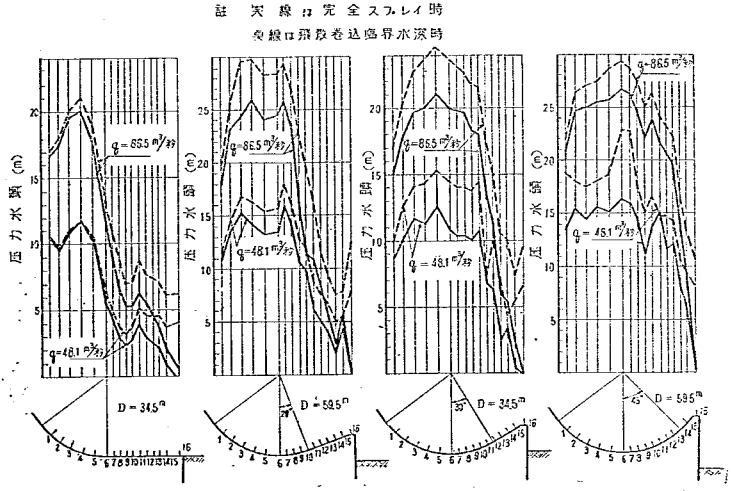
設計上の問題としては，シルに働らく剪断力をもとめるために，バケットインバートから下流の面に働らく全圧力の水平成分を知ることが必要である。これは，勿論各部分の圧力の水平成分を出して加算すればよいのであるが，バケット内の各点の水深が等しいものと仮定して導いた(4)式を用いても，大体の値を推定することができる。全圧力の水平成分を Pd とすれば，（3）式から，

$$\frac{Pd}{\gamma}=\int_0^{\alpha}\frac{p_{bc}}{\gamma}\,r_b\sin\theta\cdot d\theta+h_0\,Ls\sin\alpha$$

$$=\frac{h_0\,r_b}{4}\,(1-\cos 2\alpha)+\frac{q^2\,h_0\,(2r_b-h_0)}{2g\,r_b\,(r_b-h_0)^2\log^2\left(1-\frac{h_0}{r_b}\right)}\,(1-\cos\alpha)$$

$$+h_0\,Ls\sin\alpha\quad\cdots\cdots(4)$$

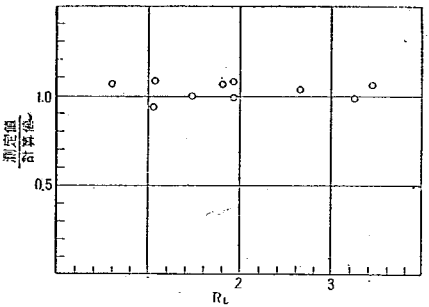
ここで Ls は，リップ直線部の水平長（図—1参照）である。（4）式による計算結果と，実験資料からえた値との比をしめしたのが図—7であり，バケット形状のいかんにかかわらずかなりよく一致している。リップバケット等の側壁設計の場合の遠心圧力なども，以上のべたような方法で，大体の見当をつけることができるであろう。



図—6　バケット面圧力分布実験例

〔2〕 下流水深によるバケット面圧力の変化

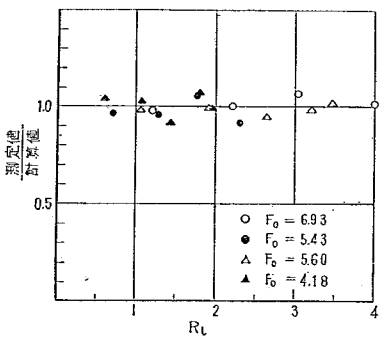
バケット面の圧力は，下流水位の上昇につれて増大する。バケット内が完全射流であるような飛散状態の場合でもこのような現象があることが，実験によつて確かめられた。巻込状態になれば，この現象は当然である。この圧力変動や，巻込状態におけるバケット面圧力は，現在のところ実験的にもとめる以外適当な方法がない。秋葉ダム実験では，巻込状態になる直前，すなわち飛散巻込臨界水深よりやや低い水深で測定した底圧力水平成分と，（4）式による計算値を比較したところ，相当なくい違いがあつた。インバート上から測つた飛散巻込臨界水深は，リツプ角の変化によつてそれほど大きい影響をうけず，大体同程度の値をとるものと考えられるから，圧力変化の原因となるリツプ端水脈にかかる下流水圧は，リツプ高が小さいほど大きい。又飛散巻込臨界水深のインバート露出射流水深に対する比は，フルード数が大きいほど大きいから，インバート露出射流のフルード数が大きいほど，圧力上昇の割合も大きいと思われる。秋葉ダム実験で測定された巻込直前における全バケット面圧力の水平成分と，（4）式による計算結果との比を μ とし，前述のような考え方から，これを形状条件 $R_l=H_l/h_0$ と，水理条件 F_0 とを使つて整理すると，次式のような結果がえられた。



図—7　バケット面全圧力水平成分計算値実験値比較

$$\mu=0.363+0.273F_0-0.207R_l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

この結果は，秋葉ダム実験の特殊な事情のもとに成立した関係であつて，その資料の適応性は，充分今後の実験で検討されねばならないであろう。なお，（5）式と（4）式から計算した巻込直前時におけるバケット面全圧力水平成分と，同種実験値との比較は，図—8にしめすようなよい結果を与える。



図—8　巻込直前時におけるバケット面全圧力水平成分計算値実験値比較

さらに下流水位が高くなつて巻込流況にかわつても圧力分布の状態が急変することはない。すなわち流況が不連続的に変化する場合でも，バケット面圧力強度は，連続的に変化する。そしてバケット波が次第におだやかになり，Cローラー状態に達すれば，バケット面上の流速はかなり落ちて，圧力強度が下流水による静水圧と大体見合うようになる。巻込流況の場合の圧力分布の例は，図—6を参照されたい。

〔3〕 シル面の圧力

インバート断面に働らく引張力や，シル底面に働らく剪断力を検討する場合に，シル下流の垂直面に働らく力を考慮してやらねばならない。この圧力は非常に複雑で，これを量的に把握することはなかなかむづかしい。この垂直面の長さすなわち H_{te} がある程度以上（秋葉ダム実験の例では5m以上）大きくなると，底渦速度が小さくなるので，圧力は大体静水圧的（直線的）に分布する。その大きさは，主として下流水位および射出水脈の性質に影響される。リツプから射出される水脈は，下流水圧によつて上方へ跳ね上げられるため，リツプ下流断面では彎曲したものとなり，その底面に下流水圧と関連した遠心圧力を加えるから，この断面の水深から静水圧分布として圧力を計算すると，実際より低すぎる結果となる。シル垂直面に連結されたマノメーターの水位は，一般にその断面の水位より高く，下流水位よりも低い。下流水位を次第に高めて巻込流況となると，放射水脈の彎曲がなくなり，マノメーター水位とリツプ下流断面の水位がほぼ等しくなるであろうが，この場合の水面形や空気混入の状態がわからねば，正確にはもとめられない。

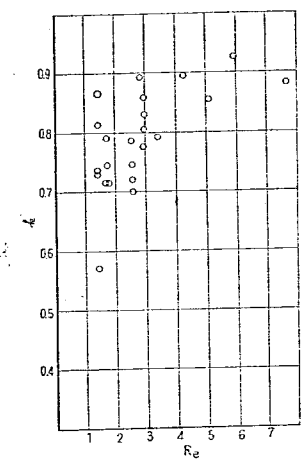
H_{te} が小さい場合，すなわち底渦流速の影響が無視できぬ場合には，問題はさらに複雑である。静水圧的分布は破れ，時としては負圧を生じるかもしれない。

このような状態については，実験にたよる以外まつたく推定方法がない。

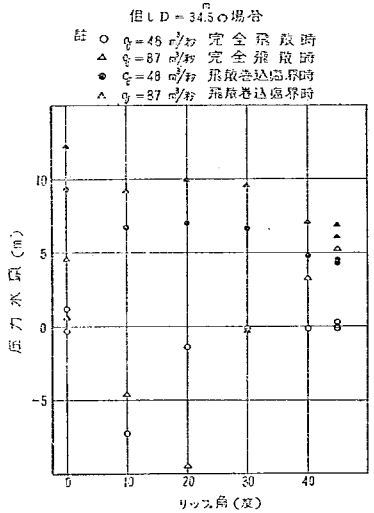
H_{te} が5m以上で，下流水位が飛散巻込臨界水位よりやや低い場合につき，秋葉ダム実験で測定されたマノメ

表—3　シル頂面圧力表

クレストからインパート迄の落差 D (m)	バケット単位巾当り流量 q (m³/秒)	リップ角 α (度)	リップと放流路床の標高差 H_{te} (m)	完全飛散時の圧力水頭 (m)	飛散巻込臨界水深時の圧力水頭 (m)
34.5	48.08	0	0	−0.325	
		0	5	1.180	9.300
		10	5	−7.285	6.715
		20	5	−1.397	6.966
		30	5	−0.155	6.600
		40	5	−0.247	4.758
		45	0	0.235	4.540
		45	5	−0.150	4.400
		45	10	−0.010	5.030
		45	15	−0.010	6.185
	86.54	0	0	4.585	
		0	5	0.550	12.275
		10	5	−4.660	9.200
		20	5	−9.449	9.871
		30	5	−0.330	9.645
		40	5	3.323	7.103
		45	0	5.205	6.885
		45	5	0.060	6.080
		45	10	0.010	7.095
		45	15	−0.115	7.410



図—9　巻込直前時におけるシル垂直面圧力水頭と下流水深との比較



図—10　シル頂面圧力

ーター水位と下流水位との比をとつてみたのが，図—9である。一般にこの比 k は，R_e が大きいほど安定した大きい値をとり，さらに R_t が大きいほど大きいようである。R_e が小さい場合には，k の値は非常に広範囲に分散し，その大体の大きさを推定することさえ困難であつた。勿論流入射流の性質にもよるが，秋葉ダム実験に関するかぎり，H_{te} が 10m 又はそれ以上の場合には，k=0.89 とおいてもよいように思われる。H_{te} が小さい場合のシル設計に当つては，この部分の圧力を無視した方がよいであろう。

次にシル頂面の圧力は，シル頂部の形状と射出水脈の性質とに関連して，負圧を生じることがある。一般にリップ角度が大きければその心配は少ないが，リップ角度が小さいと往々にして負圧を生じ，その上この部分の水

平長が長い場合には，射出水脈がシル面に吸引されて，潜流発生の原因となる。負圧発生の可能性は，シル頂部の細部形状に影響されるところが大きいが，この点にはふれず，ここには若干の実験結果を表—3にしめし，これをリップ角度について整理したものを，図—10にしめす。

4. 飛散巻込臨界水深

〔1〕 巻込状態の発生過程

飛散巻込臨界水位がバケットの機能をしらべる上に非常に重要であることは，これまでにものべた通りである。そこでとくに一章を設けて，この臨界水深に関し検討を加えてみようと思う。そのためには，バケット流況における巻込状態の発生過程について，一心の観察をおこなう必要がある。巻込流況は，一見跳水現象に非常によく似ており，底渦をのぞけば，その機能は跳水と同じように考えてよいようであるが，飛散状態から巻込状態への移行の過程は，跳水の発生過程と明らかに違う点をもつており，その点で，逆傾斜水叩とバケット型水叩の間に，明白な区別をつけうるものと思う。跳水発生の過程は，従来考えられたように，流れに逆行する段波の平均波流と流れの平均速度との平衡によつて説明することができる。逆傾斜水叩における跳水も同様であるが，ただ一つ違うことは，ある程度以上の勾配を有する逆傾斜面上では，段波の質量力の上流向き成分の存在によつて平均波速がはやめられるので，跳水始端が斜面上に止どまりえずにくずれこんで[8]，バケット型水叩の巻込状態に似た流況を呈するということである。そしてこのような斜面上の段波を形成させる原因となるものは，やはり水平水路床上の跳水と同じく，下流水路内に発生した段波，いい換えれば，最初水叩より下流の水路に何らかの事情で生じた跳水である。

これに対しバケット型水叩では，はね上げられた余水吐水脈の一部がバケット内にくずれこんだ後は，逆傾斜水叩と同様に論じられるが，くずれこみを生じさせる原因はまつたく違つている。飛散状態では，余水吐水脈は下流水の上にのつており，リップ上にくずれこみを起させる原因となるものは，余水吐流の下側にかかる下流水の水圧である。下流水位を増すと，この総水圧は増大し，余水吐流のはね上げ角度が大きくなり，水面に近い一部流線が90度まではね上げられたときくずれこみを生ずる。もつとも，くずれこみの量がわずかであれば依然飛散状態が続くが，それがある量に達すると一気にバケット内へくずれ落ちて，いわゆる巻込状態となる。このくずれこみの直前に，水脈全体としてのはね上げ角度は極大（大体45～56度）に達し，巻込状態を生じてしまえば，バケット内水圧が加わつて，はね上げ角度が減少する。

低リップ角度を有するバケットで飛散潜流臨界水深を生じる場合には，くずれこみ発生の過程が逆傾斜水叩の場合と同様になり，バケット型水叩というより，むしろ長さの短かい逆傾斜水叩と思われるような機能をしめす。

〔2〕 運動量方程式

飛散状態から巻込状態へ移る直前を考え，インバート断面（1断面）と下流水位が安定した適当な断面（2断面）とを検査面にとつて，水平方向の運動量方程式をたててみると，

$$\frac{\gamma h_0}{g}\frac{V_0^2}{}\left(1-\frac{h_0}{h_2}\right)=\frac{\gamma}{2}h_2^2+P_d-P_0-P_s \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで h_2 は2断面の水深，P_0 は1断面にかかる全水圧，P_s はシル下流面にかかる全水圧，P_d はバケットのインバートより下流の部分にかかる全圧力の水平成分である。（6）式に，（2）（4）（5）式および Ⅲ—〔3〕の結果を入れて整理すれば，（7－a）又は（7－b）式をうる。

$$h_2^3-2k\,H_{te}\,h_2^2+2\left[(0.363+0.273\;F_0-0.207\;R_t)\left\{\frac{h_0\,r_b}{4}(1-\cos 2\alpha)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{q^2\,h_0\,(2r_b-h_0)}{2\,g\,r_b(r_b-h_0)^2\log^2\left(1-\frac{h_0}{r_b}\right)}(1-\cos\alpha)+h_0\,L_s\sin\alpha\right\}+\frac{H_{te}^2}{2}$$

$$\left.-\frac{h_0^2}{2}-\frac{q^2\,h_0^2}{2\,g\,r_b\,(r_b-h_0)^2\log^2(1-\frac{h_0}{r_b})}-\frac{h_0\,V_0^2}{g}\right].h_2+2\frac{h_0^2\,V_0^2}{g}=0$$

$$\cdots\cdots(7-a)$$

8) 岡田篤也，安芸皎一：逆傾斜水路に於ける跳水現象の実験的研究電力技術研究所報告　土木 55040

$$C_p^3-2k\ R_c\ C_p^2+2\left[(0.363+0.273\ F_0-0.207\ R_t)\cdot\left\{\frac{R_r}{4}(1-\cos 2\alpha)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_0(2R_r-1)}{2R_r(R_r-1)^2\log^2(1-\frac{1}{R_r})}(1-\cos\alpha)+R_s\sin\alpha\right\}+\frac{R_c^2}{2}-\frac{2}{1}-$$

$$\left.-\frac{\lambda_0}{2R_r(R_r-1)^2\log^2(1-\frac{1}{R_r})}-\lambda_3\right]C_p+2\lambda_0=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7-b)$$

多少重複することになるが，（7）式における記号を説明すると，

h_0＝1断面，すなわちバケットインバートにおける露出射流水深，m

h_2＝2断面における水深，m

q＝バケット単位巾当りの流量，m³/秒

V_0＝バケットインバートにおける射流の平均流速，m/秒

r_b＝バケット底半径，m

H_{te}＝シル下流垂直面の長さ，すなわちリップと放流路床の標高差，m

$C_p=h_2/h_0$ 仮りに，飛散巻込限界水深係数と名付ける，

F_0＝バケットインバートにおける，露出射流のフルード数

λ_0＝バケットインバートにおける，露出射流の動水係数，F_0^2

α＝リップ角度

R_t＝リップ高 R_t をしめす形状条件 H_t/h_0

R_r＝r_b をしめす形状条件 r_b/h_0

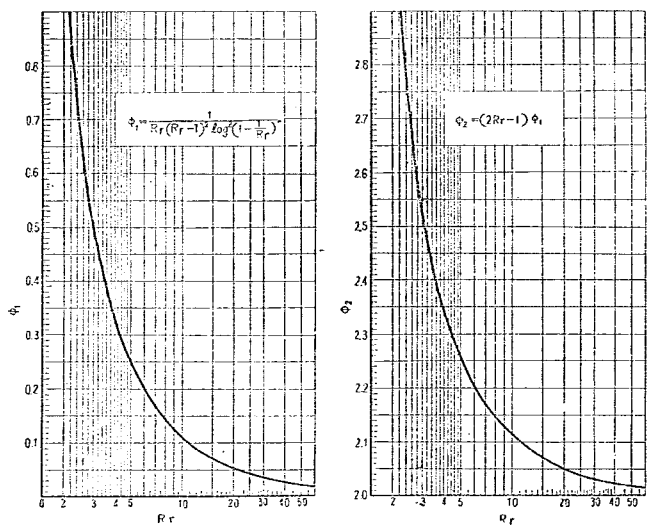
R_c＝H_{te} をしめす形状条件 H_{te}/h_0

R_s＝バケット直線部長 L_s をしめす形状条件 L_s/h_0

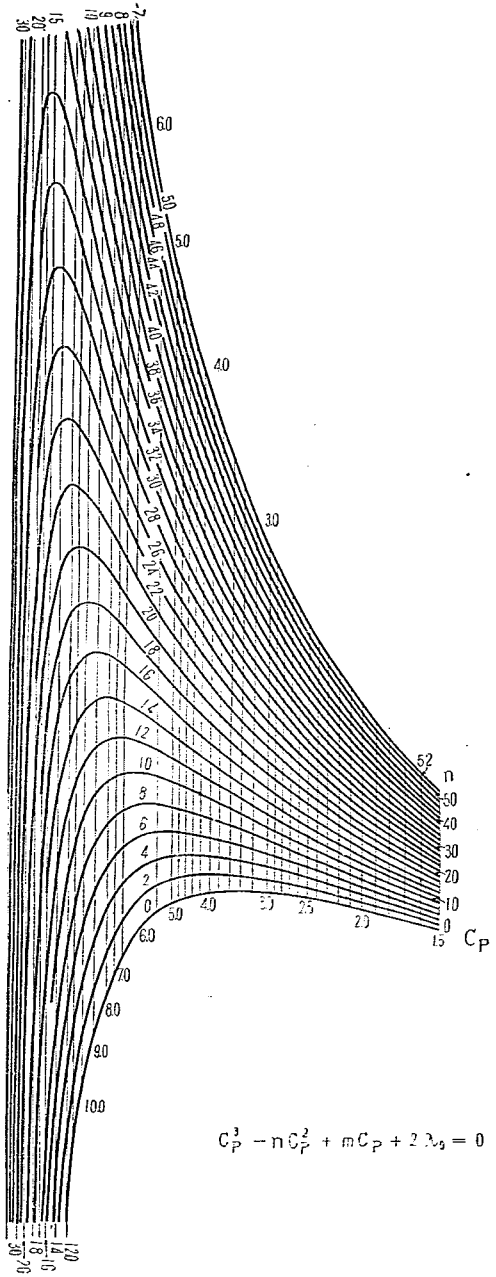
k＝Ⅲ—〔3〕で定義された実験係数，

g＝重力による加速度，m/秒²

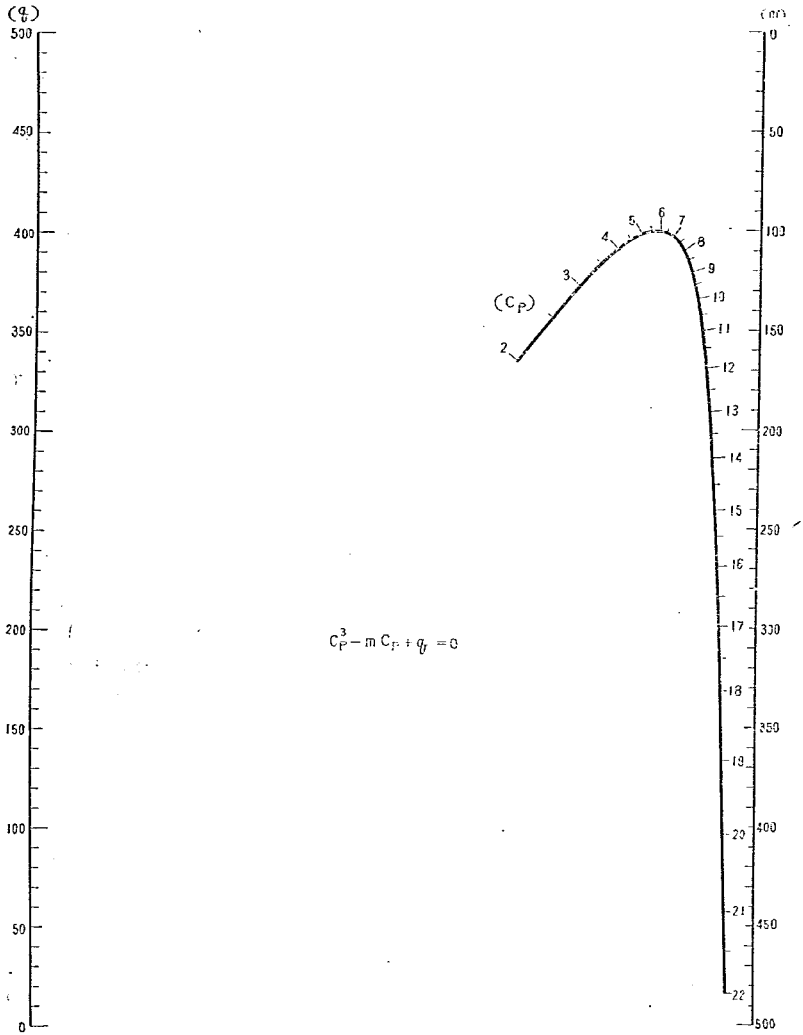
（7—a）および（7—b）式は，いずれも求めようとする h_2 又は C_p の三次式であり，各係数および常数項は，バケットへの流入射流の性質やバケットの形状がきまれば計算できるから，これを解いて h_2 又は C_p を求めることができる。



図—11　R_r—φ_1，$(2R_r-1)\varphi_1$ 関係曲線



$$C_P^3 - nC_P^2 + mC_P + 2\alpha_0 = 0$$



図—13　$C_p^3 - m\ C_p + q = 0 \rightarrow C_p$ 計算図

（7）式で，$\alpha = 0$，　$H_{te} = 0$　とおけば，

$$C_p^3 - \left\{1 + \frac{\lambda_0}{R_r(R_r-1)^2 \log^2\left(1 - \frac{1}{R_r}\right)} + 2\lambda_3\right\} C_p + 2\lambda_0 = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

これと，従来水平水路床上の跳水の場合について求められた同種の関係式

$$C_p^3 - (1 + 2\lambda_0) C_p + 2\lambda_0 = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

とを比較すると，（8）式は，（9）式に1断面における遠心圧力項を付加したものという，当然の帰結をう

る。普通の水平水叩では，跳水始端がインバートより下流であれば（9）式にしたがい，それより上流に達すれば遠心圧力項を考慮しなければならないであろうが，実際には3.—〔1〕でのべたような圧力分布上の過渡領域が存在するので，水平水叩始端で跳水を生じる場合の関係式は，$0<\eta<1$ なる係数を仮定して，次のように書けばよいであろう。

$$C_p^3-\left\{1+\eta\frac{\lambda_0}{R_r(R_r-1)^2\log^2\left(1-\frac{1}{R_r}\right)}+2\lambda_0\right\}C_p+2\lambda_0=0 \cdots\cdots\cdots(10)$$

秋葉実験の結果からηを計算したところ，約0.57となつたが，資料数が少ないから，明確な数値はなお今後の実験にまたねばならない。又ここで，

$$\varphi_1=\frac{1}{R_r(R_r-1)^2\log^2\left(1-\frac{1}{R_r}\right)}$$

とをいて（10）式を書きかえると

$$C_p^3-\{1+(2+\eta\varphi_1)\lambda_0\}C_p+2\lambda_0=0 \cdots\cdots\cdots(11)$$

この φ_1 は R_r のみの函数で，φ_1 と R_r の関係を図示したのが図—11である。普通 R_r の値はそれほど小さいものではなく，一般の操作状態では，大体5以上の値をとるものと思われる。すると，図—11からわかるように，$\varphi_1<0.25$，$\eta=0.6$としても，$2+\eta\varphi_1<2.15$となつて，（11）式の λ_0 の係数が（9）式のそれに比してわずか7.5%増加したにすぎない。したがつて水平水叩に関するかぎり，遠心圧力の影響を無視して跳水共役水深を求めたとしても，実用上支障はないであろう。

又とくに，放流路床がリップと同標高にある場合には，

$$C_p^3-\left[1+(2+\eta\varphi_1)\lambda_0-\mu\left\{\frac{R_r}{2}(1-\cos 2\alpha)+\lambda_0\varphi_1(2R_r-1)\right.\right.$$
$$\left.\left.(1-\cos\alpha)+2R_r\sin\alpha\right\}\right]C_p+2\lambda_0=0 \cdots\cdots\cdots(12)$$

$\alpha=0$すなわち受落ちを有する水平水叩の場合などは，

$$C_p^3-2kR_cC_p^2-\{1+(2+\eta\varphi^1)\lambda_0-R_c^2\}C_p+2\lambda_0=0 \cdots\cdots\cdots(13)$$

以上のべた各式によつて，乗散巻込臨界水深を計算することができるが，実際計算をおこなう場合，これらの式はかなり複雑であり，相当な労力と時間を必要とする。そこで計算に便利なように，若干の図表を次に掲げる。

〔3〕 運動量方程式による計算結果の検討

前節（7）式を使つて求めた結果の検討に先立ち，（7）式が二つ以上の正根を有する場合の根の吟味法について言及する。一般には三つの正根がある場合も考えられるが，実際に係数を計算してみると，問題となるのは二つの場合だけのようにに思われる。もし二つの正根の中，一方が1より小さければ，下流放流路の流れが常流とならねばならぬことからこれを捨てて，解を決定することができる。実際の計算では，多くの場合このようにして採用すべき根を見出だすことができるが，R_c が非常に大きい場合には，二つの正根がともに1より大きいことがある。そのような時には，その根が $1+R_c$ より大きくなければならないし，又インバート断面の比エネルギーが下流断面の比エネルギーより大きくなければならないという条件で，吟味すればよいであろう。本節の計算例では，インバート断面の流速分布を，

$$V_0=\frac{q}{(r_0-y)\log\left(\frac{r_0}{r_0-h_0}\right)}$$ [9]

と仮定して比エネルギーを求めた。又下流断面の比エネルギーは，

$$\frac{\int_0^{h_d}V_d^3\,dy}{V_d^3\,h_d}\fallingdotseq 1 \qquad \frac{\int_0^{h_d}(h_d-y)\,V_d\,dy}{\frac{1}{2}\,V_d\,h_d^2}\fallingdotseq 1$$

と仮定して求めた。それらの結果のみを書くと，次のようになる。

$$E_0=\left\{\frac{\lambda_0}{2(R_r-1)^2\log^2\left(\frac{R_r}{R_r-1}\right)}+\frac{1}{\log\left(\frac{R_r}{R_r-1}\right)}+1+R_c-R_r-R_t\right\}h_0 \cdots(14)$$

$$E_d=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{C_p^2}+C_p\right)h_0 \cdots\cdots\cdots(15)$$

ここで，

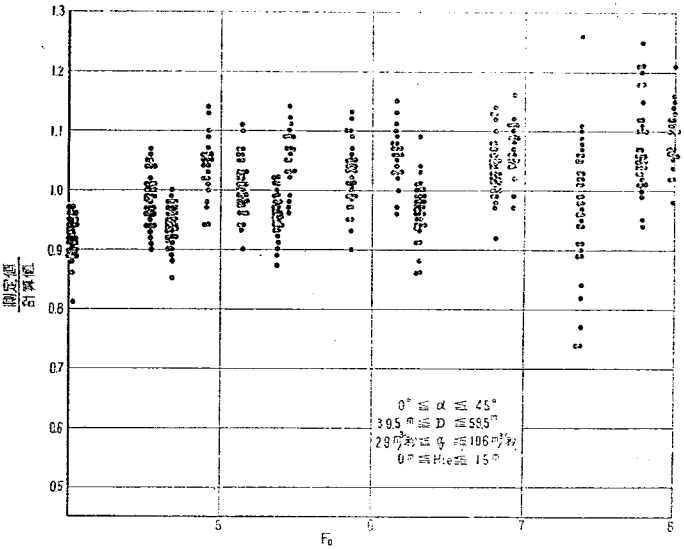
V_0=インバート断面内の，バケット底面から距離 y の点の流速 m/秒

9）脚註 7）参照

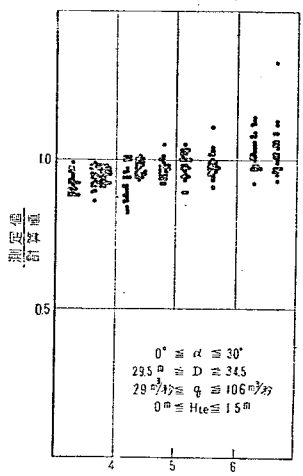
V_a=下流断面内の，放流路床から距離 y の点の流速m/秒
V_a=下流断面の平均流速
h_a=下流断面の水深
E_o=インバート断面の比エネルギーを，放流路床からの水頭高で表わしたものm
E_a=下流断面の比エネルギーを，放流路床からの水頭高で表わしたものm

(7) 式の実用性の検討のため，秋葉ダム水理模型実験結果と計算結果との比較を次にのべる。なお計算に当つて，H_{te}=10および15mの場合にはk=0.89，H_{te}=5 mの場合にはk=0.75，H_{te}=1および3 mの場合にはk=0と仮定した。インバートを基準としてはかつた飛散巻込臨界水深の，実験値と計算値の比を求めたところ，バケット単位巾当り流量が非常に少ない場合には1よりかなり大きい値をえ，又落差Dが小さい場合には，大リップ角度で1よりかなり小さい値をえたが，$q \geqq 29\ m^3$/秒，$D \geqq 39.5$mの場合には，大体満足できる結果をえた(図—13参照)。もつとも10%程度の誤差はあるが，下流水深測定点附近がかなり波立ち，その水面をはつきり把握しがたい状態であることを考えれば，この程度の誤差はやむをえないと思う。又 R_e が非常に大きい場合，たとえば H_{te}=15m でかつ q<50m³/秒のような場合には，計算値は実験値よりはるかに小さかつた。これはkの仮定上の問題であるが，実際には H_{te} が非常に大きくなると，底近くのシル垂直面圧力が下流水圧と平衡して，飛散巻込臨界水位の上にほとんど影響しなくなるからであろう。本実験の例からみて，H_{te}>10m の場合には，すべて H_{te}=10m として計算した値を用いた方がよいであろう。図—13は，D<39.5mの場合についてプロットしていないが，落差が小さい場合でも，リップ角度30度迄はかなりよい結果をえているので，それを図—14にしめす。

更に高い精度で複雑なバケット現象を表わすには，落差やその他の未知の要因を考慮せねばならぬであろうが，相当広範囲な条件のもとで，(7)式は充分実用に耐えうるものと思う。



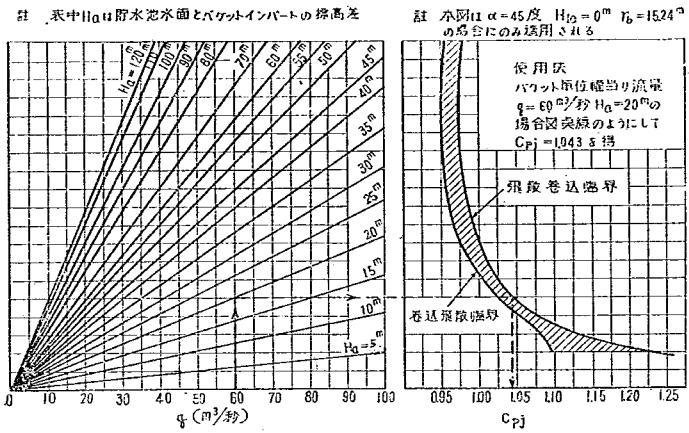
図—14　飛散巻込臨界水深計算値測定値比較



図—15　飛散巻込臨界水深計算値測定値比較—2

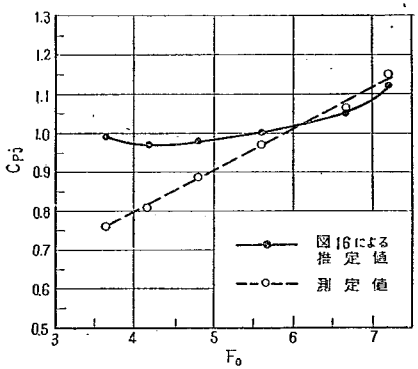
〔4〕 跳水共軛水深と飛散巻込臨界水深の比較

運動量方程式を用いて飛散巻込臨界水深を推定するのは，計算過程が非常に繁雑であるから，バケットの予備的設計に当つては，もつと簡単に概略の値を推定する方法が与えられると便利である。そこで以下数節にわたつて，バケットの各種形状条件および水理条件の場合の，飛散巻込臨界水深の変化を追求したいと思う。



図—16　J. A. Tiffany により与えられた C_{pj} 計算図

J. A. Tiffany は，比較的高いダムで余水吐水脈がうすくかつ $R_e=0$ の場合について，跳水共軛水深と飛散巻込および巻込飛散の両臨界水深との間の関係を，図—15 にしめすような形で提示した[10]。この結果と秋葉ダム実験結果とを比較すると，図—16にしめすようにあまりよく一致しない。更に図—15は，リップ角度が45度の場合しか適用出来ないから，実用上非常にせまい範囲でしか役立たない。そこで，新たに秋葉ダム実験でえられた資料を検討してみた。以下，飛散巻込臨界水深を跳水共軛水深でわったものを，C_{pj} と書くことにする。



図—17　C_{pj} 推定値と測定値の比較

結果的にいえば，ある一定の形状条件のもとでは，C_{pj} と水理条件の間に法則性を見出だしうると思われたが，形状条件の変化をも考慮に入れて C_{pj} を推定する方法をもとめることはできなかつた。一般に C_{pj} は極端に小さい流量の場合に非常に大きく，それより流量の増大にともなつて急激に減少し，ある流量で最小となり，その後は流量の増大とともに，わずかではあるが増大する。C_{pj} の値はリップ角度が大きいほど広い範囲に分布し，しかもその他の形状条件によつても大きく影響されるから，飛散巻込臨界水深の推定に用いるのは適当

表—4　中程度の流量の場合の C_{pj} 概略値

α（度） ＼ H_{te}（m）	0	1	3	5	10	15
0	1.01	0.95	0.89	0.96	0.92	0.91
10	1.10	1.05	1.02	1.04	1.00	0.94
20	1.18	1.13	1.12	1.09	1.09	1.03
30	1.14	1.12	1.11	1.10	1.08	1.02
40	1.07	1.03	1.08	1.05	1.05	1.00
45	1.00	0.95	1.05	1.06	1.03	1.00
60	1.05	0.97	0.96	0.98	0.91	0.85

10) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers Bulletin No. 37 : Hydraulic Models as an Aid to the Development of Design Criteria

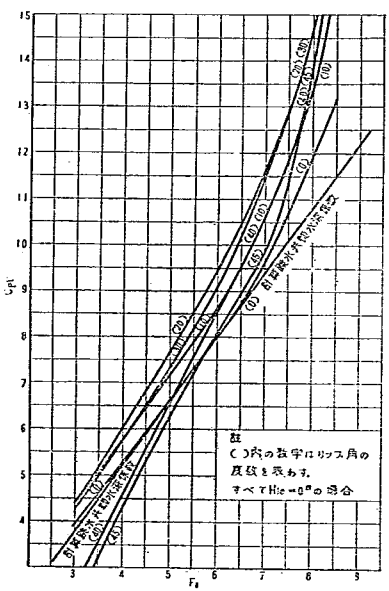
表—5　中程度の流量の場合の C_{pi} の分布範囲

H_{te} (m) / α (度)	0	1	3	5	10	15
0	0.99～1.03	0.93～0.98	0.85～0.95	0.89～1.02	0.90～0.95	0.87～0.95
10	1.06～1.14	1.01～1.11	0.99～1.11	0.97～1.07	0.96～1.05	0.90～1.00
20	1.14～1.23	1.11～1.16	1.07～1.16	1.07～1.15	1.01～1.12	0.96～1.08
30	1.12～1.21	1.08～1.16	1.08～1.17	1.05～1.17	1.03～1.12	0.99～1.05
40	0.81～1.17	0.87～1.15	1.04～1.15	0.98～1.11	0.99～1.11	0.92～1.06
45	0.77～1.11	0.76～1.10	0.90～1.12	0.97～1.11	0.98～1.09	0.96～1.03
60	0.67～1.12	0.67～1.09	0.71～0.99	0.83～1.08	0.85～0.99	0.81～1.04

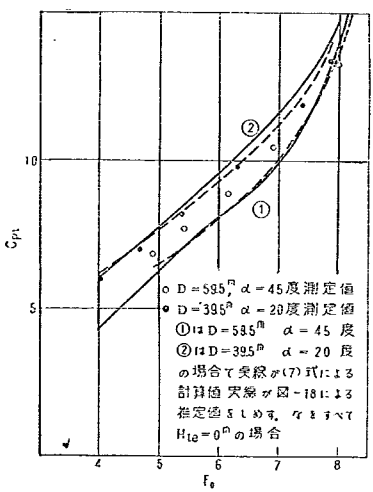
でないと思う。もし非常に多くの資料を使いわけして，飛散巻込臨界水深を推定するための図表を作ろうというならば，次節にのべるフルード数との関係づけを利用した方が，簡単に使用出来る点で勝っていると思う。ただ従来の諸実験の報告では，飛散巻込臨界水深を跳水共軛水深との関係で論じているものが多いので，そのような方法をとる理論的意義は別として，一般に条件として与えられることの多い中程度の流量（30m³/秒 $< q <$ 80 m³/秒）の場合の C_{pi} の概略の値と分布範囲を，参考資料として表—4および表—5にしめす。

〔5〕 インバートフルード数と飛散巻込臨界水深の関係

（7）式は，λ_0（又はF_0）と R_r R_e R_t R_s α の函数である。この中 R_t による μ の変化は小さく，又 $2R_t \sin\alpha$ および $\frac{R_r}{2}(1-\cos 2\alpha)$ の値はともに（$2+\varphi_1$）λ_0 の値にくらべて非常に小さく，さらに R_r による φ_1 および（$2R_r-1$）φ_1 の変動も，それぞれ約14.8% および 15.8%で比較的小さいから，（7）式の結果は，主として，F_0，R_e,α に影響されるとみてよいであろう。とくにその中，F_0 の影響は大きい。一般の跳水の場合と同様，F_0 が増加するにつれて C_pも大きくなる。$R_e=0$ の場合につき，実験値を整理してこの関係を図示したのが，図—17である。なお C_{pi} は，インバートを基準としてはかつた飛散巻込臨界水深を，h_0 でわつたものを意味する。この図を応用してもとめた C_{pi} と，実験値および運動量方程式による計算値の三者を比較したのが，図—18である。α が大きくなると，R_r，R_t，R_s 等を無視した影響のため測定点がばらつき，多少の誤差を生じるが，近似的値の推定に使用するかぎり，図—17は充分役に立つと思う。

