土木研究所報告　第百十八号　昭和三十九年五月

土木研究所報告

第118号

河川工学における情報量解析の応用に関する研究
……中村慶一……(1)

路盤の荷重分散効果（2）
……竹下春見，岩下義治…(71)

城山ダム水理模型実験報告 …… 村　幸雄，永田二生，藤崎利雄
佐藤健一，築地俊秀，金井昭男…(97)

昭和39年5月

建設省土木研究所

河川工学における情報量解析の応用に関する研究

(昭和 38 年 6 月)

中　村　慶　一*

要　旨

河川工学で取扱う現象は主として実測値を通じて，その構造分析を行なわなければならないものが多い。たとえば雨量，流量，流砂量などを始めとしてダム，水門等構造物の挙動などのように取り上げるべき因子が数多くある上にノイズと見なさなければ処理のつかぬような，その他の数多くの因子の効果の割合が相当大きい現象が多い。これらの現象を取扱う場合，最終目的である現象のあいまいさ，予測の困難さを，これと関係すると思われる因子の測定を行なうことによって，そのあいまいさの程度を減少していくという立場に立てば，情報量の期待値としてのエントロピについて，不確実な要素のない場合のエントロピから不確実な要素による情報量損失を差引いたものが，新しくとった試料による情報量であるとして，一貫した解析を行なうことができる。

本文はこの情報量解析を河川工学に現われる諸現象に適用するに当り，実測資料のサイズがあまり大きくないこと，および時間的制約の多い建設事業関係で利用可能であることという特質を考慮し，特に電子計算および計算手数も考慮した効率の２点について留意してまとめたものである。

目　次

序　論……(2)
1. 情報量解析……(2)
[1] 情報量……(2)
[2] 母集団に関する情報量……(3)
(2.1) 判別情報量……(3)
(2.2) 多次元正規分布における判別情報量…(3)
2. 線型仮説のもとでの情報量解析……(4)
[1] 回帰平面……(4)
[2] 線型回帰模型……(5)
[3] 二次仮説検定と情報量解析……(7)
(3.1) 二次仮説の検定……(7)
(3.2) 自動計算による有意な因子選定のプログラム……(10)
[4] 各因子の間に相関のある場合……(11)
(4.1) 各因子の独立性……(11)
(4.2) 主成分分析……(12)
(4.3) 自動計算による主成分分析の計算手続……(13)
(4.4) 主成分分析の実例……(14)
[5] ダムのたわみ解析に対する応用……(15)
(5.1) アーチダムのたわみに影響する因子…(15)
(5.2) 二瀬ダムにおける実例……(16)
(5.3) 鳴子ダムにおける実例……(24)
(5.4) 室牧ダムにおける実例……(25)
(5.5) 綾北ダムにおける実例……(26)
(5.6) 綾北ダムにおける気温による解析……(27)
(5.7) 多目的アーチダムの挙動に関する考察……(27)
(5.8) 有効雨量の計算に対する応用……(30)
[6] 周期現象の構造分析……(31)
(6.1) 時間傾向変動の除去……(31)
(6.2) 周期分析……(32)
(6.3) パンチカードによる周期の検出……(37)
(6.4) 正規方程式……(37)
(6.5) 自動計算による周期分析の手続……(40)
(6.6) 周期分析の実例 (1)……(40)
(6.7) 周期分析の実例 (2)……(41)
3. 危険度の評価……(41)
[1] 危険度の計算……(41)
(1.1) 危険度の定義……(41)
(1.2) 模型化……(45)
(1.3) 諸報告に現われた問題点……(46)
(1.4) 一方だけの分布を考える場合……(47)
(1.5) 一方だけの分布を考える場合の実例…(51)
(1.6) 双方の分布を考える場合……(52)
(1.7) 双方の分布を考える場合の例題……(52)
[2] 最大洪水量に対する危険度の評価の応用…(52)
(2.1) 井川ダムにおける実例……(52)
4. 最適条件決定と情報量解析……(53)
[1] 1次平面の当てはめ……(53)
[2] 2次曲面の当てはめ……(55)
[3] 最適条件を求める自動計算手順……(56)
[4] ダムアバットの安定計算に対する応用……(58)
[5] 下久保ダムにおける実例……(59)
5. 情報量解析の効率……(62)
[1] 平均の一様性に関する検定……(62)
[2] 品質管理限界に対する R の利用……(65)
(2.1) 品質管理に対する誤解……(65)
(2.2) 管理図の性格……(67)
結　論……(68)
参考文献表……(69)

* ダム部 ダム構造研究室長

序　論

たとえば河川の流量，滞砂量，ダムのたわみなど河川工学関係の諸量を予測したい場合，この現象に関係すると思われる因子についてこれが自然現象の場合は実測を行ない，人為的にその水準の変更が可能なものについてはその変更を行ない，これに応ずる結果を測定したデータを解析して反応機構ならびにノイズの程度を知り，この知識を用いて予測しなければならぬ場合がきわめて多い。

これはある入力信号を人為的に与えるか，またはいろいろな現象を観測してこれに対比させて出力信号を測定することにより変換関数および誤差分散を推定して予測に利用することとまったく同一である。

この場合因子の測定ということがない場合の予測したい量の予測に関するあいまいさが，これに関係すると思われる因子の観測という事実によって減少すると考え，その結果，なおかつ残存するあいまいさが，いま取り上げなかった因子による部分および既存の知識では解釈のつかぬ部分の総計であって，われわれはこれを一括して誤差によるあいまいさと考え，特定の因子を考慮することの効果を，その因子のみによるあいまいさの減少度と定義し，その減少度が誤差によるあいまいさに比して意味のある大きさを持っているとき，始めてその因子を考慮し，さらにその因子を考慮するための手数と，無視することの損失との比較の上で，技術的判断を加え予測方式を立てることが，とくにその変換機構が複雑でその結果の生命財産に及ぼす影響の大きい河川工学上の諸現象の予測において重要であると考えられる。

本文はこの実測データのもたらす情報の価値に着目しすべての現象の構造分析を情報量を目安として行ないいわゆる情報量解析の立場で行なう方法を河川工学関係の諸現象に適用した場合の問題点について論じようとするものである。

1. 情報量解析

[1] 情報量

一般にあることがらの実現に関する情報を受取った場合，そのことがらの実現の可能性が小さければ小さいほどその通報を受けたことの価値は大きい。実現の確率が p であるような事象の実現に関する情報量を $I[p]$ と書けば，線型の非負単調減少関数であり，$p=1/2$ のとき $I[p]=1$ となるためには

$$I[p] = -\log_2 p = \log_2 (1/p) \quad \cdots\cdots (1.1)$$

ととればよい。

n 個の排反事象 X_i が考えられ，これらの実現の確率を p_i ($\sum_i^n p_i = 1$) とすれば試行を行なう前にその試行の結果が不確定である程度は情報量の期待値つまりおのおのの事象の情報量と，それに対応する実現の確率の積の全事象についての和となる。期待値をとる演算子を $E[\ ]$ とすれば

$$H[X] = E[I[p]] \quad \cdots\cdots (1.2)$$

$$= \sum_i^n p_i I[p_i] \quad \cdots\cdots (1.3)$$

$$= -\sum_i^n p_i \log_2 p_i \quad \cdots\cdots (1.4)$$

$$= \sum_i^n p_i \log_2 (1/p_i) \quad \cdots\cdots (1.5)$$

となる。$H[X]$ はエントロピと呼ばれる量で試行のあいまいさ，不確実さの測度と考えることができる。

情報量（情報の価値）$I(p_i)$ は $0 > p_i > 1$ なる p_i が大きいほど小，逆に実現の可能性が小さいほどそれを事前に知らされた価値は大きくなるようにとってあるから，情報量の期待値についても同様にエントロピが大きいほど事実の無秩序性，あいまいさが大きく，何がとび出してくるか予測がつかぬことを意味し，逆にエントロピが小さいほど事実の無秩序性，あいまいさが小さく，予測が容易であることを示している。

われわれは，いろいろな現象を分析する際に，その内部を解剖してみることが不可能な場合は医者の打診などのように人為的に入力信号を与えるか，または自然現象などのようにコントロールが不可能な場合には，この現象に関係すると思われる因子を入力信号と考えてこれを測定し，出力信号として得られた値と関連させてその内部の変換機構を推定しなければならない。

この入出力信号を統計解析における標本，変換機構を母集団と考えれば，エントロピは母集団のもつ統計的秩序の大小を規定する量ということになり，エントロピが小さければ統計的秩序は大となり，母集団が安定な場合には比較的予測が容易となる。

連続的変量の場合は変量 X に対し，同様次のように情報量 $I[X]$ の期待値として定義し，確率密度関数を $f(X)$ とすれば

$$H[X] = E[I[X]] = \int_{-\infty}^{\infty} f(X) \log \frac{1}{f(X)}\, dX$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(X) \log f(X)\, dX \cdots (1.6)$$

[2] 母集団に関する情報量

(2.1) 判別情報量

変量 X について $X=x$ なる値が観測されたものとし H_i について $i=1$ のとき帰無仮説，$i=2$ のとき対立仮説を示すものとして，それぞれこれに対応する確率密度を $f_i(x)$ とする。

$X=x$ が得られたときの H_i の条件付確率を $p(H_i|x)$ とすれば Bayes の定理により

$$p(H_i|x)=\frac{p(H_i)\,f_i(x)}{p(H_1)\,f_1(x)+p(H_2)\,f_2(x)}$$

比を作り対数をとれば

$$\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}-\log\frac{p(H_1)}{p(H_2)} \quad \cdots\cdots(1.7)$$

で第1項は x なる観測値を得た後の仮説 H_2 に対する仮説 H_1 の判別情報量，第2項は観測値を得る前の仮説 H_2 に対する仮説 H_1 の判別情報量で，この差は観測値 x による判別情報の増加量を示している。