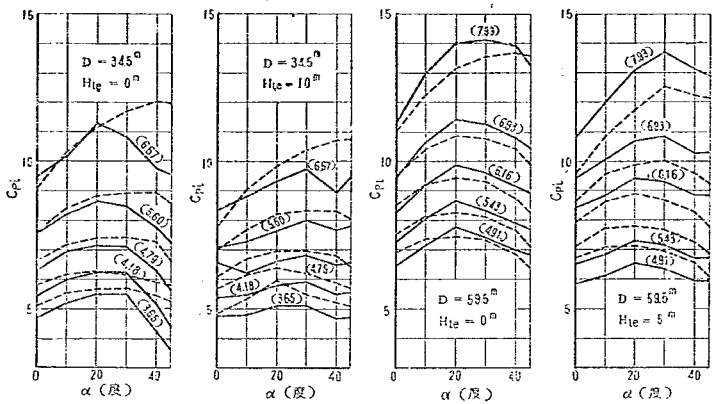


図—18　フルード数，飛散巻込臨界水深係数関係曲線



図—19　C_{pi} 推定値と測定値の比較

註　D＝クレストからバケットインバート迄の落差　H_{te}＝リップと放流固床の標高差
括弧内の数字はインバートに於けるフルード数　実線は測定値
点線は計算値



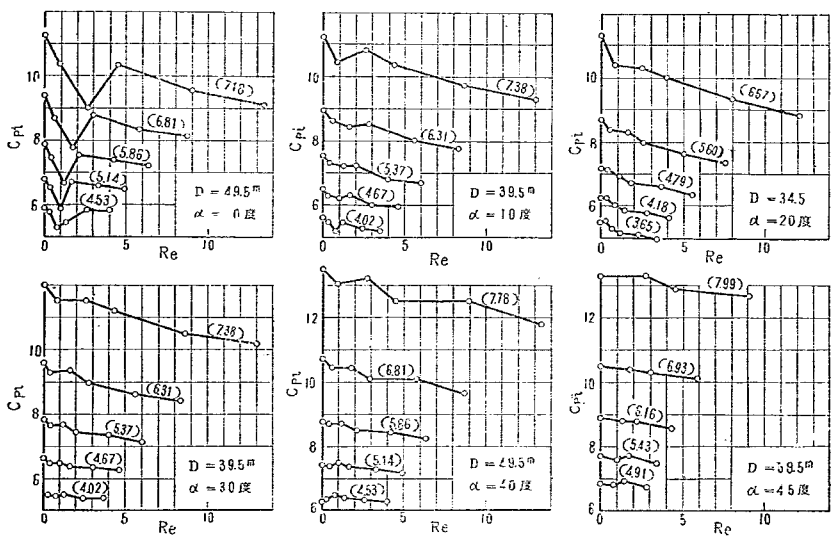
図—20　リップ角と飛散巻込臨界水深係数の関係

〔6〕 形状条件が飛散巻込臨界水深に与える影響

前節でのべたように，飛散巻込臨界水深に大きい影響を与える形状条件は，主として α および R_e である。一般に，リップ角度が20度又は30度で C_{pi} が最大となり，それより大又は小角度では，C_{pi} が若干減小する。この傾向は，運動量方程式による計算値でも見られた（図—20 参照）。

常識的に考えると，大きい底渦を形成できるほど安定した流況がえられるから，R_e が大きいほど Cpi は小さくなり，又 R_e がある程度以上大きくなれば C_{pi} はほぼ一定値をとるものと思われる。実験の結果は，少数の

註　D＝クレストからバケットインバート迄の落差　α＝リップ角
括弧内の数字はインバートに於けるフルード数



図—21　R_e と飛散巻込臨界水深係数の関係

例外をのぞきこの傾向をしめした。もつとも，R_e が小さい場合非常に不安定な流況をしめすことから考えてもわかるように，秋葉ダム実験の例では，$H_{te}<5$ m の場合 C_{pi} の値はきわめて急激に変動し，$H_{te}\geqq 5$ mになつてはじめて R_e の増大にともなう C_{pi} の漸減が測定された。以上の関係を，図—20にしめす。しかしこのような関係がはつきりと表われるのは，余水吐水脈の厚さがうすい場合か，又はリツプ角度が小さい場合であり，リツプ角度が大きいときや余水吐水脈が厚いときには，R_e の増大につれてかえつて C_{pi} が増大することがある。その原因はよくわからないが，そのような場合に（7）式の結果が測定値とよく合わないこと等からみて，R_r の減少にともなうリツプ面圧力分布の不整，R_e の減少にともなうシル下流垂直面圧力分布の不整等も，原因の一つになつているのではなかろうか。実際の設計に当つて，飛散巻込臨界水深を概略推定せんとする場合には，一応 R_e の影響を無視して図—17から求めた C_{pi} をそのまま使用すれば，余水吐水脈の厚さが極端に厚くならないかぎり，実用上安全な値を推定することができるであろう。

5. 下流流況および洗掘の特徴

〔1〕 流速分布および底流速について

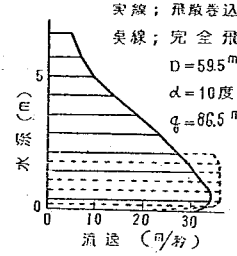
ダム余水吐の減勢機構の適否を判定する最も重要な問題は，減勢機構の内部よりもむしろその下流すなわち放流路の流況や，予想される河床の洗掘状態である。そしてその判定資料としては，主として流速分布が検討される。水叩内に突入する流れの流速エネルギーが，水叩終端までの間に減少する量は，水叩の効率をしめす一つの指標である。Ⅵにのべる副水叩を底渦終端まではつた場合には，この減勢量は，Ⅳ—〔3〕と同様の推論によつて簡単に求められ，（16）式のような結果をうる。

$$\frac{Hv_0-Hv_2}{H_{V_0}}=1-\frac{2R_r^2(R_r-1)^2\log^2\left(\frac{R_r}{R_r-1}\right)}{C_p^2(2R_r-1)} \quad \cdots\cdots(16)$$

ただし，Hv_0 はインバート断面における流速水頭，Hv_2 は下流断面における流速水頭である。

しかし実際には，長い副水叩をはることはバケット型水叩の本来の使命に反し，副水叩のないものが普通である。そこでリツプ断面における流速エネルギーの大きさが問題となるが，このような遷渡的領域における流速分布を理論的に推定することは困難である。

完全飛散状態の場合のリツプ断面平均流速は，測定の結果インバート断面の平均流速とほとんど等しく，かつ垂直方向に大体均等に分布していた。これが飛散巻込臨界状態になると，表面渦と接触する部分の流速が落ちて，表面渦をのぞいた主水脈部分のみの平均流速もかなり小さくなる（図—22および表—6参照）が，断面最大流速はなお非常に大きく，飛散時の流速とほとんど変らない。したがつてもしこれが直接河床を攻撃すれば，河床侵蝕力はきわめて大きいものと思われる。しかしリツプ下流の河床は底渦によつて保護され，主水脈は底渦との接触面で減勢され，水叩長が底渦終端まで延長されたと同じような効果がある。底渦が，バケット型水叩の最大の特徴といわれるのは，このような理由からである。底渦の周縁速度すなわち上流向きの底面流速は，勿論底渦の発達が大きいほど小さい。そして底渦の大きさは，H_{te} が大きいほど大きい。底渦底面の最大流速（v_d）は，測定の結果表—7のようになり，$H_{te}=0$ m の場合でも，リツプ断面にくらべかなり減少している。



図—22 飛散時と飛散巻込臨界時とのリツプ断面流速分布比較

表—6 飛散巻込臨界状態におけるリツプ断面平均流速の V_0 に対する比

α（度）	… q（m³/秒） / H_{te}（m） …	48.08	86.54
10	0		0.629
45	0	0.564	0.700
45	5	0.513	0.632
45	10	0.493	0.561

但し $D=59.5$m の場合

表—7 底渦底面の最大流速のV_0に対する比:v_g/V_0

α(度)	D(m) / q(m³/秒) / H_{te}(m)	59.5		34.5	
		48.08	86.54	48.08	86.54
0	5			0.200	0.226
10	5	0.191	0.244	0.134	0.201
20	5	0.183	0.118	0.134	0.155
30	5	0.193	0.251	0.197	0.231
40	5			0.145	0.146
45	0	0.167	0.179	0.232	0.244
〃	5	0.073		0.175	0.169
〃	10	0.068	0.146	0.125	0.166
〃	15			0.134	0.179

表—8 底渦終端下流における最大底流速のV_0に対する比v_b/V_0

α(度)	D(m) / q(m³/秒) / H_{te}(m)	59.5		34.5	
		48.08	86.54	48.08	86.54
0	5	0.165		0.065	0.057
10	5	0.103	0.096	0.032	0.073
20	5	0.171	0.196	0.056	0.146
30	5	0.153	0.228	0.200	0.265
40	5			0.251	0.405
45	0	0.191	0.260	0.321	0.504
〃	5	0.118	0.235	0.301	0.365
〃	10	0.134	0.225	0.268	0.306
〃	15			0.239	0.279

表—9 潜流飛散臨界状態に於ける最大底流速のV_0に対する比

D(m)	α(度)	q(m³/秒) / H_{te}(m)	48.08	86.54
59.5	0	0	0.472	0.760
		5	0.386	0.610
	10	5		0.506
34.5	0	0	0.553	0.680

底渦終端のやや下流における底流速(v_b)は，前述のv_gとともに河床侵蝕力の一指標となるべきものであるが，その大きさは表—8のようになつた。これよりみて，v_bもv_gと同様H_{te}が大きいほど小さくなるものと思われる。又αが大きいほどv_bが大きくなる傾向がみられるが，これは小角度リップの方がFローラーになりやすく，大角度では主水脈が完全に水路底まで貫入するためであろう。したがつて，大流量の場合やH_{te}が小さい場合には，αが小さいほv_bが小さくなるという傾向はみられず，むしろ逆の現象が予想される。しかしいずれせによ，これと潜流状態になつた場合の底流速（表—9）とを比較すれば，巻込状態の方がはるかに小さい底流速をしめすことが，わかるであろう。

〔2〕 表面渦の長さについて

副ダムを建設する場合などに，減勢池の長さをどこまでとるかについては，多くの問題があろう。一般には，流速分布が大体整流された状態になるまでというように考えられているが，この整流という言葉は非常にあいまいであつて，明確な定義があるわけではない。実際には，底渦終端から適当に下流の点までという，漠然としたものになるであろう。このような不明確な基準によつて長さをはかるのは不適当であるから，我々は減勢池の長さを知るための一つの指標として，表面渦の水平長をとつてみた。水平水路床上の跳水表面渦長は，周知のように，大体下流水深h_2の4.5倍といわれている。この長さのとり方も，跳水終端の位置の不明確さのため非常に問題があるが，本実験では，逆流点を独自に定義して表面渦の長さを測定した。そのため水平水路床上の跳水表面渦長は，約$3.6h_2$となつた。このように短かくなつた原因は，跳水終端の定義上の問題の他にも，堤体斜面と水叩との取付円弧のため，下流水位を共役水深よりやや高めにして測定した場合，跳水始端があまり上流に進まないことが挙げられる。しかしこれは，単にバケットとの比較の対象にすぎず，その意味からこの3.6を基準にとつて，各種バケットの跳水表面渦長l_sを検討してみる。l_s/h_2の概略値，およびそれらの水平水路床上の跳水の場合の値に対する比は，表—10のようになつた。

表—10　l_s/h_1表およびその水平水路床上の跳水の場合に対する比

資料別 α° / H_{le} m	0		10		20		30		40		45	
	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}/3.62$	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}/3.62$	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}/3.62$	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}/3.62$	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}/3.62$	l_s/h_1	$\frac{l_s}{h_1}3/.62$
0	3.62	1.00	2.5	0.68	2.2	0.61	1.9	0.51	2.0	0·54	2.0	0.56
1	3.6	0.99	3.0	0.81	2.2	0.60	1.9	0.53	2.0	0.54	2.0	0.55
3	3.4	0.93	2.4	0.66	2.0	0.56	1.9	0.53	1.9	0.52	1.9	0.52
5	2.6	0.71	2.2	0.60	2.0	0.55	2.0	0.55	1.9	0.53	1.8	0.49
10	2.4	0.67	2.2	0.61	2.0	0.56	2.0	0.55	2.1	0.59	1.9	0.53
15	2.5	0.70	2.4	0.67	2.1	0.59	2.0	0.56	2.2	0.60	1.9	0.53

このように，l_s/h_1の値は，α>20度では大体2.0程度で，水平水路床上の跳水の場合の値の約55%になつている。これに対し小角度（$\alpha=0$度および10度）では，リツプ角およびH_{le}の増大にともない，l_s/h_1の値が減少する傾向がみられる。もちろん対象は巻込状態であつて，潜流状態になればl_sはずつと大きくなる。又l_s/h_1の値は，フルード数が大きくなるほど大きくなる傾向が見られたが，一般に用いられるバケツトでは，$l_s=1.7h_1\sim2.4h_1$と考えればよいと思う。

表面渦の終端は，大体バケツト波の頂点附近でありリツプよりかなり下流である。したがつてバケツト型水叩の長さは，一般の跳水型水叩に比してきわめて短かく，経済的にみた優秀性は明らかである。

〔3〕 下流洗掘の特徴

水叩下流の洗掘状態は，放流路の形状およびそれを構成する岩石や堆積土砂の物理的性質や個々の形状，又地質的な構造等によつて，非常に大きく影響されるものであつて，流れのおよぼす侵蝕力に比例するものではないから，このような問題を論じるのは困難である。したがつてここでのべるのは，河床が均質な堆積土砂からなり，しかもある標高で平坦にならされ，河道が彎曲していない場合に関することであつて，結局平坦な河床に加わる水理的侵蝕力の位置的な大小関係のことである。しかし実際の河床における洗掘状態も，河床の形状や性質が位置的に極端に異つていないかぎり，大体似た傾向をもつことが予想されるであろう。

普通の跳水型水叩では，水叩終端がもつとも深く洗掘され，それより下流へ行くにしたがつて，洗掘深が漸減する。バケツト型水叩でも，もし潜流を生じたとすれば，同じような傾向がみられるであろう。巻込状態でもつとも大きい侵蝕力が加わるのは，主水脈の落下点，すなわち底渦終端附近である。この部分の洗探された河床材料の一部は，底渦によつて上流へ運ばれ，リツプに向つて堆積し，その他は主水脈によつて下流へ押流される。リツプに向つて堆積した河床材料の中，比較的軽いものは底渦により主水脈又は表面渦の中に巻込まれて，浮遊の状態で下流に流れ去るか，又は表面渦に伴なわれてバケツト内で廻転する。これらの経過は，Waterways Experiment Station でおこなわれた Center Hill Dam の水理実験報告[11]に，詳しくのべられている。

一般に洗掘は，通水の初期の段階で急速に進行し，その後段々と安定していく。リツプから最大洗掘を生じる位置までの距離をL_e，放流路床からの最大洗掘深をSとすると，L_eは時間の経過とともに大きくなり，洗掘が次第に下流へと進行していく。最大洗掘部が底渦終端附近にできる関係上，H_{le}が大きいほどL_eも大きいが，H_{le}が小さくても，洗掘の進行にともない結果的には底渦が次第に発達していくため，L_eが次第に大きくなつていくものと思われ，この進行は，洗掘が安定して底渦下面流速がほとんど0になるまで続くものと思われる。飛散巻込臨界水深時の最大洗掘深は，リツプ角度が大きいほど大きくなるような傾向がみられるが，これは本章第一節でのべたv_0の傾向と一致している。洗掘実験の結果は，表—11および表—12にまとめる。又図—22に，岩干の洗掘状態を例示する。

表—11　飛散巻込臨界水深時におけるL_eの値(m)

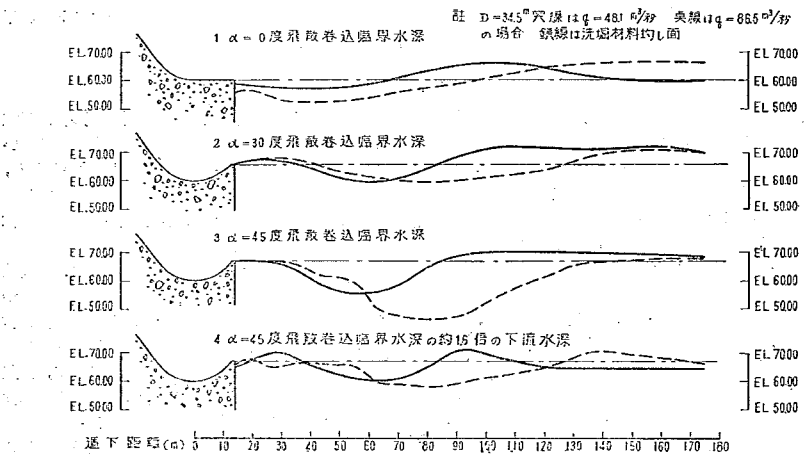
q(m³/秒)	α(度) \ H_{te}(m)	0	3	5	10	15
48.08	0	38.85	35.00	44.28	48.83	54.60
〃	10	33.25		45.85		
〃	20	35.70		47.08	51.10	
〃	30	44.80		46.20	47.08	50.23
〃	40	45.50		46.90		
〃	45	41.65		43.40	46.20	45.15
86.54	0	46.55		50.05	61.60	
〃	10	52.68		64.75		
〃	20	57.40		53.55	61.25	
〃	30	61.78		62.30	65.80	67.03
〃	40	61.43		63.70		
〃	45	63.35	67.20	64.23	66.68	66.15

但し　河床材料の粒径は8～10mm

表—12　飛散巻込臨界水深時におけるSの値(m)

q(m³/秒)	α(度) \ H_{te}(m)	0	3	5	10	15
48.08	0	4.900	3.300	2.525	1.725	0.050
〃	10	3.325		3.225		
〃	20	2.975		2.875	2.425	
〃	30	8.575		6.025	3.125	3.025
〃	40	8.050		9.000		
〃	45	12.950	11.350	11.450	7.850	5.300
86.54	0	8.400		2.700	1.200	
〃	10	6.825		4.800		
〃	20	6.125		4.275	4.525	
〃	30	7.700		8.300	7.850	
〃	40	5.775		5.500		7.240
〃	45	16.975	14.10	14.845	12.050	9.450

但し，河床材料の粒径は8～10mm25分間



図—23　バケット型水叩における洗掘状態の例

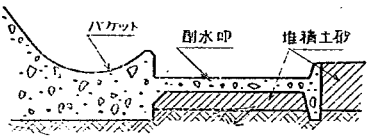
6.　附属構造物および細部形状

〔1〕　シルの形状

とくにリップ角度が小さい場合，シル頂面には往々にして負圧を発生し，これが又潜流発生の原因となる，したがつてシル頂面の長さL_tはできるだけ短かいことがのぞましく，Buggs Island Dam では，この長さを0,すなわち鋭角に切り落している(図—23参照)。しかしこのようにすると，リップの部分が構造的に弱くなるので，普通ある程度のシル頂面をもうける。その場合シル頂面の下流端から，できるだけ下流水の補給がつくような形状にすることがのぞましい。いろいろな形のシルの長短については，佐久間ダムの実験例[13]がある。又佐久間ダムではシル内にパイプを通し，シル頂面に下流水圧がかかるようにしたが，その効果についてはまだはつきりした結果がわかつていない。

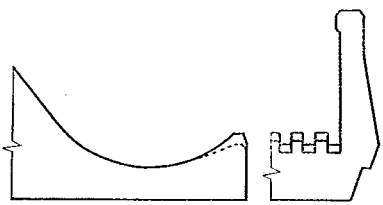
〔2〕副　水　叩

5—(3)でのべたように，河床洗掘の結果，バケット内に河床堆積砂利や岩屑が流入することがあり，このバケット内に巻込まれた固形物の回転によつて，バケットのコンクリート面が破壊されるおそれがある。



図—24　Buggs Island Dam のバケット縦断形状

この種の破壊は，実際 Grand Coulee Dam [13] で発生し，補修と同時にそのような現象の再発をふせぐために，下流河床の堆積土砂を，リップから下流約50mにわたつて除去せねばならなかつた。このような事態を防止するには，洗掘された河床材料がリップに向つて堆積しないようにすればよい。そのためには H_{te} を大きくして底渦底面の流速を小さくするか，上述のように河床堆積物を除去するか，又は底渦終端附近まで河床をコンクリートで保護して，河床材料を除去したのと同じ効果が期待できるようにするか，又はバケットの形状に手を加えて底渦の発生をさまたげるか，いずれかの方法を採らねばならぬ。第一の方法の例は秋葉ダム，第二の方法の例は既述のごとく Grand Coulee Dam，第三の方法の例は五十里ダムで，佐久間ダムは第一，二，三の方法をそれぞれとり入れたような形状になつている。副水叩とは，第三の方法を採用した場合に，下流の河床を保護するためにはる水叩のことである（図—24参照）。



図—25　副水叩を有するバケットの縦断形状

シル頂面の長さが短かいほどよいことから考えてもわかるように，リップと同標高に水叩をつくることは水叩面に負圧を発生させひいては潜流状態を招来する危険があるので，あまり好ましくない。又あまりに H_{te} を大きくとると，床渦長したがつて副水叩長が増大する。五十里ダムの実験結果からみると，副水叩上での減勢効果は堆積土砂上に比して悪いから，下流に河川の彎曲などがある場合，あまりに長い副水叩をつくると，かえつて下流の洗掘状態を悪くするおそれがある。

〔3〕導　流　壁

一般に，下流河川の巾は，余吐水の巾よりも広い。そのためバケットより流出する水脈には，横方向から側圧がかかる。その結果各種臨界水深がすべて減少するが，とりわけ潜流発生の可能性が多くなる。これに対する対策として，下流に導流壁を設置して，側圧がバケット水脈にかかるのを遮断する方法がとられる。その例は Center Hill Dam である。又導流壁には，下流にできる平面渦によつてバケットに向つて堆積される河床土砂を遮断し，さらに余水吐が河道の一方に偏している場合に，余水吐水脈が一方に絞られて集中するのをさまたげる。ことに副水叩をはつた場合には，副水叩上への土砂流入をふせぐため，少くとも副水叩終端までは導流壁をつけることが必要で，小リップ角度の場合は，副水叩と導流壁とを共設することによつて，下流流況を著しく改善しうることがある。導流壁の長さは，下流河川の形状がさまざまであるから，そのつど実験によつて定めることが望ましい。導流壁が短かすぎるといろいろな欠陥があるが，かといつてあまり長すぎても不経済であり，又わずかではあるが導流壁のために飛散巻込臨界水位が高くなるから，下流水深に余裕がないところでは注意しなければならない。

7.　特殊形状を有するバケット型水叩

これまでのべてきたことは，最初にもふれたように，ほとんど2—〔1〕に示したような一般的な形状を有するバケットに関する現象である。この他実用に供されているものや，又まつたく机上の計画として討議されたにすぎないもの等，いくつかの変つた形のバケットがある。以下それらの特殊形状を有するバケットについて簡単に記述するが，不思議なことに，これらの特殊バケットが採用された実例はあまりなく，施工が容易であるとか，水理的機能が単純であるとかの理由から，実例の大部分は一般的なバケット形状を有している。

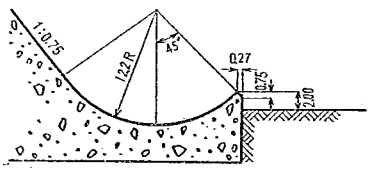
---

12) 脚註5) 参照

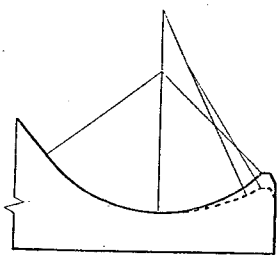
13) Engineering News—Record: Spillway Erosion at Grand Coulee Dam, July 13, 1944.

段違いバケット――これは別に特殊形状というものではないが，もつともよく実際に採用されているものであつて，いくつかの一般型バケットを組合わせたものである。とくに河床基礎岩の横断形状にしたがつて，河心部と両側部とでインバート標高を違えるという程度のものが多く，単に経済的制約から余儀なく生じた形状であつて，水理的に特別な効果があるわけではない。設計上では，河心部の低標高バケットに大リップ角度を用いて潜流の発生を防止したり，高標高バケットの部分ではなるべく飛散巻込臨界水深が低くなるよう努力する等の配慮を必要とするが，標高の違う各バケットを切離して，それぞれ独立に検討しても大きい過失を犯すことはないであろう。実例としては，Buggs Island Dam, Clark Hill Dam 佐久間ダム等沢山挙げられる。

楕型バケット――これは図―26に示すような形状のもので，楕状になつたシルが余水吐水脈の拡散をたすけ，それによつて減勢効果を大きくすることが目的である。米国 Waterways Experiment Station の実験によれば，楕型バケットはバケット液を低くおだやかなものにし，下流流況の改善に効果があるようであるが，他方潜流発生の可能性を強めるという欠点があるし，それ以上に形状の複雑さによる施工の困難さのため，経済的な理由から，採用された実例はあまりないようである。流況改善の効果がどの程度のものであるかについては，まだ我国にこの種水叩の実験例がないため，資料に乏しく判定困難である。



図―26　楕型バケットの形状

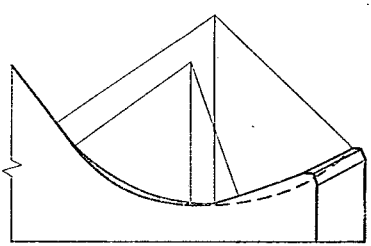

図―27　複合円型楕型バケットの形状

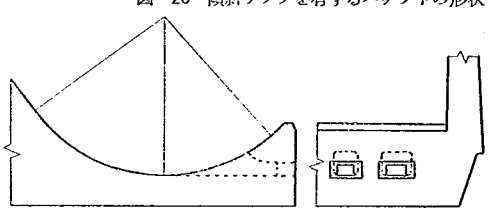
穴あきシルを有するバケット――図―29にしめすようなバケットで，実例はもとよりいまだ実験例もないのであるが，底渦によるリップ下流の堆積をふせぐという目的で提案されたものである。構造上いろいろと問題があるであろうし，又水理的機能も不明で，ここに論評を加えることができない。

この他にもいろいろ変つた型が考えられるであろうが，実用上からいえば，現在のところ段違いバケットや楕型バケットの範囲を出ないのではなかろうか。又バケットとはいえないにしても，その流況が一般の跳水型水叩よりもむしろバケット型水叩に似ているものに，阻壁式水叩 (abrupt rised apron) や，大きい阻板を有する水叩 (apron with high sill)が挙げられ，さらに水平水叩とバケット型水叩との中間的なものとして，段落ちを有する水平水叩や逆傾斜水叩が挙げられる。

複合円型バケット――これはバケット底に二種以上の半径の円弧を使つたり，又は特殊な曲線を使つたりするものであつて，普通のバケットでとくにこのような複雑な縦断形状を用いることは意味がないが，前述の楕型バケットではリップの下流端の位置をそろえる必要上，時として図―27のような形が考えられる。

傾斜リップを有するバケット――五十里ダム水理模型実験では，下流河川の彎曲のため，バケットから放出される水脈が少しでも曲がるように，図―27にしめすようなバケットにつき実験をおこなつた。その期待は満たされず，水脈はほとんど曲がらなかつたが，低落差小流量のダムでは，わづかながら効果があると思われる。しかし水流を彎曲させるためには，流れが常流にかえつたのちに工作物をつくつて処理した方が効果的であり，このような型の水叩は決して実用的ではない。


図―28　傾斜リップを有するバケットの形状


図―29　穴あきシルを有するバケットの形状

8. 結　　語

先にⅣ－〔1〕で跳水現象と巻込現象の相違をのべ，その他各所で，巻込現象を跳水現象との比較という形で論じてきた。しかしさらに大きい観点からみて，巻込現象をも跳水現象の特殊な型として考える方が便利なことが多い。このような見方にたてば，飛散巻込臨界水深は，跳水共軛水深の特殊な形態であり，水平水叩，逆傾斜水叩，段落ちを有する水平水叩，バケット型水叩等はすべて跳水型水叩の範ちゅうに包含され，それらの設計にあたつて必要な跳水共軛水深は，それぞれの型に適合した運動量方程式をたてることによつて，適当な計算方法を見つけることが可能であろう。

越流型余水吐の趾部に採用される水叩の型式を大別すると，放散型水叩と跳水型水叩の二種となり，跳水型水叩の中にいろいろな型が含まれる。水平水路上の跳水は，そのもつとも簡単な基礎的現象であつて，総論でのべたようにかなりよく解明されている。この水叩に傾斜をつけたものが順傾斜および逆傾斜水叩であり，逆傾斜水叩の勾配を急にし長さを短かくすることによつて底渦を発生させたものがバケット型水叩であり，又水平水叩を短かくして段落ちをつけ，それを次第に深くしていつて潜流状態の発生をふせいだものが段落ち水叩であり，これは又バケット型水叩の一種ともみなされる。その他阻壁式水叩や阻板を有する水叩にしても皆水平水叩の変形であり，相互に関連をもつものであつてみれば，各種型式の水理的な機能の間にも深い関連があるのは当然であつて，普通の跳水現象と巻込現象の間にも過渡的段階が存在する。しかし過渡的流況は，単に水理的興味をもつて論じればいろいろ問題があつて関心が湧くものであるが，実際の水叩にあつてこのような不安定な流況を使うことは好ましくなく，バケット型水叩を設計するにはなるべくはつきりした流況をとるようにし，あまり小さいリップ角やリップと放流路床の標高差は避けた方がよいであろう。

跳水型水叩一般について現在まで研究された大部分の結果は，ほとんど直線水路すなわち二次元的な結果であり，本文でのべてきたバケット現象に関する考察も例外ではない。三次元的なバケット現象を二次元的な結果から推測することは，その目的や方法によつては無論許されるであろうし，バケット型水叩は長さが短かく，水叩を途中で平面的に彎曲させることがないので，バケット内の現象は，二次元的な結果がわかればそれですむことが多い。しかし越流門扉の非対称操作や，バケット始端近くに開孔している堤内放水管のために，バケットのある部分だけにとくに水脈が集中するおそれのあるとき，又放流路がリップのすぐ下流で急に彎曲している場合などは，三次元的な模型で充分に実験をおこなつて設計を練ることが必要であろう。

又本文では，飛散巻込臨界水深に重点を置いて論を進めてきた。しかし将来低ダムの建設が盛んになつた時には，下流水位が高すぎて潜流発生の可能性を生じる例が，本邦でも多くなるものと予想される。潜流状態については，あまり解析がなされていないようであるが，これは単にバケット型水叩のみならず，あらゆる跳水型水叩の機能において見逃がすことのできぬ重要問題である。したがつて，今後この方面の対策が真剣に討議されねばならぬであろう。又バケット型水叩固有の問題としては，巻込流況の詳細な観察と，その諸要素との関係，洗掘や流速の解析が問題となるであろう。

バケット型水叩は比較的その歴史が浅いため，水理的機能に不明の点が多いと同時に，その優秀性も知られていない。しかしすでにかなりの実例があるし，しかもそれらはみな相当大規模なダムである。したがつてそれらの実例を注意深く観察し，設計の参考として生かすことが大事である。若干の実例については，それに関係した文献を脚註として示しておいたが，筆者の目にふれたバケット型水叩に直接関係のある文献を一括して，文末にかかげる。筆者浅学にして，充分の資料を渉猟できず，参考とした資料についても完全に活用することができなかつたことを残念に思う。

最後に，終始この実験に援助を与えられた，大型水理試験室長八木亀助氏，電源開発株式会社設計課清水直次氏，河川構造物研究室永田二生氏その他実験に従事した人々ならびにいろいろと助言を与えられた石井文雄，荒木正夫の両氏に対して，深く感謝の意を表する。

参考文献

1) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, U.S. Army, Technical Memorandum No. 2-281 : Bucket Type Energy Dissipator, Buggs Island Dam, Roanoke River, Virginia and North Carolina, Model Investigation.
2) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, U.S. Army, Technical Memorandum No.202 -1 : Model Studies of Spillway and Bucket for Center Hill Dam, Caney Fork River, Tennessee.
3) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, U.S. Army, Technical Memorandum No.2-263 : Spillway Design, Whitney Dam Model Investigation.
4) Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, U.S. Army, Bulletin No.37 : Hydraulic Models as an Aid to the Development of Design Criteria.
5) Corps of Engineers, U.S. Army, : Clark Hill Project vol. III Appendixes II-XII, Dec. 1.1945.
6) H.Rouse, : Engineering Hydraulics, 1949, John Willey & Sons Co.
7) Civil Engineering : Experiments Aid in Design at Grand Coulee, Nov. 1936.
8) Engineering News-Record : Spillway Erosion at Grand Coulee Dam, July 13,1944.
9) 電源開発株式会社土木部，土木試験報告：佐久間ダム水理模型実験，（I）～(V)，水理SKM—001～005.

連続ボックスガーダーの応力解析に関する研究

建設技官　田　原　保　二
建設技官　神　原　憲　雄
建設技官　沓　掛　哲　男

（昭和 32 年 3 月）

Stubies on stress analysis of continuous box girders

(March 1957)

Y. Tawara
N. Kouhara
T. Kutukake

Synopsis:

This paper presents the stress analysis, by applying the periodicity of Fourier's series, of continuous box girders, which is too complicated to solve by the usual calculation method.

This calculation method was, as example, applied to the continuous bridge of two-and three-box girders, and we established the theorem of three moments for continuous grid frame work.

Further the authors compared this calculated result with the value by experiment and pointed out this method is rational.

要　旨

連続箱桁橋の応力解析を，フーリエ級数の周期性の適用によつて行つたものである。
例として2本，3本主桁の場合の格子桁に関する三連力モーメントの定理を作成した。
模型実験によつて本定理を検討した所，極めて高精度であることが確証された。

目　次

1. 前書き……(1)
2. 実験要領……(2)
〔1〕試験桁の計画と製作……(2)
〔2〕使用器具……(2)
〔3〕実験方法……(3)
3. 理論式の誘導……(3)
〔1〕基礎式の誘導……(3)
〔2〕基礎方程式の作成……(10)
〔3〕数値計算……(22)
4. 理論値と実験値の比較及び荷重分配率…(35)
5. 連続ボックスガーダー慣用計算法……(41)
〔1〕単純ボックスガーダーの理論値及び実験値……(41)
〔2〕連続ボックスガーダーの近似計算値…(46)
6. 連続ボックスガーダーの精密解と近似解の比較……(48)
〔1〕モーメント影響線の比較……(48)
〔2〕モーメント分配率の比較……(48)
7. むすび……(50)

1. 前　書　き

第二次世界大戦後ドイツがライン河の諸大橋梁を再建するに当つて使用した鋼床版連続ボックスガーダーは材料，設計，製作，架設などのあらゆる面において大飛躍をなし，橋梁史上革命的な発達をとげ，昨今とみに注目されるに至つた。

従来の鉄筋コンクリート床板に比し，軽量な鋼床版を使用することは，支間の増大と共に極めて重要な意義を有する。ボックスガーダーの上フランジは主桁としてのみならず上述の鋼床版としても兼用されるもので橋梁構造法上適切な応用である。

次に主桁に閉断面の箱桁を使用することにより，曲げのみに剛性を有する桁としての考えから，積極的に捩り

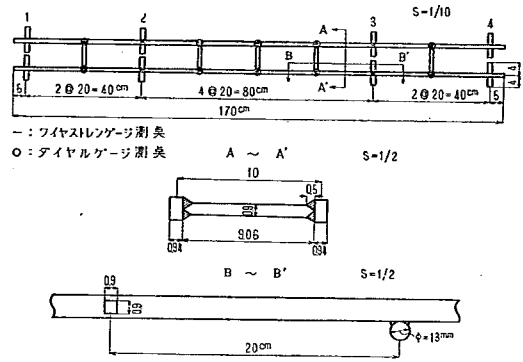
剛性をも設計に考慮し，橋梁全体として荷重を負担させることができる。この鋼床版ボックスガーダーは続続桁として使用する時，その特徴を充分発揮することができるのである。

しかし，現在までこれに対する合理的な設計法が確立されておらず，連続桁を各径間に分けて単純桁とし，その単純桁について荷重分配率を求め，その分配された荷重を負担する単独連続桁として設計するという近似計算法が行なわれていたが，著者はフーリエ級数の周期性を適用することにより格子桁に関する三連力モーメントの定理を誘導することに成功した。以下その理論式の誘導及びその精度を検討するための模型実験について述べることにする。

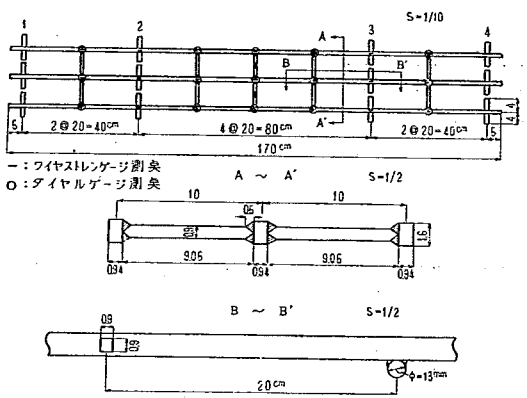
2. 実験要領

〔1〕 試験桁の計画と製作

精度を高めるため荷重として重錘を懸垂させる方法を適用すること及び実橋との相似性を考慮して試験桁を計画した。その一般図は 図—1，図—2 のようである。



図—1



図—2

〔2〕 使用器具

応力測定用

共和無線　抵抗線歪計（Indicator）2台

Switch box　24点　2台

撓み測定用
Dial Gauge　15ヶ

〔3〕 実 験 方 法

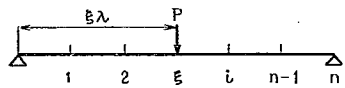
1. 載荷方法
各格点に $w=22$kg の重錘を載荷し，3回測定を行い平均値を採用した。
2. 応力の測定
共和無線研究所製電気抵抗線歪計を用いた。
応力測定箇所は 図—1,2 のようである。
3. 撓みの測定
ダイアル・ゲージを使用した。
撓み測定箇所は 図—1,2 のようである。

3. 理論式の誘導

〔1〕 基礎式の誘導

i) 撓みに関する基礎式

イ) 集中荷重



図—3

支間 l を n 等分し支点から順に 図—3 に示すように 1,2……n の番号を符する。今 ξ 点に P なる集中荷重が載荷された場合の x 点における撓みは次式で示される。

$$\delta_x=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\begin{array}{cccc}
 & & \frac{1}{(2n)^4}\sin\frac{2n\pi\xi}{n}\sin\frac{2n\pi x}{n} & \\
\frac{1}{1^4}\sin\frac{\pi\xi}{n}\sin\frac{\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-1)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+1)^4}\sin\frac{(2n+1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+1)}{n}\pi x\cdots & \\
\frac{1}{2^4}\sin\frac{2\pi\xi}{n}\sin\frac{2\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-2)^4}\sin\frac{(2n-2)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-2)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+2)^4}\sin\frac{(2n+2)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+2)}{n}\pi x\cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-i)^4}\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+i)^4}\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi x\cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{(n-1)^4}\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n-1)}{n}\pi x & \frac{1}{(n+1)^4}\sin\frac{(n+1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n+1)}{n}\pi x & \frac{1}{(3n-1)^4}\sin\frac{(3n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(3n-1)}{n}\pi x\cdots & \\
\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi\xi}{n}\sin\frac{n\pi x}{n} & & \frac{1}{(3n)^4}\sin\frac{3n\pi\xi}{n}\sin\frac{3n\pi x}{n}\cdots\cdots &
\end{array}\right)$$

ξ，x が整数なることを考慮すれば次式が成立する。

$$\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi x=\left\{\sin 2\pi\xi\cos\frac{i}{n}\pi\xi-\cos 2\pi\xi\sin\frac{i}{n}\pi\xi\right\}\left\{\sin 2\pi x\cos\frac{i}{n}\pi x-\cos 2\pi x\sin\frac{i\pi x}{n}\right\}$$

$$=\cos 2\pi\xi\cos 2\pi x\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi x$$

$$=\cdots\cdots$$

この関係を用いると δ_x は次のようになる。

$$\delta_x=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{\pi\xi}{n}\sin\frac{\pi x}{n}\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\cdots\right\}\\ \sin\frac{2\pi\xi}{n}\sin\frac{2\pi x}{n}\left\{\frac{1}{2^4}+\frac{1}{(2n-2)^4}+\frac{1}{(2n+2)^4}+\cdots\cdots\right\}\\ \sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}\left\{\frac{1}{i^4}+\frac{1}{(2n-i)^4}+\frac{1}{(2n+i)^4}+\cdots\cdots\right\}\\ \sin\frac{(n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n-1)}{n}\pi x\left\{\frac{1}{(n-1)^4}+\frac{1}{(n-1)^4}+\frac{1}{(3n-1)^4}+\cdots\cdots\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{2P}{EIn}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}P_i\alpha_i\sin\frac{i\pi x}{n}\cdots\cdots(1)$$

$$P_i=\frac{2P}{n}\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

α_i は無限級数の和であるが Mittag-Leffler の定理を用いて三角函数で表わすと次式のようになる。

$$\alpha_i=\frac{n^4}{\pi^4}\lambda^3\left\{\frac{1}{i^4}+\frac{1}{(2n-i)^4}+\frac{1}{(2n+i)^4}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\lambda^3\frac{\left(\cos\frac{i\pi}{n}+2\right)}{6\left(\cos\frac{2i\pi}{n}-4\cos\frac{i\pi}{n}+3\right)}\cdots\cdots(2)$$

ロ）格 点 力

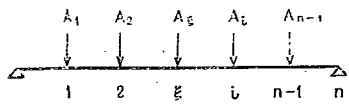


図 -- 4

格点 ξ に作用する格点力を $A\xi$ とし，$\mathfrak{A}_i$ を次式で定義すれば

$$\mathfrak{A}_i=\frac{2}{n}\sum_{\xi=1}^{n-1}A\xi\sin\frac{i\pi\xi}{n}\cdots\cdots(3)$$

支点より x 番目の格点力は次式であたえられる。

$$A_x=\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{A}_i\sin\frac{i\pi x}{n}\cdots\cdots(4)$$

〔証 明〕

$$\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{A}_i\sin\frac{i\pi x}{n}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{\xi=1}^{n-1}A\xi\sin\frac{i\pi\xi}{n}\right)\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{\xi=1}^{n-1}A\xi\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$\xi=x$ の時 $\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}=\frac{n}{2}$

$\xi\neq x$ の時 $\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}=0$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{A}_i\sin\frac{i\pi x}{n}=A_x$$