仮説 H_2 に対する仮説 H_1 の判別情報増加量を $I[H_1:H_2]$ と書けば仮説 H_2 に対する仮説 H_1 の判別情報増加量の期得値は

$$H[H_1:H_2]=E[I[H_1:H_2]]=\int f_1(x)\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx \quad \cdots(1.8)$$

仮説 H_1 に対する仮説 H_2 の判別情報増加量の期待値は

$$H[H_2:H_1]=E[I[H_2:H_1]]=\int f_2(x)\log\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\,dx \quad \cdots(1.9)$$

(1.7) を (1.8) に代入すれば

$$H[H_1:H_2]=\int f_1(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx-\log\frac{p(H_1)}{p(H_2)}$$

同様に

$$H[H_2:H_1]=\int f_2(x)\log\frac{p(H_2|x)}{p(H_1|x)}\,dx-\log\frac{p(H_2)}{p(H_1)}$$

したがって H_1 と H_2 との判別のための $X=x$ なる観測のもたらす情報量 $D[H_1:H_2]$ はこの両者の和で

$$\begin{aligned}D[H_1,H_2]&=H[H_1:H_2]+H[H_2:H_1]\\&=\int f_1(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx-\log\frac{p(H_1)}{p(H_2)}\\&\quad+\int f_2(x)\log\frac{p(H_2|x)}{p(H_1|x)}\,dx-\log\frac{p(H_2)}{p(H_1)}\\&=\int f_1(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx-\log\frac{p(H_1)}{p(H_2)}\\&\quad-\int f_2(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx+\log\frac{p(H_1)}{p(H_2)}\\&=\int f_1(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx-\int f_2(x)\log\frac{p(H_1|x)}{p(H_2|x)}\,dx\end{aligned} \quad \cdots\cdots(1.10)$$

でこの量は仮説 H_1 と H_2 の判別の困難さを示す量と考えることができる。

(2.2) 多次元正規分布における判別情報量

いま k 次元正規母集団について標本 x_i がそれぞれ

母平均　$\mu_i'=(\mu_{i1}\,\mu_{i2}\cdots\cdots\mu_{ik})$　$(i=1,\ 2)$

母分散　$\Sigma_i=(\sigma_{irs})$　$i=1,2$　$r,s=1,2\cdots,k$

の k 次元正規母集団に属するものとすれば，これを

$$x_i\in N(\mu_i,\ \Sigma_i)$$

と書くことができる。

この場合の確率密度関数は

$$f_i(x_1\,x_2\cdots x_k)=\frac{1}{|2\pi\Sigma_i|^{1/2}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_i)'\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)\right\} \quad \cdots(1.11)$$

ただし，　μ_i'：$k\times1$　母平均ベクトル

$x'=(x_1\,x_2\cdots\cdots x_k)$　観測値ベクトル

Σ_i：$k\times k$　共分散マトリクス

である。

前節にしたがい $\log\{f_1(x)/f_2(x)\}$ を作れば

$$\log\frac{f_1(x_1\,x_2\cdots x_k)}{f_2(x_1\,x_2\cdots x_k)}=\frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}-\frac{1}{2}(x-\mu_1)'\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)+\frac{1}{2}(x-\mu_2)'\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)$$

一般に x を $1\times n$ ベクトル，A を $n\times n$ マトリクスとすれば

$$x'Ax=t_r(Axx')$$

であるから

$$\log\frac{f_1(x_1\,x_2\cdots x_k)}{f_2(x_1\,x_2\cdots x_k)}=\frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}-\frac{1}{2}t_r\left\{\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)(x-\mu_1)'\right\}+\frac{1}{2}t_r\left\{\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)(x-\mu_2)'\right\} \quad \cdots\cdots(1.12)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}H[H_1:H_2]&=\int f_1(x_1\,x_2\cdots x_k)\times\log\frac{f_1(x_1\,x_2\cdots x_k)}{f_2(x_1\,x_2\cdots x_k)}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_k\\&=\frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\int f_1(x_1\,x_2\cdots x_k)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_k\\&\quad-\frac{1}{2}t_r\left\{\Sigma_1^{-1}\int(xx'-\mu_1x'-x\mu_1'+\mu_1\mu_1')\right.\end{aligned}$$

$$\times f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k\Big\}$$
$$+\frac{1}{2} t_r\Big\{\Sigma_2^{-1}\int (xx' - \mu_2 x' - x\mu_2' + \mu_2\mu_2')$$
$$\times f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} + \frac{1}{2} t_r\Big\{\Sigma_1(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1})\Big\}$$
$$+\frac{1}{2} t_r\Big\{\Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)\ (\mu_1-\mu_2)'\Big\}$$
$$\cdots\cdots(1.13)$$

何となれば

$$\int f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k = 1$$
（k次元正規母集団の性質）
$$\int x x' f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k = \Sigma_1$$
（共分散の定義）
$$\int \mu_i x' f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k = \mu_i \mu_1'$$
（母平均の定義）
$$\int x \mu_i' f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k = \mu_1 \mu_i'$$
（母平均の定義）
$$\int \mu_i \mu_i' f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k = \mu_i \mu_i'$$
（$\mu_i \mu_i'$ は const.）

したがって

$$D[H_1,\ H_2] = \int\Big\{f_1(x_1 x_2 \cdots x_k) - f_2(x_1 x_2 \cdots x_k)\Big\} \times \log\frac{f_1(x_1 x_2 \cdots x_k)}{f_2(x_1 x_2 \cdots x_k)}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} + \frac{1}{2} t_r\,\Sigma_1(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1}) + \frac{1}{2} t_r\,\Sigma_1^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\ (\mu_1 - \mu_2)'$$
$$- \frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} - \frac{1}{2} t_r\,\Sigma_2(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1}) + \frac{1}{2} t_r\,\Sigma_1^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\ (\mu_1 - \mu_2)'$$
$$= \frac{1}{2} t_r\,(\Sigma_1 - \Sigma_2)\,(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1}) + \frac{1}{2} t_r(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})\,(\mu_1 - \mu_2)\,(\mu_1 - \mu_2)'$$
$$\cdots\cdots(1.14)$$

そこで共分散マトリクスが共通，つまり $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ と仮定すれば

$$I[H_1,\ H_2;\mu] = \frac{1}{2} t_r\,\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\,(\mu_1 - \mu_2)' = \frac{1}{2} t_r\Sigma^{-1}\delta\delta' = \frac{1}{2}\delta'\Sigma^{-1}\delta \quad \cdots\cdots(1.15)$$
$$D[H_1,\ H_2;\mu] = t_r\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\,(\mu_1 - \mu_2)' = \delta'\Sigma^{-1}\delta \quad \cdots\cdots(1.16)$$

ただし，$\delta = \mu_1 - \mu_2$ とする。

また，$\delta = \mu_1 - \mu_2 = 0$ と仮定すれば

$$I[H_1 : H_2;\Sigma] = \frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} + \frac{1}{2} t_r\Sigma_1(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} t_r\Sigma_1\Sigma_2^{-1}$$
$$(\because\quad \rho(\Sigma_1) = k,\ t_r\Sigma_1\Sigma_1^{-1} = t_r I_k = k)$$
$$D[H_1 : H_2;\Sigma] = \frac{1}{2} t_r(\Sigma_1 - \Sigma_2)(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1}) = \frac{1}{2} t_r\Sigma_1\Sigma_2^{-1} + \frac{1}{2} t_r\Sigma_2\Sigma_1^{-1} - k$$
$$\cdots\cdots(1.17)$$

2. 線型仮説のもとでの情報量解析

〔1〕 回帰平面

ある現象 y を予測したい場合に，その現象の予測に役立つのではないかと考えられる因子をできるだけ多くとり上げ，今までに得られたデータによって y の構造を推定するのが普通である。

貯水池の堆砂量の予測，ダムの挙動などいろいろな要因が組み合って作用している場合，周期現象を含まないか，または周期成分を除去したものについて，次のような線型回帰模型が適用されることが多い。

$$y_\alpha = x_{\alpha 1}\beta_1 + x_{\alpha 2}\beta_2 + \cdots + x_{\alpha p}\beta_p + \varepsilon_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2\cdots,\ n)$$
$$\cdots\cdots(2.1)$$

ここに，$x_1 x_2 \cdots x_p$ は因子としてとりあげた p 個の要因で，これらと y とについて n 組の観測データが得られており，$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_p$ は y の構造を規定する未知母数，ε_α はここにとりあげなかった因子の影響による撹乱で，ε_α は母平均 0，母分散 σ^2 の分布をし，互に相関がないものと仮定する。

ところで式 (2.1) のような形の推定が成立するのは一つの因子の y に対する効果が他の因子の変動によって影響されない場合であって，この意味で β_i は x_i 以外の因子を無視して x_i だけが作用していると考えたときの x_i の方向係数に当り，偏回帰係数とよばれる。

p 個の因子の y に対する効果が互に他に影響されない場合とは，いわば各因子の効果が直交している場合でたとえば 2 因子の場合図-2.1のように $x_1 x_2 y$ 座標をとると

$$y = ax_1 + bx_2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

は OACB を通る平面の方程式であって，C 点の座標を $(x_{1c}\ x_{2c}\ y_c)$ とすれば

$$y_c = ax_{1c} + bx_{2c}$$

となる。

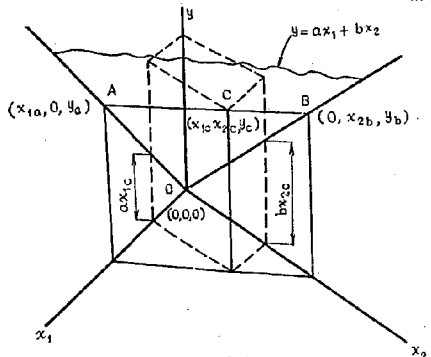


図-2.1

ところが実測データは x_1, x_2 以外の因子の影響をうけて，y 軸の方向に測った長さ ε_α だけ面の上下に変動した値をとることになる。そこでわれわれは，これらの実測点をもとにして原点を通るある平面を推定し，この面からの，y 軸の方向に測った実測点のズレ ε_α について，その2乗の和が最小となるような面が ε_α の分布についてのある制限のもとに，最良線型不偏推定量となることが，Gauss-Markoff の定理*によって知られているので，このようにして平面の形を推定することができる。