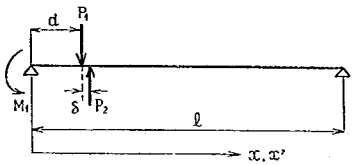
格点力による撓みは，(1)式の P_i として

$$P_i=\frac{2}{n}\sum_{\xi=1}^{n-1}A\xi\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

を用いればよい (3) 式を考慮すれば格点力による撓みは次式であたえられる。

$$\delta_x=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{A}_i\alpha_i\sin\frac{i\pi x}{n}\cdots\cdots(5)$$

ハ) 支点に曲げモーメント M が作した場合



図—5

x'：支点よりの距離を表わす。

x：支点よりの格点番号を表わす。

図—5 のように支点に M_1 なるモーメントが作用した場合の各格点における撓みを求めるのであるが，直接 M_1 が作用したとせず，支点より d, $d+\delta$, なる点に絶体値が等しく方向の異なる P_1, P_2 なる荷重が作用するとして求めた撓み式に対して，

$\lim\ \delta\to 0$　　その時 $\lim\ P\delta\to M$

更に $\lim\ d\to 0$

の操作をほどこせばよい。

$$P_1(x')=\frac{2P_1}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi d}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

$$P_2(x')=\frac{2P_2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi(d+\delta)}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

P_1, P_2 による撓みを η_1, η_2 とする。

$$\eta_1=\frac{1}{EI}\cdot\frac{2P_1l^3}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\sin\frac{m\pi d}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

$$\eta_2=\frac{1}{EI}\cdot\frac{2P_1l^3}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\sin\frac{m\pi(d+\delta)}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

$$=-\frac{1}{EI}\cdot\frac{2P_1l^3}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\sin\frac{m\pi(d+\delta)}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

合撓みを η とすると

$$\eta=\eta_1+\eta_2=-\frac{1}{EI}\cdot\frac{2P_1l^3}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\sin\frac{m\pi x'}{l}\left\{\sin\frac{m\pi d}{l}-\sin\frac{m\pi(d+\delta)}{l}\right\}$$

$$\sin\frac{m\pi d}{l}-\sin\frac{m\pi(d+\delta)}{l}=2\sin\left(\frac{-m\pi d}{2l}\right)\cos\frac{m\pi(2d+\delta)}{2l}=-\frac{m\pi\delta}{l}\cos\frac{m\pi d}{l}$$

$\delta\to 0$　　$\lim_{\delta-0}\ P_1\delta=M_1$

の操作をほどこせば

$$\eta=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\cos\frac{m\pi d}{l}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

$$\lim_{d-0}\eta=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi x'}{l}=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi x}{n}$$

$$=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\begin{pmatrix} & \frac{1}{(2n)^3}\sin\frac{2n\pi x}{n} & \\ \frac{1}{1^3}\sin\frac{1\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{n} & \frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \frac{1}{2^3}\sin\frac{2\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-2)^3}\sin\frac{(2n-2)\pi x}{n} & \frac{1}{(2n+2)^3}\sin\frac{(2n+2)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-i)^3}\sin\frac{(2n-i)\pi x}{n} & \frac{1}{(2n+i)^3}\sin\frac{(2n+i)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)^3}\sin\frac{(n-1)\pi x}{n} & \frac{1}{(n+1)^3}\sin\frac{(n+1)\pi x}{n} & \frac{1}{(3n-1)^3}\sin\frac{(3n-1)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{n} & & \frac{1}{(3n)^3}\sin\frac{3n\pi x}{n} \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi x}{n}\left\{\frac{1}{1^3}-\frac{1}{(2n-1)^3}+\frac{1}{(2n+1)^3}-\frac{1}{(4n-1)^3}+\frac{1}{(4n+1)^3}\cdots\cdots\right. \\ \vdots \\ \sin\frac{i\pi x}{n}\left\{\frac{1}{i^3}-\frac{1}{(2n-i)^3}+\frac{1}{(2n+i)^3}-\frac{1}{(4n-i)^3}+\frac{1}{(4n+i)^3}\cdots\cdots\right. \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)\pi x}{n}\left\{\frac{1}{(n-1)^3}-\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(3n-1)^3}-\frac{1}{(3n+1)^3}+\cdots\cdots\right. \end{pmatrix}$$

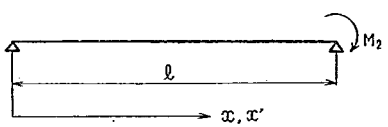
$$=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{i=1}^{n-1}U'_i\sin\frac{i\pi x}{n}=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\cdot\frac{l}{n\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}U_i'\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=-\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2M_1}{n}U_i\sin\frac{i\pi x}{n}\cdots\cdots(6)$$

$$U_i=\frac{l^3}{\pi^2\lambda}U_i'\cdots\cdots(7)$$

U_i は次式であたえられる無限級数の和である。

$$U_i'=\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(2n-i)^3}+\frac{1}{(2n+i)^3}-\frac{1}{(4n-i)^3}+\frac{1}{(4n-i)^3}-\frac{1}{(6n-i)^3}+\frac{1}{(6n-i)^3}\cdots\cdots(8)$$



図—6

図—6 のように $x'=l$ の支点に M_2 なるモーメントが作用した場合の各格点における撓みを上述の方法で求めると次のようになる。

$$\lim_{d\to l}\eta=\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\cos m\pi\sin\frac{m\pi x'}{l}=\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\cos m\pi\sin\frac{m\pi x}{n}$$

$$=\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{1^3}\sin\frac{1\pi x}{n} & -\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \frac{1}{2^3}\sin\frac{2\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-2)^3}\sin\frac{(2n-2)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{i^3}(-1)^i\sin\frac{i\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-i)}(-1)^{2n-i}\sin\frac{(2n-i)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)^3}(-1)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi x}{n} & \frac{1}{(n+1)^3}(-1)^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi x}{n}\cdots\cdots \\ -\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{n} & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\begin{pmatrix}\sin\frac{\pi x}{n}\left\{-\frac{1}{1^3}+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}\cdots\cdots\right.\\ \sin\frac{2\pi x}{n}\left\{\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(2n-2)^3}+\frac{1}{(2n-2)^3}\cdots\cdots\right.\\ \vdots\\ \sin\frac{i\pi x}{n}(-1)^i\left\{-\frac{1}{i^3}-\frac{1}{(2n-i)^3}+\frac{1}{(2n+i)}-\frac{1}{(4n-i)}+\cdots\cdots\right.\\ \vdots\\ \sin\frac{(n-1)\pi x}{n}(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{(n-1)^3}-\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(3n-1)}-\cdots\cdots\right.\end{pmatrix}$$

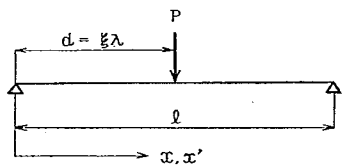
$$=\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i U_i'\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{2M_1}{n}U_i\sin\frac{i\pi x}{n}\cdots\cdots(9)$$

U_i, U_i' は (7), (8) 式の値である。

ii) 傾斜角に関する基礎式

イ) 集中荷重



図—7

図—7 のように支点より d にの距離に集中荷重 P が載荷した場合の支点における傾斜角を求めてみよう。

$$P=\frac{2P}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi d}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

支点より x' 点の傾斜角は次式であたえられる。

$$i=\frac{1}{EI}\cdot\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{2P}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi d}{l}\cos\frac{m\pi x'}{l}$$

従つて両支点では，$x'=0$, $x'=l$ によつて求められる。

$$i\Big|_{x'=0}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{2P}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi d}{l}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{2P}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi\xi}{n}$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{2P}{l}\begin{pmatrix}\frac{1}{1^3}\sin\frac{1\pi\xi}{n} & \frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi\xi}{n}\cdots\cdots\\ \frac{1}{2^3}\sin\frac{2\pi\xi}{n} & \frac{1}{(2n-2)^3}\sin\frac{(2n-2)\pi\xi}{n}\cdots\cdots\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi\xi}{n} & \frac{1}{(2n-i)^3}\sin\frac{(2n-i)\pi\xi}{n}\cdots\cdots\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{(n-1)^3}\sin\frac{(n-1)\pi\xi}{n} & \frac{1}{(n+1)^3}\sin\frac{(n+1)\pi\xi}{n}\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{2P}{l}\sum_{i=1}^{n-1}U_i'\sin\frac{i\pi\xi}{n}=\frac{l^3}{EI\pi^3}\cdot\frac{2P}{n\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}U_i'\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

$$=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}U_i P_i\cdots\cdots(10)$$

$$P_i=\frac{2P}{n}\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

U_i, U_i' は (7), (8) 式の値である。

$$i\Big|_{x'=l}=\frac{2Pl^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\cos m\pi\,\sin\frac{m\pi d}{l}=\frac{2Pl^3}{EI\pi^3}\,\frac{1}{n\lambda}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,U_i'\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

$$=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,U_i\,P_i \qquad (11)$$

$$P_i=\frac{2P}{n}\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

U_i, U_i' は (7), (8) 式の値である。

ロ) 格 点 力

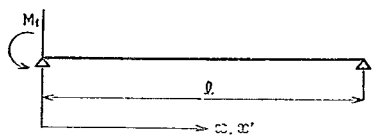
格点力によつて生ずる支点の傾斜角は (10), (11) 式において P_i を (3) 式で定義した $\mathfrak{P}_i$ で置換すればよい。

$$i\Big|_{x'=0}=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}U_i\,\mathfrak{P}_i \qquad (12)$$

$$i\Big|_{x'=l}=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,U_i\,Ol_i \qquad (13)$$

U_i は (7) 式の値である。

ハ) 支点に曲げモーメント M が作用した場合



図—8

図—8 のように支点に M_1 なるモーメントが作用した場合の x' 点における撓みは〔1〕 i) ハ) より次式であたえられる。

$$\eta=-\frac{2M_1l^2}{EI\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi x'}{l}$$

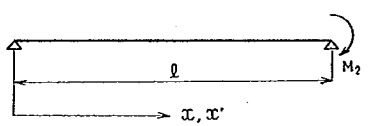
従つて $x'=0$ 及び $x'=l$ の支点における傾斜角は次のようになる。

$$i\Big|_{x'=0}=\frac{d\eta}{dx'}\Big|_{x'=0}=-\frac{2M_1l}{EI\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos\frac{m\pi x'}{l}\Big|_{x'=0}$$

$$=-\frac{2M_1l}{EI\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

$$=-\frac{M_1l}{3EI} \qquad (14)$$

$$i\Big|_{x=l}=\frac{M_1l}{6EI} \qquad (15)$$



図—9

図—9 のように $x'=l$ の支点に M_2 なるモーメントが作用した場合には次のようになる。

$$i\Big|_{x'=0}=-\frac{M_2l}{6EI} \qquad (16)$$

$$i\Big|_{x'=l}=\frac{M_2 l}{3EI} \quad \cdots\cdots (17)$$

iii) 捩れに関する基礎式

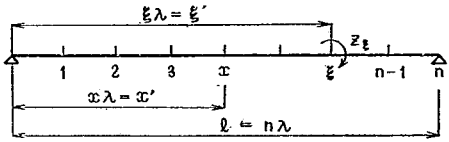


図 — 10

ξ 点に $Z\xi$ なる捩りモーメントが作用せる場合 x 点における捩りモーメント M_t^x は次のようになる。

$$M_t^x=\int_0^{x'}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2Z\xi}{l}\sin\frac{i\pi\xi'}{l}\sin\frac{i\pi x'}{l}dx'$$

捩れ角を θ，桁の捩れ剛度を $I_t G$ とすると

$$M_t^x=I_t G\frac{d\theta}{dx}$$

の関係があるから，

$$\theta_x=\frac{1}{I_t G}\int_0^{x'}\int_0^{x'}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2Z\xi}{l}\sin\frac{i\pi\xi'}{l}\sin\frac{i\pi x'}{l}dx'\,dx'$$

$$=\frac{-1}{I_t G}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{l^2}{m^2\pi^2}\cdot\frac{2Z\xi}{l}\sin\frac{i\pi\xi'}{l}\sin\frac{i\pi x'}{l}$$

$$=-\frac{2lZ\xi}{I_t G\pi^2}\begin{pmatrix}
 & & \frac{1}{(2n)^2}\sin\frac{2n\pi\xi}{n}\sin\frac{2n\pi}{n}x & \\
\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi\xi}{n}\sin\frac{\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-1)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+1)}{n}\pi x\cdots \\
\frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi\xi}{n}\sin\frac{2\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-2)^2}\sin\frac{(2n-2)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-2)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+2)^2}\sin\frac{(2n+2)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+2)}{n}\pi x\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{i^2}\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n} & \frac{1}{(2n-i)^2}\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n-i)}{n}\pi x & \frac{1}{(2n+i)^2}\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi\xi\sin\frac{(2n+i)}{n}\pi x\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(n-1)^2}\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n-1)}{n}\pi x & \frac{1}{(n+1)^2}\sin\frac{(n+1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n+1)}{n}\pi x & \frac{1}{(3n-1)^2}\sin\frac{(3n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(3n-1)}{n}\pi x\cdots \\
\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi\xi}{n}\sin\frac{n\pi x}{n} & & \frac{1}{(3n)^2}\sin\frac{3n}{n}\pi\xi\sin\frac{3n}{n}\pi x\cdots
\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{2lZ\xi}{I_t G\pi^2}\begin{pmatrix}
\sin\frac{\pi\xi}{n}\sin\frac{\pi x}{n}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\cdots\right\} \\
\sin\frac{2\pi\xi}{n}\sin\frac{2\pi x}{n}\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(2n-2)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}+\cdots\cdots\right\} \\
\vdots \\
\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}\left\{\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(2n-i)^2}+\frac{1}{(2n+i)}+\cdots\cdots\right\} \\
\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\xi\sin\frac{(n-1)}{n}\pi x\left\{\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(3n-1)^2}+\cdots\cdots\right\}
\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{2Z\xi}{I_t Gn}\sum_{i=1}^{n-1}\rho_i\sin\frac{i\pi\xi}{n}\sin\frac{i\pi x}{n}$$

$$=\frac{1}{I_t G}\sum_{i=1}^{n-1}Z_i\,\rho_i\sin\frac{i\pi x}{n} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$Z_i=\frac{2Z_\xi}{n}\sin\frac{i\pi\xi}{n}$$

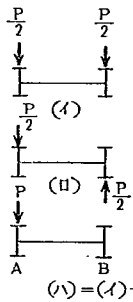
$$\rho_i=-\frac{\lambda n^2}{\pi^2}\left\{\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(2n-i)^2}+\frac{1}{(2n+i)^2}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{\lambda}{2\left(\cos\frac{i\pi}{n}-1\right)} \quad \cdots\cdots(19)$$

〔2〕 基礎方程式の作成

以上の結果を用いて主桁二本，三本の場合の連続格子桁に関する三連力モーメントの定理を求めて見よう。

i）二本主桁の連続格子桁に関する三連力モーメントの定理



A桁に集中荷重 P が載荷せる場合を左図の(イ)(ロ)の重畳せる場合として求める。

(ハ)=(イ)+(ロ)

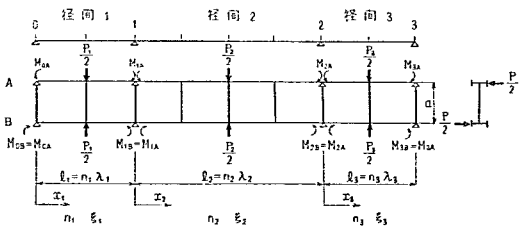
イ）両主桁に対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合

明らかに交点力の部分項

$$\mathfrak{P}_i=0$$

である。

ロ）両主桁に逆対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合



n：各径間の橋桁間数

ξ：各径間に載荷せる荷重Pの載荷点

λ：橋 桁 間 隔

図 — 11

a） 各径間の撓み及び格点力の部分項

径 間 1.

A桁の撓みを δ_{1A} とする。

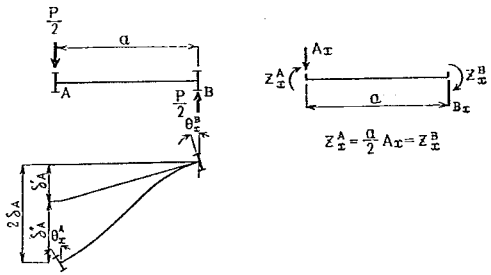
モーメント M_{0A} による撓みは (6)式より $-\frac{2}{n_1EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}M_{0A}\,U_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$

集中荷重 $\frac{P}{2}$ による撓みは (1)式より $\frac{1}{2EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\alpha_{1i}P_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$

格点力による撓みは (5)式より　$$-\frac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\alpha_{1i}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

モーメント M_{1A} による撓みは (9)式より　$$\frac{2}{n_1EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i M_{1A}U_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\delta_{1A}=\frac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1i}+\frac{1}{2}\alpha_{1i}P_{1i}-\alpha_{1i}\mathfrak{N}_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}U_{1i}\right\}\cdots\cdots(20)$$



図—12

図—12は格点 x の断面における荷重と変形状態図で，これから次の関係がえれる。

$$2\delta_{1A}=\delta'_{1A}+\delta_{1A}''\cdots\cdots(21)$$

δ_{1A}：主桁 B の捩れ角によつて生ずる撓み

$$\delta_{1A}'=-a\theta_x^B=-a\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^2}{GI_{1t}^B}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}=-\frac{a^2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}\mathfrak{N}_{1i}}{GI_{1t}^B}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\cdots\cdots(22)$$

δ_{1A}''：横桁の変形によつて生ずる撓み

$$\delta_{1A}''=\frac{a^3}{3EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_i^a\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$=\frac{a^3}{3EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a^3}{4EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$=\frac{a^3}{12EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\cdots\cdots(23)$$

(21)式に(20)，(22)，(23)式を代入すると格点力の部分項がえられる。

$$\frac{2}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1i}+\frac{1}{2}\alpha_{1i}P_{1i}-\alpha_{1i}\mathfrak{N}_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n}M_{1A}U_{1i}\right\}$$

$$=-\frac{a^2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}\mathfrak{N}_{1i}}{GI_{1t}^B}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}+\frac{a^3}{12EI_0}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\mathfrak{N}_{1i}=\frac{\alpha_{1i}P_{1i}-\frac{4}{n_1}M_{0A}U_{1i}+(-1)^i\frac{4}{n_1}M_{1A}U_{1i}}{\frac{a^3}{12}\frac{I_{1A}}{I_{10}}-\frac{a^2}{2}\alpha_{1i}\frac{DI_{1A}}{GI_{1t}^B}+2\alpha_{1i}}$$

$$=H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0A}+(-1)^iR_{1i}M_{1A}\cdots\cdots(24)$$

$$H_{1i}=\frac{\alpha_{1i}}{X_{1i}}\qquad R_{1i}=\frac{U_{1i}4}{X_{1i}n_1}$$

$$X_{1i}=\frac{a^3}{12}\frac{I_{1A}}{I_{10}}-\frac{a^2}{2}\rho_{1i}\frac{EI_{1A}}{GI_{1t}^B}+2\alpha_{1i}$$

径　間　2.

径間2の各桁の撓み式及び格点力の部分項は (20)，(24)式における sufix に次の置換をすればえられる。

$0 \to 1$, $1 \to 2$,

$$\delta_{iA} = \frac{1}{EI_{iA}} \sum_{i=1}^{n_i-1} \sin\frac{i\pi x_2}{n_i} \left\{ -\frac{2}{n_i} M_{1A} U_{1i} + \frac{1}{2} \alpha_{2i} P_{2i} - \alpha_{2i} \mathfrak{A}_{1i} + (-1)^i \frac{2}{n_i} M_{2A} U_{2i} \right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\mathfrak{A}_{2i} = \frac{\alpha_{2i} P_{2i} - \frac{4}{n_2} M_{1A} U_{2i} + (-1)^i \frac{4}{n_2} M_{2A} U_{2i}}{\frac{a^3}{12} \frac{I_{1A}}{I_{20}} - \frac{a^2}{2} \rho_{2i} \frac{EI_{2A}}{GI_{2i}^B} + 2\alpha_{2i}}$$

$$= H_{2i} P_{2i} - R_{2i} M_{1A} + (-1)^i R_{2i} M_{2A} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$H_{2i} = \frac{\alpha_{2i}}{x_{2i}} \qquad R_{2i} = \frac{U_{2iA}}{X_{2i} n_2}$$

$$X_{2i} = \frac{a^3}{12} \frac{I_{1A}}{I_{20}} - \frac{a^2}{2} \rho_{2i} \frac{EI_{1A}}{GI_{2i}^n} + 2\alpha_{2i}$$

b) 支点上の傾斜角

支点 1（図—11. 参照）の傾斜角を径間 1,2 から求め，それぞれ i_{1-}, i_{1+} とすれば支点上の連続条件より次式が成立する。

$$i^A_{1-} = i^A_{1+} \quad \cdots\cdots (7)$$

i^A_{1-} :

M_{0A} による傾斜角は (5)式より $\dfrac{M_{0A} l_1}{6EI_{1A}}$

集中荷重 $\dfrac{P}{2}$ による傾斜角は (11)式より $\dfrac{1}{2EI_{1A}} \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} P_{1i}$

格点力による傾斜角は (13)式より $-\dfrac{1}{EI_{1A}} \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} \mathfrak{A}_{1i}$

モーメント M_{1A} による傾斜角は (17)式より $\dfrac{M_{1A} l_1}{3EI_{1A}}$

$$i^A_{1-} = \frac{1}{EI_{1A}} \left\{ \frac{M_{0A} l_1}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} P_{1i} - \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} \mathfrak{A}_{1i} + \frac{M_{1A} l_1}{3} \right. \quad \cdots\cdots (8)$$

i_{1+} :

前と同様にして求めると次のようになる。

$$i^A_{1+} = \frac{1}{EI_{1A}} \left\{ -\frac{M_{1A} l_2}{3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} P_{2i} - \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} \mathfrak{A}_{2i} - \frac{M_{2A} l_2}{6} \right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

c) 方程式の作成

(7)式に (8)(9)式を代入する。

$$F_A \left\{ \frac{M_{0A} l_1}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} P_{1i} - \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} \mathfrak{A}_{1i} + \frac{M_{1A} l_1}{3} \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{M_{1A} l_2}{3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} P_{2i} - \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} \mathfrak{A}_{2i} - \frac{M_{2A} l_2}{6} \right\}$$

$$F_A = \frac{I_{2A}}{I_{1A}}$$

$$F_A \frac{M_{0A} l_1}{6} + \frac{F_A l_1 + l_2}{3} M_{1A} + \frac{l_2}{6} M_{2A} + \frac{1}{2} F_A \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} P_{1i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} P_{2i}$$

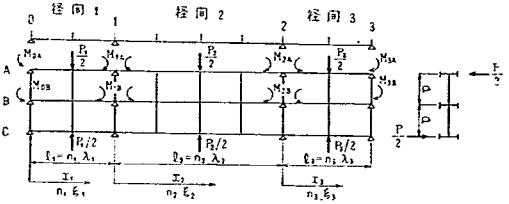
$$- F_A \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} \left\{ H_{1i} P_{1i} - R_{1i} M_{0A} + (-1)^i R_{1i} M_{1A} \right\} + \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} \left\{ H_{2i} P_{2i} - R_{2i} M_{1A} + (-1)^i R_{2A} M_{2A} \right\} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \frac{I_{2A}}{I_{1A}} \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} P_{1i} (1 - 2H_{1i}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} P_{2i} (1 - 2H_{2i}) + M_{0A} \frac{I_{2A}}{I_{1A}} \left\{ -\frac{I_1}{6} + \sum_{i=1}^{n_1-1} (-1)^i U_{1i} R_{1i} \right\}$$

$$+ M_{1A} \left\{ \frac{l_1 \frac{I_{2A}}{I_{1A}} + l_2}{3} - \frac{I_{2A}}{I_{1A}} \sum_{i=1}^{n_1-1} U_{1i} R_{1i} - \sum_{i=1}^{n_2-1} U_{2i} R_{2i} \right\} + M_{2A} \left\{ -\frac{l_2}{6} + \sum_{i=1}^{n_2-1} (-1)^i U_{2i} R_{2i} \right\} = 0 \quad \cdots\cdots (10)$$

ii) 三本主桁の連続格子桁に関する三連力モーメントの定理

イ) 内桁に集中荷重 P が載荷せる場合



図—13

a) 各径間の撓み，及び格点力の部分項

径 間 1. A，B 桁の撓みを δ_{1A}，δ_{1B} とする。

δ_{1A}：

モーメント M_{0A} による撓みは (6)式より　$-\dfrac{2}{n_1 EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1} M_{0A}\,U_{1i}\sin\dfrac{i\pi x_1}{n_1}$

格点力による撓みは (5)式より　$\dfrac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\alpha_{1i}\,\mathfrak{N}_{1i}\sin\dfrac{i\pi x_1}{n_1}$

モーメント M_{1A} による撓みは (9)式より　$\dfrac{2}{n_1 EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i M_{1A}\,U_{1i}\sin\dfrac{i\pi x_1}{n_1}$

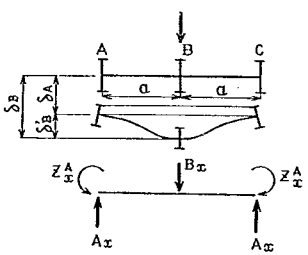
$$\delta_{1A}=-\frac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}\,U_{1i}+\alpha_{1i}\,\mathfrak{N}_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}\,U_{1i}\right\}\quad\cdots\cdots(31)$$

δ_{1B}：

前と同様にして求めると次のようになる。

$$\delta_{1B}=-\frac{1}{EI_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0B}\,U_{1i}-2\alpha_{1i}\,\mathfrak{N}_{1i}+P_{1i}\,\alpha_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n}M_{1B}\,U_{1i}\right\}\quad\cdots(32)$$

次に δ_A と δ_B との関係から格点力の部分項 $\mathfrak{N}_i$ を求める。



図—14

図—14は格点 x の断面における荷重と変形状態図で，これから次の関係がえられる。

$$B_x=2A_x$$

$$\delta_B=\delta_A+\delta_B'\quad\cdots\cdots(33)$$

$$\delta'_B=\frac{a^2}{3EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_{1i}^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\quad\cdots\cdots(34)$$

A主桁と横桁との結合部における主桁と横断の偏差角の関係から次式がえられる。

$$\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_{1i}^A}{GI_{1tA}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}=-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}+\frac{a}{EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_{1i}^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$Z_{1i}^A=\frac{\dfrac{a^2}{2EI_{10}}}{\dfrac{a}{EI_{10}}-\dfrac{\rho_{1i}}{GI_{1tA}}}\mathfrak{N}_{1i}\quad\cdots\cdots(35)$$

I_{1tA}：径間1のA主桁の捩り抵抗モーメント

(33)式に(34)(35)式を代入し，Z_{1t}^{A} に(36)式を置換すると，格点力の部分項がえられる。

$$\frac{1}{EI_{1B}}\left(-\frac{2}{n_1}M_{0B}U_{1t}-2\alpha_{1t}\mathfrak{M}_{1t}+P_{1t}\alpha_{1t}+(-1)^t\frac{2}{n_1}M_{1B}U_{1t}\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1t}+\alpha_{1t}\mathfrak{M}_{1t}+(-1)^t\frac{2}{n_1}M_{1A}U_{1t}\right)\frac{1}{EI_{1A}}+\frac{a^3}{3EI_{10}}\mathfrak{M}_{1t}-\frac{a^2}{2EI_{10}}Z_{1t}^{A}$$

$$\mathfrak{M}_{1t}=\frac{\alpha_{1t}P_{1t}-\frac{2}{n_1}U_{1t}M_{0B}+(-1)^t\frac{2}{n_1}U_{1t}M_{1B}+\frac{2}{n_1}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}U_{1t}M_{0A}-(-1)^t\frac{3}{n_1}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}U_{1t}M_{1A}}{2\alpha_{1t}+\alpha_{1t}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}+\frac{I_{1B}}{3I_{10}}a^3-\frac{a^4I_{1B}}{EI_{10}^2}\Big/\left(4aI_{10}-4\frac{GI_{1tA}}{}\rho_{1t}\right)}$$

$$=H_{1t}P_{1t}-R_{1t}M_{0B}+(-1)^tR_{1t}M_{1B}+R_{1t}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}M_{0A}-(-1)^tR_{1t}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}\quad\cdots\cdots(38)$$

$$H_{1t}=\frac{\alpha_{1t}}{X_{1t}}\qquad R_{1t}=\frac{U_{1t}}{X_{1t}}\frac{2}{n_1}$$

$$X_{1t}=2\alpha_{1t}+\alpha_{1t}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}+\frac{I_{1B}}{3I_{10}}a^3-\frac{a^4I_{1B}}{EI_{10}^2}\Big/\left(4aI_{10}-4\frac{GI_{1tA}}{}\rho_{1t}\right)$$

径　間　2.

径間2の各桁のたわみ式及び格点力の部分項は，(34)(36)式における sufix 0 を1，sufix 1 を 2，に置換すればえられる。

$$\delta_{2A}=\frac{1}{EI_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}\sin\frac{i\pi x_2}{n_2}\left\{-\frac{2}{n_2}M_{1A}U_{2i}+\alpha_{2i}\mathfrak{M}_{2i}+(-1)^i\frac{2}{n_2}M_{2A}U_{2i}\right\}\quad\cdots\cdots(37)$$

$$\delta_{2B}=\frac{1}{EI_{2B}}\sum_{i=1}^{n_2-1}\sin\frac{i\pi x_2}{n_2}\left\{-\frac{2}{n_2}M_{1B}U_{2i}-2\alpha_{2i}\mathfrak{M}_{2i}+P_{2i}\alpha_{2i}+(-1)^i\frac{2}{n_2}M_{2B}U_{2i}\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

$$\mathfrak{M}_{2i}=H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1B}+(-1)^tR_{2i}M_{2B}+R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{1A}-(-1)^tR_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{2A}\quad\cdots\cdots(39)$$

$$H_{2i}=\frac{\alpha_{2i}}{X_{2i}}\qquad R_{2i}=\frac{U_{2i}}{X_{2i}}\frac{2}{n_2}$$

$$X_{2i}=2\alpha_{2i}+\alpha_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}+\frac{I_{2B}}{3I_{20}}a^3-\frac{a^4I_{2B}}{EI_{20}^2}\Big/\left(4aI_{20}-4\frac{GI_{2tA}}{}\rho_{2i}\right)$$

b)　支点上の傾斜角

支点1（図—13参照）の傾斜角を径間 1，2から求めそれぞれ i_{1-}，i_{1+}，とすれば支点上の連続条件より次式が成立する。

A桁について　$i_{1-}^{A}=i_{1+}^{A}$ ……(40)

B桁について　$i_{1-}^{B}=i_{1+}^{B}$ ……(41)

i_{1-}^{A}：

M_{0A} による傾斜角は (15)式より　$\dfrac{M_{0A}l_1}{6EI_{1A}}$

格点力による傾斜角は (13)式より　$\dfrac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}\mathfrak{M}_{1i}$

モーメント M_{1A} による傾斜角は (17)式より　$\dfrac{M_{1A}l_1}{3EI_{1A}}$

$$i_{1-}^{A}=\frac{1}{EI_{1A}}\left\{\frac{M_{0A}l_1}{6}+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}\mathfrak{M}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}\quad\cdots\cdots(42)$$

i_{1+}^{A}：

前と同様にして求めると次のようになる。

$$i_{1+}^{A}=\frac{1}{EI_{2A}}\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\,\mathfrak{N}_{1i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

i_{1-}^{B}：

$$i_{1+}^{B}=\frac{1}{EI_{1B}}\left\{\frac{M_{0B}l_1}{6}+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-2\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\,\mathfrak{N}_{1i}+\frac{M_{1B}l_1}{3}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

i_{1+}^{B}：

$$i_{1+}^{B}=\frac{1}{EI_{2B}}\left\{-\frac{M_{1B}l_2}{3}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}-2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\,\mathfrak{N}_{2i}-\frac{M_{2B}l_2}{6}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

c) 方程式の作成

(10)式に(13)式を代入すると，A桁に関する格子桁三連力モーメントの定理がえられる。

$$F_A\left\{\frac{M_{0A}l_1}{6}+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\,\mathfrak{N}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}=\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\,\mathfrak{N}_{2i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\}$$

$$F_A=\frac{I_{2A}}{I_{1A}}$$

$$F_A\frac{M_{0A}l_1}{6}+\frac{F_Al_1+l_2}{3}M_{1A}+\frac{l_2}{6}M_{2A}+F_A\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\left\{H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0B}\right.$$

$$\left.+(-1)^i R_{1i}M_{1B}+R_{1i}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}M_{0A}-(-1)^i R_{1i}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}M_{1A}\right\}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\left\{H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1B}\right.$$

$$\left.+(-1)^i R_{2i}M_{2B}+R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{1A}-(-1)^i R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{2A}\right\}=0$$

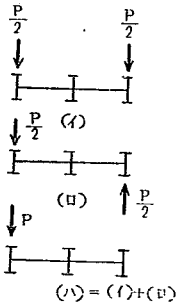
$$-\frac{I_{2A}}{I_{2A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}H_{1i}P_{1i}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}H_{2i}P_{2i}-M_{0A}\left\{\frac{l_1}{6}-\frac{I_{2A}}{I_{1A}}+\frac{I_{2A}I_{1B}}{I_{1A}^2}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}\right\}$$

$$+M_{0B}\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}-M_{1A}\left\{\frac{l_1\frac{I_{2A}}{I_{1A}}+l_2}{3}-\frac{I_{2A}I_{1B}}{I_{1A}^2}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}-\frac{I_{2B}}{I_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{1B}\left\{\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}+\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{2A}\left\{\frac{l_2}{6}+\frac{I_{2B}}{I_{2A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$+M_{2B}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

ハ）外桁に集中荷重 P が載荷せる場合



図—15

外桁に集中荷重 P が載荷せる場合を 図—15の(イ)(ロ)の重量せる場合として求める。

(4)式に(3)，(5)式を代入すると，B桁に関する格子桁三連力モーメントの定理がえられる。

$$F_B\left\{\frac{M_{0B}l_1}{6}+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-2\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\mathfrak{Y}_{1i}+\frac{M_{1B}l_1}{3}\right\}$$

$$=\left\{-\frac{M_{1B}l_2}{3}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}-2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{Y}_{2i}-\frac{M_{2B}l_2}{6}\right\}$$

$$F_B=-\frac{I_{2B}}{I_{1B}}$$

$$F_B\frac{M_{0B}l_1}{6}+\frac{F_Bl_1+l_2}{3}M_{1B}+\frac{l_2}{6}M_{2B}+F_B\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}I'_{2i}$$

$$-2F_B\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\left\{H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0B}+(-1)^i R_{1i}M_{1B}+R_{1i}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}M_{0A}\right.$$

$$\left.-(-1)^i R_{1i}\frac{I_{1B}}{I_{1A}}M_{1A}\right\}+2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\left\{H_{2i}R_{2i}-R_{2i}M_{1B}+(-1)^i R_{2i}M_{1B}\right.$$

$$\left.+R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{1A}-(-1)^i R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}M_{2A}\right\}=0$$

$$-\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}(1-2H_{1i})+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}(1-2H_{2i})+2M_{0A}\frac{I_{2B}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}$$

$$-M_{0B}\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\left\{\frac{I_1}{6}+2\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}\right\}2M_{1A}\left\{\frac{I_{2B}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}+\frac{I_{2B}}{I_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{1B}\left\{\frac{l_1\frac{I_{2B}}{I_{1B}}+l_2}{3}-2\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}-2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}+2M_{2A}\frac{I_{2B}}{I_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}$$

$$-M_{2B}\left\{\frac{l_2}{6}+2\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots(4')$$

a) 両外桁に対称集中荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合

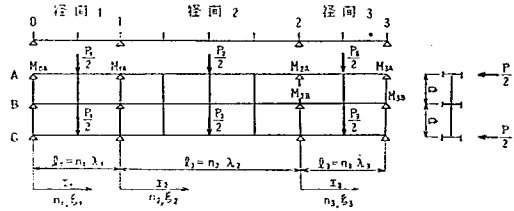


図 — 16

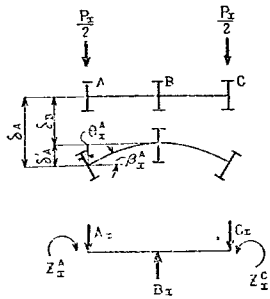
1) 各径間の撓み及び格点力の部分項

径 間 1.