ここに ε_α の分布についてのある制限とは ε_α の期待値が0になること，ε_α の分散が σ^2 になること，ε_α に相関がないことである。

以上の3次元の場合で $x_1=1$ という特別の場合を考えると，図-2.2のように求めるものは x_1 軸に直交し，x_1 軸を1の所で切る平面上の　　$y=a+bx_2$

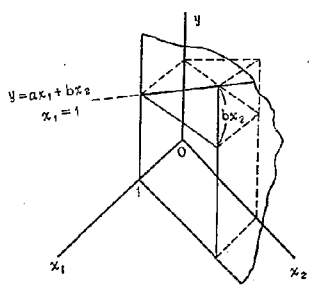


図-2.2

という直線で，ε_α がこの直線の上下に y 軸の方向に付加されて実測点となり，この ε_α の二乗和を最小にするように a, b の推定値 $\hat{a}$ $\hat{b}$ を求めればよいことは前の場合と同様である。この場合 x_1, x_2 の y に対する効果が直交

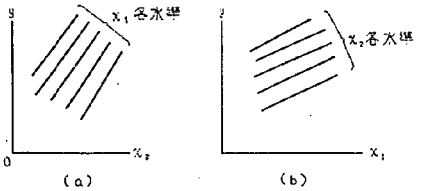


図-2.3

しているとは，x_1 を一定にした場合の x_2 の y に対する効果（つまり x_2 の方向係数 b）が一定となり，これを x_2y 面に投影して見ると図-2.3(a)のように x_1 の各水準に対しこう配は一定となり，逆に x_2 をいろいろと変えて x_1y 面上の投影を見ると，これらの直線群も x_2 の各水準の違いに無関係にそのこう配が一定となる場合のことであると考えられる。

これに対し図-2.4のように，固定した水準が異なるとこう配が変わるような場合には(3.2)式のような模型でなく，さらに2因子の積を考えた cx_1x_2 とか，また x_1 について2次3次の項を考える必要があるならば dx_1^2, fx_1^3 といった項をつけ加えなければならない。

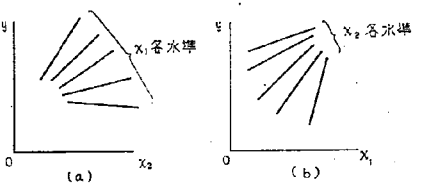


図-2.4

いずれにせよ，このような考え方で y に関係すると思われる因子（x_1x_2 といった項も一つの因子と考える）を p 個とりあげたものが(3.1)式で，これはいままでの考え方を拡張すれば $p+1$ 次元ユークリッド空間で y 軸に平行に測った残差（実測値と推定値との差，回帰超平面からの距離）の二乗和を最小にするように p 次元超平面を定めればよいことになる。

〔2〕 線型回帰模型**

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

において

$\boldsymbol{y}'=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$　$(1\times n)$ 観測変量ベクトル

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2p} \\ \vdots & \vdots\ \cdots\ \vdots \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{np} \end{bmatrix}$$ $(n\times p)$ 確定変数マトリクス

$\boldsymbol{\beta}'=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)$　$(1\times p)$ 未知母数ベクトル

$\boldsymbol{e}'=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$　$(1\times n)$ ランダムベクトル

としてプライム記号はそれぞれ転置ベクトル転置マトリ

* Wilks, S. S. (1962) : Mathematical Statistics, Wiley p. 284

** 中村慶一：実測試料による構造分析，土木技術資料　4巻6号 (1962)

クスを示すものとすれば，(3.3)式はいわゆる観測値の構造模型と考えることができる。

eに関する仮定としては

$$E[e]=0$$
$$C[e]=E[ee']=\sigma^2 I_n$$

である。

ここに，$E[\ ]$は期待値演算子，$C[\ ]$は共分散演算子，$V[\ ]$は分散演算子，0はゼロマトリクス，I_nは$(n\times n)$単位マトリクスとする。

Gauss-Markoff の定理によって β の最良線型不偏推定量は残差平方和 $e'e$ を最小にするように定められた β の不偏推定量 $\hat{\beta}$ であるから β について偏微分したものを0とおくことによって $\hat{\beta}$ を求める。

$$S_E=e'e=(y-X\beta)'(y-X\beta)$$
$$=(y'-\beta'X')(y-X\beta)$$
$$=(y'y-y'X\beta-\beta'X'y+\beta'X'X\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{(X'y)'\beta\right\}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\beta'(X'y)\right\}=X'y$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\beta'(X'X)\ \beta\right\}=2X'X\beta$$

であるから

$$\frac{\partial S_E}{\partial\beta}=-2X'y+2X'X\beta=0$$

$$\therefore\quad X'X\beta=X'y \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

でこれがいわゆる正規方程式でこれを満足する β があるならば，それが求める $\hat{\beta}$ である。

$X'X$ が正則行列ならば

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

で因子 x_i の間に相関があれば $X'X$ の行列式は0に近くなり，どの因子かの間に完全相関があれば

$$|X'X|=0 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

となり $\hat{\beta}$ を求めることができない。また完全相関でなくとも相当強い相関関係があるときは $\hat{\beta}$ の値は不安定なものとなり，実測値の多少の違いが $\hat{\beta}$ の変動に大きな影響を及ぼすこととなる。そこで各因子の効果が直交していない場合の取扱いは後にゆずり，ここでは $|X'X|$ があまり0に近くない場合について議論を進める。

$$S=X'X \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

とおけば S は積和平方和マトリクスであり，$y'y$ は y_i についての二乗和である。$\hat{\beta}$ の期待値をとれば

$$E[\hat{\beta}]=E[S^{-1}X'y]=S^{-1}X'E[X\beta+e]$$
$$=S^{-1}X'X\beta$$
$$=\beta$$

したがって $\hat{\beta}$ は β の最良線型不偏推定量である。

いま母集団についての2つの仮説を考え，H_1 として母平均は μ_1，H_2 として母平均は μ_2 で共通の共分散マトリクス Σ の正規分布であるとすれば(3.10)式より仮説 H_1 と H_2 の間の判別情報量 $D[H_1,\ H_2]$ は

$$D[H_1,\ H_2;\mu]=\delta'\Sigma^{-1}\delta \qquad \delta=\mu_1-\mu_2$$

また，仮定により $\Sigma=\sigma^2 I$ であるから，仮説 H_1 のもとで $\beta=\beta^1$，仮説 H_2 のもとで $\beta=\beta^2$ とすれば

$$\mu_1=E_1[y]=X\beta^1$$
$$\mu_2=E_2[y]=X\beta^2$$

したがって

$$D[H_1,\ H_2;\mu]=(X\beta^1-X\beta^2)'(\sigma^2 I)^{-1}$$
$$\times(X\beta^1-X\beta^2)$$
$$=(\beta^1-\beta^2)'X'X(\beta^1-\beta^2)/\sigma^2$$
$$=(\beta^1-\beta^2)'S(\beta^1-\beta^2)/\sigma^2$$
$$\cdots\cdots(2.8)$$

$e'e=(y-X\beta)'(y-X\beta)$ を最小にするよう $\hat{\beta}$ を定めたわけであるから

$$\hat{D}[H_1,\ H_2;\mu]=(\hat{\beta}^1-\beta^2)'S(\hat{\beta}^1-\beta^2)/\hat{\sigma}^2$$

H_2 を帰無仮説とすれば $\beta^2=0$ であるから，この場合の判別情報推定量は

$$\hat{D}[H_1,\ H_2;\mu]=\hat{\beta}^{1\prime}S\hat{\beta}^1/\hat{\sigma}^2$$
$$=\hat{\beta}^{1\prime}X'y/\hat{\sigma}^2 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$
$$=y'XS^{-1}X'y/\hat{\sigma}^2 \qquad \cdots(2.10)$$

また
$$S_E=(y-X\hat{\beta})'(y-X\beta)$$
$$=(y-XS^{-1}X'y)'(y-XS^{-1}X'y)$$
$$=y'(I_n-XS^{-1}X')'(I_n-XS^{-1}X')y$$
$$=y'(I_nI_n-I_nXS^{-1}X'-XS^{-1}X'I_n$$
$$+XS^{-1}X'XS^{-1}X')y$$
$$=y'(I_n-2XS^{-1}X'+XS^{-1}X')y$$
$$=y'(I_n-XS^{-1}X')\,y$$
$$=(X\beta+e)'(I_n-XS^{-1}X')(X\beta+e)$$

$$E[S_E]=(X\beta)'(I_n-XS^{-1}X')X\beta$$
$$+(X\beta)'(I_n-XS^{-1}X')\,E[e]$$
$$+(I_n-XS^{-1}X')X\beta\,E[e']$$
$$+E[e'(I_n-XS^{-1}X')\,e]\,.$$

第1項 $=(X\beta)'(X\beta-XS^{-1}X'X\beta)$
$$=(X\beta)'(X\beta-X\beta)=0$$

第2項 $=0$
第3項 $=0$ $\Big\}$ $\because\quad E[e]=0$

$$\therefore\quad E[S_E]=E[e'(I_n-XS^{-1}X')e]$$

そこで，$I_n-XS^{-1}X'=A=(a_{ij})$ とおけば

$$E[S_E]=E[e'Ae]$$
$$=E[\Sigma a_{ii}e_i^2]+E[\sum_{i\neq j}\sum e_i e_j a_{ij}]$$
$$=\Sigma a_{ii}E[e_i^2]+\sum_{i\neq j}\sum E[e_i]E[e_j]a_{ij}$$

仮定により，$E[e_i]=0$，$E[e_i^2]=\sigma^2$

また，$t_r(A)=\Sigma a_{ii}$ であるから

$$E[S_E]=\sigma^2 t_r(A)$$
$$=\sigma^2 t_r(I_n-XS^{-1}X')$$
$$=\sigma^2\{t_r(I_n)-t_r(XS^{-1}X')\}$$
$$=\sigma^2\{t_r(I_n)-t_r(I_p)\}$$
$$=\sigma^2(n-p) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

したがって $\hat{\sigma}^2=S_E/(n-p)$ とおけば

$$E[\hat{\sigma}^2]=\sigma^2$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})}{n-p}$$

$$=\frac{y'(I_n-XS^{-1}X')y}{n-p}$$

$$=\frac{y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta}}{n-p}$$

$$=\frac{y'y-\hat{\beta}'X'y}{n-p} \quad \cdots\cdots(2.12)$$

は σ^2 の不偏推定量となる。

また (2.12) 式分子の第1項は y についての総二乗和 Σy^2 であり，第2項は (2.9) 式と比較すれば判別情報量と $\hat{\sigma}^2$ の積となっており，いわば y の予測に関しあいまいで，ある程度 $y'y$ は因子 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ を考えることによって $\hat{\beta}'X'y$ だけ減少するものと考えることができる。

そこで $\hat{\beta}'X'y$ を β による二乗和の減少分の意味で $R(\beta)$ と書く。

さらに $\hat{\beta}$ の共分散を考えれば

$$C[\hat{\beta}]=E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)']$$
$$=E[(S^{-1}X'y-\beta)(S^{-1}X'y-\beta)']$$
$$=E[\{S^{-1}X'(X\beta+e)-\beta\}\times\{S^{-1}X'(X\beta+e)-\beta\}']$$
$$=E[S^{-1}X'ee'(S^{-1}X')']$$
$$=E[S^{-1}X'ee'XS^{-1}]$$
$$=S^{-1}X'E[ee']XS^{-1}$$
$$=\sigma^2S^{-1}X'XS^{-1}$$
$$=\sigma^2S^{-1} \quad \cdots\cdots(2.13)$$

したがって

$$S^{-1}=C=(c_{ij}) \quad \cdots\cdots(2.14)$$

とおけば

$$C[\beta_i,\ \beta_j]=c_{ij}\sigma^2 \quad \cdots\cdots(2.15)$$

$$V[\beta_i]=c_{ii}\sigma^2 \quad \cdots\cdots(2.16)$$

となる。

母平均 μ 母分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu,\ \sigma^2)$，片側5％点を $K_{0.05}$，自由度 ϕ のカイ2乗分布を $\chi^2(\phi)$，片側5％点を $\chi^2(\phi\,;0.05)$，自由度 ϕ の t 分布を $t(\phi)$，両側5％点を $t(\phi\,;0.05)$，自由度対 $\phi_1\phi_2$ の F 分布を $F(\phi_1\phi_2)$，片側5％点を $F(\phi_1\phi_2\,;0.05)$ と書き，ある分布に属することを $\in$ の記号で示せば

$\bar{x}\in N(\mu,\ \sigma^2/n)$ のとき

$$u\equiv\frac{(\bar{x}-\mu)/\sqrt{1/n}}{\sigma}\in N(0,\ 1^2)$$

$$t\equiv\frac{u}{\sqrt{\chi^2/\phi}}\in t(\phi)$$

$$F\equiv\frac{\chi_1^2/\phi_1}{\chi_2^2/\phi_2}\in F(\phi_1\phi_2)$$

である。

$y'y$ は n 個の二乗和でその変動は $e\in N(0,\ \sigma^2)$ であるから

$$y'y/\sigma^2\in\chi^2(n)$$

$\hat{\beta}'S\hat{\beta}$ は p 項の2次形式で

$$\hat{\beta}'S\hat{\beta}/\sigma^2\in\chi^2(p)$$

カイ2乗の加成性から

$$(y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta})/\sigma^2\in\chi_2(n-p)$$

そこで

$$F=\frac{\hat{\beta}'S\hat{\beta}/p}{(y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta})/(n-p)}\in F(p,\ n-p)$$

となるから，次の分散分析表 (表-2.1) をつくることができる。

表-2.1　AOV表

SV	SS	DF	MS
β	$\partial^2\hat{D}(H_1,H_2)=\hat{\beta}'S\hat{\beta}$ $=\hat{\beta}'X'y$ $=R(\beta)$	p	$V_\beta=\hat{\beta}'S\hat{\beta}/p$
E	$(n-p)\hat{\sigma}^2=y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta}$ $=y'(I-XS^{-1}X')y$	$n-p$	$V_E=\dfrac{(y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta})}{n-p}$
T	$y'y$	n	

F_0	$F(p,\ n-p\,;0.05)$
$F_0=V_\beta/V_E$	判　定

計算によって得た F_0 と $F(p,\ n-p\,;0.05)$ を比較し，F_0 が大きければ仮説 H_1 は有意水準5％で棄却される。しかし，この場合の β はすべてのとりあげた因子の総合効果を問題にしており，有意でない因子も含まれているおそれがあるので，その検討を要する。

[3]　二次仮説検定と情報量解析

(3.1)　二次仮説の検定

X マトリクスを左の r 列 (X_1) と右の $p-r$ 列 (X_2) とに分割，β ベクトルを β_1 から β_r まで (β_1) と β_{r+1} から β_p まで (β_2) に分割した場合について考えてみる。すなわち

$$X=\left(\begin{array}{ccc|ccc}x_{11}&x_{12}&\cdots x_{1r}&x_{1,r+1}&x_{1,r+2}&\cdots x_{1p}\\x_{21}&x_{22}&\cdots x_{2r}&x_{2,r+1}&x_{2,r+2}&\cdots x_{2p}\\\cdots\cdots&&&\cdots\cdots&&\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots x_{nr}&x_{n,r+1}&x_{n,r+2}&\cdots x_{np}\end{array}\right)$$
$$=(X_1\ X_2)$$

$$\beta'=(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_r\,|\,\beta_{r+1}\,\beta_{r+2}\cdots\beta_p)=(\beta_1'\ \beta_2')$$

とすれば式 (2.3) は

$$y=X\beta+e=(X_1X_2)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}+e$$
$$=X_1\beta_1+X_2\beta_2+e \quad \cdots(2.17)$$

$$S = X'X = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.18)$$

いま新しい帰無仮説（二次仮説）として

$$H_n : \beta' = (\beta_1' \; 0)$$

対立仮説として

$$H_a : \beta' = (\beta_1' \; \beta_2')$$

を立てる。(2.17) 式

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + e$$

において H_n の仮説のもとでの y の期待値 $E_n[y]$ は

$$E_n[y] = E_n[X_1\beta_1] + E_n[X_2\beta_2] + E_n[e] = X_1E_n[\beta_1] + X_2E_n[\beta_2]$$

$$E_n[\beta_1] = \beta_1^n$$

$$E_n[\beta_2] = \beta_2^n$$

とおけば

$$E_n[y] = X_1\beta_1^n + X_2\beta_2^n$$

同様に

$$E_n[y] = X_1\beta_1^n + X_2\beta_2^n$$

(1.16) 式より仮説 H_a と H_n の間の判別情報量は

$$D[H_a,\ H_n] = \delta'\Sigma^{-1}\delta$$

$$= (\beta_1^a - \beta_1^n,\ \beta_2^a - \beta_2^n)' \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^a - \beta_1^n \\ \beta_2^a - \beta_2^n \end{pmatrix} \Big/ \sigma^2 \quad \cdots\cdots(2.19)$$

仮説 H_a のもとでは

$$X'X\hat{\beta}^a = X'y$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1^a \\ \hat{\beta}_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$

一般に

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \qquad AB = I$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

したがって

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$$

$A_{12} = -A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}$ を前式に代入して

$$A_{11}B_{11} - A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} = I$$

A_{11}^{-1} を左より掛け

$$B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} = A_{11}^{-1}$$

同様に

$$B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} = A_{22}^{-1}$$

また,

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I$$

$A_{22} = -A_{21}B_{11}B_{21}^{-1}$ を後式に代入し

$$A_{21}B_{12} - A_{21}B_{11}B_{21}^{-1}B_{22} = I$$

A_{21}^{-1} を左より掛け

$$B_{12} - B_{11}B_{21}^{-1}B_{22} = A_{21}^{-1}$$

同様に

$$B_{21} - B_{22}B_{12}^{-1}B_{11} = A_{12}^{-1}$$

前式に左から $(B_{11}B_{21}^{-1})^{-1}$ を掛ければ

$$B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} - (B_{11}B_{21}^{-1})^{-1}B_{11}B_{21}^{-1}B_{22} = B_{21}B_{11}^{-1}A_{21}^{-1}$$

$$B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} = -B_{21}B_{11}^{-1}A_{21}^{-1}$$

左辺は A_{22}^{-1} であるから，左から A_{22} 右から A_{21} を掛ければ

$$A_{21} = -A_{22}B_{21}B_{11}^{-1}$$

同様に

$$A_{12} = -A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}$$

すなわち

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1} & \\ -(S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12})^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}, & -(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1}S_{12}S_{22}^{-1} \\ & (S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

そこで

$$S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} = S_{11\cdot 2}$$

$$S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} = S_{22\cdot 1}$$

とおけば

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11\cdot 2}^{-1} & -S_{11\cdot 2}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1} \\ -S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1} & S_{22\cdot 1}^{-1} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.20)$$

S は対称行列であるから

$$S_{12} = S_{21}$$

$$S_{11\cdot 2}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1} = (S_{22\cdot 1}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1})' = S_{11}^{-1}S_{12}S_{22\cdot 1}^{-1} \quad \cdots\cdots(2.21)$$

仮説 H_a のもとでは

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1^a \\ \hat{\beta}_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11\cdot 2}^{-1}, & -S_{11\cdot 2}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1} \\ -S_{22\cdot 1}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}, & S_{22\cdot 1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$

したがって

$$\hat{\beta}_1^a = S_{11\cdot 2}^{-1}X_1'y - S_{11\cdot 2}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1}X_2'y = S_{11\cdot 2}^{-1}(X_1' - S_{12}S_{22}^{-1}X_2')\,y$$

$$\hat{\beta}_2^a = -S_{22\cdot 1}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}X_1'y + S_{22\cdot 1}^{-1}X_2'y = S_{22\cdot 1}^{-1}(X_2' - S_{21}S_{11}^{-1}X_1')\,y$$