A, B 桁の撓みを δ_{1A}, δ_{1B} とする。

$$\delta_{1A}=\frac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1i}-\alpha_{1i}\mathfrak{N}_{1i}+\frac{1}{2}P_{1i}\alpha_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}U_{1i}\right\}\cdots(49)$$

$$\delta_{1B}=\frac{1}{EI_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0B}U_{1i}+2\alpha_{1i}\mathfrak{N}_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1B}U_{1i}\right\}\cdots(49)$$



図—17は格点 x の断面における荷重と変形状態図でこれから次の関係がえられる。

$$B_x=2A_x$$

$$\delta_A=\delta_B+\delta_A'\cdots(50)$$

図—17

$$\delta_A'=\frac{a^2}{3EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_i\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_i^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\cdots(51)$$

$$\beta_x^A=-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{N}_i\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a}{EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_i^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\theta_x^A=\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^A}{GI_{HA}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

β_x^A と θ_x^A との間には次の関係があるから，これから Z_i^A を求めることができる。

$$\theta_x^A=-\beta_x^A$$

$$\frac{\rho_{1i}Z_i^A}{GI_{1iA}}=\frac{a}{EI_{10}}Z_i^A-\frac{a^2}{2EI_{10}}\mathfrak{N}_{1i}$$

$$\therefore Z_i^A=\frac{\frac{a^2}{2EI_{10}}}{\frac{a}{EI_{10}}-\frac{\rho_{1i}}{GI_{1iA}}}\mathfrak{N}_{1i}\cdots(51)$$

(50)式に，(48)，(49)，(51)式を代入し，Z_i^A を(52)式で置換すると格点力の部分項がえられる。

$$-\frac{1}{I_{1A}}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1i}-\alpha_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{1}{2}P_{1i}\alpha_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}U_{1i}\right\}$$

$$=\frac{1}{I_{1B}}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0B}U_{1i}+2\alpha_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1B}U_{1i}\right\}+\frac{a_3}{3EI_{10}}\mathfrak{A}_{1i}-\frac{a_3}{2EI_{10}}Z_i^A$$

$$\mathfrak{A}_{1i}=\frac{-\frac{1}{2}P_{1i}\alpha_{1i}-\frac{2}{n_1}U_{1i}M_{0A}+(-1)^i\frac{2}{n_1}U_{1i}M_{0A}+\frac{2}{n}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}U_{1i}M_{1B}-(-1)^i\frac{2}{n_1}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}U_{1i}M_{1B}}{\alpha_{1i}+2\alpha_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}+\frac{a^3I_{1A}}{3I_{10}}-\frac{a^4I_{1A}}{EI_{10}^2}}$$

$$4aI_{10}-4\frac{}{GI_{1tA}}\rho_{1i}$$

$$=-\frac{1}{2}H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0A}+(-1)^iR_{1i}M_{1A}+R_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{0B}-(-1)^iR_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{1B}\quad\cdots\cdots(53)$$

$$H_{1i}=\frac{\alpha_{1i}}{X_{1i}}\qquad R_{1i}=\frac{U_{1i}2}{X_{1i}n_1}$$

$$X_{1i}=\alpha_{1i}+2\alpha_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}+\frac{a^3I_{1A}}{3I_{10}}-\frac{a^4I_{1A}}{EI_{10}^2}$$

$$4aI_{10}-4\frac{}{GI_{1tA}}\rho_{1i}$$

径 間 2.

$$\delta_{2A}=\frac{1}{EI_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}\sin\frac{i\pi x_2}{n_2}\left\{-\frac{2}{n_2}M_{1A}U_{2i}-\alpha_{2i}\mathfrak{A}_{2i}+\frac{1}{2}P_{2i}\alpha_{2i}+(-1)^i\frac{2}{n_2}M_{2A}U_{2i}\right\}\cdots(54)$$

$$\delta_{2B}=\frac{1}{EI_{2B}}\sum_{i=1}^{n_2-1}\sin\frac{i\pi x_2}{n_2}\left\{-\frac{2}{n_2}M_{1B}U_{2i}+2\alpha_{2i}\mathfrak{A}_{2i}+(-1)^i\frac{2}{n_2}M_{2B}U_{2i}\right\}\quad\cdots\cdots(55)$$

$$\mathfrak{A}_{2i}=-\frac{1}{2}H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1A}+(-1)^iR_{2i}M_{2A}+R_{2i}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}M_{1B}-(-1)^iR_{2i}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}M_{2B}\quad\cdots\cdots(56)$$

$$H_{2i}=\frac{\alpha_{2i}}{X_{2i}}\qquad R_{2i}=\frac{U_{2i}2}{X_{2i}n_2}$$

$$X_{2i}=\alpha_{2i}+2\alpha_{2i}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}+\frac{a^3I_{2A}}{3I_{20}}-\frac{a^4I_{2A}}{EI_{20}^2}$$

$$4aI_{20}-4\frac{}{GI_{2tA}}\rho_{2i}$$

2) 支点上の傾斜角

支点 1（図—16参照）の傾斜角を径間 1，2，から求め，それぞれ i_{1-}，i_{1+} とすれば，支点上の連続条件より次式が成立する。

A 桁について　$i_{1-}^A=i_{1+}^A$ ……(57)

B 桁について　$i_{1-}^B=i_{1+}^B$ ……(58)

i_{1-}^A：

$$i_{1-}^A=\frac{1}{EI_{1A}}\left\{\frac{M_{0A}l_1}{6}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}P_{1i}-\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}\quad\cdots(59)$$

i_{1+}^A：

$$i_{1+}^A=\frac{1}{EI_{2A}}\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{A}_{2i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\}\quad\cdots\cdots(60)$$

i_{1-}^B：

$$i_{1-}^B=\frac{1}{EI_{1B}}\left\{\frac{M_{0B}l_1}{6}+2\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{M_{1B}l_1}{3}\right\}\quad\cdots\cdots(61)$$

i_{1+}^B：

$$i_{1+}^B=\frac{1}{EI_{2B}}\left\{-\frac{M_{1B}l_2}{3}+2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{A}_{2i}-\frac{M_{2B}l_2}{6}\right\}\quad\cdots\cdots(62)$$

3) 方程式の作成

(57)式に(59)，(60)式を代入する。

$$F_A\left\{\frac{M_{0A}l_1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\mathfrak{M}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}$$

$$=\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{M}_{2i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\}$$

$$F_A=\frac{I_{2A}}{I_{1A}}$$

$$F_A\frac{M_{0A}l_1}{6}+\frac{F_Al_1+l_2}{3}M_{1A}+\frac{l_2}{6}M_{2A}+\frac{1}{2}F_A\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}$$

$$-F_A\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\left\{\frac{1}{2}H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0A}+(-1)^i R_{1i}M_{1A}+R_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{0B}\right\}-(-1)^i R_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{1B}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\left\{\frac{1}{2}H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1A}+(-1)^i R_{2i}M_{2A}+R_{2i}\frac{I_{1A}}{I_{2B}}M_{1B}-(-1)^i R_{2i}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}M_{2B}\right\}=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}(1-H_{1i})+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}(1-H_{2i})-M_{0A}\frac{I_{2A}}{I_{1A}}$$

$$\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}\right\}+M_{0B}\frac{I_{2A}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}-M_{1A}\left\{\frac{l_1\frac{I_{2A}}{I_{1A}}+l_2}{3}\right.$$

$$\left.-\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{1B}\left\{\frac{I_{2A}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}+\frac{I_{2A}}{I_{2B}}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{2A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}\right\}+M_{2B}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}=0 \quad \cdots\cdots (63)$$

(58)式に(61)，(62)式を代入する。

$$F_B\left\{\frac{M_{0B}l_1}{6}+2\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\mathfrak{M}_{1i}+\frac{M_{1B}l_1}{3}\right\}$$

$$=\left\{\frac{M_{1B}l_2}{3}+2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{M}_{2i}-\frac{M_{2B}l_2}{6}\right\}$$

$$F_B=\frac{I_{2B}}{I_{1B}}$$

$$F_B\frac{M_{0B}l_1}{6}+\frac{F_Bl_1+l_2}{3}M_{1B}+\frac{l_2}{6}M_{2B}+2F_B\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\left\{\frac{1}{2}H_{1i}P_{1i}\right.$$

$$\left.-R_{1i}M_{0A}+(-)^i R_{1i}M_{1A}+R_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{0B}-(-1)^i R_{1i}\frac{I_{1A}}{I_{1B}}M_{1B}\right\}-2\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}$$

$$\left\{\frac{1}{2}H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1A}+(-1)^i R_{2i}M_{2A}+R_{2i}\frac{I_{2A}}{I_{2B}}M_{1B}-(-1)^i R_{2i}\frac{I_{2B}}{I_{2B}}M_{2B}\right\}=0$$

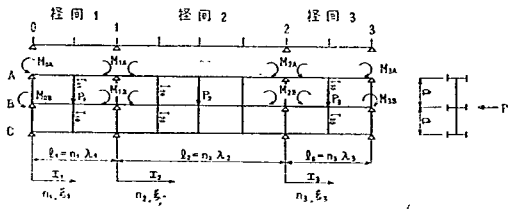
$$-\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}H_{1i}P_{1i}+\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{2i}H_{2i}P_{2i}+2M_{0A}\frac{I_{2B}}{I_{2B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}$$

$$-M_{0B}\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\left\{\frac{l_1}{6}+2\frac{I_{1A}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}\right\}-2M_{1A}\left\{\frac{I_{2B}}{I_{1B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{1B}\left\{\frac{l_1\frac{I_{2B}}{I_{1B}}+l_2}{3}-2\frac{I_{2B}I_{1A}}{I_{1B}^2}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}-2\frac{I_{2A}}{I_{2B}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{2i}R_{1i}\right\}+2M_{2A}\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}$$

$$-M_{2B}\left\{\frac{l_2}{6}+2\frac{I_{2A}}{I_{2B}}\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots (64)$$

b) 両外桁に逆対称荷重 $-\frac{P}{2}$ が載荷せる場合



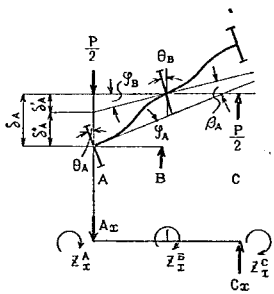
図—18

1) 各径間の撓み及び格点力の部分項

径　間 1.

A桁の撓みを δ_{1A} とする。

$$\delta_{1A}=\frac{1}{EI_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}\,U_{1i}-\alpha_{1i}\,\mathfrak{A}_{1i}+\frac{1}{2}P_{1i}\,\alpha_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}\,U_{1i}\right\}\quad\cdots\cdots\text{(5)}$$



図—19は格点 x の断面における荷重と変形状態図でこれから次の関係がえられる。

$$A_x = C_x$$
$$Z_x^A = Z_x^O$$

図—19

$$\varphi_B=-\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^B}{GI_{1tB}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\delta_A'=a\varphi_B=-a\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^B}{GI_{1tB}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\delta_A''=\frac{a^3}{3EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{A}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_i^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$Z_i^B=2\,(a\cdot\mathfrak{A}_{1i}-Z_i^A)$$

$$\theta_A=\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^A}{GI_{1tA}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\theta_B=\sum_{i=1}^{n_1-1}\frac{\rho_{1i}Z_i^B}{GI_{1tA}}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$$\beta_A=\frac{a^2}{2EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}\mathfrak{A}_{1i}\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}-\frac{a}{EI_{10}}\sum_{i=1}^{n_1-1}Z_i^A\sin\frac{i\pi x_1}{n_1}$$

$\theta_A=\theta_B-\beta_A$ の関係があるから

$$\frac{\rho_{1i}Z_i^A}{GI_{1tA}}=-\frac{\rho_{1i}}{GI_{1tB}}(2a\,\mathfrak{A}_{1i}-2Z_i^A)-\frac{a^2}{2EI_{10}}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{a}{EI_{10}}Z_i^A$$

$$Z_i^A=\frac{\left(\frac{2a}{GI_{1tB}}\rho_{1i}-\frac{a^2}{2EI_{10}}\right)\mathfrak{A}_{1i}}{\frac{\rho_{1i}}{GI_{1tA}}+\frac{2\rho_{1i}}{GI_{1tB}}-\frac{a}{EI_{10}}}=\frac{\left(2a\,\rho_{1i}\frac{EI_{1tA}}{GI_{1tB}}-\frac{a^2}{2}\frac{I_{1tA}}{I_{10}}\right)\mathfrak{A}_{1i}}{\rho_{1i}\frac{E}{G}+2\rho_{1i}\frac{E}{G}\frac{I_{1tA}}{I_{1tB}}-a\frac{I_{1tA}}{I_{10}}}$$

$$=L_{1i}\,\mathfrak{A}_{1i}$$

$\delta_A=\delta_A'+\delta_A''$ の関係に以上の結果を代入すれば格点力の部分項がえられる。

$$\frac{1}{I_{1A}}\left\{-\frac{2}{n_1}M_{0A}U_{1i}-\alpha_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{1}{2}P_{1i}\alpha_{1i}+(-1)^i\frac{2}{n_1}M_{1A}U_{1i}\right\}$$

$$=-a\frac{E\rho_{1i}}{GI_{1tB}}2(a\cdot\mathfrak{A}_{1i}-Z_i^A)+\frac{a^3}{3I_{10}}\mathfrak{A}_{1i}-\frac{a^2}{2I_{10}}Z_i^A$$

$$\mathfrak{A}_{1i}=\frac{\frac{1}{2}P_{1i}\alpha_{1i}-\frac{2}{n_1}U_{1i}M_{0A}+(-1)^i\frac{2}{n_1}U_{1i}M_{1A}}{\alpha_{1i}+\frac{a^3I_{1A}}{3I_{10}}-2a^2\frac{EI_{1A}}{GI_{1tB}}\rho_{1i}+\left(2a\frac{EI_{1A}}{GI_{1tB}}\rho_{1i}-\frac{a_2I_{1A}}{ZI_{10}}\right)L_{1i}}$$

$$=\frac{1}{2}H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{0A}+(-1)^iR_{1i}M_{1A}\cdots\cdots(66)$$

$$L_{1i}=\frac{2a\rho_{1i}\frac{EI_{1tA}}{GI_{1tB}}-\frac{a^2}{2}\frac{I_{1tA}}{I_{10}}}{\rho_{1i}\frac{E}{G}+2\rho_{1i}\frac{E}{G}\frac{I_{1tA}}{I_{1tB}}-a\frac{I_{1tA}}{I_{10}}}$$

$$H_{1i}=\frac{\alpha_{1i}}{X_{1i}}\qquad R_{1i}=\frac{U_{1i}}{X_{1i}}\frac{2}{n_1}$$

$$X_{1i}=\alpha_{1i}+\frac{a^3I_{1A}}{3I_{10}}-2a^2\frac{EI_{1A}}{GI_{1tB}}\rho_{1i}+\left(2a\frac{EI_{1A}}{GI_{1tB}}\rho_{1i}-\frac{a^2I_{1A}}{2I_{10}}\right)L_{1i}$$

径　間　2.

$$\delta_{2A}=\frac{1}{EI_{2A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}\sin\frac{i\pi x_2}{n_2}\left\{-\frac{2}{n_2}M_{1A}U_{2i}-\alpha_{2i}\mathfrak{A}_{2i}+\frac{1}{2}P_{2i}\alpha_{2i}+(-1)^i\frac{2}{n_2}M_{2A}U_{2i}\right.\cdots\cdots(67)$$

$$\mathfrak{A}_{2i}=\frac{1}{2}H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1A}+(-1)^iR_{1i}M_{2A}\cdots\cdots(68)$$

$$L_{2i}=\frac{2a\rho_{2i}\frac{EI_{2tA}}{GI_{2tB}}-\frac{a^2I_{2tA}}{2I_{20}}}{\rho_{2i}\frac{E}{G}+2\rho_{2i}\frac{EI_{2tA}}{GI_{2tB}}-a\frac{I_{2tA}}{I_{20}}}$$

$$H_{2i}=\frac{\alpha_{2i}}{X_{2i}}\qquad R_{2i}=\frac{U_{2i}}{X_{2i}}\frac{2}{n_2}$$

$$X_{2i}=\alpha_{2i}+\frac{a^3I_{2A}}{3I_{20}}-2a^2\frac{EI_{2A}}{GI_{2tB}}\rho_{2i}+\left(2a\frac{EI_{2A}}{GI_{2tB}}\rho_{2i}-\frac{a^2I_{2A}}{2I_{20}}\right)L_{2i}$$

2)　支点上の傾斜角

支点1（図—18）の傾斜角を径間1，2から求め，それぞれi_{1-}，i_{1+}，とすれば，支点上の連続条件より次式が成立する。

$$A\text{桁について}\quad i_{1-}^A=i_{1+}^A\cdots\cdots(69)$$

i_{1-}^A：

$$i_{1-}^A=\frac{1}{EI_{1A}}\left\{\frac{M_{0A}l_1}{6}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}P_{1i}-\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^iU_{1i}\mathfrak{A}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}\cdots\cdots(70)$$

i_{1+}^A：

$$i_{1+}^A=\frac{1}{EI_{2A}}\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{A}_{2i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\}\cdots\cdots(71)$$

3)　方程式の作成

(69)式に(70)，(71)式を代入する。

$$F_A\left\{\frac{M_{OA}l_1}{6}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\mathfrak{N}_{1i}+\frac{M_{1A}l_1}{3}\right\}$$

$$=\left\{-\frac{M_{1A}l_2}{3}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{N}_{2i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\mathfrak{N}_{2i}-\frac{M_{2A}l_2}{6}\right\}$$

$$F_A=\frac{I_{2A}}{I_{1A}}$$

$$F_A\frac{M_{OA}l_1}{6}+\frac{F_Al_1+l_2}{3}M_{1A}+\frac{l_2}{6}M_{2A}+\frac{1}{2}F_A\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}$$

$$-F_A\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}\left\{\frac{1}{2}H_{1i}P_{1i}-R_{1i}M_{OA}+(-1)^i R_{1i}M_{1A}\right\}+\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}\left\{\frac{1}{2}H_{2i}P_{2i}-R_{2i}M_{1A}\right.$$

$$\left.+(-1)^i R_{2i}M_{2A}\right\}=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{1i}P_{1i}(1-H_{1i})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}P_{2i}(1-H_{2i})-M_O\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\left\{\frac{I_1}{6}\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1-1}(-1)^i U_{1i}R_{1i}-M_{1A}\left\{\frac{l_1\frac{I_{1A}}{I_{1A}}+l_2}{3}-\frac{I_{2A}}{I_{1A}}\sum_{i=1}^{n_1-1}U_{1i}R_{1i}-\sum_{i=1}^{n_2-1}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{2A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{i=1}^{n_2-1}(-1)^i U_{2i}R_{2i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots (22)$$

〔3〕 数 値 計 算

図−1,2 の試験桁につき Ⅱ〔2〕で求めた理論式により各格点に集中荷重 $P=22kg$ が載荷された場合の各格点のモーメント，撓みを求める。

計算に必要な諸数値

主桁はいずれも等断面であり，且つ横桁も等断面である。

主桁の断面二次モーメント	$I_A=I_B=I_C=0.3085\ cm^4$
横桁の断面二次モーメント	$I_0=0.054675\ cm^4$
主桁の捩み係数	$I_t=0.28065\ cm^4$
鋼のヤング率	$E=2.1\times10^6\ kg/cm^2$
鋼のせん断弾性係数	$G=8.1\times10^5\ kg/cm^2$
支間	$l_1=l_3=40\ cm$　$l_2=80\ cm$
横桁間隔	$\lambda=20\ cm$
主桁間隔	$a=10\ cm$

(2), (7), (9) 式であたえられる α_t, U_t, ρ_t の値は附表に示してある。

i）二本主桁の場合の数値計算

イ）両主桁に対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合

明らかに交点力の部分項 $\mathfrak{N}_i=0$ である。

従つて支点モーメントは次のようになる。

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

$M_{1A}=M_{2A}=M_{1B}=M_{2B}=3.75P$

表−1

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

$M_{1A}=M_{1B}=3.75\ P$
$M_{2A}=M_{2B}=1.875P$

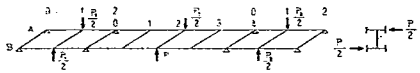
表−2

左径間 $j=1$ に載荷した場合

$$M_{1A}=M_{1B}=1.40625P$$
$$M_{2A}=M_{2B}=-0.46875P$$

表—3

ロ）両主桁に逆対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合



図—20

3径間であるから (a) 式の他に同式の sufix に次の変換 0→1　1→2, 1　2→3 を行つた式からなる二元連立方程式を解くことにより未知数 M_{1A}, M_{2A} がえられる。

(a) 式から

$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n_1-1}(-1)^t U_{1t}P_{1t}(1-2H_{1t})-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n_2-1}U_{2t}P_{2t}(1-2H_{2t})+M_{1A}\left\{\frac{l_1+l_2}{3}-\sum_{t=1}^{n_1-1}U_{1t}R_{1t}-\sum_{t=1}^{n_2-1}U_{2t}R_{2t}\right\}+M_{2A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{t=1}^{n_2-1}(-1)^t U_{2t}R_{2t}\right\}=0 \quad\cdots\cdots(73)$$

(a) 式の sufix の変換から

$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n_2-1}(-1)^t U_{2t}P_{2t}(1-2H_{2t})-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n_3-1}U_{3t}P_{3t}(1-2H_{3t})+M_{1A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{t=1}^{n_2-1}(-1)^t U_{2t}R_{2t}\right\}+M_{2A}\left\{\frac{l_2+l_3}{3}-\sum_{t=1}^{n_2-1}U_{2t}R_{2t}-\sum_{t=1}^{n_3-1}U_{3t}R_{3t}\right\}=0 \quad\cdots\cdots(74)$$

表—4

α_{it}, ρ_{it}, U_{it} の値

	i	1	2	3
1	$\alpha_{1t}=\alpha_{3t}$	1333.33		
2	α_{2t}	21037.6	1333.33	295.768
3	$\rho_{1t}=\rho_{3t}$	−10.000		
4	ρ_{2t}	−34.142	−100.00	−5.8579
5	$U_{1t}=U_{3t}$	100.000		
6	U_{2t}	824.268	100.005	24.271

X_{1t},　X_{2t},　X_{3t} の計算

$$X_{1t}=\frac{a^2}{12}\cdot\frac{I_{1A}}{I_{10}}-\frac{a^2}{2}\rho_{1t}\frac{EI_{1A}}{GJ_{1t}^R}+2\alpha_{1t}$$

$$=489.026-148.621\rho_{1t}+2\alpha_{1t}$$

表—5

	i	1	2	3
1	$X_{1t}=X_{3t}$	4641.9		
2	X_{2t}	47638.5	4641.90	1951.16
3	$H_{1t}=\frac{\alpha_{1t}}{X_{1t}}=H_{3t}$	0.287238		
4	$R_{1t}=\frac{U_{1t}4}{X_{1t}2}=R_{3t}$	0.043086		
5	$H_{2t}=\frac{\alpha_{2t}}{X_{2t}}$	0.441609	0.287238	0.151586
6	$R_{2t}=\frac{U_{2t}4}{X_{2t}4}$	0.0173026	0.021544	0.0124395

a) 支点モーメント M_{1A}, M_{2A} の計算

中央径間 $j=2$ に載荷した場合（図—20参照）

対称性から $M_{1A}=M_{2A}$ となるから (23) 式から求めることができる。

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3-1}\frac{2}{4}P\sin\frac{2i\pi}{4}U_{2i}(1-2H_{1i})+M_{1A}\left\{\frac{40+80}{3}-100\times0.043086-\sum_{i=1}^{3}U_{1i}R_{2i}\right\}$$

$$+M_{2A}\left\{\frac{80}{6}+\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i}U_{2i}R_{2i}\right\}=0$$

上式に表—4.5 の値を代入して整理すると，

$$18.9730M_{1A}+0.923916M_{2A}=19.8366P$$

となり，$M_{1A}=M_{2B}$ を考慮して解くと，

表—6

$M_{1A}=M_{2A}=0.99697P$

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

(23) (24) 式に表—4,5 の値及び $P_{2i}=\frac{2}{4}P\sin\frac{i\pi}{4}$ を代入して整理すると次の二元連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}18.9730\quad M_1+\ 0.923961M_2&=30.6451P\\0.923916M_1+18.9730\quad M_2&=\ 9.3678P\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(25)$$

上式を解くと不静定モーメントがえられる。

表—7

$M_{1A}=1.59493\ P$
$M_{2A}=0.416036P$

左径間 $j=1$ に載荷した場合

(23), (24) 式において $P_{1i}=\frac{2}{4}P\sin\frac{i\pi}{4}$ を代入して連立方程式を作成すると，(25) 式の右辺の P 項のみをが変化するだけでこれを解いて不静定モーメントを求めると次のようになる。

表—8

$M_{1A}=1.12406P$
$M_{2A}=-0.05476P$

b) 格点力の計算

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

(24), (26) 式に表—4,5,6 の値を代入して格点力の部分項 $\mathfrak{A}_i$ を求め (4) 式により格点力 A_i を求める。

表—9

	i /	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1i}$	$-0.042955P$		
2	A_{1i}	$-0.042955P$		
3	$\mathfrak{A}_{2i}$	$0.186304P$	0	$-0.100596P$
4	A_{2i}	$0.060605P$	$0.286900P$	$0.060605P$

表—10

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

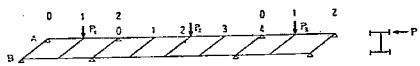
	i /	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1i}$	$-0.068719P$		
2	A_{1i}	$-0.068719P$		
3	$\mathfrak{A}_{2i}$	$-0.121338P$	$0.118221P$	$0.028578P$
4	A_{2i}	$0.224228P$	$0.09276P$	$-0.012215P$
5	$\mathfrak{A}_{3i}$	$-0.017925P$		
6	A_{3i}	$-0.017925P$		

表—11

左径間 $j=1$ に載荷した場合

		1	2	3
1	$\mathfrak{M}_{1i}$	$0.238807P$		
2	A_{1i}	$0.238807P$		
3	$\mathfrak{M}_{2i}$	$0.018502P$	$-0.025397P$	$-0.013301P$
4	Aj_3	$0.047885P$	$0.005200P$	$0.002908P$
5	$\mathfrak{M}_{3}i$	$0.002360P$		
6	A_3i	$0.002360P$		

ハ）A 桁に集中荷重 P が載荷せる場合



図—21

同じ荷重状態に対する (イ), (ロ) の場合につき重畳すれば求めることができる。

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

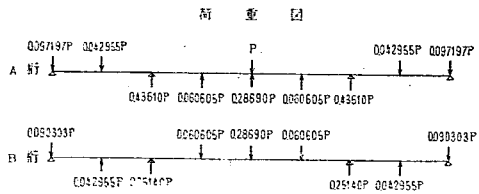
支点モーメント

表—1 と表—6 の値を重畳すればよい。

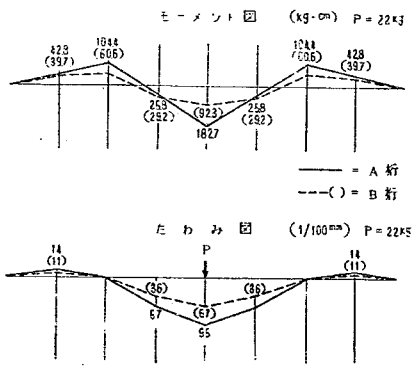
表—12

$$M_{1A}=M_{2A}=4.74697P$$
$$M_{1B}=M_{2B}=2.75303P$$

格点力は表—9から得られる。



図—22　A, B 桁の荷重，モーメント図，撓み図

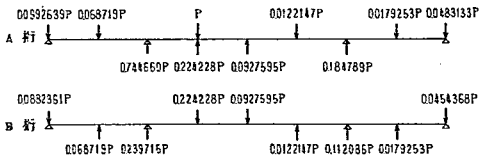


図—23

中央径間 j＝1 に載荷した場合

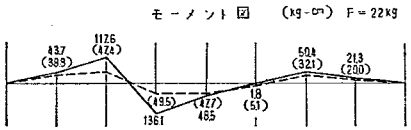
支矢モーメントは表－2.7 から格矢力は表－10 から得られる

荷重図

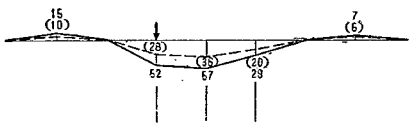


図—23—1

モーメント図 (kg-cm) P＝22kg



たわみ図 (1/100mm) P＝22kg

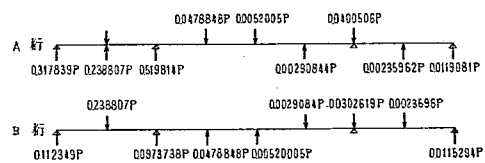


図—23—2

左径間 j＝1 に載荷した場合

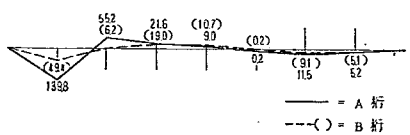
支矢モーメントは表－3.8 から格矢力は表－11 から得られる

荷重図

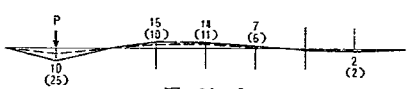


図—24—1

モーメント図 (kg-cm) P＝22kg



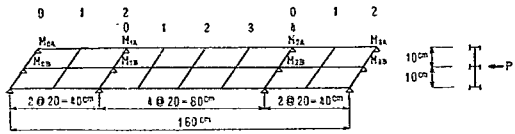
たわみ図 (1/100mm) P＝22kg



図—24—2

ii) 三本主桁の場合の数値計算

イ) 内桁に集中荷重 P が載荷せる場合



図—25

3径間であるから (46), (47) 式の他に同式の sufix に次の変換，$0 \to 1$，$1 \to 2$，$2 \to 3$ を行つた2式からなる4元連立方程式を解くことにより未知数 M_{1A}, M_{1B}, M_{2A}, M_{2B} がえられる。

(46) 式から

$$U_{1i}H_{1i}P_{1i}+\sum_{i=1}^{3}U_{1i}H_{2i}P_{2i}-M_{1A}\left\{\frac{l_1+l_2}{3}-U_{1i}R_{1i}-\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{1B}\left\{U_{1i}R_{1i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{2A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{1i}\right\}+M_{2B}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}=0 \quad \cdots\cdots(76)$$

(46) 式の sufix の変換から

$$-\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}H_{2i}P_{2ii}+U_{3i}H_{3i}P_{3i}-M_{1A}\left\{\frac{l_2}{6}+\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}P_{2i}\right\}+M_{1B}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}k_{1i}$$

$$-M_{2A}\left\{\frac{l_2+l_3}{3}-\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}-U_{3i}R_{3i}\right\}-M_{2B}\left\{\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}+U_{3i}R_{3i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots(77)$$

(47) 式から

$$U_{1i}P_{1i}(1-2H_{1i})+\sum_{i=1}^{3}U_{2i}P_{2i}(1-2H_{2i})-2M_{1A}\left\{U_{1i}R_{1i}+\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}$$

$$-M_{1B}\left\{\frac{l_1+l_2}{3}-2U_{1i}R_{1i}-2\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}+2M_{2A}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}$$

$$-M_{2B}\left\{\frac{l_2}{6}+2\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots(78)$$

(47) 式の sufix の変換から

$$-\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}P_{2i}(1-2H_{2i})+U_{3i}P_{3i}(1-2H_{3i})+2M_{1A}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}$$

$$-M_{1B}\left\{\frac{l_2}{6}+2\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}\right\}-2M_{2A}\left\{\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}+U_{3i}R_{3i}\right\}$$

$$-M_{2B}\left\{\frac{l_2+l_3}{3}-2\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}-2U_{3i}R_{3i}\right\}=0 \quad \cdots\cdots(79)$$

α_{1i}, ρ_{1i}, U_{1i} の値

表—13

	i	1	2	3
1	$\alpha_{1i}=\alpha_{3i}$	1333.33		
2	α_{2i}	21037.6	1333.33	295.765
3	$\rho_{1i}=\rho_{3i}$	−10.000		
4	ρ_{2i}	−34.142	−10.000	−5.8579
5	$U_{1i}=U_{3i}$	160.000		
6	U_{2i}	824.268	100.005	24.271

X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} の計算

$$X_{1i}=3\alpha_{1i}+\frac{I_B}{3I_0}a^3-\frac{a^4I_B}{EI_0^2}\Big/4aI_0-4\frac{a^4I_B}{GI_t}\rho_i$$

$$=3\alpha_i+1959.76-\frac{3208.5}{2.1870-0.110776\,\rho_i}$$

表—14

	i	1	2	3
1	$X_{1i}=X_{3i}$	4985.93		
2	X_{2i}	64535.0	4985.93	1715.68
3	$H_{1i}=\frac{\alpha_{1i}}{X_{1i}}=H_{3i}$	0.267419		
4	$R_{1i}=\frac{U_{1i}2}{X_{1i}2}=R_{3i}$	0.0200564		
5	$H_{2i}=\frac{\alpha_{2i}}{X_{2i}}$	0.325987	0.267419	0.172391
6	$R_{2i}=\frac{U_{2i}2}{X_{2i}4}$	0.00638621	0.0100287	0.00707341

a) 支点モーメント M_{1A}, M_{2A}, M_{1B}, M_{2B} の計算

中央径間 $j=2$ に載荷した場合（図—25参照）

対称性から (76), (78) 式を連立させればよい。

(76) 式から

$$\sum_{i=1}^{3}U_{2i}H_{1i}\frac{2}{4}P\sin\frac{2i\pi}{4}-M_{1A}\left\{\frac{40+80}{3}-100\times0.0200564-\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{1B}\left\{100\right.$$

$$\left.\times0.0200564+\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{2A}\left\{\frac{80}{6}+\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}\right\}+M_{2B}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}=0$$

(78) 式から

$$\sum_{i=1}^{3}U_{2i}\frac{2}{4}\sin\frac{2i\pi}{4}(1-2H_{1i})-2M_{1A}\left\{100\times0.0200564+\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}-M_{1B}\left\{\frac{40+80}{3}\right.$$

$$\left.-2\times100\times0.0200564-2\sum_{i=1}^{3}U_{2i}R_{2i}\right\}+2M_{2A}\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}-M_{2B}\left\{\frac{80}{6}+2\sum_{i=1}^{3}(-1)^iU_{2i}R_{2i}\right\}=0$$

上式に表—13, 14 の値を代入して整理すると，

$$\left\{\begin{array}{l}-31.5558M_{1A}-8.44419M_{1B}-8.90062M_{2A}-4.43271M_{2B}=-132.258P\\-16.8884M_{1A}-23.1116M_{1B}-8.86542M_{2A}-4.46791M_{2B}=-135.482P\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(80)$$

$M_{1A}=M_{2A}$, $M_{1B}=M_{2B}$ を考慮して解くと，

表—15

$M_{1A}=M_{2A}=2.42689P$
$M_{1B}=M_{2B}=2.64617P$

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

(76), (77), (78), (79) 式に表—13, 14 の値及び $P_{2i}=\frac{2}{4}P\sin\frac{i\pi}{4}$ を代入して整理すると次の4元連立方程式がえられる。

$$\left\{\begin{array}{l}-31.5558\ M_{1A}-8.44419M_{1B}-9.90062M_{2A}-4.43271M_{2B}=-109.851\ P\\8.90062M_{1A}+4.43271M_{1B}+31.5558\ M_{2A}+8.44419M_{2B}=83.1078P\\-16.8884\ M_{1A}-23.1116\ M_{1B}-8.86542M_{2A}-4.46791M_{2B}=-130.305\ P\\8.86542M_{1A}+4.46791M_{1B}+16.8884\ M_{2A}+23.1116\ M_{2A}=83.7861P\end{array}\right\}\cdots\cdots(81)$$

上式を解くと不静定モーメントが得られる。

表—16

$M_{1A}=2.03525P$	$M_{1B}=3.42967P$
$M_{2A}=1.23569P$	$M_{2B}=1.27859P$

左径間 $j=1$ に載荷した場合

(76), (77), (78), (79) 式において $P_{it}=\frac{2}{2}P\sin\frac{i\pi}{2}$ を代入して連立方程式を作成すると (81) 式の右辺の P 項のみが変化するだけで，これを解いて不静定モーメントを求めると次のようになる。

表—17

$M_{1A}=0.488104P$	$M_{1B}=1.83629d$
$M_{2A}=-0.311423P$	$M_{2B}=-0.314654P$

ロ）モーメント及び撓みの計算

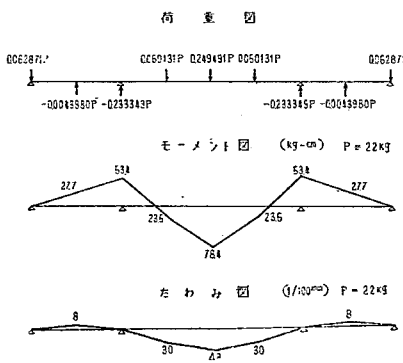
中央径間 $j=2$ に載荷した場合

(83), (84) 式に表—13,14,15 の値を代入して格点力の部分項 $\mathfrak{A}_{it}$ を求め (4) 式により格点力 A_{it} を求める。

表 — 18

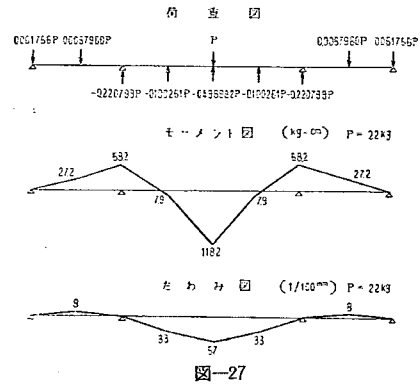
	i	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1t}$	$-0.00439801\,P$		
2	A_{1t}	$-0.00439801\,P$		
3	$\mathfrak{A}_{2t}$	$0.160193\ P$	0	$-0.0892976\ P$
4	A_{2t}	$0.0501308\ P$	$0.249491\ P$	$0.0501308\ P$

A, C 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



図—26

B 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



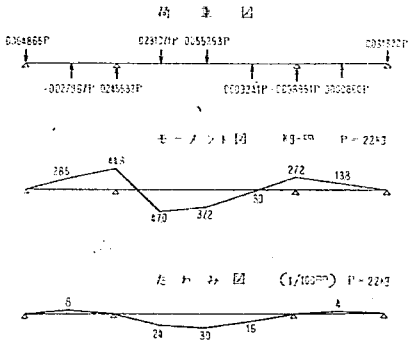
図—27

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

表—19

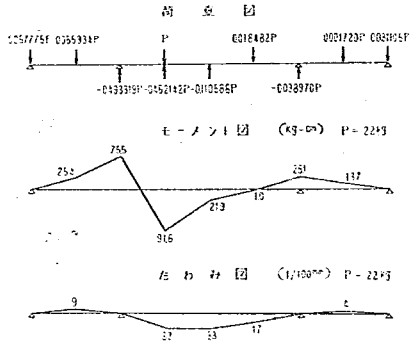
	i	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1t}$	$-0.027967\,P$		
2	A_{1t}	$-0.027967\,P$		
3	$\mathfrak{A}_{2t}$	$0.106075\,P$	$0.120156\,P$	$0.050782\,P$
4	A_{2t}	$0.231071\,P$	$0.055293\,P$	$0.009241\,P$
5	$\mathfrak{A}_{3t}$	$-0.000860\,P$		
6	A_{3t}	$-0.000860\,P$		

B 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



図—28

A，*C* 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



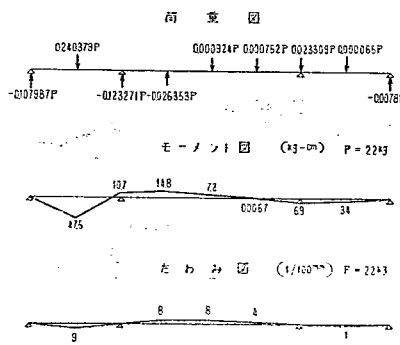
図—29

左径間 $j=1$ に載荷した場合

表—20

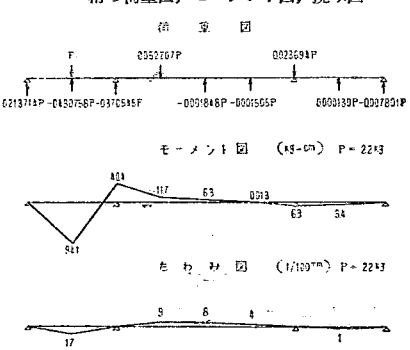
	i /	1	3	3
1	$\mathfrak{M}_{1i}$	0.240379 P		
2	A_{1i}	0.240379 P		
3	$\mathfrak{M}_{2i}$	−0.0085892 P	−0.013553 P	−0.0095134 P
4	A_{2i}	−0.0263535 P	0.0009243 P	0.0007525 P
5	$\mathfrak{M}_{3i}$	0.0000648 P		
6	A_{3i}	0.0000648 P		

A，*C* 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



図—30

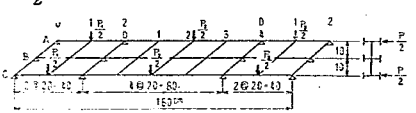
B 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



図—31

iii) 外桁に集中荷重 P が載荷せる場合を次の（イ），（ロ）の重畳せる場合として求める。

イ）両外桁に対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合



図—32

3径間であるから前と同様に (63), (64) 式の他に同式の sufix に，次の変換 0→1，1→2，2→3 を行つた2式からなる4元連立方程式を解くことにより未知数 M_{1A}, M_{1B}, M_{2A}, M_{2B} が得られる。

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

支点モーメント

表—21

$M_{1A}=M_{2A}=2.53653P$
$M_{1B}=M_{2B}=2.42689P$

格点力及びその部分項

表—22

	i	1	2	3
1	$\mathfrak{N}_{1i}$	$-0.00219917\,P$		
2	A_{1i}	$-0.00219917\,P$		
3	$\mathfrak{N}_{2i}$	$0.0800962\,P$	0	$-0.044648\,P$
4	A_{2i}	$0.0250651\,P$	$0.124745\,P$	$0.0250651\,P$

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

支点モーメント

表—23

$M_{1A}=2.73246P$	$M_{1B}=2.03526P$
$M_{2B}=1.25715P$	$M_{1B}=1.23570P$

格点力及びその部分項

表—24

	i	1	2	3
1	$\mathfrak{N}_{1i}$	$-0.0139833\,P$		
2	A_{1i}	$-0.0139833\,P$		
3	$\mathfrak{N}_{2i}$	$0.0053037\,P$	$0.060078\,P$	$0.025391\,P$
4	A_{2i}	$0.115536\,P$	$0.027646\,P$	$-0.004620\,P$
5	$\mathfrak{N}_{3i}$	$-0.0004301\,P$		
6	A_{3i}	$-0.0004301\,P$		

左径間 $j=1$ に載荷した場合

支点モーメント

表—25

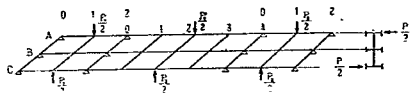
$M_{1A}=1.162198P$	$M_{1B}=0.488104P$
$M_{2A}=-0.313039P$	$M_{2B}=-0.311421P$

格点力及びその部分項

表—26

	i	1	2	4
1	$\mathfrak{N}_{1i}$	$0.120190\,P$		
2	A_{1i}	$0.120190\,P$		
3	$\mathfrak{N}_{2i}$	$-0.004295\,P$	$-0.006776\,P$	$-0.004757\,P$
4	A_{2i}	$-0.013177\,P$	$0.000462\,P$	$0.0003762\,P$
5	$\mathfrak{N}_{3i}$	$0.000032\,P$		
6	A_{3i}	$0.000032\,P$		

ロ）両外桁に逆対称荷重 $-\frac{P}{2}$ が載荷せる場合



図—33

前と同様に(8)式の他に同式の sufix に次の変換 0→1, 1→2, 2→3 を行つた式から成る2元連立方程式を解くことにより未知数 M_{1A}, M_{1A} が得られる。

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

支点モーメント

表—27

$M_{1A}=1.82062P$	$M_{2A}=1.82062P$

格点力及びその部分項

表—28

	i	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1i}$	$-0.046631\,P$		
2	A_{1i}	$-0.046631\,P$		
3	$\mathfrak{A}_{1i}$	$0.132214\,P$	0	$0.058413\,P$
4	A_{1i}	$0.052186\,P$	$0.190627\,P$	$0.052186\,P$

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

支点モーメント

表—29

$M_{1A}=2.32716P$	$M_{2A}=0.79882P$

格点力及びその部分項

表—30

	i	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1i}$	$-0.059605\,P$		
2	A_{1i}	$-0.059605\,P$		
3	$\mathfrak{A}_{2i}$	$0.085499\,P$	$0.065803\,P$	$0.007095\,P$
4	A_{2i}	$0.131278\,P$	$0.078404\,P$	$-0.000329\,P$
5	$\mathfrak{A}_{3i}$	$-0.020460\,P$		
6	A_{3i}	$-0.020460\,P$		

左径間 $j=1$ に載荷した場合

支点モーメント

表—31

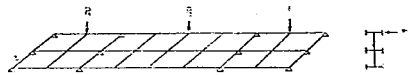
$M_{1A}=1.38344P$	$M_{2A}=0.144828P$

格点力及びその部分項

表—32

	i	1	2	3
1	$\mathfrak{A}_{1i}$	$0.135318\,P$		
2	A_{1i}	$0.135318\,P$		
3	$\mathfrak{A}_{2i}$	$-0.017956\,P$	$-0.019573\,P$	$-0.007433\,P$
4	A_{2i}	$-0.037525\,P$	$-0.010523\,P$	$0.001620\,P$
5	$\mathfrak{A}_{3i}$	$0.003709\,P$		
6	A_{3i}	$0.003709\,P$		