そこで

$$X_1' - S_{12}S_{22}^{-1}X_2' = X_{1\cdot 2}' \quad \cdots\cdots(2.22)$$

$$X_2' - S_{21}S_{11}^{-1}X_1' = X_{2\cdot 1}' \quad \cdots\cdots(2.23)$$

とおけば

$$\hat{\beta}_1{}^a = S_{11\cdot 2}{}^{-1} X_{1\cdot 2}{}' y \quad \cdots\cdots (2.24)$$

$$\hat{\beta}_2{}^a = S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' y \quad \cdots\cdots (2.25)$$

また

$$S_{11}\hat{\beta}_1{}^a + S_{12}\hat{\beta}_2{}^a = X_1{}' y$$

$$S_{21}\hat{\beta}_1{}^a + S_{22}\hat{\beta}_2{}^a = X_2{}' y$$

であるから

$$\hat{\beta}_1{}^a = S_{11}{}^{-1} X_1{}' y - S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a \quad \cdots (2.26)$$

(2.12) より

$$(n-p)\hat{\sigma}^2 = y'y - \hat{\beta}^{a\prime} X' y = y'y - \hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a$$

$$= y'y - (\hat{\beta}_1{}^{a\prime}\hat{\beta}_2{}^{a\prime}) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1{}^a \\ \hat{\beta}_2{}^a \end{pmatrix}$$

仮説 H_n のもとでは

$$H_n : \beta = \beta^n = \begin{pmatrix} \beta_1{}^n \\ O \end{pmatrix}$$

で $\beta_2{}^n = 0$ であるから (2.26) より

$$\hat{\beta}_1{}^n = S_{11}{}^{-1} X_1{}' y \quad \cdots\cdots (2.27)$$

(2.19) より

$$\partial^2 \hat{D}[H_a,\ H_n]$$

$$= (\hat{\beta}_1{}^a - \hat{\beta}_1{}^n,\ \hat{\beta}_2{}^a - \hat{\beta}_2{}^n)' \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1{}^a - \hat{\beta}_1{}^n \\ \hat{\beta}_2{}^a - \hat{\beta}_2{}^n \end{pmatrix}$$

$$= (S_{11}{}^{-1} X_1{}' y - S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a - S_{11}{}^{-1} X_1{}' y,\ \hat{\beta}_2{}^a)' \times \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_{11}{}^{-1} X_1{}' y - S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a - S_{11}{}^{-1} X_1{}' y \\ \hat{\beta}_2{}^a \end{pmatrix}$$

$$= (-\hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{21} S_{11}{}^{-1},\ \hat{\beta}_2{}^{a\prime}) \times \begin{pmatrix} -S_{11} S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a + S_{12}\hat{\beta}_2{}^a \\ -S_{21} S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a + S_{22}\hat{\beta}_2{}^a \end{pmatrix}$$

$$= \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{21} S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a - \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{21} S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a - \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{21} S_{11}{}^{-1} S_{12}\hat{\beta}_2{}^a + \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{22}\hat{\beta}_2{}^a$$

$$= \hat{\beta}_2{}^{a\prime} (S_{22} - S_{21} S_{11}{}^{-1} S_{12})\hat{\beta}_2{}^a$$

$$= \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{22\cdot 1}\hat{\beta}_2{}^a \quad \cdots\cdots (2.28)$$

一般に

$$XS^{-1}X' = (X_1\ X_2) \times \begin{pmatrix} S_{11\cdot 2}{}^{-1} & -S_{11\cdot 2}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} \\ -S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} & S_{22\cdot 1}{}^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1{}' \\ X_2{}' \end{pmatrix}$$

$$= X_1 S_{11\cdot 2}{}^{-1} X_1{}' - X_1 S_{11\cdot 2}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} X_2{}' - X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}' + X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_2{}' \quad \cdots\cdots (2.29)$$

一方,

$$X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' = (X_2 - X_1 S_{11}{}^{-1} S_{12})\, S_{22\cdot 1}{}^{-1} \times (X_2{}' - S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}')$$

$$= X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_2{}' - X_1 S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_2{}' - X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}' + X_1 S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}'$$

(2.20) (2.21) を適用し

$$X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' = X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_2{}' - X_1 S_{11\cdot 2}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} X_2{}' + X_2 S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}' + X_1 S_{11\cdot 1}{}^{-1} S_{12} S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}'$$

$$= XS^{-1}X' - X_1 S_{11\cdot 2}{}^{-1} X_1{}' + X_1 S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1} X_1{}'$$

$$= XS^{-1}X' - X_1 S_{11\cdot 2}{}^{-1} X_1{}' + X_1 S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} S_{12} S_{11\cdot 2}{}^{-1} X_1{}'$$

また

$$S_{11}{}^{-1} = S_{11\cdot 2}{}^{-1} - S_{11\cdot 2}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} S_{22\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1}$$

$$= S_{11\cdot 2}{}^{-1} - S_{11\cdot 2}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} S_{21} S_{11}{}^{-1}$$

$$= S_{11\cdot 2}{}^{-1} - S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} S_{21} S_{11\cdot 2}{}^{-1}$$

であるから

$$XS^{-1}X' = X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' + X_1 (S_{11\cdot 2}{}^{-1} - S_{11}{}^{-1} S_{12} S_{22}{}^{-1} S_{21} S_{11\cdot 2}{}^{-1})\, X_1{}'$$

$$= X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' + X_1 S_{11}{}^{-1} X_1{}' \quad \cdots\cdots (2.30)$$

$$\hat{\beta}^a = S^{-1} X' y$$

$$\therefore\ \hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a = y' X S^{-1} S S^{-1} X' y = y' X S^{-1} X' y = y' X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' y + y' X_1 S_{11}{}^{-1} X_1{}' y \quad \cdots\cdots (2.31)$$

(2.27) より

$$\hat{\beta}_1{}^n = S_{11}{}^{-1} X_1{}' y$$

$$\therefore\ \hat{\beta}_1{}^{n\prime} S_{11} \hat{\beta}_1{}^n = y' X_1 S_{11}{}^{-1} S_{11} S_{11}{}^{-1} X_1{}' y = y' X_1 S_{11}{}^{-1} X_1{}' y \quad \cdots (2.32)$$

(2.25) より

$$\hat{\beta}_2{}^a = S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' y$$

$$\therefore\ \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{22\cdot 1} \hat{\beta}_2{}^a = y' X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} S_{22\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' y = y' X_{2\cdot 1} S_{22\cdot 1}{}^{-1} X_{2\cdot 1}{}' y \quad \cdots\cdots (2.33)$$

(2.32) および (2.33) を (2.31) に代入し

$$\hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a = \hat{\beta}_1{}^{n\prime} S_{11} \hat{\beta}_1{}^n + \hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{22\cdot 1} \hat{\beta}_2{}^a \quad \cdots\cdots (2.34)$$

(2.34) を (2.28) に代入し

$$\partial^2 \hat{D}[H_a,\ H_n] = \hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a - \hat{\beta}_1{}^{n\prime} S_{11} \hat{\beta}_1{}^n \quad \cdots\cdots (2.35)$$

$$\hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a / \sigma^2 \in \chi^2(p)$$

$$\hat{\beta}_1{}^{n\prime} S_{11} \hat{\beta}_1{}^n / \sigma^2 \in \chi^2(r)$$

でカイ2乗の加成性から

$$(\hat{\beta}' S \hat{\beta} - \hat{\beta}_1{}^{n\prime} S_{11} \hat{\beta}_1{}^n) / \sigma^2 \in \chi^2(p-r)$$

そこで

$$F = \frac{\hat{\beta}_2{}^{a\prime} S_{22\cdot 1} \hat{\beta}_2{}^a / (p-r)}{(y'y - \hat{\beta}^{a\prime} S \hat{\beta}^a)/(n-p)} \in F(p-r,\ n-p)$$

となるから表-2.2 の AOV 表を作ることができる。

表-2.2 AOV表

SV	SS	DF	MS	F_0	$F(p-r,\ n-p;0.05)$
$H_n:\beta=(\beta_1^{n\prime},\ 0')$ $H_n \mid H_a$	$\hat{\beta}_1^{n\prime}S_{11}\hat{\beta}_1^{n}=R(\beta^n)$ $\hat{\sigma}^2D[H_a,\ H_n]$ $=\hat{\beta}_2^{a\prime}S_{22\cdot1}\hat{\beta}_2^{a}$ $=R(\beta^n \mid \beta^a)$ $=R(\beta)-R(\beta^n)$	r $p-r$	$V_{\beta^n}=R(\beta^n)/r$ $V_{\beta^n \mid \beta^a}=\dfrac{R(\beta^n \mid \beta^a)}{(p-r)}$	$F_0=\dfrac{V_{\beta^n \mid \beta^a}}{V_E}$	判　定
$H_a:\beta=(\beta_1^{a\prime},\ \beta_2^{a\prime})$ E	$\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^{a}=R(\beta)$ $(n-p)\hat{\sigma}^2=y'y-\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^{a}$	p $n-p$	$V_E=\dfrac{(y'y-\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^{a})}{(n-p)}$		
T	$y'y$	n			

計算によって得た F_0 と $F(p-r,\ n-p;0.05)$ を比較し，F_0 が大きければ仮説 H_a は危険率5％で棄却される。また H_a を適当に選ぶことにより他の因子の影響を除去した後の因子の効果を検定することができる。そこで電子計算によって自動的に有意な因子を選定するプログラムを次節のように作ることができる。