ハ）外桁に集中荷重 P が載荷せる場合



図—34

同じ荷重状態に対する(イ)，(ロ)の場合につき重畳すれば求めることができる。

中央径間 $j=2$ に載荷した場合

支点モーメント

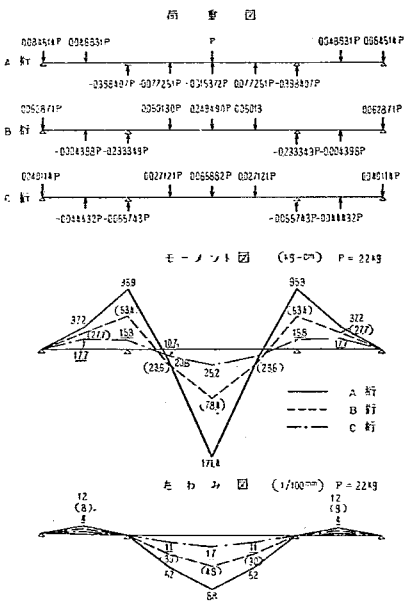
表—21と表—27の値を重畳すればよい。

表—33

$$M_{1A}=M_{2A}=4.35715P$$
$$M_{1B}=M_{2B}=2.42689P$$
$$M_{1C}=M_{2C}=0.71591P$$

格点力は表—22と表—28から得られる。

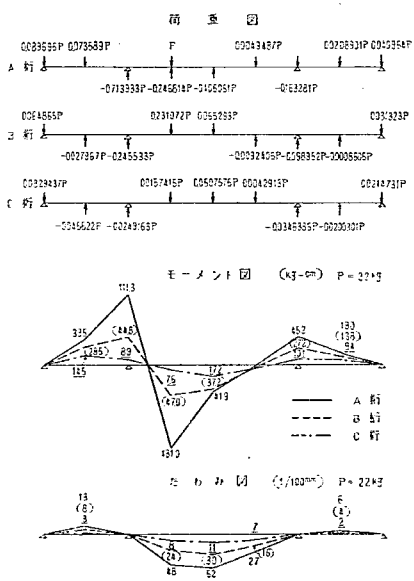
$A.B.C.$ 桁の荷重図，モーメント図，撓み図



図—35

中央径間 $j=1$ に載荷した場合

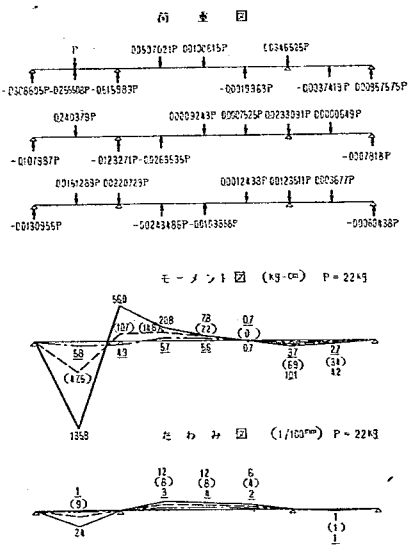
支点モーメントは表—23,29から格点力は表—24，30から得られる。



図—36

左径間 $j=1$ に載荷した場合

支点モーメントは表—25,31 から格点力は表—26,32 から得られる。



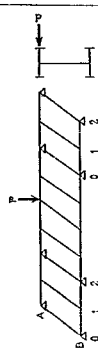
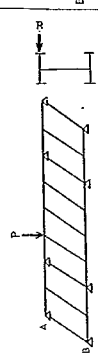
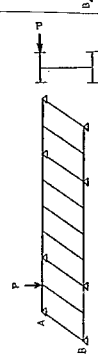
図—37

4. 理論値と実験値の比較及び荷重分配率

〔1〕 二本主桁の場合

i）**理論値と実験値及びその比**　各格点に P=22kg の荷重を載荷した場合の曲げモーメント，撓みの理論値及び実験値は表—34のようである。

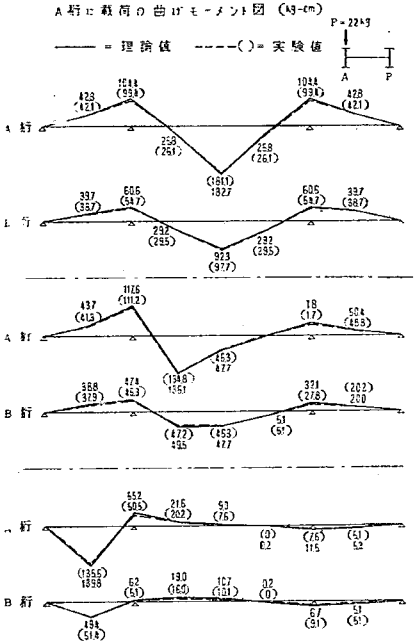
表—34

荷重状態	桁		径間 / 格点番号	1		2					3	
				1	2	0	1	2	3	4	0	1
	A	モーメント	理論値	−42.8	−104.4	25.8	182.7	25.8	−104.4			−42.8
			実験値	−42.1	− 99.4	26.1	181.1	26.1	− 99.4			−42.1
			応力比	0.98	0.95	1.01	0.99	1.01	0.95			0.98
		撓み	理論値	−14		57	95	57				−14
			実験値	−13		56	95	56				−13
			撓み比	0.93		0.98	1.00	0.98				0.93
	B	モーメント	理論値	−39.7	−60.6	29.2	92.3	29.2	−60.6			−39.7
			実験値	−38.7	−54.7	29.5	97.7	29.5	−54.7			−38.7
			応力比	0.98	0.90	1.01	1.06	1.01	0.90			0.98
		撓み	理論値	−11		36	57	36				−11
			実験値	−11		35	54	35				−11
			撓み比	1.00		0.97	0.95	0.97				1.00
	A	モーメント	理論値	−43.7	−117.6	136.1	48.5	1.8	−50.4			−21.3
			実験値	−41.3	−111.2	134.8	46.3	1.7	−48.8			−20.2
			応力比	0.95	0.95	0.99	0.96	0.94	0.97			0.95
		撓み	理論値	−15		52	57	29				−7
			実験値	−15		53	57	26				−8
			撓み比	1.00		1.02	1.00	0.90				1.14
	B	モーメント	理論値	−38.8	−47.4	49.5	47.7	5.1	−32.1			−20.0
			実験値	−37.9	−46.3	47.2	46.3	5.1	−27.8			−20.2
			応力比	0.98	0.98	0.95	0.97	1.00	0.87			1.01
		撓み	理論値	−10		28	36	20				−6
			実験値	−12		27	36	18				−8
			撓み比	1.20		0.96	1.00	0.90				1.33
	A	モーメント	理論値	139.8	−55.2	−21.6	−9.0	0.2	11.5			5.2
			実験値	135.6	−50.5	−20.2	−7.6	0	7.6			5.1
			応力比	0.97	0.92	0.94	0.84		0.66			0.98
		撓み	理論値	25		−15	−14	−7				2
			実験値	25		−15	−14	−7				2
			撓み比	1.00		1.00	1.00	1.00				1.00
	B	モーメント	理論値	49.4	−6.2	−19.0	−10.7	−0.2	9.1			5.1
			実験値	51.4	−5.1	−16.0	−10.1	0	6.7			5.1
			応力比	1.04	0.82	0.84	0.94		0.74			1.00
		撓み	理論値	10		−10	−11	−6				2
			実験値	10		−10	−11	−7				2
			撓み比	1.00		1.00	1.00	1.17				1.00

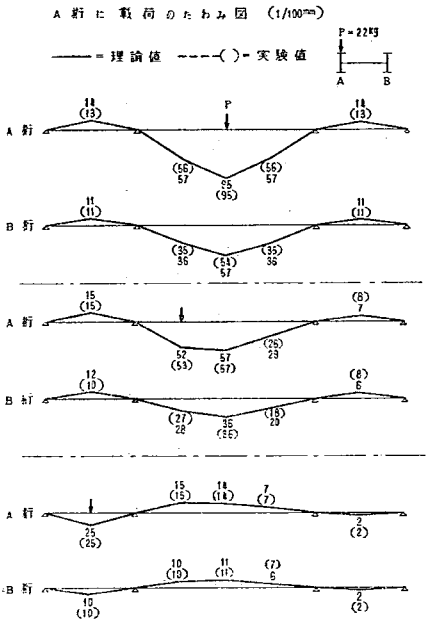
〔モーメント (kg−cm)，撓 ($\frac{1}{100}$mm)〕

応力比＝実験値／理論値

撓み比＝実験値／理論値



図―38

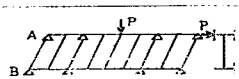
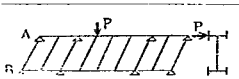
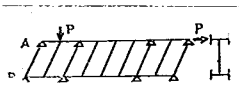


図―39

ii) 荷重分配率

理論値による荷重分配率は表―35のようになる。

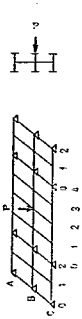
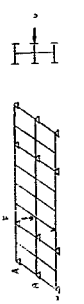
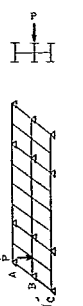
表―35

荷重状態	径間 / 格点番号 / 桁	1		2					3	
		1	2	0	1	2	3	4	0	1
	A	52.0	63.0	41.0	66.0	41.0	63.0		52.0	
	B	48.0	37.0	59.0	34.0	59.0	37.0		48.0	
	A	53.0	71.0	73.0	50.0	26.0	61.0		52.0	
	B	47.0	29.0	27.0	50.0	74.0	39.0		48.0	
	A	74.0	90.0	53.0	46.0		56.0		50.0	
	B	26.0	10.0	47.0	54.0		44.0		50.0	

荷重分配率＝当該1主桁断面に作用するモーメント／当該格点断面に作用する総モーメント ×100%

〔2〕 三本主桁の場合

i）理論値と実験値及びその比　各格点に $P=22$kg の荷重を載荷した場合の曲げモーメント撓みの理論値及び実験値は表—36のようである。　表—36-(1)

荷重状態	桁		径間 / 格点番号	1		2					3
				1	2	0	1	2	3	4	0	1
	A・C	モーメント	理論値	−27.7	−53.4		23.6	78.4	23.6	−53.4		−27.7
			実験値	−25.3	−50.5		21.9	82.5	21.9	−50.5		−25.3
			応力比	0.91	0.95		0.93	1.05	0.93	0.95		0.91
		撓み	理論値	−8			30	48	30			−8
			実験値	−9			30	49	30			−9
			撓み比	1.12			1.00	1.02	1.00			1.12
	B	モーメント	理論値	−27.2	−58.2		7.9	118.2	7.9	−58.2		−27.2
			実験値	−26.1	−51.4		7.6	121.3	7.6	−51.4		−26.1
			応力比	0.96	0.88		0.96	1.03	0.96	0.88		0.96
		撓み	理論値	− 8			33	57	33			− 8
			実験値	−10			31	57	31			−10
			撓み比	1.25			0.94	1.00	0.94			1.25
	A・C	モーメント	理論値	−28.5	−44.8		47.0	37.2	30	−27.2		−13.8
			実験値	−23.6	−42.1		51.4	37.9	42	−27.8		−13.5
			応力比	0.83	0.94		0.88	1.02	1.4	1.02		0.98
		撓み	理論値	−8			24	30	16			−4
			実験値	−9			26	29	14			−5
			撓み比	1.09			1.08	0.97	0.88			1.25
	B	モーメント	理論値	−25.4	−75.5		91.6	21.9	1.0	−28.1		−13.7
			実験値	−22.7	−70.8		94.3	27.8	2.5	−27.8		−13.5
			応力比	0.89	0.94		1.03	1.27	2.5	0.99		0.99
		撓み	理論値	−9			32	33	17			−4
			実験値	−9			30	34	15			−6
			撓み比	1.00			0.94	1.03	0.88			1.5
	A・C	モーメント	理論値	47.5	−10.7		−14.8	−7.2	0	6.9		3.4
			実験値	46.3	− 8.4		−11.8	−6.7	0	6.7		4.2
			応力比	0.97	0.79		0.80	0.93		0.97		1.24
		撓み	理論値	9			−8	−8	−4			1
			実験値	10			−8	−6	−4			1
			撓み比	1.11			1.00	0.75	1.00			1.0
	B	モーメント	理論値	94.1	−40.4		−11.7	−6.3	0	6.9		3.4
			実験値	97.7	−40.4		−16.8	−8.4	0	7.6		4.2
			応力比	1.04	1.00		1.44	1.33		1.10		1.24
		撓み	理論値	17			−9	−8	−4			1
			実験値	17			−8	−7	−4			1
			撓み比	1.00			0.89	0.88	1.00			1.00

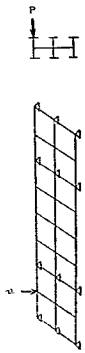
〔モーメント (kg−cm)，撓み ($\frac{1}{100}$mm)〕

応力比＝実験値／理論値

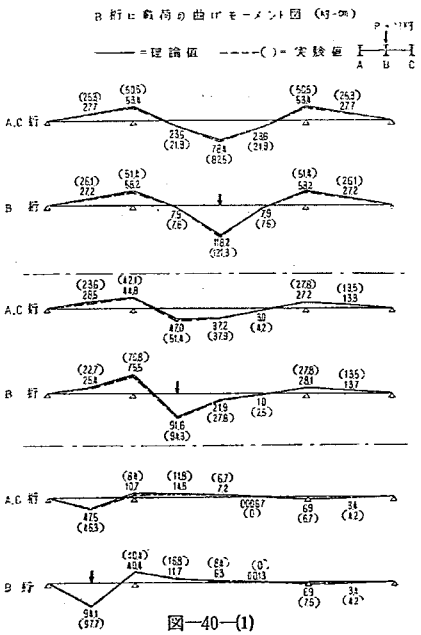
撓み比＝実験値／理論値

表—36—(2)

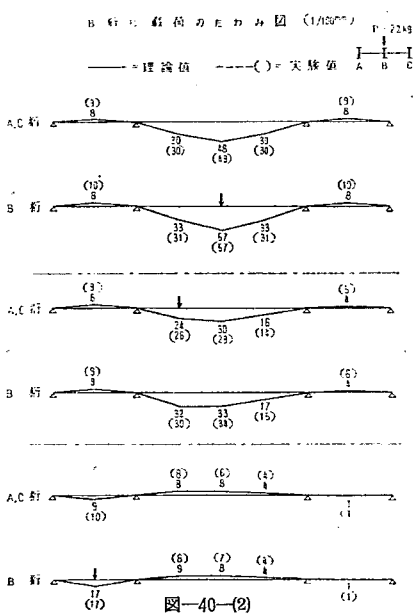
荷重状態	桁		径間	1			2					3
			格点番号	1	2	0	1	2	3	4	0	1
	A	モーメント	理論値	−37.2	−95.9		20.8	171.4	20.8	−95.9		−37.2
			実験値	−36.8	−93.5		21.2	168.3	21.2	−93.5		−36.8
			応力比	0.99	0.98		1.02	0.98	1.02	0.98		0.99
		撓み	理論値	−12			52	88	52			−12
			実験値	−12			52	88	52			−12
			撓み比	1.00			1.00	1.00	1.00			1.00
	B	モーメント	理論値	−27.7	−53.4		23.6	78.4	23.6	−53.4		−27.7
			実験値	−28.0	−53.0		24.9	81.0	24.9	−53.0		−28.0
			応力比	1.01	0.99		1.05	1.03	1.05	0.99		1.01
		撓み	理論値	−8			30	48	30			−8
			実験値	−8			28	49	28			−8
			撓み比	1.00			0.94	1.02	0.94			1.00
	C	モーメント	理論値	−17.7	−15.8		10.7	25.2	10.7	−15.8		−17.7
			実験値	−15.6	−15.0		12.5	25.0	12.5	−15.0		−15.6
			応力比	0.88	0.95		1.17	0.99	1.17	0.95		0.88
		撓み	理論値	−4			11	17	11			−4
			実験値	−5			12	18	12			−5
			撓み比	1.25			1.09	1.05	1.09			1.25
	A	モーメント	理論値	−39.5	−111.3		131.0	41.9	−0.6	−45.2		−18.0
			実験値	−38.0	−109.1		134.0	43.0	0	−43.6		−18.1
			応力比	0.96	0.98		1.02	1.02		0.96		1.00
		撓み	理論値	−13			48	52	27			−6
			実験値	−13			50	51	25			−7
			撓み比	1.00			1.04	0.98	0.93			1.16
	B	モーメント	理論値	−28.5	−44.8		47.0	37.2	2.9	−27.2		−13.8
			実験値	−28.0	−43.6		50.0	36.2	3.1	−26.8		−13.1
			応力比	0.98	0.98		1.06	0.97	1.07	0.99		0.95
		撓み	理論値	−8			24	30	16			−4
			実験値	−8			23	29	14			−5
			撓み比	1.00			0.96	0.97	0.88			1.25
	C	モーメント	理論値	−14.5	−8.9		7.6	17.2	4.5	−10.1		−9.4
			実験値	−13.7	−9.3		6.9	17.5	5.0	−10.0		−8.7
			応力比	0.95	1.04		0.91	1.02	1.11	0.99		0.93
		撓み	理論値	−3			8	11	7			−2
			実験値	−4			9	12	7			−4
			撓み比	1.33			1.12	1.09	1.00			2.00

荷重状態	桁		径間 / 格点番号	1		2				3
				1	2 ⋮ 0	1	2	3	4 ⋮ 0	1
	A	モーメント	理論値	135.8	−56.0	−20.8	−7.8	0.7	10.1	4.2
			実験値	137.1	−54.2	−20.6	−7.5	0	10.0	3.7
			応力比	1.01	0.97	0.99	0.96		0.99	0.88
		撓み	理論値	24		−13	−12	−6		1
			実験値	25		−13	−10	−6		1
			撓み比	1.04		1.00	0.83	1.00		1.00
	B	モーメント	理論値	47.5	−10.7	−14.8	−7.2	0	6.9	3.4
			実験値	45.5	−10.6	−15.0	−8.1	0	10.6	3.7
			応力比	0.96	0.99	1.01	1.13		1.54	1.09
		撓み	理論値	9		−8	−8	−4		1
			実験値	10		−7	−7	−4		1
			撓み比	1.11		0.88	0.88	1.00		1.00
	C	モーメント	理論値	5.8	4.9	−5.7	−5.6	−0.7	3.7	2.7
			実験値	6.2	5.0	−5.6	−5.6	0	3.1	2.5
			応力比	1.07	1.02	0.98	1.00		0.84	0.93
		撓み	理論値	1		−3	−4	−2		1
			実験値	3		−3	−4	−2		1
			撓み比	3.00		1.00	1.00	1.00		1.00

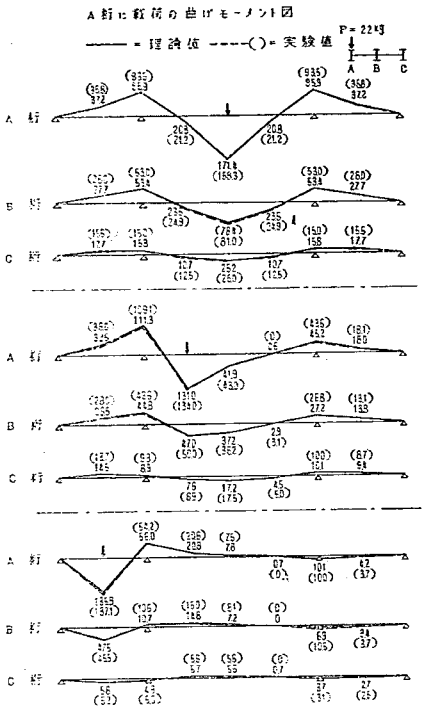
上表の結果を図示すれば図—40.41.のようになる。　〔モーメント(kg−cm),撓み(1/100mm)〕



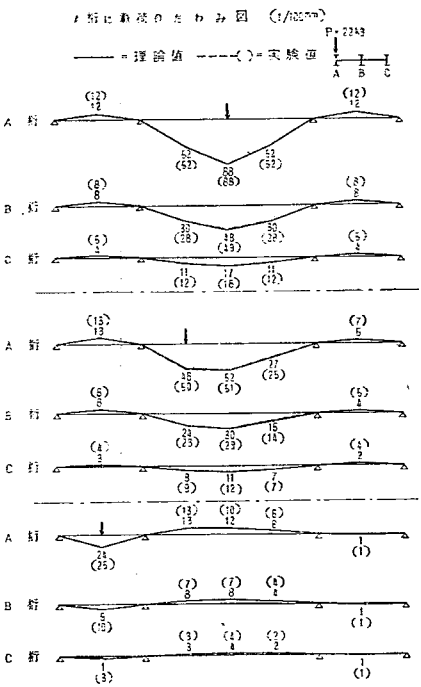
図—40—(1)



図—40—(2)



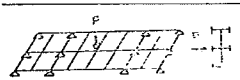
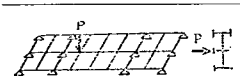
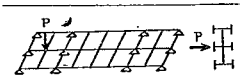
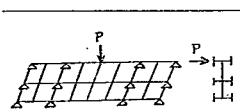
図—41—(1)

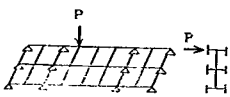
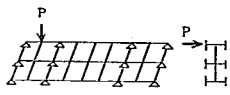


図—41—(2)

ii) 荷重分配率　理論値による荷重分配率は表—37のようになる。

表—37

荷重状態	径間 / 格点番号 / 桁	1		2					3	
		1	2	0	1	2	3	4	0	1
	A・C	34.0	33.0	43.0	28.0	43.0	33.0		34.0	34.0
	B	32.0	34.0	14.0	44.0	14.0	34.0		32.0	32.0
	A・C	35.0	27.0	25.0	39.0	43.0	33.0		34.0	34.0
	B	30.0	46.0	50.0	22.0	14.0	34.0		32.0	
	A・C	25.0	18.0	36.0	35.0		33.0		33.0	
	B	50.0	64.0	28.0	30.0		34.0		34.0	
	A	45.0	58.0	38.0	62.0	38.0	58.0		45.0	
	B	33.0	32.0	43.0	28.0	43.0	32.0		33.0	
	C	22.0	10.0	19.0	10.0	19.0	10.0		22.0	

	A	48.0	68.0	71.0	44.0	8.0	55.0	44.0
	B	35.0	27.0	25.0	39.0	36.0	33.0	33.0
	C	17.0	5.0	4.0	17.0	56.0	12.0	23.0
	A	72.0	90.0	50.0	38.0		49.0	41.0
	B	25.0	18.0	36.0	35.0		33.0	33.0
	C	3.0	−8.0	14.0	27.0		18.0	26.0

〔%〕

$$\text{荷重分配率}=\frac{\text{当該1主桁断面に作用するモーメント}}{\text{当該格点断面に作用する総モーメント}}\times 100\%$$

5. 連続ボックスガーダー慣用計算法

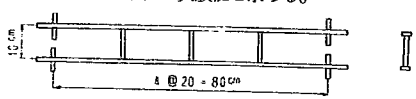
荷重分配率を考慮した連続ボックスガーダー慣用計算法としては，単純桁とした場合の荷重分配率を求め，その分配された荷重が個々の連続桁に作用するとした近似法が適用されてきた。

単純ボックスガーダーの計算法としてはH. Hombergの精密方法L. Miiheの近似方法があるが，前者は主桁，横桁の増加にともない極めて煩雑になるため普通後者が使用されてきた。ここではで求めた式を用いて計算を行う。

〔1〕 単純ボックスガーダーの理論値及び実験値

i）二本主桁の場合

図—1 の連続ボックスガーダーの側径間を除去した中央径間を単純ボックスガーダー（図—42参照）として荷重 $P=22\text{kg}$ を各格点に載荷した場合の理論値及び実験値を求める。



図—42

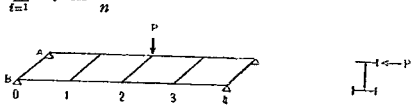
イ）理　論　値

(24)式において

$$M_{0A}=M_{1A}=0$$

とおき，格点力の部分項 $\mathfrak{A}_i$ を求め格点力を次式で計算した。

$$A_x=\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{A}_i\sin\frac{i\pi x}{n}$$



図—43

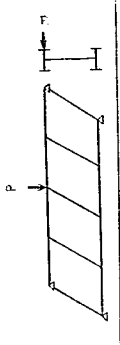
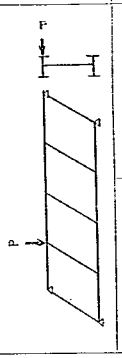
表—38

載荷位置	i	1	2	3
$j=2$	$\mathfrak{A}_i$	$0.22081\,P$	0	$-0.07579\,P$
	A_i	$0.10255\,P$	$0.2966\ P$	$0.10255\,P$
$j=1$	$\mathfrak{A}_i$	$0.15614\,P$	$0.14362\,P$	$0.053594\,P$
	A_i	$0.29193\,P$	$0.10255\,P$	$0.004685\,P$

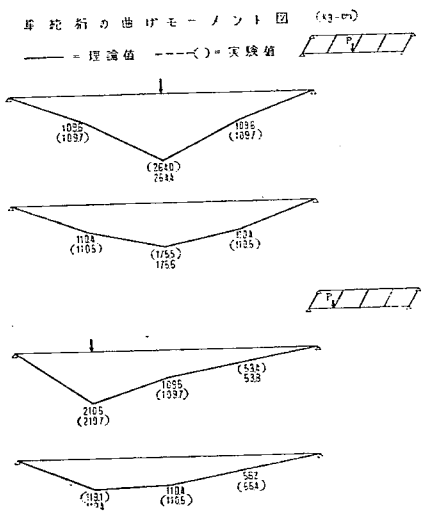
ロ）理論値と実験値の比較

各格点に $P=22\text{kg}$ の荷重を載荷した場合の曲げモーメント，撓みの理論値及び実験値は表—39のようである。

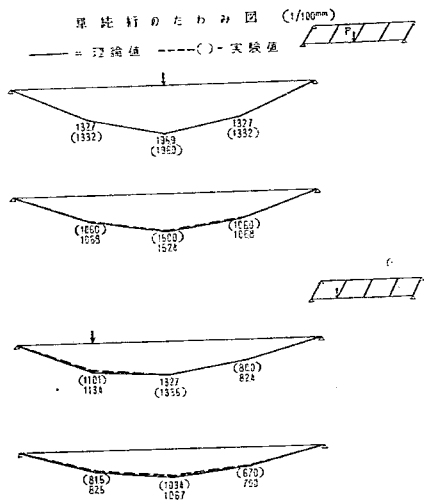
表—39

荷重状態	桁		格点番号	1	2	3
	A	モーメント	理論値	109.6	264.4	109.6
			実験値	109.7	264.0	109.7
			応力比	1.00	1.00	1.00
		撓み	理論値	132.7	195.9	132.7
			実験値	133.2	196.0	133.2
			撓み比	1.00	1.00	1.00
	B	モーメント	理論値	110.4	175.6	110.4
			実験値	110.5	175.5	110.5
			応力比	1.00	1.00	1.00
		撓み	理論値	106.8	152.4	106.8
			実験値	106.0	150.0	106.0
			撓み比	0.99	0.98	0.99
	A	モーメント	理論値	210.6	109.6	53.8
			実験値	210.7	109.7	53.4
			応力比	1.00	1.00	0.99
		撓み	理論値	113.4	132.7	82.4
			実験値	110.1	133.6	80.0
			撓み比	0.97	1.01	0.97
	B	モーメント	理論値	119.4	110.4	56.2
			実験値	119.1	110.5	56.4
			応力比	1.00	1.00	1.00
		撓み	理論値	82.5	106.7	70.0
			実験値	81.5	103.4	67.0
			撓み比	0.99	0.97	0.96

上表の結果を図示すれば図—44.45のようになる。



図—44

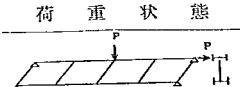
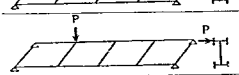


図—45

ハ) 荷重分配率

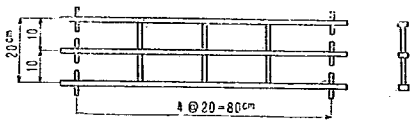
理論値による荷重分配率は表—40のようになる。

表—40

荷重状態	桁	1	2	3
	A	50.0	60.0	50.0
	B	50.0	40.0	50.0
	A	64.0	50.0	49.0
	B	36.0	50.0	51.0

ii）三本主桁の場合

図—2 の連続ボックスガーダーの側径間を除去した中央径間を単純ボックスガーダー（図—46参照）として荷重 $P=22\text{kg}$ を各格点に載荷した場合の理論値及び実験値を求める。



図—46

イ）理　論　値

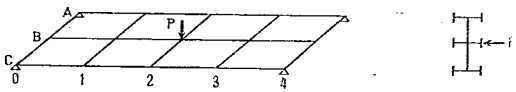
(56)(58)式において

$$M_{1A}=M_{1A}=M_{1B}=M_{2B}=0$$

とおき格点力の部分項 $\mathfrak{P}_i$ を求め格点力を次式で計算した。

$$A_x=\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{P}_i\sin\frac{i\pi x}{n}$$

a）内桁に集中荷重 P が載荷せる場合



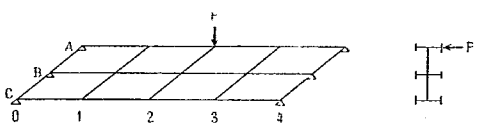
図—47

表—41

載荷位置	i	1	3	3
$j=2$	$\mathfrak{P}_i$	$0.163005\,P$	0	$-0.116661\,P$
	A_i	$0.032770\,P$	$0.279666\,P$	$0.032770\,P$
$j=1$	$\mathfrak{P}_i$	$0.115261\,P$	$0.133833\,P$	$0.082491\,P$
	A_i	$0.273665\,P$	$0.032770\,P$	$0.005999\,P$

b）外桁に集中荷重 P が載荷せる場合

両外桁に対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合と逆対称荷重 $\frac{P}{2}$ が載荷せる場合とを重畳せることにより得られる。



図—48

$A.B.C$ 桁の各格点力を $A_i.B_i.C_i$ とすれば格点力は表—42のようになる。

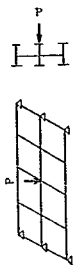
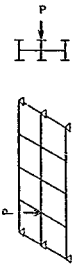
表—42

載荷位置	i	1	2	3
$j=2$	A_i	$-0.121393\,P$	$-0.361585\,P$	$-0.121392\,P$
	B_i	$0.032770\,P$	$0.279666\,P$	$0.032770\,P$
	C_i	$0.088623\,P$	$0.081919\,P$	$0.088623\,P$
$j=1$	A_i	$-0.333254\,P$	$-0.121392\,P$	$-0.028328\,P$
	B_i	$0.273665\,P$	$0.032770\,P$	$0.005999\,P$
	C_i	$0.059589\,P$	$0.088621\,P$	$0.022329\,P$

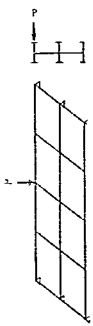
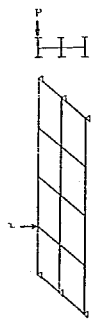
ロ）理論値と実験値の比較

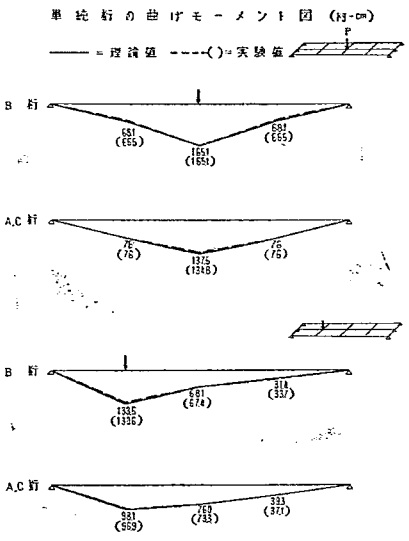
各格点に P=22kg の荷重を載荷した場合の曲げモーメント，撓みの理論値及び実験値は表—43のようである。

表—43—(1)

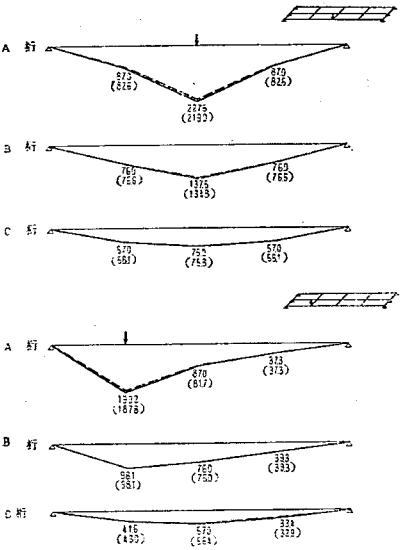
荷重状態	桁		格点番号	1	2	3	荷重状態	桁		格点番号	1	3	3
	A・C	モーメント	理論値	76.0	137.5	76		A・C	モーメント	理論値	98.1	76.0	39.3
			実験値	76.0	134.8	76				実験値	96.9	73.3	37.1
			応力比	1.00	0.98	1.00				応力比	0.99	0.96	0.94
		撓み	理論値	78	113	78			撓み	理論値	62	78	51
			実験値	80	114	80				実験値	65	78	47
			撓み比	1.03	1.01	1.03				撓み比	1.05	1.00	0.92
	B	モーメント	理論値	68.1	165.1	68.1		B	モーメント	理論値	133.6	68.1	31.4
			実験値	66.5	165.1	66.5				実験値	130.6	67.4	33.7
			応力比	0.98	1.00	0.98				応力比	0.98	0.99	1.07
		撓み	理論値	83	122	83			撓み	理論値	71	83	51
			実験値	81	121	81				実験値	71	79	47
			撓み比	0.98	0.99	0.98				撓み比	1.00	0.95	0.92

表—43—(2)

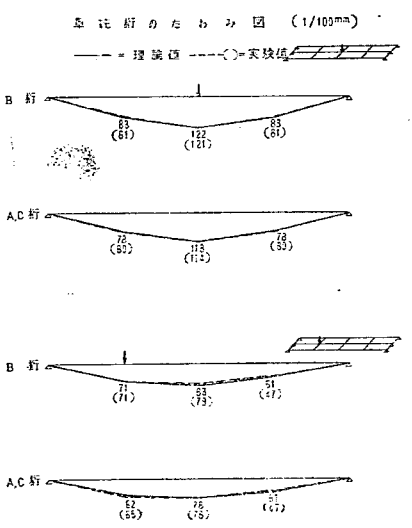
荷重状態	桁		格点番号	1	2	3	荷重状態	桁		格点番号	1	2	3
	A	モーメント	理論値	87.0	227.5	87.0		A	モーメント	理論値	190.2	87.0	37.3
			実験値	82.6	219.0	82.6				実験値	187.8	81.7	37.3
			応力比	0.95	0.96	0.95				応力比	0.99	0.94	1.00
		撓み	理論値	111	164	111			撓み	理論値	97	111	67
			実験値	110	161	110				実験値	102	111	67
			撓み比	0.99	0.98	0.99				撓み比	1.05	1.00	1.00
	B	モーメント	理論値	76.0	137.5	76.0		B	モーメント	理論値	98.1	76.0	39.3
			実験値	76.6	134.8	76.6				実験値	98.1	76.0	39.3
			応力比	1.01	0.98	1.01				応力比	1.00	1.00	1.00
		撓み	理論値	78	113	78			撓み	理論値	62	78	51
			実験値	75	110	75				実験値	66	79	47
			撓み比	0.96	0.97	0.96				撓み比	1.06	1.01	0.92
	C	モーメント	理論値	57.0	75.0	57.0		C	モーメント	理論値	41.6	57.0	33.4
			実験値	58.1	75.8	58.1				実験値	43.0	56.4	32.9
			応力比	1.02	1.01	1.02				応力比	1.03	0.99	0.99
		撓み	理論値	51	71	51			撓み	理論値	36	51	35
			実験値	50	71	50				実験値	46	53	30
			撓み比	0.98	1.00	0.98				撓み比	1.27	1.04	0.86



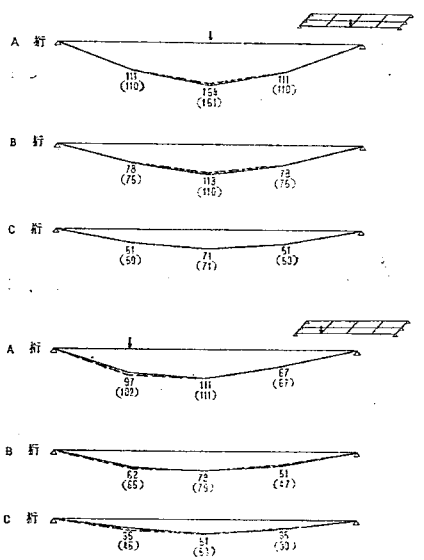
図—49—(1)



図—49—(2)



図—49—(3)

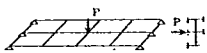
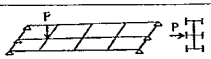
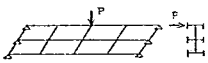
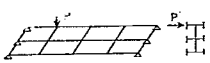


図—49—(4)

ハ）荷重分配率

理論値による荷重分配率は表―44のようになる。

表―44

荷重状態	桁＼格点番号	1	2	3
	A・C	35.0	31.0	35.0
	B	30.0	38.0	30.0
	A・C	30.0	34.0	36.0
	B	40.0	32.0	28.0
	A	40.0	52.0	40.0
	B	34.0	31.0	34.0
	C	26.0	17.0	26.0
	A	58.0	40.0	34.0
	B	30.0	35.0	36.0
	C	12.0	25.0	30.0

〔%〕

〔2〕 連続ボックスガーダーの近似計算値

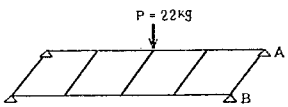
i） 二本桁の場合

単純桁の支間中央（格点番号 $j=2$）に荷重 P が載荷した場合の荷重分配率は表―40より

A桁に対して　0.6009P

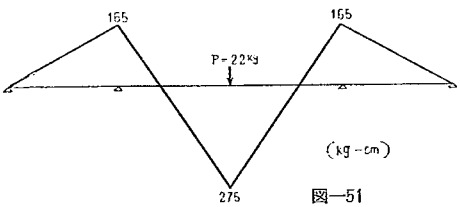
B桁に対して　0.3991P

である。



図―50

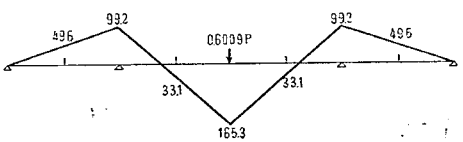
三径間連続で中央径間の支間中央に P の集中荷重が載荷した場合の曲げモーメントは図―51のようである。



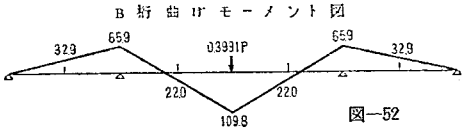
図―51

従つてA桁では 0.6009 を，B桁では 0.3991 を乗ずればよい。

A 桁 曲げ モーメント 図



B 桁 曲げ モーメント 図



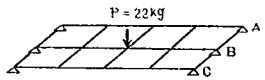
図―52

ii）三本主桁の場合

イ）内桁について

単純桁の支間中央（格点番号 $j=2$）に荷重 P が載荷した場合の荷重分配率は表—27より

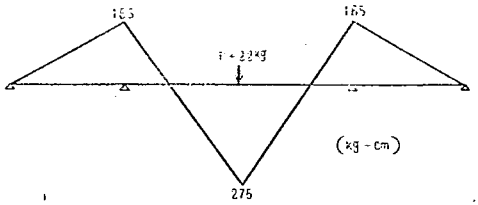
A桁に対して　$0.3125P$
B 〃　〃　$0.375\ P$
C 〃　〃　$0.3125P$



図—53

である。

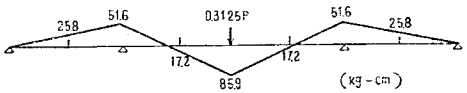
三径間連続が中央径間の支間中央に P の集中荷重が載荷した場合の曲げモーメントは図—54のようである。



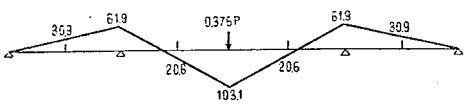
図—54

従つて $A.C$ 桁では 0.3125 を，B 桁では 0.375 を乗ずればよい。

A,C 桁 曲げ モーメント 図



B 桁 曲げ モーメント 図

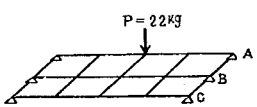


図—55

ロ）外桁について

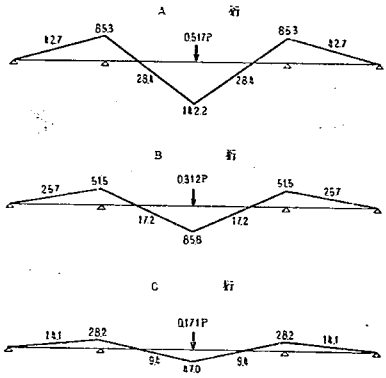
単純桁の支間中央（格点番号 $j=2$）に荷重 P が載荷した場合の荷重分配率は表—44より

A桁に対して　$0.517P$
B 〃　〃　$0.312P$
C 〃　〃　$0.171P$



図—56

である。図—54を用いて各桁のモーメント図を描くと次のようになる。



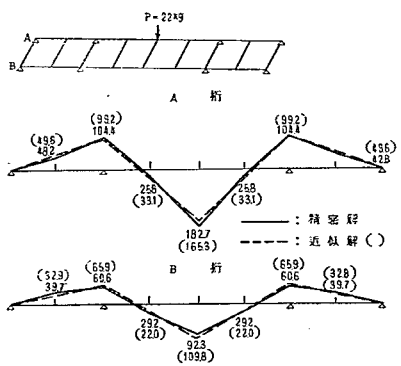
図—57

6. 連続ボックスガーダーの精密解と近似解の比較

〔1〕 モーメント影響線の比較

i) 二本主桁の場合

中央径間支間中央断面に集中荷重Pが載荷した場合につきモーメント影響線を比較図示すると 図—58 のようになる。

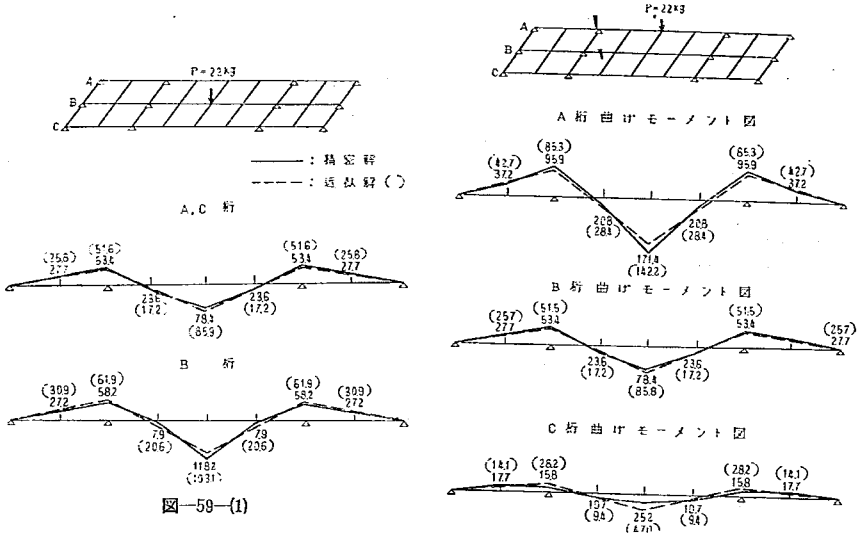


図—58

図から明らかなように載荷桁では，載荷点で10%支点で 5%精密解が大きくなつている。

ii）三本主桁の場合

中央径間，支間中央断面に集中荷重Pが載荷した場合につきモーメントを比較図示すると図—59のようになる。



図—59—(1)　　図—59—(2)

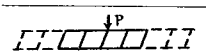
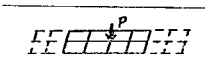
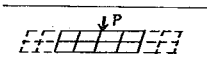
B（A）桁に載荷の場合載荷桁では載荷点で 13（17）% 支点で 6（11）% 精密解が大きくなつている。

〔2〕 モーメント分配率の比較

i）支間中央断面（正の最大モーメント）

二本主桁は表—35.40より，三本主桁は表—37.44より単純桁，連続桁の場合の載荷断面について荷重分配率を求めると表—45のようになる。

表—45

荷重状態	載荷桁の負担する荷重		
	単純桁	連続桁	比＝連続桁／単純桁
	0.60 P	0.66 P	1.1
	0.38 P	0.44 P	1.16
	0.52 P	0.62 P	1.19

上表より単純桁の方が連続桁の場合より載荷断面については10%～19%分配率がよくなつている。

従つて単純桁の分配率を用いて支間中央断面のモーメントを求めることは明らかに危険側の設計である。

ii）支点断面（負の最大モーメント）

表—35.37 より分配率は支間方向に可成り変化していることがわかる。従つて近似解のように支間方向を通じて分配率を一定とするのは誤りである。

支点断面では載荷断面より分配率がよくなつているから支点断面に関する限りこの誤りは安全側である。

しかし i）の危険側の分配率を使用しているので危険側と安全側の組合せとなり，結果は計算によらなければ

ならない。

本設計では6〔1〕で示したように 5～11% 精密解が大きくなつているから明らかに危険側となつている。

7. むすび

従来連続ボックスガーダーの精密解が得られていなかつたため，設計に当つては一抹の懸念を抱きつつ（Ⅳ）で述べた近似計算法を行つたのであるが，著者の研究の結果桁子桁に関する三連力モーメントの定理を作成することができ，この理論で求めた計算値は実験と極めて良く一致し，この理論の高精度を立証することができた。

慣用近似計算法は（6）で述べたように危険側の設計であり，今後の連続ボックスガーダーの設計には著者の誘導した理論を使用することが望ましい。

今後長大スパン橋として益々盛んに用いられるであろう連続ボックスガーダーの設計に対し，本研究より得た理論式，実験結果が参考ともなれば極めて幸甚となるところであります。

最後に本計算，実験については，青木忠宗，奥田俊司君の協力を得たことを後記して謝意に代えたい。

単列ラジアル球軸受の静ラジアル荷重，撓み，遊隙の関係について

建設技官　木　村　　純

（昭和 32 年4月）

On the relation between the static radial load, the static deflection, and the clearance of a single row ball bearing

(April 1957)

J. KIMURA

Synopsis :

In this study, the author introduced a general equation of the relation between the static load, the static deflection, and the clearance of a single row ball bearing. By the results of a numerical calculation of this equation, the author concluded as followings.