(3.2) 自動計算による有意な因子選定のプログラム

前節において2次仮説の検定手続を導いたが，第1，2，…，$p-1$ 因子がすべて0という仮説 H_p を立て，これが棄てられれば次に第1，2，…，$p-2$ 因子がすべて0という仮説 H_{p-1} を立て，つぎつぎと検定を行ない，もし第 l 因子のみが0でなく，第1，2，…，$l-1$ 因子がすべて0という仮説 H_l が棄てられず有意ということになれば第 l 因子を一ばん始めにもってきて第 $l-1$ のみが0でなく，第 l，1，2，…，$l-2$ 因子がすべて0という仮説 H_{l-1} を立てこれを検定する。

以上の手続によって有意な因子のみを選定することが可能となる。なお F 検定を自動計算の途中で行なわせるには F 表を記憶させる必要があるが，その代りに次の F 表5％点の近似式* を記憶させればよい。

$$F(1,\ \phi_2;0.05)\fallingdotseq\left(1.4+\frac{1}{\phi_2}\right)^4$$

手順1　正規方程式およびその解の計算

$y=X\beta+e$ を観測方程式とすれば $X'X\beta=X'y$ なる正規方程式の左辺の係数行列 $X'X$ および右辺 $X'y$ をデータ $x_{11},\ x_{12},\cdots,\ x_{1p}$ および y_1 の読込みと同時に計算する。すなわち

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\cdots\Sigma_{1p}\\ * & \Sigma_{22}\cdots\Sigma_{2p}\\ & \ddots\\ * & \cdots * \ \Sigma_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{1y}\\ \Sigma_{2y}\\ \vdots\\ \Sigma_{py}\end{pmatrix}$$

を計算しタイプアウト。ただし

$$\Sigma_{ab}=\sum_{l=1}^{n}x_{la}\,x_{lb}$$

$$\Sigma_{ay}=\sum_{l=1}^{n}x_{la}\,y_l$$

である。

この正規方程式を解き，根 $b_1,\ b_2,\cdots,\ b_p$ を求めタイプアウト。

手順2　因子の有意性検定

1.　平方和 $R(1,\ 2,\cdots,\ r)$ の計算

Gauss-Doolittle 法で計算する第 r 段階において，第 k 因子に対する根を $b_k^{(r)}$ とすれば

$$R(1,\ 2,\cdots,\ r)=\sum_{k=1}^{r}b_k^{(r)}\Sigma_{ky}$$

となる。そこで

$$R(1)=b_1^{(1)}\Sigma_{1y}$$

$$R(1,\ 2)=b_1^{(2)}\Sigma_{1y}+b_2^{(2)}\Sigma_{2y}$$

……

$$R(1,\ 2,\cdots,r)=\sum_{k=1}^{p}b_k^{(p)}\Sigma_{ky}$$

を計算し格納する。

2.　AOV 表計算

表-2.3のように AOV 表を計算し，$r(1,\ 2,\cdots,\ r-1)$ に対する F_0 と $F(1,\ n-p;0.05)$ とを比較し，1，2，…，$r-1$ 因子の影響を除去した後の r 因子の有意性を検定する。F 表の値は，

$$F(1,\ \phi;0.05)\fallingdotseq\left(1.4+\frac{1}{\phi}\right)^4$$

という近似式によって求める。

手順3　正規方程式の縮少入れ換え

前手続の有意性検定は AOV 表の下方より始め，k 因子が有意であるときは以後の検定を中止し，有意でなかった因子に相当する行列を除去し，k 因子に対応する行列を第1行第1列とした新しい正規方程式を作り，再び手順2にしたがい AOV 表の下方より検定を行なう。AOV 表は一ばん最初のものは全部アウトプットするが手順3以降は有意であった因子の出るまでをアウトプットし，それより上方はアウトプットしない。なお，有意であった因子の番号もプリンドする。

* ダム構造研究室：F 表 t 表5％点の近似式　土木技術資料5巻5号 (1963)

表-2.3　AOV 表

SV	SS	DF	F_0
1(0)	$R(1)=1(0)$	1	$1(0)/(MS)_E$
2(1)	$2(1)=R(1,\ 2)-R(1)$	1	$2(1)/(MS)_E$
	$R(1,\ 2)$	2	
	⋮	⋮	
	$R(1,\ 2,\cdots,\ r-1)$	$r-1$	
$r(1,\ 2\cdots,\ r-1)$	$r(1,\ 2,\cdots,\ r-1)=R(1,\ 2,\cdots,\ r)-R(1,\ 2,\cdots,\ r-1)$	1	$r(1,\ 2,\cdots,\ r-1)/(MS)_E$
	$R(1,\ 2,\cdots,\ r)$	r	
	⋮	⋮	
	$R(1,\ 2,\cdots,\ p-1)$	$p-1$	
$p(1,\ 2,\cdots,\ p-1)$	$p(1,\ 2,\cdots,\ p-1)=R(1,\ 2,\cdots,\ p)-R(1,\ 2,\cdots,\ p-1)$	1	$p(1,\ 2,\cdots,\ p-1)/(MS)_E$
	$R(1,\ 2,\cdots,\ p)$	p	
E	$(SS)_E=(SS)_T-R(1,\ 2,\cdots,\ p)$	$n-p$	$(MS)_E=(SS)_E/(n-p)$
T	$(SS)_T=\Sigma_{yy}$	n	

ただし　SV = Source of variance　　SS = Sum of squares
DF = number of degrees of freedom　　MS = mean squares

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1k} & \cdots & \Sigma_{1p}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2k} & \cdots & \Sigma_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Sigma_{p1} & \Sigma_{p2} & \cdots & \Sigma_{pk} & \cdots & \Sigma_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{1y}\\ \Sigma_{2y}\\ \vdots\\ \Sigma_{py}\end{pmatrix}$$

↓（縮少）

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1k}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Sigma_{k1} & \Sigma_{k2} & \cdots & \Sigma_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{1y}\\ \Sigma_{2y}\\ \vdots\\ \Sigma_{ky}\end{pmatrix}$$

↓（入換）

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{kk} & \Sigma_{k1} & \cdots & \Sigma_{k,k-1}\\ \Sigma_{1k} & \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1,k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Sigma_{k-1,k} & \Sigma_{k-1,1} & \cdots & \Sigma_{k-1,k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{ky}\\ \Sigma_{1y}\\ \vdots\\ \Sigma_{k-1,y}\end{pmatrix}$$

ただし，たとえば $k-1$ 因子の検定は

$$F_0=\frac{(k-1)(k,\ 1,\ 2,\cdots,\ k-2)}{(MS)_E}$$

と $F(1,\ n-k;\ 0.05)$ とを比較して行なう。

手順 4　その他

1.　常数項のある場合

$x_{\alpha 1}$ がすべての α に対し 1 の場合は Gauss-Doolittle 法の第 1 段階で次のようになる。

$$\begin{pmatrix}1 & \Sigma_{12}/n & \Sigma_{13}/n & \cdots & \Sigma_{1p}/n\\ 0 & S_{22} & S_{23} & \cdots & S_{2p}\\ 0 & S_{32} & S_{33} & \cdots & S_{3p}\\ \vdots & \cdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & & S_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{1y}/n\\ S_{2y}\\ S_{3y}\\ \vdots\\ S_{py}\end{pmatrix}$$

ただし

$$S_{ij}=\Sigma_{ij}-\frac{\Sigma_i\Sigma_j}{n}$$

2.　相関係数 (R)，偏回帰係数 (B)，標準化偏回帰係数 (SB) の計算

$$R_{ij}=\frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}$$

B　正規方程式の解

SB　相関行列を係数行列とする正規方程式の解

[4]　**各因子の間に相関のある場合***

(4.1)　各因子の独立性

前節において正規方程式

$$\boldsymbol{X'X\beta=X'y}$$

が解をもつための条件は $\boldsymbol{X'X}$ が正則行列であることであった。しかし det ($\boldsymbol{X'X}$) が 0 でなくとも，0 に近いものであるときは $\boldsymbol{\beta}$ は不安定なものとなり，実測した x のちょっとした違いによって $\boldsymbol{\beta}$ は大幅に変動する。

det ($\boldsymbol{X'X}$) が 0 に近くなるときは，y に関係するであろうと予想して選定した p 個の因子が互いに無関係でなく，たとえば x_i と x_j の間に相当強い相関関係が存在することを意味する。もし 1 組でも完全相関の組が存在すればその行列式は 0 となるが，相当強い相関をもつ組があるときはその行列式は 0 に近いものとなる。

完全相関をもつとは，たとえば

$$x_i=a+bx_j\qquad(a,\ b\text{は定数})$$

という関係が存在し，わざわざ x_i を別個に測定しなくとも，x_j さえ測定すれば x_i に関する情報は完全に得られることを意味し，相当強い相関をもつとは

* 中村慶一：実測試料による構造分析（その二）土木技術資料 5 巻 6 号(1963)

$x_i = e + bx_j$ (bは定数)

なる関係はあるが，最初の x_j の関係しない常数項もある程度大きいため，x_i は x_j の情報のみでは完全にはカバーできない状態であることを示している。

このことは $p+1$ 次元空間で y 軸と直交する p 本の軸が互に直交しているものと考えて標本点をとり，y 軸の方向にはかった超平面からのズレの二乗和が最小となるように定めたつもりの p 次元超平面が，じつはその中の何本かの軸が直交していなくて，接近して斜交してしまっているために，x のちょっとした違いで，この超平面はこの接近した軸群に関しては不安定になってしまっていることに対応している。

たとえば，アーチダムのたわみという測定値の構造を分析するため，いろいろな標高の平均温度，いろいろな標高の温度こう配，水深，時間に関係した項（クリープその他を考慮して）などの諸因子を考えて前節の分析を行なったところ，測定期間が異なると偏回帰係数がまったく違ったものになることが多い。これはじつは温度に関係した項が，太陽輻射という共通の主原因およびある標高の上流面に水が存在するかどうかという水深の関係した副原因の影響を受け，相当強い相関関係が存在しているためであると解することができる。

このような場合，相関のある各因子の個々の偏回帰係数はあまり意味をもたなくなり，これらを群としてまとめたものの合計影響分のみが安定しており，前節のようなある因子の効果のうち他の因子の持分として説明できる分を差引いても，なお独自の効果を主張できる因子を残す計算によるときは，相当強い相関をもつ有意な因子の群はそのうちのどれかが生き残る可能性をもっていることになる。

しかし本来 $p+1$ 次元より少ない次元の空間で論ずべき現象であったと解釈すれば，y 軸を除いた p 個の軸について直交化を行ない，新しい直交軸の中で y についてより多い情報を与えてくれる軸を選定し，もとの p 本の軸から得られる情報量に対しその減少分が無視できるほど小さいものならば，この新しい数少ない直交軸のもつ物理的意味に沿った新しい測定を行なうことにより，少ない手数で y の予測を行なうことができる。

この直交化の方法はいろいろ考えることができるが，相関行列の固有値，固有ベクトルを求める主成分分析のやり方が最適と考えられる。

(4.2) 主成分分析

いま $p+1$ 次元空間で y 軸は他の p 本の x_i 軸に対し直交しているが，p 本の x_i 軸は互いに直交しているかどうか不明なものとする。また今の場合，x のバラツキの大小だけを問題にしているから座標原点を $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_p$ に移し，x_i の分散が1となるよう規準化して考えても一般性は失なわない。

したがって，

$$E[x] = 0$$

$$C[x] = E[xx']$$

$$= E\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \cdots x_1x_p \\ x_2x_1 & x_2^2 \cdots x_2x_p \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_px_1 & x_px_2 \cdots x_p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \cdots \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \cdots \sigma_{2p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} \cdots \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \cdots \sigma_{1p} \\ * & 1 \cdots \sigma_{2p} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ * & \cdots * \quad 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Sigma$$

標本点の座標を $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$，ある一点を Q，原点を O とすれば，OQ の方向余弦は

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$$

となり，方向余弦の性質から

$$\alpha'\alpha = 1$$

そこで $\alpha'x$ という1次結合を作れば，これは OQ 方向の射影となっており，$\alpha'x$ の分散を $\alpha'\alpha = 1$ という条件のもとで最大にするよう α を定めることができれば，この方向は標本点の p 次元超平面への射影の二乗和を最大にし，y についての p 次元超平面の傾きに関する情報としては最大のものを与えてくれる可能性のある方向ということになる。

$\alpha'x$ の分散は

$$V[\alpha'x] = E[(\alpha'x)(\alpha'x)']$$
$$= E[\alpha'x\ x'\alpha]$$
$$= \alpha'E[x\ x']\alpha$$
$$= \alpha'\Sigma\alpha \quad \cdots\cdots(2.36)$$

ラグランジュの乗数を λ とすれば

$$S_1 = \alpha'\Sigma\alpha - \lambda(\alpha'\alpha - 1)$$

を α について偏微分したものを0とおくことによって，これと $\alpha'\alpha = 1$ という条件とを用い α を定めればよい。

一般に y を $p \times 1$ ベクトル，A を $p \times p$ マトリクスとすれば

$$\frac{\partial(y'Ay)}{\partial y} = 2Ay \quad \cdots\cdots(2.37)$$

であるから

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = 2\Sigma\alpha - 2\lambda\alpha = 0 \quad \cdots\cdots(2.38)$$

これが $\alpha = 0$ 以外の解をもつためには

$$|\Sigma - \lambda I| = 0 \quad \cdots\cdots(2.39)$$

この固有方程式は λ に関する p 次の多項式であるから

p 個の根があり，大きさの順に

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_p$$

とする。

最大根 λ_1 を (2.38) 式に代入したときの解を α_1 とすれば，$\alpha_1'x$ は p 次元超平面の y に関する傾きについての最大の情報を与えてくれる軸となる。この軸を U_1 とおけば U_1 軸と直交するように他の軸を定めるには U_1 と $\alpha'x$ との共分散が 0 となるように定めればよい。

共分散は

$$E[\alpha'xU_1'] = E[\alpha'xx'\alpha_1] = \alpha'E[xx']\alpha_1 = \alpha'\Sigma\alpha_1 \quad \cdots\cdots(2.40)$$

であるから $\alpha'\Sigma\alpha_1 = 0$ となるように次の軸を定めればよい。そこで $\alpha'\Sigma\alpha_1 = 0$, $\alpha'\alpha = 1$ の条件のもとに $\alpha'\Sigma\alpha$ を最大にするような α を求めるには $\lambda\mu_1$ をラグランジュの常数とすれば

$$S_2 = \alpha'\Sigma\alpha - \lambda(\alpha'\alpha - 1) - 2\mu_1\alpha'\Sigma\alpha_1$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial\alpha} = 2\Sigma\alpha - 2\lambda\alpha - 2\mu_1\Sigma\alpha_1 = 0 \quad \cdots\cdots(2.41)$$

(2.38) より

$$\Sigma\alpha_1 = \lambda\alpha_1$$

Σ は対称行列であるから

$$\Sigma' = \Sigma$$

$$\therefore\ \ \alpha_1'\Sigma = \lambda\alpha_1' \quad \cdots\cdots(2.42)$$

(2.41) に α_1' を左より掛け (2.42) を代入して

$$\lambda\alpha_1'\alpha - \lambda\alpha_1'\alpha - \mu_1\lambda\alpha_1'\alpha_1 = 0$$

$$\therefore\ \ \mu_1\lambda\alpha_1'\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1'\alpha = 1 \qquad \lambda \neq 0$$

であるから

$$\mu_1 = 0$$

したがって (2.41) より λ_2 を二番目の最大根とすれば

$$(\Sigma - \lambda_2 I)\alpha = 0$$

および

$$\alpha'\alpha = 1$$

を満足する α を α_2 とすれば，これは U_1 軸と直交し，しかも U_1 軸を除いた $p-1$ 次元超平面への投影について考えれば，y についてのこの超平面の傾きに関する最大の情報を与えてくれる方向が $\alpha_2'x$ となり，この軸を U_2 とおく。

以下同様にして，一般に $\alpha'\alpha = 1$, $\alpha'\Sigma\alpha_1 = 0$, $\alpha'\Sigma\alpha_2 = 0, \cdots\cdots \alpha'\Sigma\alpha_k = 0$ という条件のもとに，$\alpha'\Sigma\alpha$ を最大にするには λ, μ_1, $\mu_2,\cdots$, μ_k をラグランジュの乗数として

$$S_{k+1} = \alpha'\Sigma\alpha - \lambda(\alpha'\alpha - 1) - 2\sum_{t=1}^{k}\mu_t\alpha'\Sigma\alpha_t$$

$$\frac{\partial S_{k+1}}{\partial\alpha} = 2\Sigma\alpha - 2\lambda\alpha - 2\sum_{t=1}^{k}\mu_t\Sigma\alpha = 0$$

で結局 p 個の固有根を大きさの順に λ_1, $\lambda_2,\cdots$, λ_p としこれに対する固有ベクトルをそれぞれ α_1, $\alpha_2,\cdots$, α_p とすれば

$$U_i = \alpha_i'x$$

が新しい直交軸となり，$i = 1, 2,\cdots$ の順に標本点のその方向の投影の分散が最大，つまり y に関する超平面の傾きについての最大の情報を与えてくれる方向となる。

特に x_i の分散が 1 となるようにとっているので

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_p^2 = 1$$

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$$

と置けば，今の場合 $r_{ij} = \sigma_{ij}$ となるから x の共分散は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

なる相関行列と考えることができる。マトリクスのトレースはその固有根の和に等しいから

$$t_r(\Sigma) = p = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i$$

したがって固有根を大きい順に算出し，p に対し λ_i までの和がある程度（たとえば 95 %）以上に達したら U_i 軸までを考慮することにより超平面の y に関する傾きについての情報の大部分は得られると考えてよい。

さらに λ_1, $\lambda_2,\cdots$, λ_i 軸上の値を計算する上に固有ベクトルの各要素のうち同じ α_i がすべて他の α に比して無視してさしつかえない程度に小さければ x_i に関する測定の y の予測に関する価値は低いものとみなして，今後 x_i 軸を省略して考えることも可能である。

また，U_1, $U_2,\cdots$, U_i 軸が残ったとすれば，この軸のもつ物理的意味を考え，この軸の方向と同じ（または近い）意味をもつ新しい測定因子を見いだす努力をすべきであると考えられる。

(4.3) 自動計算による主成分分析の計算手続

残差積和マトリクスより相関マトリクスを作り，その固有値および固有ベクトルを固有値の大きい方から順に計算し，$l \times l$ マトリクスのとき固有値の和が l の 95 % 以上に達したならば計算を中止し固有ベクトルにより U 系に変換したデータについて重回帰分析を行ない，有意な回帰係数を見いだすプログラムとする。

手順 1　残差積和マトリクスおよび相関マトリクスの計算

x_{ij} のデータ読込みと同時に残差積和 S_{ij} を計算する。

$$S_{ij} = \Sigma x_i x_j - \Sigma x_i \Sigma x_j/n$$

次に，これを用いて相関係数を計算する。

$$r_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}$$

手順 2　相関マトリクスの最大固有値およびそれに対応する固有ベクトルを計算する。

固有値の計算としては反覆法を用いる。すなわち，初

期ベクトルを

$x_0' = (1, 1, \cdots, 1)$　　$1 \times p$ ベクトル

とし，相関マトリクス R に対して

$y_1 = Rx_0'$

をつくり y_1 の最大要素を 1にするように修正したベクトルを x_1 とすれば

$y_2 = Rx_1$

と逐次くり返えしていって x_n と x_{n-1} とが所要の精度で一致するようになったときの y の最大エレメント λ_f が最大固有値，$x_n = x_f$ が最大固有ベクトルとなる。

第二の最大固有値を求めるには第一主軸の影響を除去し

$$R - \frac{\lambda_f x_f x_f'}{x_f' x_f}$$

の最大固有値と固有ベクトルを求めればよい。

手順3　固有値の和の検定

最大固有値より大きさの順に算出し，R マトリクスが $l \times l$ マトリクスのとき固有和が l であるから，その l に対し固有値の和が 95 %以上となるまで計算を続行し，そこで計算を打切る。