(1) The effect of clearance, exerts on distribution of load of each loaded-ball, is remarkable at small deflection (or at light load.)

(2) There is no neccesity to consider the small change of dimension of ball-diameter and race-groove-radius by wearing respectively, only the increase of clearance exerts on the static load-deflection curve.

要　　旨

組立遊隙のある単列ラジアルボール軸受の静荷重，撓み，の一般式を導入し #6206軸受について，遊隙の構成因子である球および軌道溝径の摩耗に相当する程度の寸法差が生じた場合の影響を調べた結果，下記の結論を得た。

(1) 軽荷重においては荷重された各球の荷重分担割合の変化に対する遊隙の影響は大きい。

(2) 摩耗による球あるいは軌道溝の寸法変化を一々検討する必要はなく，組立遊隙の増大のみが静荷重―撓み曲線に影響をあたえると考えてよい。

目　　次

1. まえがき……(1)
2. 遊隙ある場合の静ラジアル荷重，撓みの一般式……(2)
3. 一般式の考察と#6206軸受についての計算結果……(5)
4. むすび……(12)

1. まえがき

建設用土工機械の各所に用いられている球軸受の寿命，耐用限度の問題は，今日，建設機械の分野の大きな問題となつている。二十世紀初頭以来，球軸受についての膨大な研究や実験が各国で行われたにかかわらず，未だ決定的な結論が得られていない。球軸受の問題に集約された工学，理学，化学全般にあたる複雑さあるいは本質的に統計的取扱いを要する寿命のバラツキなどが結論の多様性，不一致として表われるのであろうが，最近殊に，球軸受の破損が目立ち，機械化施工の能率に与える影響が大きいため，沼津支所性能試験研究室において，破壊試験[1]および実際についての破損ならびに使用限度の調査[2]をおこなつているが，本報告は解析的に遊隙ある場合の球軸受の荷重―撓み特性をとりあげ，とりあえず静的な場合について考察を加えたものでてる。

球軸受の静ラジアル荷重と撓みについては，すでに遊隙のない場合について Strileck が導いている。ここでは単列ラジアルボールベアリングに組立遊隙のある場合について，一般式を導入し，将来，設定さるべき耐用限度への足がかりとして，遊隙の摩耗による変化を考え，球および転走軌道径の摩耗に相当するような変化をした場合をそれぞれ#6206軸受について試算した。

2. 遊隙ある場合の静ラジアル荷重，撓みの一般式

〔1〕 遊隙ある場合の内，外輪間隔の変化

組立遊隙をεとした場合，内外輪間隔xが円周方向にいかに変化するかを求めておく。

図一1において，内輪半径をr_1外輪半径をr_2球直径をD_0とし円頂部より任意の角θにおける内外輪間隔をxとする。

$(r_1+x)^2+\varepsilon^2-2\varepsilon(r_1+x)\cos(\pi-\theta)=r_2^2$

これを，r_1+xについてとくと

$r_1+x=-\varepsilon\cos\theta\pm\sqrt{r_2^2-\varepsilon^2\sin^2\theta}$

$\theta=0$のとき$x=D_0$の条件より上式の複号は＋のみをとる。ゆえに

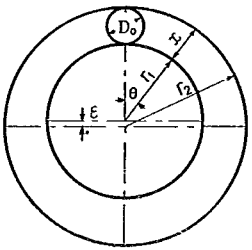
$x=\sqrt{r_2^2-\varepsilon^2\sin^2\theta}-r_1-\varepsilon\cos\theta$

上式第1項，すなわち$r_2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{r_2^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$は$\frac{\varepsilon^2}{r_2^2}\sin^2\theta\ll 1$なる

ゆえ$x\fallingdotseq r_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{r^2}\sin^2\theta-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon^4}{r_2^4}\sin^4\theta\right)-r_1-\varepsilon\cos\theta$

よつて（　）内の第2項以下を無視して

$$x\fallingdotseq r_2-r_1-\varepsilon\cos\theta$$



図一1

したがつて以後，遊隙の円周方向への分布，あるいは中心線上の変位の円周方向への分布は$\cos\theta$倍して計算をすすめる。

〔2〕 単一球を内外輪で圧する場合の静荷重と撓み

Hertzの理論により，2個の弾性体が曲面をもつて接触し，垂直力Pで押しつけられたときに生ずる2弾性体の接近量δは

$$\delta=\frac{2K}{\pi\mu}\left(\frac{9}{512}(\vartheta_1+\vartheta_2)^2\Sigma\rho\cdot p^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

ただし，この理論の成立する条件については，衆知のこととしここでは述べない。Hertzの理論でいわれる接近量を，今後，球軸受に適用する場合は，撓みと称することにする。

上式の記号は下の通りである。

$$\Sigma\rho=\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{21}+\rho_{22}$$

2物体の接触個所における主曲率の和

$$\vartheta=\frac{4(1-\sigma^2)}{E}$$

σ：ポアソン比　　E：ヤング率

$\frac{2K}{\pi\mu}$は補助函数$\cos\tau$より表一1－1より定まる

$$\cos\tau=\frac{\{(\rho_{11}-\rho_{12})^2+2(\rho_{11}-\rho_{12})(\rho_{21}-\rho_{22})\cos 2\omega+(\rho_{21}-\rho_{22})^2\}^{\frac{1}{2}}}{\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{21}+\rho_{22}}$$

（ωは主曲率の平面がなす角）

いま，単列ラジアルボール軸受に上述の理論を適用して，内外輪の間にただ一つの球をはさんで，球に垂直にPなる力を加えた場合の撓み（接近量）を考える。

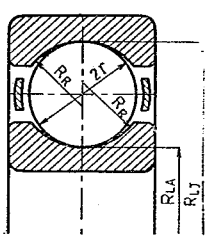
図一2において

球半径：γ

軌道溝径：R_R

外輪および内輪半径：R_{LA}, R_{LJ}

とすると，撓みδは



図一2

$$\delta = C_0 r^{-1/3} P^{2/3} \cdots\cdots (1\text{—}1)$$

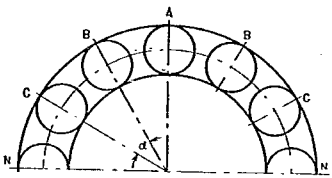
$$C_0 = \frac{5.562}{10^5} \left\{ \left(\frac{2K}{\pi\mu}\right)_A \left(2 - \frac{r}{R_{LA}} - \frac{r}{R_R}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2K}{\pi\mu}\right)_J \left(2 + \frac{r}{R_{LJ}} - \frac{r}{R_R}\right)^{\frac{1}{3}} \right\} \cdots\cdots (1\text{—}2)$$

$\left(\frac{2K}{\pi\mu}\right)_A$, $\left(\frac{2K}{\pi\mu}\right)_J$ はそれぞれ外輪対鋼球および内輪対鋼球の $\frac{2K}{\pi\mu}$ を示す C_0 は $E = 2.0 \times 10^6$ kg/cm², $\delta = 0.291$ とし修正係数0.9を用いて（1—2）を算出したものである[3]。

したがつて球軸受が定まれば $\delta = kP^{2/3}$ と考えてよい。

〔3〕 遊隙ある場合の静ラジアル荷重，撓みの一般式

図—3は一般の単列ラジアル球軸受を示したものである。



図—3

最初 A 球のみ内，外輪に接触し荷重 P_{00} を受け，撓みを起しているとすると

$$\delta_{00} = kP_{00}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{00} < \frac{\varepsilon}{\cos\alpha} - \varepsilon \left(\text{全球数を} z \text{とすると } \alpha = \frac{2\pi}{z}\right)$$

この場合のラジアル荷重 P_{r0} は

$$P_{r0} = P_{00}$$

次に荷重が増加し，$\delta_{00} > \frac{\varepsilon}{\cos} - \varepsilon$ となり，B 球も接触し始め，まだ C 球の接触をしないとき，A 球の荷重，撓みをそれぞれ P_{01}，δ_{01}，B 球のをそれぞれ P_{11}，δ_{11} とすると

$$\delta_{01} = kP_{01}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{11} = kP_{11}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{11} = (\delta_{01} - \delta_{00})\cos\alpha = k(P_{01}^{\frac{2}{3}} - P_{00}^{\frac{2}{3}})\cos\alpha = kP_{11}^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad P_{11}^{\frac{2}{3}} = (P_{01}^{\frac{2}{3}} - P_{00}^{\frac{2}{3}})\cos\alpha$$

この場合のラジアル荷重 P_{r1} は

$$P_{r1} = P_{01} + 2P_{11}\cos\alpha = P_{10} + 2\left(P_{01}^{\frac{2}{3}} - P_{00}^{\frac{2}{3}}\right)\cos\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha$$

$$\frac{\varepsilon}{\cos\alpha} - \varepsilon < \delta_{01} < \frac{\varepsilon}{\cos 2\alpha} - \varepsilon$$

同様に荷重が増加し，$\delta_{01} > \frac{\varepsilon}{\cos\alpha} - \varepsilon$ となり C 球が接触し始めたとき，A 球の荷重，撓みをそれぞれ P_{02}，δ_{02} B 球のを P_{12}，δ_{12}，C 球のをと δ_{21}，δ_{21} する。

$$\delta_{02} = kP_{02}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{12} = kP_{12}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{21} = kP_{21}^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta_{12} - \delta_{11} = (\delta_{02} - \delta_{01})\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \delta_{12} = (\delta_{02} - \delta_{00})\cos\alpha$$

$$\delta_{21} = (\delta_{02} - \delta_{00})\cos 2\alpha$$

よつて同様に，P_{r2} は

$$P_{r2} = P_{02} + 2\left(P_{02}^{\frac{2}{3}} - P_{00}^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}\alpha + 2\left(P_{02}^{\frac{2}{3}} - P_{00}^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}2\alpha$$

$$\frac{\varepsilon}{\cos 2\alpha} - \varepsilon < \delta_{02} < \frac{\varepsilon}{\cos 3\alpha} - \varepsilon$$

一般に第K球まで触し接た条件においては

$$P_{rn}=P_{0n}+2\sum_{n=1}^{n}\left(P_{0n}-P_{00}\right)^{\frac{2}{3}}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha \quad \cdots\cdots(1\text{—}3)$$

$$\frac{\varepsilon}{\cos n\alpha}-\varepsilon<\delta_{0n}>\frac{\varepsilon}{\cos(n+1)}-\varepsilon \quad \cdots\cdots(1\text{—}4)$$

しかるに$n=1$以上のときはδ_{00}の最大値をこして，$\delta_{01}\cdots\cdots\delta_{0n}$と増加しているから，$\delta_{03}=\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}-\varepsilon$としてよいしたがつて，(1—3)は

$$P_{rn}=P_{on}+2P_{on}\left\{1-\frac{\varepsilon}{\delta_{0n}}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\right\}^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{n}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha \quad \cdots\cdots(1\text{—}5)$$

$\left\{1-\frac{\varepsilon}{\delta_{0n}}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right.=\rho$とおくと

$$P_{rn}=P_{on}\left\{1+2\rho\sum_{n=1}^{n}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha\right\} \quad \cdots\cdots(1\text{—}6)$$

(1—1)を用いると一般に

$$P_{rn}=C_0^{-\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}\delta_{0n}^{\frac{1}{2}}\left\{1+2\rho\sum_{n=1}^{n}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha\right\} \quad \cdots\cdots(1\text{—}7)$$

C_0の値は文献3）によれば$R_B/r=1.02\sim1^1/_3$，$r/R_{L_1}={}^1/_2\sim{}^1/_8$の範囲（通常の単列ラジアル球軸受の場合）では，実際上（R_B/r）のみの函数と考えてよいとして，表—1—2で示されている（この表のC_0を用うるときは単位は（cm・kgを用うること）

表—1—1 $2^K/\pi\mu$の値

$\cos\tau$	$2^K/\pi\mu$	$\cos\tau$	$2^K/\pi\mu$	$\cos\tau$	$2^K/\pi u$
0	1.0000	0.68	0.8691	0.91	0.6636
0.10	0.9977	0.70	0.8586	0.915	0.6549
0.15	0.9950	0.72	0.8474	0.92	0.6457
0.20	0.9910	0.74	0.8352	0.925	0.6359
0.25	0.9858	0.76	0.8220	0.93	0.6257
0.30	0.9792	0.78	0.8076	0.935	0.6148
0,35	0.9712	0.80	0.7918	0.94	0.6031
0.40	0.9617	0.81	0.7834	0.945	0.5906
0.45	0.9506	0.82	0.7744	0.95	0.5771
0.50	0.9376	0.83	0.7651	0.955	0.5626
0.52	0.9318	0.84	0.7551	0.96	0.5465
0.54	0.9256	0.85	0.7446	0.965	0.5289
0.56	0.9190	0.86	0.7334	0.97	0.5088
0.58	0.9120	0.87	0.7215	0.975	0.4860
0.60	0.9045	0.88	0.7087	0.98	0.4593
0.62	0.8965	0.89	0.6949	0.985	0.4266
0.64	0.8880	0.90	0.6799	0.99	0.3836
0.66	0.8789	0.905	0.6720		

表—1—2 C_0の値

R_B/r	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07
$C_0\times10^5$	6.076	6.698	7.166	7.538	7.851	8.121
R_B/r	1.08	1.09	1.10	1.20	$1\frac{1}{3}$	
$C_0\times10^5$	8.357	8.571	8.754	10.002	10.884	

(4) C_0の実用式

C_0の値は$R_R/7=1.02\sim1^1/^3$，$7/_{RL_1}=^1/_2\sim^1/_8$の範囲において1－2表の値となるが，この範囲においては実用式として，次で十分であり，最大誤差は約1.6%である。

$$C_c=6.076+9.586\left(\frac{R_R}{r}-1.02\right)^{0.594}+0.54\sin\left\{10.004\left(\frac{R_R}{r}-1.02\right)\right\}+0.08\sin\left\{20.009\left(\frac{R_R}{r}-1.02\right)\right\}\cdots(1\text{—}8)$$

表--1--2のC_0値との比較は表－1－3に示す。

表－1－3　実用式によるC_0の値

R_R/r	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07
$C_0\times10^5$	6.076	6.698	7.166	7.538	7.851	8.121
$C_0'\times10^5$	6.076	6.7519	7.1222	7.4301	7.704	7.9528
$C_1\times10^5$	6.079	6.7679	7.1535	7.4754	7.7616	8.0203
R_R/r	1.08	1.09	1.10	1.20	$1^1/_3$	
$C_0\times10^5$	8.357	8.571	8.754	10.002	10.884	
$C_0''\times10^5$	8.185	8.400	8.602	10.063	10.884	
$C_0''\times10^5$	8.2597	8.4789	8.682	10.0264	10.884	

但し　C_0'は（1—8）式の最後の項を無視した場合
　　C_0''は（1—8）式による

3．一般式の考察と #6206 軸受についての計算結果

〔1〕 ε/δと負荷分布

一般式(1—6)すなわち第n球まで接触したときに成立する次式においてε/δと負荷分布の関係をしらべてみる。

$$\left.\begin{aligned}&P_{rn}=P_{0n}\left\{1+2P\sum_{n=2}^{n}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha\right\}=C_0^{-\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}\delta_{0n}^{\frac{3}{2}}\left\{1+2\rho\sum_{n=1}^{n}\cos^{\frac{5}{2}}n\alpha\right\}\\&P=\left\{1-\left(\frac{\varepsilon}{\delta_{0n}}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\right\}^{\frac{3}{2}}\\&\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}-\varepsilon<\delta_{0n}<\frac{\varepsilon}{\cos(n+1)\alpha}-\varepsilon\end{aligned}\right\}\cdots(2\text{—}1)$$

(1)　$n=0$　すなわち頂上球のみ負荷されたとき(2—1)より

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{\delta_{00}}>\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\\&P_{r0}=P_{00}=C_0^{-\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}\delta_{00}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\text{—}2)$$

(2)　$n=1$　すなわち左右第1球まで負荷されたとき

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}<\frac{\varepsilon}{\delta_{01}}<\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\\&P_{r1}=C_0^{-\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}\delta_{01}^{\frac{3}{2}}\left(1+2\rho\cos^{\frac{5}{2}}\alpha\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\text{—}3)$$

(3)　$n=2$　すなわち左右第3球まで負荷された場合

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos3\alpha}{1-\cos3\alpha}<\frac{\varepsilon}{\delta_{02}}<\frac{\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}\\&P_{r2}=C_0^{-\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}\delta_{02}^{\frac{3}{2}}(1+2\rho\cos^{\frac{5}{2}}\alpha+2\delta\cos^{\frac{5}{2}}2\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\text{—}4)$$

一般の球軸受について計算をすすめるため，全球数$Z=6\sim12$についてn，αを計算すると表－2－1のようになり，上述の(1)～(3)迄考えれば十分であることがわかる。

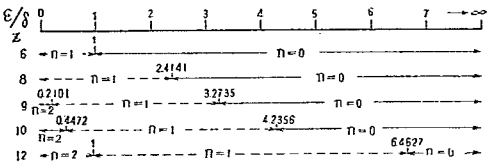
表—2—1　n,αの値

Z	最大接触個数※1	nのとり得る最大値※2	α
6	3	1	60°
7	3	1	$51\frac{3}{7}°$
8	5	1	45°
9	5	2	40°
10	5	2	36°
11	5	2	$32\frac{8}{11}°$
12	7	2	30。

※1　第1回の状態で上半円に位置する球数

2　$n\alpha<\pi/_2$を満足する即ち負荷を分する最大球数12

したがつ2—1て表より（2—2)～(2—4）の不等辺式によりε/δとnとの関係を示せば図—4のようになる。



図—4

すなわち，組立遊隙を一定におさえると，撓みδの増加とともにε/δは漸次小となり次第に負荷球の数が増加して行く様子と，その接触の範囲がわかる。

〔2〕 ε/δ と ρ の関係

(2—1）式のρはε/δと$\cos n\alpha$との函数であるが，$Z=6\sim12$の範囲において，表—2—1を用いてを算出することができる。

全球数Zとn，ε/δ，δの関係は表—2—2の通りである。

表—2—2　ρの値

Z	n	ε/δ	δ
6	1	<1	$\left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{3/2}$
8	1	<2.4141	$\left(1-0.4144\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{3/2}$
9	1	0.2101～3.2735	$\left(1-0.3055\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{3/2}$
	2	<0.2101	
10	1	0.4476～4.2356	$\left(1-02361\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{3/2}$
	2	<0.4476	
12	1	1.0000～6.4627	$\left(1-0.1577\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{3/2}$
	2	<1.0000	

〔3〕 遊隙 ε，球半径 r，軌道半径 R_R の影響

2章で述べたように，単列ラジアル球軸受の静ラジアル荷重は撓み，遊隙，球半径，軌道半径，$\cos\alpha$，の函数である。

いま一定の軸受についてε，r，R_Rが多少変化した場合について試算し，それぞれの影響を考察することにした。

変化のオーダーについては，製作誤差，組立誤差，摩耗に相当する程度とした。（実用上あるいは実験の推移によるの ε，r R_R，寸法変化の静ラジアル荷重および撓み関係に与える影響を知るためである——当室で行なう寿命試験の供試軸受 #6206 の予備計算として本稿は始められたものである。）

軸受は#6206とし計算に必要な寸法は下記の通り

$Z=9$，$\alpha=40°$，$r={}^{3}/_{16}''=4.7625$mm

$R_R=4.950$mm　$R_R/r=1.039$

実際のrの寸法誤差は非常に小さいが，R_Rについては内径において$^{+0}_{-0.14}$外径において$^{+0}_{-0.10}$となつている。[※1]基準の組立遊隙は10μ[2]として計算をすすめた。

(1) ε の 影 響

εが0～50μの範囲では表—3—1および図—5に示す通りである。ただし，本軸受のカタログによる基本荷重は1010kgであつて，ラジアル荷重の大きい部分では接触の条件が異なつて来るので，数値計算では表—3—1のように，3,000kg程度まで計算してあるが，図—5には，基本重量の約2倍である2,000kgまでとした。[※1]ここに示した寸法は国産某社製品によつた。R_Rの製作誤差が大きいので本研究の結論によれば真円度を害さぬよう一品製についてになるべく均一であり，且つ球軸受の組立の際には余程選択をよくする必要がある。

表—3—1

$R_R=4.950$mm，　$r=0.47625$mm

$\varepsilon=0\mu$の時

P_{R_1}，　P_{R_2}，　P_{R_3}，

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R^3} kg
0	0	0	1
0.0002	3.217	6.522	6.603
0.0003	5.910	11.984	12.133
0.000305	6.060	12.288	12.438
0.001	35.970	72.919	73.824
0.002	101.745	206.262	208.819
0.004	287.786	583.407	590.640
0.005	402.194	788.160	825.446
0.007	666.239	1350.610	1367.360
0.010	1137.585	2306.135	2334.733
0.020	3217.581	6522.681	6603.633

$\varepsilon=10\mu$

P_{R_1}…… $\delta < 3.0541\mu$

P_{R_2}…… $3.0541 < \delta < 47.5871$

P_{R_3}……$47.5871 < \delta$

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0	0		
0.0002	3.217		
0.0003	5.911		
0.000305	6.060		
0.001	35.970	57.356	
0.002	101.746	183.246	
0.004	287.786	550.184	
0.005	402.193	778.051	787.249
0.007	666.238	1306.346	1322.010
0.010	1137.585	2252.999	2280.301
0.020	3217.580	6447.290	6526.346

$\varepsilon=20\mu$

P_{R_1} ····· $\delta < 6.1082\mu$

P_{R_2} ····· $6.1082 < \delta < 95.1742$

P_{R_3} ····· $95.1742 < \delta$

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0	0		
0.0002	3.217		
0.0003	5.910		
0.001	35.970	44.927	
0.002	101.745	162.212	
0.004	287.786	518.303	
0.005	402.194	741.967	
0.007	666.239	1263.056	
0.010	1137.585	2200.773	2226.708
0.020	3217.581	6372.420	6455.089

$\varepsilon=30\mu$

P_{R_1} ····· $\delta > 9.1623\mu$

P_{R_2} ····· $9.1623 < \delta > 142.76$

P_{R_3} ····· $142.76 \quad \delta > \varepsilon$

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0	0		
0.0002	3.217		
0.0003	5.910		
0.0010	35.970	36.862	
0.002	101.745	143.419	
0.004	287.786	487.885	
0.005	402.194	707.138	
0.007	666.239	1220.816	
0.01	1137.585	2147.667	
0.02	3217.581	6298.096	6373.385

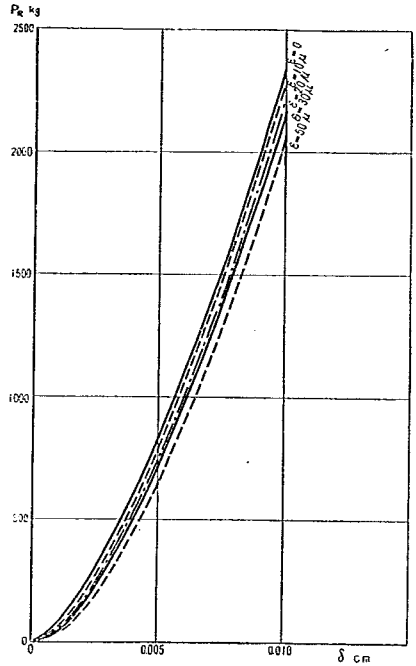
$\varepsilon=50\mu$

P_{R_1} ····· $\delta > 15.2521\mu$

P_{R_2} ····· $15.2521 > \delta > 237.9355$

P_{R_3} ····· $237.9355 > \delta$

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0	0		
0.001	35.970		
0.002	101.745	119.979	
0.004	287.786	431.450	
0.005	402.194	641.339	
0.010	1137.585	2048.792	
0.020	3217.581	6051.370	



(1)　接触球数の変化，すなわち負荷分布の変化　　図－5

εによる接触球の変化は表—3—2 に示す，ε＝30μのとき基本荷重では左右第２球は負荷を分担していない。各球の１箇当りの荷重と全体荷重に対する%を示すと表通りである。

表—３—２

ε ＼ μ	0	10	20	30	50
第１球に接触する δ^{μ}	0	3	6	9	15
第２球に接触する δ^{μ}	0	48	95	143	238

表—３—３

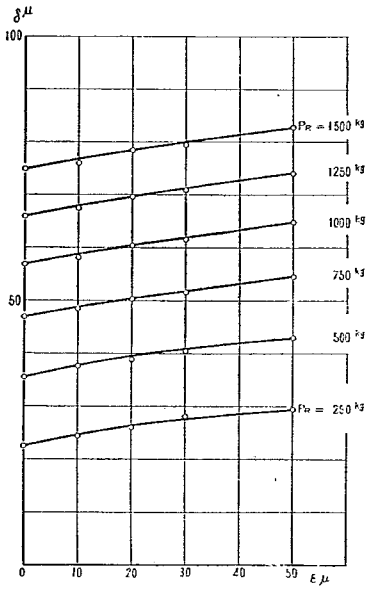
δ	20 μ					50 μ				
ε	0 μ	10	20	30	50	0	10	20	30	50
頂上球	101.7	101.7	101.7	101.7	101.	402.2	402.2	402.2	402.2	402.2
$n=0$	48.7	55.5	62.7	70.9	74.8	49.0	51.1	54.2	56.9	62.7
左右第１球	52.3	40.8	30.3	20.7	9.2	193.0	187.9	169.9	152.5	119.6
$n=1$	25.0	22.3	18.7	14.6	7.6	23.4	23.4	22.9	21.6	19.7
左右第２球	1.3	0	0	0	0	18.6	4.6	0	0	0
	0.7					2.1	0.6			
P_R	208.8	183.2	162.2	143.4	120.0	825.4	787.2	742.0	707.1	641.3
	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0		

ただし，欄中上段は１個当りの荷重 kg を，下段は全体ラジアル荷重に対する%を示す。

頂上球への負荷集中度はδの小さいほど，εの影響がいちじるしく，この軸受の常用荷重の範囲である700kg前後においても（δ＝50μ程度）εの0～50μに応じて49.0%～62.7%の変化がある。軽荷重においては表—3—3のδ＝20μにおいて（荷重120～200kg程度）見られるようにこの傾向はさらにいちじるしい。

(1)　δ－εとの関係

δ－εの関係は図—6に示す。すでに示したようにPR，ε，δの関係からδ—εは直線的ではないが，この図から，大体直線的に同一荷重においては，εの増加とともにδが増加すると考えてよい。



図—6

(2)　r　の　影　響

RR＝4.950mmを一定としrを4.7525mmに変化した場合rの変化Δrがεに加わつた場合（すなわちある組立遊隙に対し，rの摩耗量2Δrが加わつたと考えて）の計算値を表—3—4および図—7に示す，r単独の影響を見るには，rを変化させずεのみを変化させた表—3—1の数値と比較すればよい。両表および図—5図—6の比較の結果，同一のεについては，Δrの影響が殆んどなく（ε，r）のPR—δ関係は（ε，r—Δr）と同一と考えてよいことがわかる。

(3)　RR　の　影　響

r＝4.7625mmとし，RRを4.950－4.960mmに変化した場合についての計算値は，表—3—5および図—7（rの影響と同じ図）に示す。この場合も(2)同様ΔRRの影響はほとんどなく，（ε，RRのPR－δ関係は（ε，RR＋ΔRR）と同一と考えてよいことがわかる。

(4)　rとRRの混合影響

(2)(3)によつて，r，RRの単独の影響を知つた。摩耗の場合においては，r－Δr，RR＋ΔRRとなり，遊隙は，ε＋2(Δr＋ΔRR)となり混合影響の場合は，εは相当大きく変化するはずである。

いま，r＝4,7625mm RR＝4,950mm ε＝10μを標準にとり，r＝4.762mm RR＝4.950～4.960mmに変化変化させるとε＝10～50μの範囲に変化したこととなる。C₀で各r，RRを計算すると，一定と考えてよいので，εのみ10～50μに変化させた場合とまつたく同様と考えてよい。

実際においてはΔr，ΔRR，の相対的大きさはそrの相対速度の大きさがいちじるしく異なることから相当の相違があるであろうが，一様に摩耗さえすれば，その個々単独の影響はいちじるしくなく，組立遊隙のみがRR－δ関係に影響すると考えてよいであろう。

したがつて，軸受の製作についてもr．RRの公差をあまり厳密におさえる必要はなく，むしろ真円度，球径の均一性を厳密にし，選択を十分にして，同一のεを組み上げることに主力を置くべきであろう。

摩耗においては，もちろん，内外輪の真円度はそこなわれる。たとえば，外輪固定，内輪回転について考えると，内輪は大体均一な摩耗が考えられるが外輪はcosθ（θは2章θのと同様状）に摩耗することが考えられるでのかえつて負荷分担に関しては，静ラジアル荷重を問題にする限りはいくぶん favorite となるであろう。

表—3—4

R_R=4.950mm　　r = 0.47575mm

ε =20μ

P_{R_1} ····· δ > 6.1082μ

P_{R_2} ····· 6.1082> δ >95,1742

P_{R_3} ·····95,1742> δ

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0.001	35.953	44.913	
0.002	101.697	162.158	
0.004	287.648	518.060	
0.005	402.000	741.615	
0.010	1137.040	2199.627	2225.642
0.020	3216.038	6225.992	6299.672

R_R=4.950mm,　　r =0.47525mm

ε =30μ

P_{R_1} ····· δ < 9.1623μ

P_{R_2} ····· 9.1623< δ <142.76

P_{R_3} ····· 142.76 < δ

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	R_{R_3} kg
0.001	35.934	36.825	
0.002	101.642	143.269	
0.004	287.494	487.383	
0.005	401.785	706.398	
0.010	1136.43	2147.034	
0.020	3214.313	6291.760	6367.071

表—3—5

R_R=4.950mm　　r=0.47575mm

ε =30μ

P_{R_1} ····· δ < 9.1623μ

R_{R_2} ····· 9.1623< δ <142.7613

P_{R_3} ·····142.7613> δ

δ cm	P_{R_1} kg	P_{R_2} kg	P_{R_3} kg
0.001	35.953	36.844	
0.002	101.697	143.346	
0.004	287.648	487.645	
0.005	402.000	706.777	
0.010	1137.040	2148.119	
0.020	3216.038	6295.587	6370.968

$R_R=4.950\text{mm}$ $r=0.47525\text{mm}$

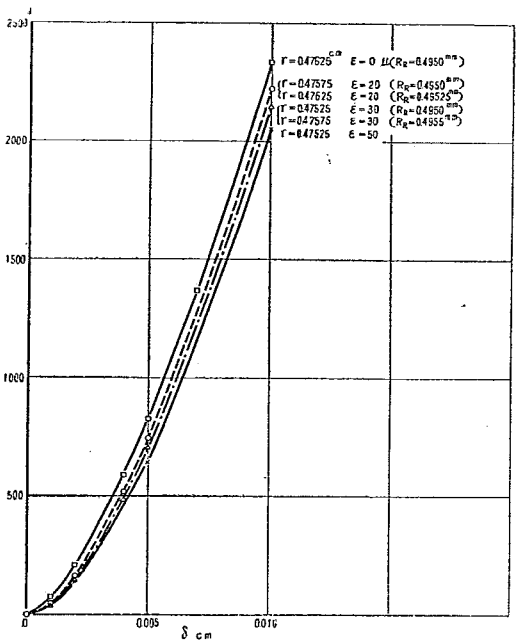
$\varepsilon=50\mu$

P_{R_1} ····· $\delta < 15.2521\mu$

P_{R_2} ····· $15.2521 < \delta < 237.9355$

P_{R_3} ····· $237.9355 < \delta$

δ cm	P_1R kg	P_2R kg	R_{R_3} kg
0.001	35.953		
0.002	101.697	140.477	
0.004	287.648	431.242	
0.005	402.000	641.002	
0.010	1137.040	2047.911	
0.020	3216.038	6148.454	



図—7

4. む す び

本研究によつて得られた結果を総括すると，

(1) 単列ラジアル球軸受の静的にラジアル荷重のみ受ける場合のラジアル荷重，撓み，組立遊隙の一般関係式を得た。

(2) 上記関係式を用い，#6296によつて遊隙，球径，軌道溝径の微少な変化(一般に，摩耗あるいは製作誤差に相当する程度)の静的ラジアル荷重ならびに撓みに及ぼす影響をしらべ，次の傾向を知つた。

(i) 遊隙の影響は，比較的いちじるしく，殊に頂上球への荷重集中は軽荷重において遊隙の増大とともにいちじるしく大きくなる。

（ii） 微少な球径の変化は無視し得る。

（iii） 微少な軌　道径の変化は無視し得る。

（iv） 球軸受の製作にあたつては，球径の公差を現在以上に大きくとつてもよい。[*1]ただし，均一寸法のものの選択を厳密にし，組立の際に遊隙を一定の基準内に収めるようにすればよい。

（v） 摩耗限度の設定，あるいは，実際機械に使用する場合，交換時期の判定は一々球径，軌道径を測定する必要がなく，組立遊隙のみによればよい。

（vi） 以上，静ラジアル荷重についてのみの結論であるが，動荷重については，遊隙の影響は，回転数および荷重の大きさと変動状態とに関係があり，回転数の増大とともに，いちじるしく大となるので，遊隙の影響は回転数と関係づける必要があるが，球径，軌道径の微少な変化は無視し得ると推論してよいであろう。（摩耗限度の設定は，荷重の大きさおよびその変動の状態，回転数，組立遊隙をパラメーターとすれば十分であろう）。

なお，数値計算は性能研究室大杉武君が担当した。深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

1） 建設省土木研究所沼津支所　性能試験資料31—16

2） 〃　〃　31—19　31—20

3） 青木保雄　球軸受の静止摩擦に関する研究（其の1）精密機械XVII

[*1] 軌道径の寸法公差は既述の通りである。球についての公差は通常非常に小さい。公差と真円度とは厳密に分離して考える必要がある。

放射性同位元素を使用した地下水調査報告

——玉川温泉における地下溶透除毒工法に関する調査——

建設技官　有　泉　　昌
建設技官　近　藤　　紀
建設技官　森　　芳　徳

(昭和 32 年 9 月)

A Report on the Research of Movement of Underground Water with Radioisotopes

—Investigation of the treatment of acid water by chemically dissolving method at Tamagawa Hot Spring—

(September 1957)

A. Ariizumi
O. Kondou
Y. Mori

Synopsis:

Tamagawa Hot Spring, situated at Akita Prefecture, is famous for its acidity. It gushes off 1.2×10^7 litres a day of hot water of which temperature is 98°C, pH is 1.0 and chlorine content is 2.9 g/litre. This hot and strongly acid water based mainly on hydrochloric acid flows down to Tamagawa River.

Thus, since olden times, Tamagawa River has been giving a great disadvantage to economical development of its Valley.

In recent years, Akita Prefectural Office has constructed a channel close to the jet of this hot spring for the purpose of decreasing the acidity of Tamagawa River by taking in this hot spring water to pour it into the wells already settled at the hillside near Tamagawa Hot Spring.

Since this deacidification method proved very effective, the development of this method is now under consideration. In August and October, 1956, the writers performed field tracing experiments at the deacidification area of Tamagawa Hot Spring using radioisotopes P—32 and I—131 to get a knowledge about the behaviour of this acid water after it was poured into the wells and the mechanism of neutralization of the acid water by soils and rocks lie underground.

In this paper, the writers report about the results of these experiments and also discussed on the mechanism of neutralization.

要　旨

放射性同位元素をトレーサーとした地下水調査。

放射性同位元素をトレーサーとした地下水調査法の体系的確立の為の一段階として，玉川温泉の除毒現場において2回に亘つてトレース実験を行つた。使用したＲＩはI-131とP-32で夫々100mc前後を山腹の温泉水注入井において投入し，直線距離で160～180m離れた川岸の6個の湧出口で検出を行つた。得られた結果を要約すれば次の如くである。

1. 放射能の現われ方は個々の湧出口についても断続的である。
2. 各湧出口には少くとも2～3本の注入井よりの水路が通じている。
3. 放射能が検出されるまでの最短経過時間は8時間である。
4. 検出された放射能は投入ＲＩ量と比較して非常に弱い。

以上の結果及び放射能と並行して湧水のM.O.酸度，塩素イオン濃度の時間的変化より，除毒現場地中の水理地質状態について若干の考察を試みた。

目　次

1. まえがき……(2)
2. 玉川温泉における除毒工法について…(2)
3. 第1回実験……(4)
4. 第2回実験……(13)
5. 結　語……(21)

1. まえがき

従来地下水の追跡には，トレーサーとして塩類及び染料が用いられていた。此の塩類を水理研究におけるトレーサーとして用いる方法は，主としてAllen[1]によつて研究されたものであつて，其後長く水理研究手段として使われていたが，最近の原子力研究の急速な進歩に伴い，放射性同位元素（以下ＲＩと略記する）が大量に，而も廉価に供給出来る様になつた為，此の新しい趨勢が，ＲＩをして従来の塩類トレーサーに取つて代らせようとしている。

ＲＩトレーサー法は塩類トレーサー法に比して，次に挙げる如き利点を有している。

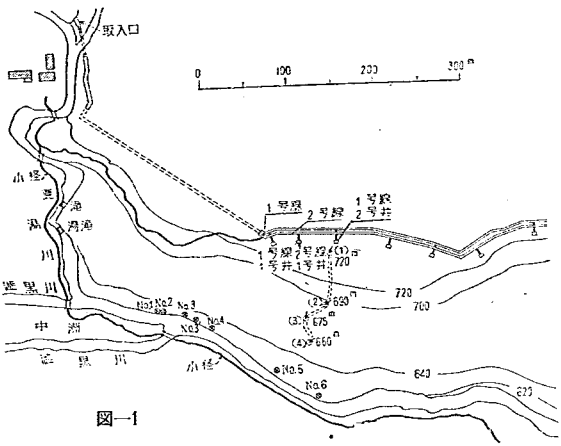
1. 極めて小なる濃度においても検出が可能である。即ち最も頻繁に用いられている放射性ヨード（I-131）について見れば，$1\times10^{-9}\mu g/l$ の濃度でも優に検出が可能である。此の為，ＲＩトレーサー法は塩類トレーサー法によつた場合の，密度流の発生等による流系の撹乱を惹起しない。
2. 検出法が甚だ簡単であり，煩雑な操作を必要としない。検出器が高価なる欠点はあるが，その装置は半永久的に使用可能である。又ＲＩ濃度と検出されるカウント数との間には，殆んど完全な比例関係が存在する。
3. 放射能そのものは，水中に存在する他物質及び微生物の作用による，化学的乃至化学的反応の影響を受けない。
4. ＲＩさへ適当に選択すれば，ＲＩが地中通過の際に受ける土砂，岩石表面への吸着，及び他物質との反応による沈澱の影響を無視出来る程小さくする事が出来る。
5. 測定には必ずしも試料の採取を必要とせず，系の外部より測定が可能である。その為，測定する事によつて系が撹乱される恐れが無い。

ＲＩをトレーサーとして行つた水理実験については，現在迄若干の報告[2)~7)]が提出されており，何れも従来の塩類法では挙げ得なかつた成果を挙げている。我国においても最近各所で堰堤漏水[8)]，伏流水の追跡[9)]にP-32，I-131等のＲＩが使用されており，可成りの成果を挙げている。土木研究所では，今回土木工学分野へのＲＩ利用研究の一環として，地下伏流水トレースを行うこととし，その対象として秋田県玉川温泉を選んだ。当研究所では，現在玉川に築築中の鎧畑ダムの利水効果と関連して，昭和26年度より玉川酸性化の現状及びその将来の見通しについて，玉川流域全般に亘り広汎な水質調査[10)]を行つて来ている為，今回のＲＩ実験には，資料の蒐集及び種々の便宜を得る点から，恰好の場所と目されていたものである。又現地には玉川最奥の部落から20km玉川を遡行した箇所にあり，放射線障害防止の観点からも全く適当の場所である。此の報告は，昭和31年８月と10月の２回に亘り，玉川温泉において行つた実験について記述し，玉川酸性化防止の為に現地にて実施中の，玉川温泉溶透除毒法の効果，将来における該法の持続性等につき検討し，概括的に結論を出したものである。玉川温泉除毒の場合，除毒を受ける温泉水の行動は厳密な意味での伏流水の範疇には含まれないが，此処では便宜上伏流水として取扱つた。尚ＲＩを使用する地下水追跡法に附随した技術的諸問題につき，示唆された点が勿なからずあつたので，之等の点についても併せて言及する。

2. 玉川温泉における除毒工法について

秋田県を貫流する雄物川の一支流である玉川は，全国でも代表的な酸性河川であつて，流域の経済的発展を阻害し，なかんづく農業，発電等においては相当な被害を与えている。その原因は，玉川の最上流部，焼山火山の中腹より湧出する玉川温泉の流下に基づくものであり，当温泉の水素イオン湧出量は13g/secの多量に上る為，流域における被害甚だしく，天保以前の古くから毒水防止対策が講ぜられたものである。現在では，昭和31年より継続されている三浦[10)]の特許になる毒水地下溶透法によつて，大体満足すべき効果を持続している。現在実施中の除毒工法は，井を穿つて温泉を地下に注入し，地中を滲透通過させつつその間における粘土岩石類の化学反応によつて，脱酸を行うことに主眼を置いているものである。しかし現場附近の地形，及び除毒を受けた温泉水の湧出状況より判断して，滲透毒水が地下水系へ侵入し，又浅層地下水が毒水滲透系に混入，毒水を稀釈，減酸している効果も当然考えねばならない。

図－1 に現場附近の地形を示す。焼山の中腹海抜 756m 地点より噴出する98°C pH 1.0，湧出量 13l/sec



図—1

の温泉水は 300m程流下し，後線の導水路へ取り入れられる。取入口より 400mの導水路を通つて最初の放水口に達し，そこから1230mの導水路終点に至る間，22本の溶透井を以て毒水取入分を全量処理する。溶透井は2m四方深さ3～4mの穴に，表土の落下による井の塡充を防止する為，岩塊を詰めたもので，導水路から7～8m離れて穿たれており，食塩焼土管及び木製樋で導水路より引水している。前述の如く，玉川温泉は pH 1.0 の遊離塩酸に基づく強酸性泉で，且つ高温であり導水路通過中も温度は 70°C を降ることは無い。その為，取入れる温泉水は強腐蝕性であり，毎年導水路の腐蝕破損事故が続出しているのが現状である。

図—1 によつて分る如く，現場は海抜約 700mの山腹であつて，溶透井の最初の6本は毒水の地下注入に最も好適な窪地に設けられている。これ等の溶透井の吸水状態は甚だ良好であつて，10l/sec 迄の注水は完全に滲透させる。しかし温泉湧出量 139l/sec を全部処理する為，注入に最も好適な1号線1号井（以下1－1井と略記する）及び2号線1号井（以下2－1井と略記する）には，井の滲透能以上の注入が屢々行われ，ために注入の一部は地表水として流下する。図—1 にその状態を示すが，注水が一部地表水化されるのは2－1井のみであつて，他は注水量（15l/sec程度）を全部地下へ滲透させているものの如くである。2－1井では 10l/sec以下の注水量では溢水せず，15l/sec になると図—1 の最初の陥没窪地（2m×2m深さ1m，図—1 において(1)で示された凹所）まで溢流し，そこで地下に滲透し，20l/sec の注水になると4番目の滲透口（図—1 における(4)の凹所）迄達する。最初2本の溶透井は，昭和9年より断続的にではあつたが現在に至る22年間注水し続けているにも拘らず，いささかも吸水能の減退を起さない。

溶透井に注入された温度 70°C 以上，pH 1.1（湧出口よりより溶透井迄到達する間渓流水の少量の混入がある。）の温泉水は岩石粘土類と反応しつつ地中を 150m乃至 200m滲透流下し，90% 以上の脱酸を受けた後，図—1 における渋黒川左岸に湧出する。湧出箇所は前掲三浦[1]の報告によれば，昭和27年において 12箇所存在しており，昭和31年7月16日現地にて調査した際にも，湧出箇所には昭和27年における調査報告と比較して全然変動が無かつた。しかし7月末現地を襲つた豪雨により渋黒川は氾濫を起し，河床の洗掘，河岸の削剝，山腹斜

表—1　渋黒川左岸の湧出口

31年7月16日			31年8月23日			備考
湧出口 No.	水温 (°C)	流量 (l/sec)	湧出口 No.	水温 (°C)	流量 (l/sec)	
1	16	9	——	——	——	削剝により消失
2	16.5	27	1	26.6	3.2	約1m削剝され湧出位置が30cm程上昇した。
3	17	30	2	29.5	2.0	
4	23	2	3	30.6	0.2	
——	——	——	3′	34.1	0.2	積が剝られて出現
5	19	2	4	36.8	0.7	湧出岩盤露出
——	——	——	5	36.9	0.5	表層土砂流去せられて出現
6	15	0.2	6	42.0	0.3	湧出岩盤露出
7	18.5	9	——	——	——	大崩壊を起し消失
8	11.5	2	——	——	——	岩盤約2m程削剝を受け消失
9	11	10	7	18.4	4.6	

面の土砂崩壊等甚だしく湧出箇所に相当の変動が生じた。その変動状況を表−1 に示す。表一における8月の調査による湧出口 No.1 と No.2 とは同一の湧出水源によるものであつて9mの距離で隔たつており，その間には総量 2l/sec 程度の湧水が小流状となつて一面に分散流下している。湧出口 No.3 と No.4 の中間部，渋黒川の河床に湧出口郡が存在しているのを発見したが，急流の為調査出来なかつた。他にも河床に未発見の湧出口が存在していると考えられる。湧出口 No.3, No.4, No.5, No.6, は夫々岩盤の裂罅に存在するものであつて，表−1 よりも分る如く相当の温度を有し，湧水の流下線に沿つてゲル状のシリカと共に硫黄が析出している。尚渋黒川の右岸について湧出口を探索した処，全然発見出来なかつた。

表−2 注入水及び湧出水の水質比較表

湧出口	水温 (°C)	流量 l/sec	PH	$[Cl^-]$ eq/l	$[H^+]eq/[Cl^-]eq$	P (ppm)	I (ppm)	Q	Q′	地下水が占める割合
注入水	70〜75	17.0	1.1	8.1×10^{-1}	1.053	0.70	7.7			
No. 1	26.6	3.2	2.8	2.0 〃	0.070	——	——	98	93	75
No. 2	29.5	2.0	2.8	2.4 〃	0.054	0.01	1.3	98	95	70
No. 3	30.6	0.2	2.8	2.3 〃	0.061	——	——	98	94	72
No. 3	34.1	0.2	2.6	2.5 〃	0.104	0.09	1.0	97	90	69
No. 4	36.8	0.7	2.4	3.3 〃	0.109	0.21	1.5	95	90	59
No. 5	36.9	0.5	2.4	3.7 〃	0.100	——	——	95	91	54
No. 6	42.0	0.3	2.4	5.5 〃	0.067	0.62	2.1	95	93	32
No. 7	18.5	4.6	3.5	2.1 〃	0.019	——	——	99.6	98	74

表−2 に溶透井への注入温泉水と，渋黒川左岸の湧水との水質比較値を挙げる。此の表では脱酸効果 Q は

$$Q=\frac{(\text{注入水の}[H^+])-(\text{湧出水の}[H^+])}{\text{注入水の}[H^+]}\times100$$

として計算されてあるが，これは正確な意味での脱酸効果ではなくて，地下水の混入による稀釈効果も含まれている。$[H^+]/[Cl^-]$ の変化は，地下岩石類による Cl^- の固定を無いものと仮定すれば，より正確な意味での脱酸効果を表わすと考えられる。今

$$Q'=\frac{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{\text{注入水}}-\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{\text{注入水}}}{\left(\frac{[H^+]}{[Cl^-]}\right)_{\text{湧出水}}}$$

とし

1) 地中で毒水を稀釈する地下水には Cl^- は含まれていない。

2) 毒水中の Cl^- は地下岩石類との接触によつて消費されない。

の2つの仮定を設けた場合，常に $Q\geqq Q'$ であり，又湧出水中に地下水の占める割合 P は

$$P=\frac{[Cl^-]_{\text{注入水}}-[Cl^-]_{\text{注入毒水}}}{[Cl^-]_{\text{湧出水}}}$$

で示される。

湧出口附近より約4粁程下流の五十曲で渋黒川の運び去る Cl^- 量を測定した結果 (2) によると，此の量は玉川温泉より供給される Cl^- 量に殆んど一致している事が判明しているが，このこと及び注入水と湧出水間の関係から考えると，注入された毒水のごく一部分が図−1 に表示されている渋黒川左岸に湧出するものであつて，他の大部分のものは河床又は山腹に存在し未発見である湧出口群より湧出するものであつて，毒水が再び地表に現われる見込が無い程深く地下水脈中に滲透している事は先づ無いと考えられる。

3. 第 1 回実験

〔1〕 実験目的

第一回の実験においては先づ RI によつて 200m 近くの距離に亘る滲透水を追跡出来る事の確認に主眼を置き，併せて RI の流出時間から除毒地域の地中状況の推定を試みることにした。

〔2〕 RI の選択

地下水のトレーサーたる役目を果す RI は，次に挙げる条件を満足していれば理想的であると考えられる。

1. 水溶性であること。
2. 地中通過の際に岩石土砂類によつて受ける吸着が可及的少ないこと。

3. 水中に存在する物質及び微生物により化学的乃至生化学的反応を起し，途中で固定されないこと。
4. 高エネルギーの放射線を放出すること。
5. 適当な試薬によつて完全に沈澱すること。
6. 実験の目的にはＲＩの半減期は或る程度長い事が望ましいが，飲用に供せられる地下水を汚染する危険性を考慮して，その半減期一特に有効半減期一が，実験に支障を来さない程度に短い事が必要である。

実験に使用するＲＩとしては表—2 に記載されている分析値より，此の場合充分使用可能であると考えられるところの，Ｉ—131，Ｐ—32 を選んだ。又此の２種のＲＩは従来地下水探査には頻繁に用いられているものであつて，此の場合において長所として次の点が考えられる。

1. Ｉ—131 はヨウ化ナトリウム，Ｐ—32は正リン酸として何れも溶液の形で入手出来，之等 $\overset{*}{I}^-$，$P\overset{*}{O}_4^{---}$ の放射性イオンは，玉川温泉水（Fe^{++}86ppm，を含有）中ではＰＨ＜3.0で安定であつて，湧出水のｐＨ値は湧出口 No.7 を除いて此の条件を満足している。I^-，PO_4^{---} は注入水，湧出水に共通に含まれているイオンであつて，表—2 によれば，温泉水溶透径路中におけるＩ⁻損失は，湧出口No.2 においてさえ高々60%，PO_4^{---} の損失は湧出口 No.2 にて最大であるがそれでも 0.01ppm は湧水中に現われる。此の為溶透井で投入されたＲＩが湧出口に現われる事は充分に期待出来る。
2. 核壊変様式は表—3 の如くであつて

表—3　Ｉ—131，Ｐ—32 の放射線エネルギー及び其等の分布百分率

Ｉ—132				Ｐ—32	
β		γ		β	
0.250Mev	2.8%	0.080Mev	2.2%	1.70 Mev	100%
0.335 〃	9.3〃	0.163 〃	0.7〃	（γ線はない）	
0.608 〃	87.2〃	0.284 〃	5.3〃		
0.815 〃	0.7〃	0.364 〃	79.8〃		
		0.637 〃	9.0〃		
		0.722 〃	3.0〃		

いずれも検出効率の高い放射線を出す。

3. 沈澱形として測定する場合を考えると，I^-，PO_4^{---} は簡単なる操作で殆んど定量的に沈澱する。即ち I^- は硝酸銀によりヨウ化銀，又は塩化パラヂウム，ナトリウムによりヨウ化パラヂウムとして沈澱し，PO_4^{---} は硝酸酸性溶液中でモリブデン酸アンモン溶液を加えることによつてモリブデン酸リン酸アンモニウムとして完全に沈澱する。又注入水はFe^{++}を含み還元性である為，I^-が酸化を受けIO_3^-になる事は無い。
4. 有効半減期はＩ—131…8.0 day，Ｐ—32…14.0 day で短く，又飲用水中における之等ＲＩの最大許容濃度[13]は，Ｉ—131…$3\times10^{-5}\mu c/ml$，Ｐ—32…$2\times10^{-4}\mu c/ml$ である。今 100mc のＲＩを考える時，之を稀釈して飲用可能な状態に迄するには，Ｉ—131については，3300m³，Ｐ—32については500m³の水を要することとなり，此の量をＲＩ流出が行われる渋黒川の渇水期流量 1m³/sec と比較して，之等ＲＩの許容濃度以下の稀釈は充分起り得る事が出来る。

尚実際使つたＲＩは入手の都合上Ｉ—131 だけとなつた。

〔3〕 携 行 用 具

1. 科研製２進式サーベイメーター１台

神戸工業製液浸型ガイガーチューブβ線用ＧＭ—413 及びγ線用ＧＭ—416 に接続可能なる如く内部を改造。

2. 科研製サーベイメーター３台，プローブ液浸可能にする為，ポリエチレン製プローブカバーを装着。
3. ポリエチレン製採水瓶 300本
4. 水質分析用器具及び試薬
5. 流速計
6. 野営及び照明用具

〔4〕 実 験 方 針

ＲＩ流出所要時間の大体の目安を得る為，ＲＩ投入前に溶透井において注入量を変化させる事によつて生じる湧出口での湧水量及びその水質の変化を調査し，時間を置いて注入水，湧出水間に平衡状態の成立を確認した後，１—１井にＲＩを投入し，直ちに渋黒川左岸の湧出口にて湧水中にサーベイメーターのプローブを浸漬し，測定

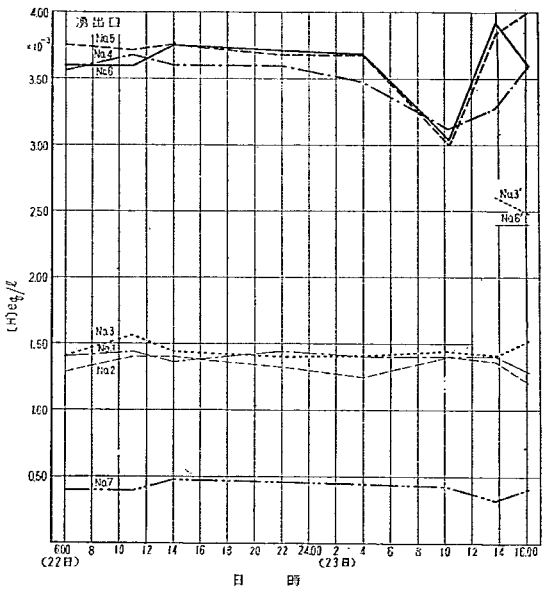
を行うことにした。測定時間々隔は15分程度とし，放射能が検出され始めたら採水瓶に試水を詰め，その一部は2進式ガイガー計数器で測定を行う一方，残部を実験室へ送附し精密測定を行う事とした。精密測定は先ず試水に担体としてヨウ化ナトリウムを加え，硝酸銀溶液で塩化銀とヨウ化銀の混合沈澱を造り，試料皿に入れて乾燥し，100進式ガイガー計数器で測定する方針に従う予定とした。

〔5〕実験経過

溶透井への導水路は，実験開始の8月20日には2－2溶透井迄が改修を終つており，8月初より30l/secの流量で毒水を取入れていた。8月20日現地到着後〔4〕で述べた如く，毒水の地中滲透速度の大体の目安，注水開始後平衡状態に達する迄の所要時間を求める目的で17：00に取入口を締め切つた。翌21日は主として湧出口附近の調査，湧水の水質分析を行い，22日，7：00取入口を開門，流量17l/sec（携行した流速計で実測）で毒水を取入れた。此の取入れた毒水を1－1井に，4l/sec 井に分けて注入した。湧水の水質，湧出口附近の調査は23日6：00迄行つたが，その結果は次の如くであつた。

1．水温は調査時間中全然変動しなかつた。

2．湧水量の変動を調べる為，湧出箇所において湧水が溜溜している凹所に水位標を立て，流水量の変化による水位の微少な変化を読み取る装置にしたが，水位には全然変動を生じなかつた。従つて湧出量には殆んど変化は生じていなかつたと推定された。



図—2　メチルオレンヂ酸度の時間的変化

3．メチルオレンヂ酸度の変化は図—2に示す如く湧出口，No.4，No.5，No.6で通水開始後27時間で顕著な減少を起している。

4．Cl量は図—3に示す如く湧出口，No.1，No.5，No.7にて通水開始後10時間で変化が生じている。

3によると酸度の減少が注水停止の影響の現われだと見た場合，この顕著な減少は注水停止後65時間を経過した後である。又4からCl⁻量の僅かの増加が注水再開の影響であるとすれば，この現象は注水再開後僅か10時間で現われている。即ち湧出口 No.1，No.7では注入水が湧出口への到達するには10時間を要し，同じく，No.4，No.6 では65時間を要することになるが，何れも信憑性には欠けるものであり，大体の目安として考慮しておくに止めた。2－1溶透井への注水量13l/sec は井の滲透能を超えるものであつて，半量は溢流し図—1 (1)の窪地に到達し此処で最終的に地下に滲透していた。これより先の溢流跡について調査したが，全然溢流している模様は見受けられなかつた。溶透井への注水を38時間停止していたにも拘わらず，湧出口における湧水量が殆んど一定量を持続していた事については以下の事柄が考えられる。

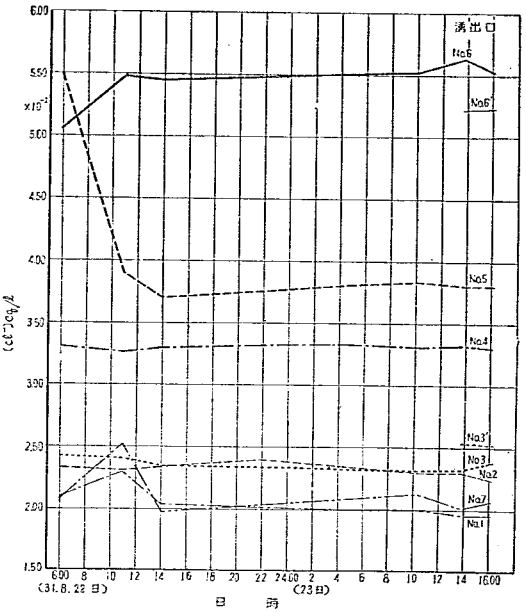
1．除毒現場の地下は注入量に比して多量の既注入毒水によつて飽和されており，これに地下水の供給が緩衝的に作用する。それ故，注水の再開によつても湧出量に直接の影響を及ぼす水頭差には変動を起し得なかつた。

2．滲透水が地下通過の際に受ける抵抗は非常に大である。

3．地下における毒水の滲透速度が甚だ小なる為，注水停止の影響は非常に緩衝された後，相当後になつて現われる。

RI投入は注入水の滲透湧出が平衡状態を維持し始めてからという予定にしていたが，実験期間が限られている事，RIの減衰速度が大なる事等の理由の為，平衡状態に到達した確実な証拠は摑めないまま翌朝24日にRI

投入することにした。24日取入口における流量は17l/sec, 各溶透井への注入量は1—1井に4/sec, 2—1井に13l/secと前と同じで9：50 I—131 75mcを2—1井に投入した。(I-131 8月20日1：00において100.mcの中の¾) 10：30より渋黒川岸の各湧出口にて湧水の放射能測定を開始した。測定は3合のG—Mサーベイメーターにより，各湧出口より一定時に採水して来た容器に，ビニール製のカバーで被つたプローブを挿入し，時定数10秒で30秒後の読みを記録した。測定時間々隔は湧出口 No. 2, No. 3, No. 4, No. 5, No. 6 については15分，No.7については2時間とし翌朝7：00に至つたが，サーベイメーターには全然放射能が検出された証拠は現われなかつた。此の為I—131は既に大量の水に稀釈されされて流出したものか，又は流出に4, 5日以上を要するものであると考えて，更めて1—1井に残余25mcを25日に投入，サーベイメーターにて測定の傍ら，2進式ガイガー計数器に β—線用液浸型G—Mチューブを接続し，より精密に放射能を測定し，又一方試水はポリエチレン製瓶に詰め，実験室に送つて精密測定を行う事にした。かくして採水及び測定（1時間々隔）を28日 7：00迄継続し実験を終了した。



図—3　塩素イオン濃度の時間的変化

現地より実験室に送附した約 300個の試水中のI—131は，次の操作で測定した。

1. 現地で採取した試水は，表—2 に示す如く Cl^- を多量に含んでいるものである故，試水に担体としてヨウ化ナトリウムを添加した後硝酸銀溶液を加え，I—131 を塩化銀と沃化銀の混合沈澱に含ませて測定した。即ち，I—131 より放出される 0.61Mevのβ-線強度の正確な対照を得る為，(γ-線はβ-線と比較して透過力が比較にならない程大であるから，此処では問題としない) 担体として試水に加える 5 mg のヨードの他に，測定用沈澱が 0.61Mevの β-線に対応する飽和厚を越える程度に試水に Cl^- を補充し，塩化銀で以て飽和厚を越える厚さの沈澱を造ることにした。補充すべき Cl^- 量の計算は Glendenin[14] によつて提出された式を用いて次の様にして求めた。

β-線の飛程 R は $R=0.407\ E^{1.38}$ $(0.15<E<0.8Mev)$ なる式で表わされる。此処でEは Mev 単位である。I—131 についてはβ-線のエネルギーは 0.61Mevと見做されるから $E=0.61$ と置いて

飛程　$R=0.206 g/cm^2$

沈澱濾過用グラスフイルターの底部直径によつて規定される沈澱表面積は $2.0cm^2$ であるから，必要な沈澱の重量 P は $P=0.206(g/cm^2)\times 2.0(cm^2)=0.412g$ である。

5mg の担体としてのヨードによるヨウ化銀沈澱量は

$$\frac{5}{1000}\times\frac{127+108}{127}=0.009g$$

よつて必要な塩化銀重量 M は

$$M=0.412-0.009=0.403\ (g)$$

試水中に必要な Cl^- 量 M' は

$$M'=0.403\times\frac{35.5}{108+35.5}=0.0997g$$

試水を 50c.c使うものとしてそれが含有すべき Cl^- 濃度は

$$[Cl^-]=0.0997\times\frac{1000}{50}\times\frac{1}{35.5}=0.056eq/l$$

それ故試水中の〔Cl⁻〕を0.056Nに統一し，この試水 50c.cをとり，その中に含有されている Cl⁻ と I⁻とを全量完全に沈澱させるに足るだけの硝酸銀溶液を加えて，塩化銀とヨウ化銀の混合沈澱を造り，ガラスフイルターで濾過し測定試料を造つた。

2．放射能測定は神戸工業KK製100進式G—Mカウンター SC—100A型を使用した。特性は次の如くである。

最適作動電圧　1300V

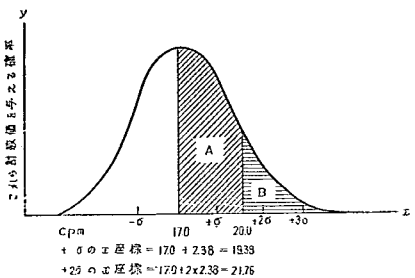
自然計数　　17.0 cpm

測定はプローブのマイカ膜を露出させ，スタンド最上段で各3分間行つた。

バック・グラウンドの原因である宇宙線の入射及び放射壊変の頻度分布が，ガウス正規分布に従うと仮定した場合，3分間の測定によつてバックグラウンドの標準偏差 σ は下記の値となる。[15]

$$\sigma=\sqrt{\frac{17.5}{3}}=2.38$$

放射能存在の目安として試料の数計値が20cpm以上のものを取るとすれば，放射能が存在しない試料即ち下図に示した如き計数値分布を有する試料の中，20cpm以上の計数値を与えるものの全体に対する割合は，図—4の $x\geqq20$ なる x の領域において，分布曲線と x 軸とによつて囲まれた部分の面積Bの全体の面積に対する比に等しい。即ち $x=20$ の点は σ 単位で表わすと



図—4　バックグランドの計数値分布曲線

$$\frac{20.0-17.0}{2.38}=1.25$$

であるから曲線が囲む全体の面積を1とすれば $17\leqq x\leqq20$ の領域で曲線及び x 軸で囲まれる面積Aは

$$\int_0^{1.25}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.39430$$

Bの面積$=0.5-0.39435=0.10565$

よつて放射能が存在しない試料の内，11%弱が誤つて放射能が存在すると見做されるに過ぎない。今選別基準を20cpmに置いた場合，核壊変に基づく放射能が10cpmである試料が20cpm以下の値を与えて，誤つて放射能を見逃す確率 P（図—5における A部分の面積）は前と同様な操作で

$$\sigma=\sqrt{\frac{17.0}{3}+\frac{10}{3}}=3$$

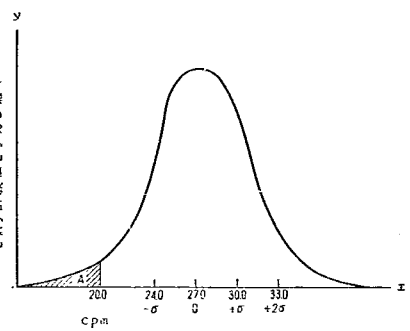
$$P=0.5-\int_0^{2.33}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.0099$$

即ち試料の内1%が選別洩れするに過ぎず選別基準としての 20cpm は，統計学的な見地から妥当な値である事が云える。

3．現地から持ち帰つた74個の試水について，1.に述べた方法により放射能を測定した処，試料選別基準20cpmを越えた値を与えたもの47ケを得た。現地で神戸工業製液浸型G—MチューブGM—413 を2進式カウンターに接続して測定した結果では，僅か1ケについて91cpmの試数値を記録したに過ぎなかつたものである。

47ケの内訳は次の如くであつた。

20cpm	27
21	9
22	4
23	5
22	1
121	1
計	47



図—5　10cpm の放射能を有する試料の計数値分布曲線

4. 1の操作で造られた試料は 0.61Mevの β-線の飽和吸収厚を充たす程度の厚みを有するので，試料の自己吸収により放射能が可成り減弱している。此の測定試料中に含まれる放射能には全く寄与しない塩化銀による I---131 よりの β-線の強度損失は，次の如くとして計算出来る。

β-線の強度は大体においてそれが通過する物質の厚さ（g/cm² 単位）の指数函数的に減衰するものであると考えられるから，t なる厚さを通過後の β-線強度を I とすれば

$$I=I_0e^{-\mu_m t}$$

μ_m：質量吸収係数（cm²/g）

ここで t：試料厚さ（g/cm²）

I_0：吸収を受けない前の β-線強度

の式が成立する。I—131 の β-線最大エネルギーを0.61Mev（実際は0.81Mevの β-線も混在するのであるが，その壊変確率が 0.7%で極めて小なる為，此処では問題とするに足らない）とすればその 質量吸収係数 μ_m は 34.46cm²/gとなる。試料単位厚当りの放射能を aとすれば，t なる厚さを有する試料の放射能 I は

$$I=\int_0^t ae^{-\mu_m t}dt=\frac{a}{\mu_m}(1-e^{-\mu_m t})$$

で表わされる。

試料自身による自己吸収が無いものとした場合の試料の放射能 I_0 は $I_0=at$ であるから

$$\frac{I}{I_0}=\left(1-e^{-\mu_m t}\right)/\mu_m t$$

ここで $\mu_m=34.46\text{cm}^2/\text{g}$,

$t=0.206\text{g/cm}^2$

を上記の式に代入すれば

$$\frac{I}{I_0}=0.138$$

即ち塩化銀及びヨウ化銀による自己吸収の為，実際に有する放射能が14%以下に減弱されている。此の自己吸収による放射能強度損失の原因を除く為，3に挙げた47ケの試料を 6 Nアンモニア 50c.c.で洗い，試料中の塩化銀を溶かし去り，残つた AgI を濾過して，更めてヨウ化銀のみよりなる試料を造つた。塩化銀溶去により試料の β-放射能が如何程よく検出されるかは次の様にして計算される。

加えた担体ヨードの量　5.4mg

試料の表面積　2.0cm²

ヨウ化銀の 6 N⁻アンモニアに対する溶解度 3×10^{-5} mol/l（15°C）であるから残つたヨウ化銀沈澱の量 M は

$$M=5.4\times\frac{127+108}{127}-3\times10^{-5}\times(127+108)\times\frac{50}{1000}=9.6\text{mg}$$

ヨウ化銀沈澱試料厚

$$\frac{9.6}{2}\text{mg/cm}^2=4.8\text{mg/cm}^2$$

ヨウ化銀の β-線に対する質量吸収係数は殆んど塩化銀に等しい故，前記の式より

$$\frac{I}{I_0}=0.92$$

塩化銀を含む場合の $I/I_0=0.138$ と比較して $\frac{0.92}{0.138}=6.7$ 即ち β-線に関する限り 6 倍以上効率を 高める結果となる。此の操作を施して測定した結果は

cpm	個数
37	1
38～47	12
48～50	3
396	1
	17

であつて前回の測定と比較して30個の試料には放射能が無かつた事が確かめられた。此の30個は放射能を有しない試料数の中 30/（274-17）=0.117 即ち 11.7%を占めるものであり 2，で求めた 10.6%と大体一致している。

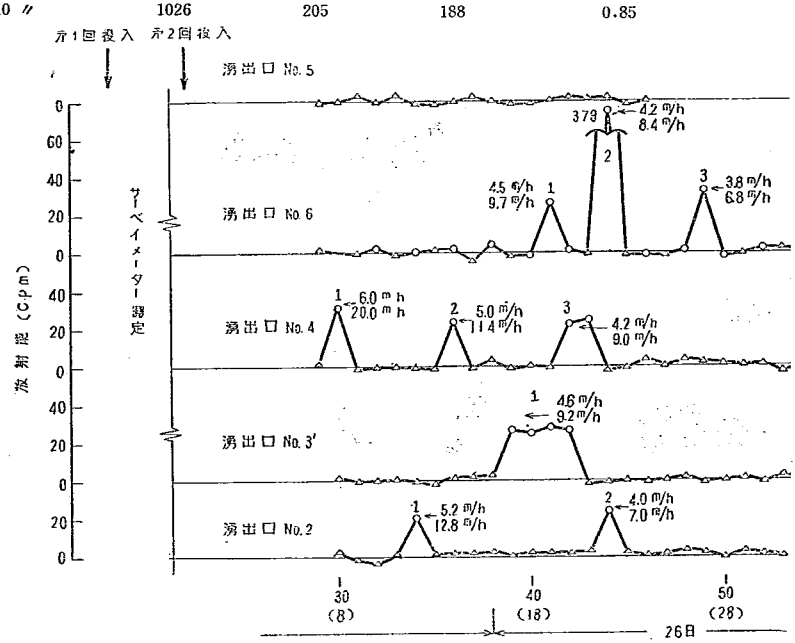
5. 野外用放射能測定器と実験室用放射能測定器との間の感度比較を得る為，現地でのＲＩ第1回投入の際，投入したＲＩの $1/_{200}$ を参考用として分けて置き，それを適当に稀釈してGMサーベイメーター，β-線用液浸型GMチューブGM—413 を装着した2進式携帯用ガイガーカウンターの感度について，現地で試験を行つた。「参考用として保存したＲＩはＩ—131の250μcであつた。」これを1 l に稀釈し，更に 50～1000倍に稀釈した。之等種々の液についてサーベイメーター，2進式ガイガーカウンターの感度を調べた処，次の如き結果を得た。

（3分間測定）

稀釈倍数	濃　度	2進式ガイガーカウンター	サーベイメーター
バック・グラウンド	——	40～50	40～50
50	5μc/l	360±30	130～170
100	2.5μc/l	270±30	100～130
200	1.3μc/l	130±20	70～90
500	0.5μc/l	100±20	50～70
1000	0.3μc/l	80±20	40～60

液浸型β-線用ガイガー管GM—413を接続した2進式ガイガーカウンターで放射能が検出出来る最小濃度は，0.3μc/l であり，サーベイメーターでは少くとも 0.5μc/l 以上ないと検出出来ない事が云える。一方実験室において参考用として持ち帰つたＩ—131 で，放射能濃度 10μc/l の液を造り，これを稀釈して 50c.c. 中に夫々下記の放射能を有する溶液を造り，1と同一の操作で塩化銀とヨウ化銀との混合沈澱を造り，神戸工業製 100進式カウンターのスタンド最上段で5分間測定した。

放射能	counts/5min	cpm	cpm—B.G.	G—M管の効率
1 mμc	213	43	26	1.17%
2 〃	342	68	51	1.15
4 〃	540	108	91	1.02
6 〃	553	111	94	0.71
10 〃	1026	205	188	0.85



図—6　第1回実験ＲＩ流出状況（1956年8月）

15 〃	1353	271	254	0.76
20 〃	1667	333	316	0.71
25 〃	2338	478	461	0.83

此処で

$1m\mu c = 37\text{dps} = 2220\text{dpm}$

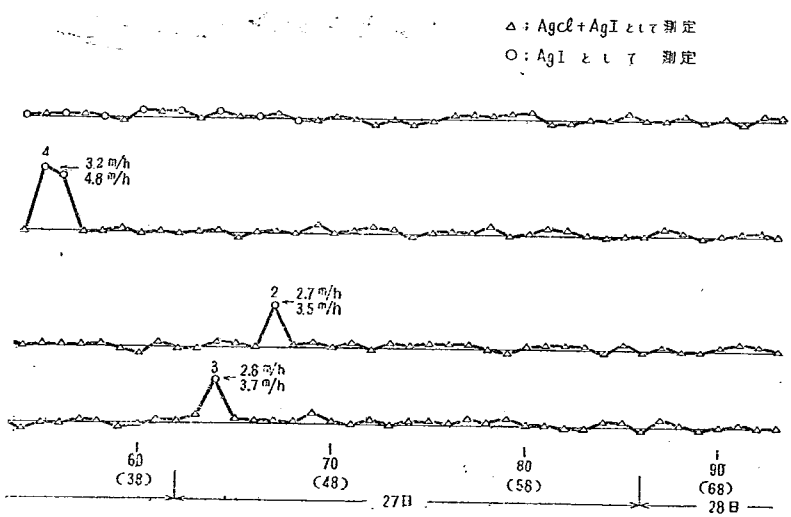
$$\text{GM管の効率} = \frac{m\mu c \text{ 数に対応する(cpm—B.G)}}{2220 \times m\mu c \text{ 数}}$$

50c.c の試水を取つて塩化銀とヨウ化銀の混合沈澱として測定する場合は，此の結果よりⅠ—131 が $1 \times {}^{1000}/_{50}$ $m\mu c/l = 20m\mu c/l$ の濃度であれば充分検出し得，更にβ-線の自己吸収影響の除去によつて更に数分の一，$5m\mu c/l$ 程度のものを検出出来るものと考えられる。この値を前述の野外用放射能測定器についての値と比較すれば，これは 60～100倍の感度であつて，湧水を採取し実験室での精密測定に附した方が，遙かに有利な事が此の事から窺える。

〔6〕 結果及び考察

現地から持ち帰つた274ケの試水中，放射能を検出した17ケの試水について，各湧出口別に時間を横軸にグラフを画くと図—6 の如くなる。現地におけるサーベイメーターによる測定データは，凡て自然計数の変動範囲内に止まり，此の値だけによつて放射能存否について考える事は全然不可能であつた為此処では言及しない。図—6 は前述の如く25日15時以降，即ち第1回ＲⅠ投入後29時間経過以後の試水について放射能を測定した結果であつて，それ以前のものについてはサーベイメーターの検出限界以下の弱放射能は，検出出来ぬまま見逃していた事も考えられる。図—6 より検出が容易だと考えられる湧出口 No.6 より，379cpm の放射能が検出されているが，これは標準試料との比較試験によると，ＲⅠの第1回投入分が 84m³ に，又第2回投入分が 21m³ に稀釈された結果になる。

図—6 に現われた12のピークについて，ＲⅠ投入口より湧出口に至る溶透水径路が直線であると仮定してその直線距離を算出し[16]，（計算結果を表—4 に示す）溶透水の地中滲透速度を求めたものがピークの右肩に附した値である。上段はＲⅠの第1回投入分が現われたものとしての計算値，下段は同じく第2回投入分についてである。毒水滲透部の土質を大体において均一であると仮定する時，土砂の空隙率及び透水係数は一定と見做し得るから，毒水の滲透速度には甚だしい差異は無い筈である。之等12個のピークは夫々ＲⅠの何れの回の投入分に因



表—4　1. 注入井と湧井口間の直線距離（m）

湧出口	No. 2	No. 3	No. 3′	No. 4	No. 5	No. 6
1—1号井より	154	156	157	160	179	184
2—1号井より	178	178	178	179	185	186

2. 注入井と湧出口間の標高差（m）

湧出口	No. 2	No. 3	No. 3′	No. 4	No. 5	No. 6
1—1号井より	96	99	102	103	104	105
2—1号井より	92	95	98	99	100	101

るものであるかについては，ＲＩが此の場合同一の経路のものであつた為不明であるが，図—6 に記した滲透速度から大体4.0～6.0m/hr の範囲を持つ値が得られ，これより推定が可能である。即ち滲透速度の方から云えば，湧出口 No. 6 における 379cpm のピークはＲＩ第1回投入分に基づくものである事が云える。

毒水滲透部分における透水係数を湧出口 No. 6についてその放射能最大ピークで得られた値から求めて見よう。

表—4 より湧出口 No. 6 と 2—1 号井との直線距離は 186m，標高差は 101mであるから正弦勾配 i は

$$i=\frac{101}{186}=0.54$$

ダルシーの法則から $v=ki$　即ち $k=1.84v$

ここでvはＲＩ流出速度から判明した実際の滲透速度に滲透部分土砂の空隙率を乗じたものに等しい。空隙率を p と置くと

$$v=pv'$$

v' は実際に観測された速度，即ち 10140 cm/day

又滲透速度は滲透する流体の粘性の逆数に比例する関係が認められるから，粘性係数に関して補正を加え20°Ｃにおける v を求めねばならない。

2—1 号井より湧出口 No. 6 に至る滲透径路中における毒水の平均温度を 60°Ｃ とすれば，粘性に基づく補正係数 c は

$$c=\frac{\eta_{t=60°C}}{\eta_{t=20°C}}=\frac{4.70}{10.09}=0.47$$

即ち　$v=pcv'=4715p$ cm/day

$k=8676p$ cm/day

空隙率　p を 35%とすれば

k=3000 cm/day 程度の透水係数を有するものは，透水部分を砂とした場合にその粗粒率は大体 4.65 程度である。此の値から毒水滲透部分の平均透水係数は 3000 cm/day から大して離れない値の範囲内にあることが大体において云える。

ＲＩの投入は22時間の間隔を置いて前後２回に亘つて行われているので，投入口が異る為に或る程度の時間的ずれが見込まれるであろうが，放射能ピークがこれに対応する時間的間隔を以て見出されている等である。湧出口 No. 2 におけるピーク，２と３間，湧出口 No. 3′ のピーク，１と２間の時間々隔はＲＩ投入の時間々隔に因るものであると思われる。

放射能の出方は最初予期された様な一個のピークを有する分布曲線的なものではなく，断続的に現われる数個のピークより成る事が判明した。尚各ピーク間には全く放射能が存在していない部分があるが，此の現象は各々のピークで表わされる湧出水が夫々独立した径路を辿つて湧出口に達している事に基づくものであろう。又，現われた放射能強度は現地でサーベイメーターにかからない程度に弱いものであつて，濃縮された洗滓試料の接近測定によつて辛うじて 20～380cpmの値を得たに過ぎなかつた。此の事は毒水が地中において非常によく稀釈を受けており，又注入された毒水の極く一部分が表—1 に挙げられた既発見の湧出口に現われるに過ぎない事を示すものだろう。湧出口 No. 5 において放射能が検出されなかつた事については，採水時間が短く17時間にしか亘つていなかつた為，ＲＩ流出時刻を掴み得なかつた為であろう。又，図—6 によるとＲＩは第１回投入後殆んど70時間で流出し終つたかの観があるが，これについても長期継続観測の要がある。

以上述べた第1回実験で得られた結果を要約すれば次の如くなる。

1. 毒水滲透部地下の透水係数は大体 3,000cm/day から余り離れない値を持ち，此の値は粗粒率4.65前後の砂利層に対応する。

2. 放射能の現われ方は断続的であつて，且つ甚だ微弱である。此の事から毒水の地中径路は単一なものでなく，数本の分岐した径路から成つているものと考えられる。又検出される放射能の微弱さについてはこれは当然予想される事である。例えば温泉湧出量全量を除毒処理するとすれば，その量は毎秒 0.14m³,即ち毎時 504m³,一昼夜には 12100m³ の莫大な量に上る。今 100mcのＲＩが1時間分の注入温泉水量で稀釈されたとすれば，前述した如くこれはサーベイメーターの検出感度以下の濃度である。更に除毒に使用されている土砂層の容積を少く見積つて 2×10^5m³ とし有効含水率を25%としても，地中には 5×10^4m³に上る多量の地下水及び注入された温泉水が存在することになり，此の箇所を10時間以上に亘つて通過するのであるから 100mc 程度のＲＩ投入位では検出される放射能は当然極めて微弱なものにならざるを得ない事が首肯される。

3. 1個のピークについても，その前後1時間に放射能が認められないのが多い。此の事は縦方向の混合の不充分を示すものであつて，滲透毒水が地中において互に独立な数本の水路を辿り，余り乱されることなく，夫々別々の行動で湧出口に向つていることを示すものだろう。

4. 投入ＲＩ量に比し現われた放射能が極めて微弱であつたことについては，地中岩石類による或程度の吸着を考慮しても，他に未発見の湧出口群が多数存在している事が考えられる。

湧出口 No. 6 から26日午前6時に湧出した 379cpmの放射能がＩ—131 に基づくものであることを確認する為，或る一定時間を置いて減衰の程度を測定した。その結果は表—5 Ｉ—131 の半減期 8.0日よりの計算値と殆んど一致し，投入されたＩ—131 に基づく放射能なる事が確認された。

今回の野外実験において感じられた今後実験を行うについての注意事項として，次の様な項目が挙げられる。

1. 現場での測定は野外用測定器の感度の低さ等の欠点の為，微弱なる放射能は往々にして見逃す事が有り得るので，決して現地測定に全幅的信頼を置かず，必ず試水を採取し，化学的操作を加えて精密測定にかける事が必要である。

2. 野外放射能測定器には従来の検出効率の低いＧ—Ｍ方式によるサーベイメーターをシンチレーション方式によるサーベイメーターに切替えて感度を高めたい。

3. ＲＩ投入後，連続 100時間以上に及ぶ測定，採水は甚だしく心身を困憊させるものである故，理想としては検出効率の高い自記式測定器を各湧出口に配置し，自動的に放射能強度を記録させる様な装置が望ましい。

4. Ｉ—131，Ｐ—32 等地下水トレースに通常使用されるＲＩは半減期が短いので採水した試水は可及的早急に測定を終る必要がある。その目的に叶うべく実験室を整備して置く事が望まれる。

5. 北投石の放射能について。

玉川温泉は我国でも珍らしい北投石産地であつて，渋黒川岸の実験現場には，上流部北投石沈澱箇所よりの転石移動の為，北投石の結晶によつて表面を被覆された岩塊が多数存在する。玉川温泉北投石はラヂウムに基づく放射能を有し，北投石が附着している岩の表面でのサーベイメーターの読みは，100～150cpm に達する。現地測定の際は此の点に留意し，予め附近の放射能を精査しておく必要がある。

4. 第 2 回 実 験

〔1〕 実 験 計 画

8月に行つた第1回の実験において，放射能の濃度—時間分布が断続的な数個のピークより成り，各ピーク間には全然放射能が存在しないという予期に反した事実が判明した為，是非追試の必要ありと考え，10月9日より

表—5　湧出口より採取された試水中の放射能減衰

測定日時	経過時間	B.Gを差引いたcpm	減衰比	計算値
9月13日　13時	0 hr	379	1.000	1.000
15日　16時	51 〃	315	0.831	0.832
17日　17時	100 〃	255	0.673	0.697
20日　16時	171 〃	192	0.507	0.539
24日　16時	267 〃	134	0.354	0.381

次の方針で現地実験を行う事にした。

1. 野外用放射能測定機器類は携行するが，実験の主体は採水作業に置き，測定機器類はＲＩによる放射線の人体に与える危険度の判定，ＲＩ投入作業後の汚染のチエック，及び後述する試料水の選別位に使用するに止める。

2. 毒水注入井２個を同時に使用し，異つた２種の，ＲＩ，Ｐ—32，Ｉ—131，を夫々投入して，湧出口における夫々のＲＩの出方を調べる。

3. 採水は１時間間隔とし，第１回実験の結果から重要だと目される位置，時間では20～30分間隔とする。１時間間隔の試水はＩ—131 精密測定の為実験室へ送附し，一時間間隔内の試水はＩ—131 はヨウ化銀，Ｐ—32は燐モリブデン酸アンモンの形として２進式計数器で放射能を測定し，放射能の存否により試水の保存，棄却を決定する。

4. 採水はＲＩ投入直後より 100時間に亘る。

〔2〕携行機器類

1. 科研製２進式ガイガーカウンター	１台
2. 科研製サーベイメーター	１台
3. プライス電音式流速計	１台
4. ポリエチレン製試水瓶	800本

5. 分析用試薬類

6. 野営及び照明用具

〔3〕使 用 Ｒ Ｉ

Ｉ—131 とＰ—32 とが此の場合充分使用可能である事については前に述べた。ＲＩ使用量はＩ—131を 60mc，Ｐ—32を 50mcとしたが，此の値は半減期の長短による放射能減衰速度の差に応じて考慮したものである。

〔4〕実 験 経 過

10月８日夕，現地到着後翌９日にかけて投入の準備，注入量の測定を行い，９日17時図—1 に示す１—１井にＩ—131 60mcを，２—１井にＰ—32 50mcを夫々同時に投入した，尚投入の際は各々のＲＩの $^1/_{200}$ を参考用として保存する為取り除けて置いた。投入時の17時より渋黒川左岸の６個の湧出口，No. 2，No. 3，No. 3′，No. 4，No. 5，No. 6 で20分間隔に採水を開始した。翌10日も引続いて20分間隔の採水を行い，一方１時間々隔での採水分は現地で簡単な分析操作で前述の如き測定用沈澱を作り，ポリエチレン膜で蔽つて２進式ガイガーカウンターのプローブを密着し，２分間の測定を行つた。此の２進式カウンターの計数特性は，２分間測定でバック・グラウンドについて $m=41.6$ $\sigma=6.3$ である故，放射能存否判定基準を 50cpm に置き，これを越す放射能を計測した試水は保存することとした。採水作業は20分間隔に翌11日午前６時迄行い，以後30分間隔に切替えた。天候はＲＩ投入時より小雨の連続であつたが11日に入ると豪雨となり，午後からは渋黒川は猛烈に増水した。午後５時より採水が不能となつた為一時中断したが，翌12日午前３時より１時間々隔で採水を再開し，13日午後10時迄で今回実験の採水作業を終了した。

実験室における精密実験は次の方法によつて行つた。

1. 試水 50c.c を 250c.c入りビーカーに取り，$^1/_{100}$N ヨウ化ナトリウム溶液 5c.cをピペットで加え，良く撹拌する。$^1/_{10}$N 塩化パラヂウム・ナトリウム溶液 0.5c.cを加え撹拌，約 80°C に10分間温めた後ガラスフイルターで濾過する。濾液は保存する。生じたヨウ化パラヂウムの黒色沈澱は約９mgで僅少なる為 β-線の自己吸収は全然無視出来る。

2. １の操作で得られた約50c.c の濾液に $^1/_{10}$N燐酸アンモニウム1c.c，6N-硝酸10c.c，1N—モリブデン酸アンモニウム 7.5c.c，を加え，80°Cに温めてガラス棒で撹拌，黄色の濁りが生じたら火から降し，６時間以上放置後，ガラスフイルターで濾過する。生成した燐モリブデン酸アンモニウム $(NH_4)_3PO_4 \cdot 12MoO_3 \cdot 2HNO_3 \cdot H_2O$ の黄色沈澱は約70mg，Ｐ—32のβ-線は，1.70Mevであるので自己吸収による β-線の損失は僅かであつて殆んど無視出来る。尚沈澱が同一の形状，一様な厚みで濾紙台の上に分布する様注意して濾過した。

3. 測定は神戸工業製 100進式ガイガーカウンターを使用し，測定用沈澱を試料皿に入れ，スタンドの最上段で３分間測定した。選別基準は第一回の時と同じく 20cpm に置いた。

〔5〕結果及び考察

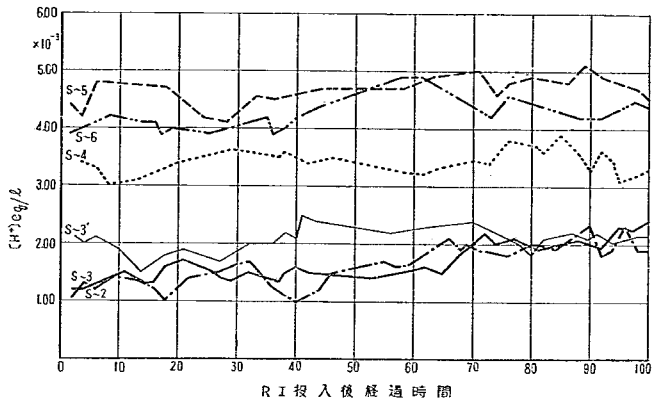
現地で採取した試水は1009ヶ，内現場で放射能測定に附した試水は 231ヶ，その測定結果を次に示す。

cpm	I	P
39以下	97	94
40～49	100	108
50～59	30	28
60以上	4	1
計	231	231

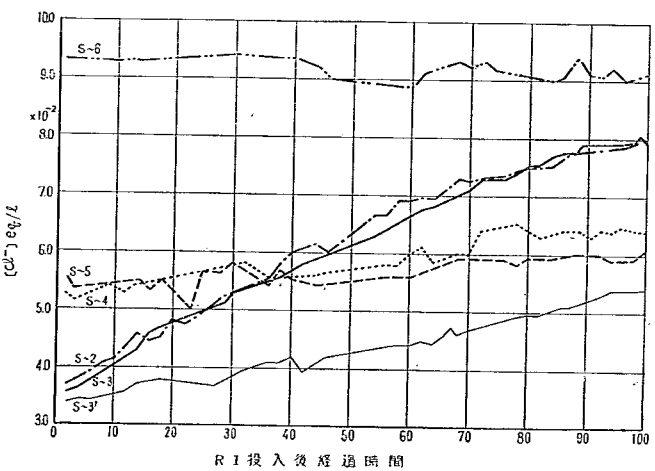
50cpmの計数値を与えた試水56ケ一内ＩとＰとが同時に 50cpm 以上を計録したもの７ケ一は精密測定に廻す事とし，結局実験室で取扱つた試水は 834ケに上つた。精密測定を行つた結果は次の如くである。

放射能＝cpm—B.G	I	P
～2	712	714
3～10	77	98
11～20	40	21
21以上	5	1
	834	834

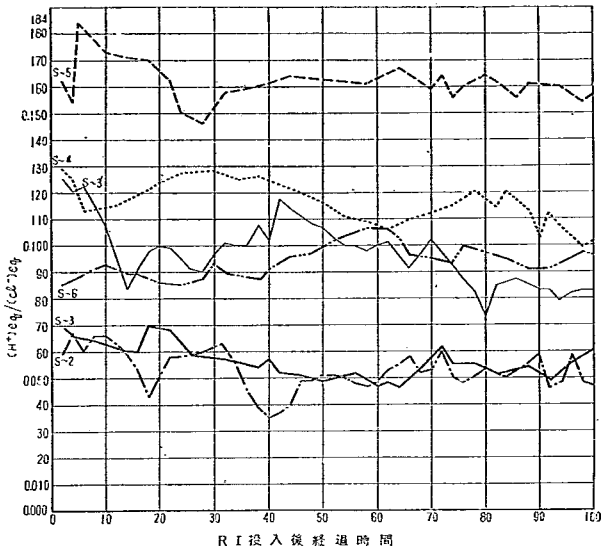
かくして得られたＩ—131 の放射能に基づくもの 122ケ，Ｐ—32に基づくもの 120ケを，採取時間を横軸に放射



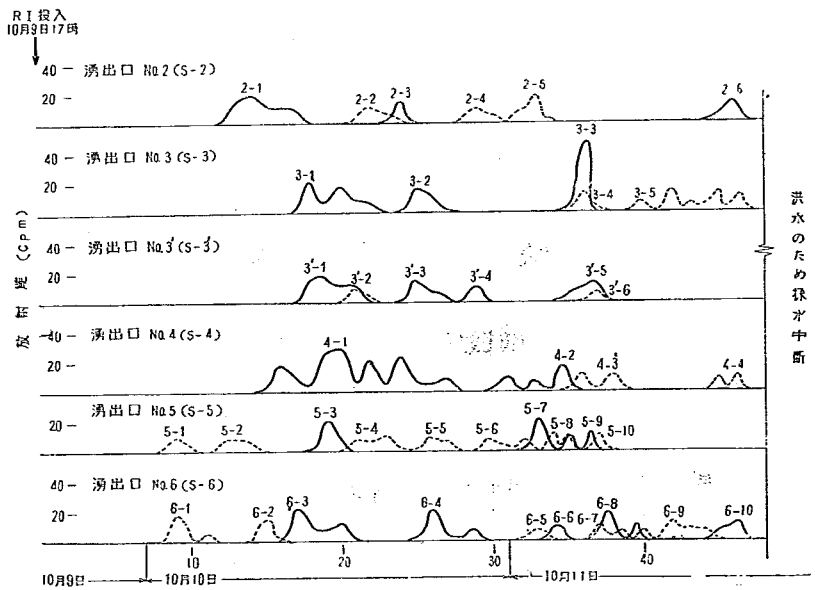
図—7　メチルオレンヂ酸度の時間的変化



図—8　塩素イオン濃度の時間的変化



図—9 湧出水における塩素イオン対水素イオン濃度化



図—10 第2回実験RI流出状況 (1956年10月9日～13日)

能強度一時間分布を画くと図--10の如くなる。又ＲＩ投入後 100時間に亘つて採取された試水を１時間々隔に配列し，各々その水素イオン濃度（メチルオレンヂを指示薬としNaOHで滴定）の時間的変化を調べた。その結果を水素イオン濃度については図―7 に，塩素イオン濃度については図―8 に示す。

図―10に表わされたＲＩ流出の特徴として次の事が考えられる。

1．ＲＩの現われ方は前回の実験と同じく断続的である。

2．試水採取はＲＩ投入後 100時間に亘つているが，此の間20～40時間の間が最も流出が多く以後は幾分出方が少くなつている。しかし 100時間以降も相当流出が行われているものと考えねばならない。

3．検出された放射能は前回の実験と同じく極めて微弱である。10～20cpm のものが圧倒的に多く 40cpm を超える試水は僅かに２ケである。此の中湧出口 No.6 で76時間目に湧出したＰ―32の 126cpm は特に強いが，これは第１回実験の時における同じ湧出口でのＩ―131 による 379cpmと対比出来るものと考えられる。

4．放射能強度は一般にＰ―32よりＩ―131 によるものが大である。

5．ＲＩ最初の検出は９～18時間の範囲であるが，湧出口 No. 2，No. 3，No. 3′，No. 4 ではＩ―131 が早く，No. 5，No. 6 は *P*―32 が早い。これはＲＩ投入井と湧出口との位置的関係によるものと思われる。

玉川温泉の除毒は，実験前の９月中と10月初は導水路工事の為中止されていた。10月初２号線４号井迄の導水路改修が終り，10月６日午前８時より温泉湧出量全量を２号線４号井迄８本の溶透井に注入し始めた。温泉水注入前に約40日間の注水休止期間があつた為，地中の溶透毒水は殆んど全部流出し終つたものと思われ，除毒再開前暫くの間は地下水による洗浄が行われていたものと考えられる。毒水全量注入開始後ＲＩ投入迄は81時間より経過していないが，湧水の Cl^-濃度を図示した図―8 を見るとＲＩ投入後 100時間の間に湧出口 No. 6 において Cl^- 濃度は殆んど平衡状態を維持していたと考えられる。他の湧出口については Cl^-濃度は増加の傾向にあるがその増加の割合によつて次の３群に分けられる。

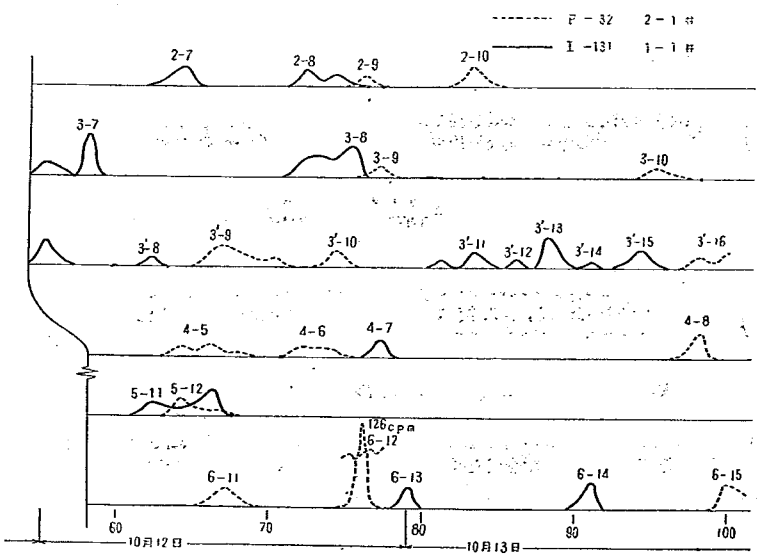
i）増加の割合小なるもの　湧出口 No. 4，No. 5

ii）〃　中程度 〃　湧出口 No. 3′

iii）〃　大なるもの　湧出口 No. 2，No. 3

よつて湧出口 No. 6 を除く他の湧出口については，未だ平衡状態には達していなかつた事が分る。同じく同図より次の事も考えられる。

1．湧出口 No. 2，No. 3 の増加曲線を外挿して求められる Cl^-供給開始時刻はＲＩ投入前80時間であつて，



これは注水開始の時刻に符合する。

2. 表—2 との照合によつて地下水の影響を受けている湧出口程平衡状態に達するに時間を多く要する。

3. 湧出口 No. 2, No. 3 の Cl^- 濃度は，その増加の趨勢から湧出口 No.6 の線附近を漸近線として収斂するものと思われる。

4. 湧出口 No. 2, No. 3, No. 3′ で Cl^- 濃度が平衡状態に達するには少くとも実験終了後 100時間は必要であることが之等曲線上昇傾向から推定される。

図—7 は実験中における湧水のM.O.酸度変化を図示したものであるが，此のグラフより次の事が考えられる。

1. 湧出口 No. 3′, No. 4 では大体において変動はないものと考えられる。

2. 湧出口 No. 5, No. 6 では僅かばかり増加の傾向がある。

3. 湧出口 No. 2, No. 3 では漸増の傾向にあるが，同じ湧出口における Cl^- の増加率程著しくはない。

図—7 全体を通じて一般に曲線の偏差が大きい事は，M.O.酸度測定の誤差もその一因となつているものと思われるが，其他後述する如く，地中での温泉水除毒作用が未だ恒常的な速度で進行する様な状態に達していなかつた事が大きな因子となつていると考えられる。

図—7 と図—8 より $[H^+]/[Cl^-]$ の時間的変化を求めたものが図—9 である。之等水素イオン対塩素イオン比変化の状況から以下の事が考えられる。

1. 湧出口 No. 6 においては曲線はR I 投入後60時間前後に山があるが其の他の部分については大体一定値を維持していたと見做される。

2. 湧出口 No. 5 では殆んど一定であると見做される。

3. 他の湧出口 No. 2, No. 3, No. 3′, No. 4 では減少の傾向にある。

岩石との接触によつて水素イオンの減少は如何なる機構によつて起るかについて考えてみよう。

岩石中の脱酸に有効な成分そのものと，酸性水との反応は一次反応と考え得るが，図—11に示した如き場合においては，此の中和反応は単純な一次反応の他に複雑な因子が関係して来る。此の因子は次の様なものである。

a) 活性な岩石粒子表面においては酸濃度は 0 であると見做される。此の岩石粒子表面の極く近くにおいては H^+ の拡散だけに基づく濃度勾配を有する薄い層が存在する。此の層においては水素イオンは拡散現象だけによつて移動する。

b) a) における H^+ の濃度勾配層は流体の運動に基づく動粘性の為に岩石粒子表面の流れの方向に対する位置により厚さが種々変化する。

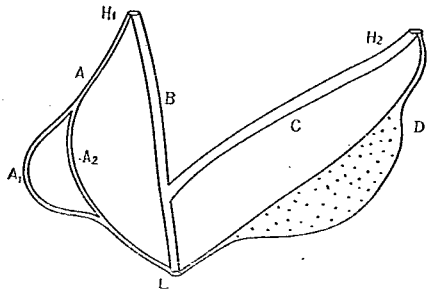
c) 反応し尽された不活性岩石部分による活性部分の被覆。

d) 水中に溶存する化学物質の吸着による活性部分の被覆。

2 で述べた如く Cl^- は地中岩石土砂類によつて捕捉されないとすれば，湧水中の Cl^- 濃度は注入温泉水が湧水中に占める割合を定量的に表示する。図—8 の Cl^- 濃度曲線では平衡状態に達していた湧出口は No. 6 だけであつたが，図—10に現われている如く此の湧出口において途中R I 投入後60時間前後に脱酸効率の低下を示す一つの山が生じているのは，丁度此の時刻は豪雨の後に当る為，除毒地域を通る地下水の運動が活発化された事に関係しているのであろう。他の湧出口 No. 5 において $[H^+]/[Cl^-]$ が一定値を保つていた事及び湧出口No.2, No.3, No. 3′, No. 4において $[H^+]/[Cl^-]$ が逓減傾向を有していた事については後に考察を加える。

除毒された温泉水の湧出は連続的であるけれども，或一瞬間において注入された温泉水は湧出口では非連続的に現われる。即ち 3，〔5〕で述べた如く，注入される温泉水は地中において幾多の分岐した水路乃至は透水層に，夫々の持つ透水能に応じて流量を配分されて流入し，通過中における通過速度，通路の地質環境，温泉水の温度及び酸度，地下水との混合状況等によつて夫々に除毒効果の異つた湧水として湧出口に現われるものと考えられる。玉川温泉における如く大なる水頭差を以て温泉水が地下水中に注入される様な場合は，注入温泉水の先頭が通過した地下水路部分は先頭が通過後可成り短い時間で注入温泉水と地下水の収支に関し平衡を回復する。それ故投入された R I が或一個の湧出口から全部完全に流出し終るに要する時間以上に亘つて一定量の注水を継続した後においては，酸度の大きな偏倚は無くその湧出口については大体平衡状態に達するものと考えられるが，今回の実験では注水開始よりR I 投入迄81時間しか経過していなかつた為，湧出口へ通じている透水性の乏しい水路は未だ温泉水を通過させて了う迄には至らなかつたものと思われる。

脱酸効率即ち $[H^+]/[Cl^-]$ の減少と地中水路の特性との関係について調べる為に図—11の如きモデル図を仮定し，注水口 H_1, H_2 に同時に注水を開始したと仮定すれば，時間の経過に従つて次の様な事が生じると考えら



図—11　地中水路の模型図

れる。

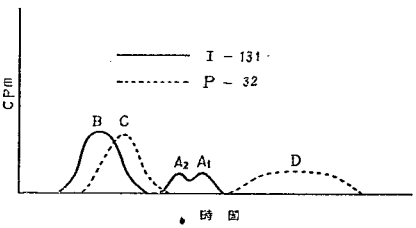
1．注水開始前は水路A，B，C，D共に地下水によつて満されており，地下水位が注入口に迄達しているとする。H_1 及び H_2 よりの注水により之等4本の水路内の水は押し出されるが水頭差には変化を生じない為，湧出量については殆んど増加が認められない。

2．水路BとCとの断面積は等しく，且つそれらの水路が有する透水係数は等しいと仮定すれば，湧出口Lには先づ H_1 より入つてBを通過した滲透水が湧出する。この湧水は水路B内の地下水によつて相当稀釈されており，その割には脱酸効率の上つていないものである。時間の経過と共に脱酸効率は上昇し平衡に達する。

3．2．に続いて間もなく H_2 よりC水路を通過した注入水がLに現われるが，此の湧水の特性は脱酸効率はやや大いが他の点についてはB水路通過のそれと殆んど同一である。

4．A水路の断面積はB，C両管と較べて可成り小であるとする。B，C両水路を通過した湧水が湧出口Lに現われたずつと後になつて，先づ A_2 を通過した湧水，次いで A_1 を通過した湧水が現われる。

5．水路Dは透水係数の小なシルト，粘土の如きものより成る断面積の大なる部分を有し，且つそれらの透水係数は均一なものではないとする。H_2 よりの注入水は長時間を費してDを通過するが，又脱酸効果も非常に大きいものである。湧出口Lにおいては此の注入水は前後に長く拡散した形となつて現われることが考えられる。従つて H_1 にI—131 を，H_2 に P—32 を投入したとすれば，Lより排出される湧水中における放射能は，夫々図—12の如くなるものと考えられる。



図—12　RI流出の推定図

次に放射能強度曲線に基づいて地中水路状態に関し考察を試みる前に次の様な仮定を設けよう。

1．各放射能ピークの時間に関する積分値は，そのピークで表わされる滲透径路への注入水流量配分を示す。

2．曲線の高さはRIと行動を共にした注入水が，その曲線で表わされる時刻に現われる湧水中に占める相対的割合を示す。

3．温泉水の除毒を開始する以前においては除毒に使れている地域の岩石，土砂類は均一な脱酸能力を有していた。

以上の仮定に従つて地中水路の状態によつて特徴づけられる放射能強度曲線について考察を加えて見よう。

1．大なる面積を有するピークはその湧出口にとつて支配的な役割を演じる水路の存在を示す。

2．時間的な拡がりが少いピークは大体において透水係数が均一な透水層を通過した湧水に基づくものである。

3．時間的な拡がりが大であるピークについては，その拡がりの原因について以下の事由が考えられる。

a）部分によつて透水係数が均一でない透水層の通過。

b）岩石，土砂類によるRIの保留。即ち岩石類表面による放射性イオンの吸着，脱着作用の時間的ずれ。

c）地中に存在する外部と不透水層によつて遮断された大なる容積を占める含水層に到達して受ける攪乱，混合の結果生じる稀釈。

4．時間的に早く現われるピークは透水係数大なる地層の滲透，遅く現われるピークは同じく透水係数小なる地層の通過又は迂回した水路の経由に基づく。

以上述べた放射能強度曲線の特性と脱酸効率との関係即ち脱酸効率とピークの大きさ，ピーク出現時刻の遅早との関係については，一意的には云えないが種々の場合を考慮して大体次の様な事が云える。

1．ピークの大きさと脱酸効率間には本質的関係は存在しない。

2．ピークの時間的拡がりが小なものは同じく拡がりが大なるものより脱酸効率が小であるとは一概に云い得ないが，一般に同じ面積を有するピークについてはピークの後裾の拡がりは，岩石土砂表面に滲透温泉水がより長時間停滞したことを示すものであるから，反応時間が長いものであり，それに応じて脱酸効率は高いものであ

ると見られる。

3. 出現時間が早いピークは脱酸効率の低い水路通過に基づく。即ち或る老化した滲透層は長期間に亘る地層の殿に可溶な成分の溶去により極めて多孔質なものとなり，透水係数が大であると同時に酸中和能力が消費され尽した岩石の溶脱成分より主として構成される。

4. 出現時間が遅いピークは透水係数小な透水層の通過又は迂回した径路の経由に基づくものであるが，後者の原因に由る流出延滞は現地の地形から判断して僅かなものであり，前者が主原因を成すものと考えられる。前者の場合は透水層中の土砂粒子が細かく密に詰つている場合であるから，温泉水との接触面積，反応時間共に甚だ大で脱酸効率は極めて高い。此の場合も長期間の温泉水滲透により多孔質化され，3.に挙げた如き特徴を有するに至ると考えられる。

別の考えであるが玉川温泉除毒工法における脱酸機構の究明には将来ヂューテリウム及びトリチウムでラベルされた塩酸の使用が非常に有効な手段として考えられるであろう。又除毒現場のボーリングによつて直接に岩石類の化学的変化状況を調査する事も必要な手段であると思われる。

以上の考察を基礎にして図—10を見ると

1. 湧出口 No.5, No.6では 2—1 井よりの注水が9時間で現われている。此の事は之等両井で，$[H^+]$，$[Cl^-]$ 共に早く平衡に達した原因となつている。

2. 湧出口 No. 5 では 5—4 より 5—10までのピーク，湧出口 No. 6 では 6—5 より 6—10までのピークは脱酸効率の高い湧出水を吐出したものと考えられる。表—2 に挙げた湧出口 No. 5, No. 6の脱酸効率は主として之等ピーク群によるものと思われる。

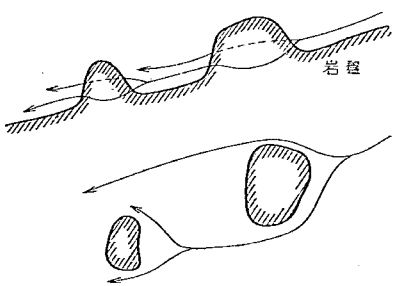
3. 湧出口 No. 6 での 6—12のピークは第1回実験の時に同湧出口から現われた 379cpmのピークに対応するものであるが，此のピークの存在は地中に相当の流量部分を受ける独立した水路の存在を推測させるものであつて，湧出口 No. 6 が注水開始後平衡に達する時間が短かかつた事に主として貢献していると思われる。

4. 湧出口 No.3′ では最初のピークは18時間目に，湧出口 No. 4 では16時間目に現われているが，此の遅延が平衡状態に達するのを長びかせていると思われる。又湧出口 No. 4 では早い方に 1—1 井よりのピークが密集しているのに反し，湧出口 No.3′ では後の方に密集している。これは湧出口 No. 4 が No.3′ と比較して図—7 の $[Cl^-]$ 増加曲線がより平衡状態に接近している事実と合致する。又湧出口 No.3′, No.4 は主として 1—1 井の影響を受けている事が云える。

5. 湧出口 No. 2, No.3 においては，其等が注水井と持つ位置的な関係から，1—1 井よりの注水が早く現われている。之等2湧出口では図—7，図—8で分る如く，$[H^+]$，$[Cl^-]$ 共に刻々と増加しているが，これは注水井より湧出口No. 2, No. 3 に至る地中の地下水包容力が大であつて，実験期間中においては，未だ注入温泉水が地下水が占めていた主導力を排除し得るに至らなかつた為である。又その地下水による稀釈の為小さなピークは見逃している可能性が多分に考えられる。

以上に述べた事より地中の温泉水通路の状況について推定される事を概括して見よう。

1. 注入温泉水が通過する水路は非常に分岐が多く且つ夫々独立したものと見做される節がある。除毒に使用されている地域は安山岩基盤の上を相当厚く表層土砂層が蔽つているが，湧出水は湧出口 No. 2, No. 3を除く他は凡て岩盤裂隙より現われる。一般に地下水は岩盤と表層土砂層との境界附近に密集するものであるから，注入温泉水も地中に滲透後岩盤表層に沿つて流下し，その径路中に存在する岩盤の突起，岩塊の存在などによつて図—13に示した如きフインガリング現象を起しつつ分岐し，適当な岩盤の割目を見出してそこに侵入し，そこでも裂隙の方向に沿つて色々に分岐しつつ結局湧出口に到達する。



図—13 岩塊突起によるフインガリング現象模型図

湧出口No. 2, No. 3 は湧出口附近の状態からその湧水は山腹表層土砂層下部を流下したものであり，その分岐はフインガリング現象に基づくものと推定さる。他の湧出口よりの湧水は更に岩盤裂隙の分岐に基づく水路のフインガリングが加わるものと考えられる。又此のフインガリング現象が異つた位置より注入された温泉水を地中で混合させているものであろう。

2. 一般に地中で之等6個の湧出口群に向つて滲透流下する温泉水は地下水と相互に影響し合つている。此の現象は前記 1. で述べた事より当然であつて，特に湧出

口No. 2, No. 3 において著しい。即ち表—1 及び表—2 でも明瞭である如く水温，水質共に密接な類似性が認められる。又表—1，表—2 より湧出口 No. 4, No. 5, No. 6 と進むに従つて早く地下水の影響を受け難い岩盤の裂罅中へ温泉水が侵入したと思われる節がある。

3. 之等6個の湧出口からは洩れなく1—1井及び2—1井より注入された温泉水が現われている。此の現象は主として注入温泉水が地中で未だ岩盤の裂罅に入り込まない以前，即ち温泉水が間隙水として地中を流下中に，注入位置を異にするものがむらなく混合されている結果であると考えられる。尚此の他に岩盤裂罅の交錯による温泉水の混合現象も当然考えられる筈である。

4. 1—1井及び2—1井の2本の溶透井は過去20年間使用され続けて来た所のものであるが，いささかも除毒能力低下の徴候が見えない。今後相当長期間の使用に堪え得るものと考えられる。即ち，地下岩石層は局部的に見ればそうではない箇所も存在すると考えられるけれども，全般的には脈酸能力に関しては未だに老化していない。他の20本の溶透井群に温泉水を適当に配分注入する事によつて，今後可成りの長期間に亘つて毒水処理の効果を挙げ得ることが期待出来るものと思われる。

5. 結　　語

化学，生物学の領域においてトレーサーとして一般に使用されているI—131，P—32 の2種のRIは，以上述べた如く今回の野外調査においても伏流水のトレーサーとして極めて効果的なものである事が立証され，200米の距離に亘る伏流水の振舞いを把握する事が出来た。現地で行つた2回の実験では何れも検出される放射能が極めて微弱であつた為測定に非常な困難が伴つたが，今後は前2回の実験体験に基づいて野外における地下水及び伏流水のトレースには適当なRIを検討しつつ且つ測定の精度を上げて行きたいと考える。

トレーサー実験においては放射能測定が実験の主体を成すものであり，特に野外実験では測定器の感度が実験の結果に大いに影響を与えるものである故，今後の野外実験においては高感度の測定器，例えばシンチレーションサーベイメーターの如きものを使用して行きたいと思う。尚今回の伏流水トレース実験の対象として玉川温泉を選んだ為，RIトレースと同時に当温泉水を特徴づけている水素イオン，塩素イオンに関する測定データを得る事が出来，幸いにも解析困難と目されたRIトレース結果を補助データを参考として一応解析出来た。RIによる地下伏流水トレース実験の場合は，RIによるのみならず何等かの補助的観測を行う様心掛ける事が得策であると思われる。

終りに先の実験で得られた結果が当玉川温泉における爾後の除毒工事計画にいささかなりとも示唆を与え，又此の実験方法が将来他の地域で行われるだろう地下水トレース実験に些少なりとも参考になることがあれば幸甚であると考える。

謝　辞

今回の実験においては秋田県土木部砂防課当局より色々便宜を与えられ，現地においては三浦彦次郎氏より種種懇切な助言を受けた。又温泉水の注入停止，流量制限については同県鎧畑発電所工事々務所，実験用器具，機材の保管，現地への輸送については同県鹿角土木出張所，微害実験の為の補助員を派遣された東北地方建設局玉川工事々務所，温泉水，湧出水中のヨード，燐の定量については東京都立大学半谷助教授の御援助を受けた。玆に厚く感謝の意を表する。

参　考　文　献

1) C. M. Allen and E.A. Taylor; "The salt velocity method of water measurement." Trans. A. S. M. E. 45,285 (1923)
2) J. W. Watkins and E.S. Mardock; "Use of radioactive iodine as a tracer in water-flooding operations." J. Petrol. Technol. 6, 117～24 (1954)
3) W. J. Kaufman and G. T. Orlob; "An evaluation of ground water tracers." Trans. Am. Geoph. Union. 37, 297 (1956)
4) R. Hours; "Les traceurs radioactifs en hydrologie." La Houille Blanche. 10, 264 (1955)
5) J. L. Putman and S. Jefferson; "Application of radioisotopes to leakage and hydraulic problems." Proc. of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol.15, 147～50 (1956)

6) K. O. Beatty, J. K. Ferrell and F.M. Richardson; "Radioisotopes in the study of fluid dynamics." cit. loc. 194～198.
7) H.A. Thomas and R.S. Archibald; "Longitudinal mixing measured by radioactive tracers." Proc. A.S.C.E. 77,1～12 (1951)
8) 落合敏郎；堰堤湯水に関する研究，農技研報告F—9，1～38 (1956)
9) 岩崎章二他；放射性同位元素 $_{15}P^{32}$ による水路試験について 地質調査所月報，4,67 (1953)
10) 有泉 昌；酸性河川の水質に関する調査研究（2）
土木研究所報告 90，93～118 (1955)
11) 三浦彦次郎；玉川毒水地下溶透化学除毒法の研究（Ⅱ）
農業土木研究 23，6，341～350 (1956)
12) 有泉 昌他；未発表
13) National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce; Handbook 52 "Maximum Permissible Amounts of Radioisotopes in the Human Body and Maximum Permissible Concentrations in Air and Water." (1953)
14) L.E. Glendenin; Nucleonics, 2 (1), 12 (1948)
15) C. A. Bennett and N.L. Franklin; Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry.
16) 秋田県土木部鎧畑発電所建設事務所測量の現場地図による。