手順4　U 系への変換

x を規準化し

$$X_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sqrt{V_{xi}}}$$

について

$U_j = x_j' X$

を計算する。

手順5　U 系についての重回帰分析

前節の方法により有意な U を求める。

(4.4)　主成分分析の実例

ダム頂部余水吐の端収縮係数 (K_d) はダムの水理設計上重要な因子となるが，これは余水吐の純径間 (B)，せき柱幅 (b)，接近水路深 (D)，設計水頭 (H_d) などの影響を受け，一義的に予測することが困難で，土木研究所においても模型実験によって求めてきた。しかし，いろいろな条件の下で実例が相当数得られたので，できるだけ直交化された因子による線型推定を試み，次のようなインデックスが考えられた。

$x_1 = B/H_d$

$x_2 = b/H_d$

$x_3 = H_d/D$

そこで，端収縮係数の構造式として

$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e$

を考え，表-2.4 のような 12 個のデータによって重回帰分析を試みた。

重回帰分析の結果は x_1 因子のみが有意で 個回帰係数は 2.483 となった。(常数項を含め 4 因子で，始め常数項 x_1，x_2 による説明分を差引いた x_3 だけの持分を分散分析した結果有意でなく，次に常数項および x_1 による説明分を差引いた x_2 だけの持分を分散分析したら，これも有意でないことになり，常数項による説明分を差引いた x_1 だけの持分は有意となり，入れ換えして x_1 による説明分を差引いた常数項の持分は有意でなくなったので，x_1 だけが有意という結論になったもので，4 因子，データの組数 12 に対し NEAC 2203 で約 3 分を要した)

表-2.4　端収縮係数分析の入力データ

#	y	x_1	x_2	x_3
1	0.021	0.692	0.231	0.160
2	0.025	0.690	0.303	0.155
3	0.019	0.848	0.242	0.134
4	0.024	1.428	1.000	0.105
5	0.048	1.800	0.600	0.012
6	0.021	0.774	0.995	0.139
7	0.032	1.229	0.307	0.181
8	0.029	0.892	0.186	0.289
9	0.017	0.896	0.188	0.236
10	0.012	0.657	1.000	0.418
11	0.013	0.774	1.000	0.139
12	0.030	0.888	0.187	0.162

ただし，x_2 において余水吐が 1 個の場合は 1.000 と考えた。

しかし，これらの因子はまだ直交していない疑いがあるので，主成分分析を行なって新しい直交軸を求めてみると，x_1，x_2，x_3 の相関行列は

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1035 & -0.5713 \\ * & 1.0000 & -0.0379 \\ * & * & 1.0000 \end{pmatrix}$$

x_1，x_2，x_3 の y との相関係数は

$$\begin{pmatrix} 0.7816 \\ -0.2891 \\ -0.5629 \end{pmatrix}$$

また固有値および固有ベクトルは

1.5884	(0.7018	0.1881	−0.6923)
0.9867	(−0.0612	0.9824	0.1766)
0.4249	(0.7098	−0.0816	0.7000)

となる。

この結果をみると新しい直交軸のうちこの推定超平面の y 軸に対する傾きについて最大の情報を与えてくれる可能性のある軸の方向は x_2 因子がほとんど関係せず，x_1 と x_3 が同程度に異符号で影響するような軸であり，2番目に大きな情報を与えてくれる可能性を与えてくれる軸の方向は x_1 と x_3 があまり関係せず主として x_2 に影響される軸，最少の情報しか与えてくれぬ軸の方向は x_2 がほとんど関係せず，x_1 と x_3 が同程度に同符号で影響する軸ということになる。

この主成分分析は x_1, x_2, x_3 それぞれの分散が 1 になるように標準化してあるので，このように標準化した因子をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とすれば

$$U_1 = X_1 - X_3$$
$$U_2 = X_2$$
$$U_3 = X_1 + X_3$$

という軸を考えると，この軸はほとんど直交しないはずである。いま x_1 のちらばりを見ると，x_3 のちらばりの大体4倍くらいなので，いちいち不偏分散の平方根を計算して標準化することが面倒な場合は

$$U_1 = x_1 - 4x_3$$
$$U_2 = x_2$$
$$U_3 = x_1 + 4x_3$$

を作ってみてもよいわけである。

正確に行なえば

$$X_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sqrt{V_1}}$$

などと標準化した新しい因子 X_1, X_2, X_3 と固有ベクトルを用い

$$U_1 = 0.7018\,X_1 + 0.1881\,X_2 - 0.6923\,X_3$$
$$U_2 = -0.0612\,X_1 + 0.9824\,X_2 + 0.1766\,X_3$$
$$U_3 = 0.7098\,X_1 - 0.0816\,X_2 + 0.7000\,X_3$$

とした U_1, U_2, U_3 によって正規方程式を作れば，これらは直交しているので係数行列は対角行列となり解はきわめて簡単に求まるが，近似的な置き換えを行なった場合は，非対角要素は小さいものにはなるが必ずしも0とはならず，やはり普通の重回帰分析を必要とする。

これによって近似計算した場合，U_1 と常数項のみが有意となり，予想どおり x_1 と $4x_3$ の差に関係するような新しい測定因子の物理的意味を考え，このような方向の測定を考えることによっていままでの x_1, x_2, x_3 の3因子を考えたときとあまり予測誤差に差のない予測が可能となることが予想される。

[5] ダムのたわみ解析に対する応用*

(5.1) アーチダムのたわみに影響する因子

アーチダムのたわみに影響する因子としては種々の断面における平均温度，等置直線温度こう配，水圧荷重，などのほかに岩盤の塑性変形，コンクリートのクリープなど時間に関係する量などが考えられる。

a. 平均温度および等置直線温度こう配

アーチダムには両岸における拘束による温度応力ならびに提体自身が適合条件式を満足させるために自己拘束をすることによる温度応力が存在する。

アーチ自由面 OF におけるダム軸方向のひずみ ε_y が

$$\varepsilon_y = \alpha x + c$$

なる直線分布をするものとすれば，ε_y は温度ひずみ kt と拘束応力によるひずみ ε_y' の和で

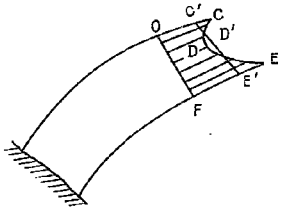


図-2.5

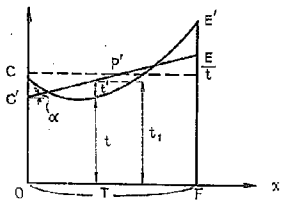


図-2.6

$$\varepsilon_y = kt + \varepsilon_y'$$

$\varepsilon_y = kt_1$, $\varepsilon_y' = kt'$ なる温度 t_1, t' を想定すれば

$$t_1 = t + t'$$
$$t_1 = \frac{\alpha}{k}x + \frac{c}{k}$$

すなわち温度上昇 t を受けた自由面 OF は自己拘束温度応力のため，あたかも t_1 なる直線分布の温度上昇を受けたかのようなひずみを生ずることになる。したがって，たわみ解析においては次のように平均温度および等置直線温度こう配を考える。

OF 面には外力が働いていないので，拘束力を σ_y' とすれば

$$\int_0^T \sigma_y'\,dx = 0 \qquad \int_0^T \sigma_y' x\,dx = 0$$
$$\sigma_y' \fallingdotseq E\varepsilon_y'$$

とすれば

$$\int_0^T \varepsilon_y'\,dx = 0 \qquad \int_0^T \varepsilon_y' x\,dx = 0$$
$$\varepsilon_y' = \varepsilon_y - kt$$

であるから

$$\int_0^T (\varepsilon_y - kt)\,dx = \int_0^T (dx + c - kt)\,dx = 0$$
$$\int_0^T (\varepsilon_y - kt)\,x\,dx = \int_0^T (\alpha x + c - kt)\,x\,dx = 0$$

したがって

$$\alpha\frac{T^2}{2} + cT = k\int_0^T t\,dx \equiv kA$$
$$\alpha\frac{T^3}{3} + c\frac{T^2}{2} = k\int_0^T tx\,dx \equiv kM$$

* 土木研究所：河川総合開発調査　昭和37年度成果報告書（1963）
土木研究所ダム構造研究室：実測資料によるアーチダムの挙動解析（1963年12月）

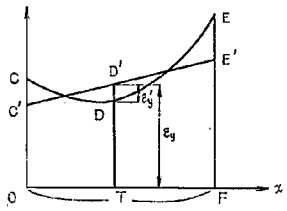


図-2.7

A は EFOC の面積，M は EFOC の O 軸の まわりの一次モーメントである。

$$\alpha = \frac{12M - 6AT}{T^3} \quad \text{等価直線温度こう配}$$

$$c = \frac{2(2AT - 3M)}{T^2}$$

$$\bar{t} = c + \alpha\frac{T}{2} = \frac{A}{T} \quad \text{平均温度}$$

b.　水圧荷重

水圧荷重因子は水深 h の n 乗を考える。

c.　クリープ

岩盤の塑性変形，コンクリートのクリープなど，主として時間に関係した項を一括してクリープということにする。米開拓局ではコンクリートの時間 θ におけるひずみ $\varepsilon'(\theta)$ を材令 K の関数として与えられる応力 $\sigma(K)$ にもとづく瞬間弾性係数 $E(K)$ による弾性ひずみと材令 K における単位応力による時間 θ におけるクリープ $\varphi(K, \theta)$ にもとづくクリープひずみとの和として

$$\varepsilon'(\theta) = \int_\tau^\theta \frac{1}{E(K)}\cdot\frac{d\sigma}{dK}\,dK + \int_\tau^\theta \varphi(K,\ \theta)\,\frac{d\sigma}{dK}\,dK$$

を与えている。$\varphi(K,\ \theta)$ は対数関数的に増大することが実験の結果を認められており

$$\varphi(K,\ \theta) = k_K \log\left(\frac{1+\theta}{1+K}\right)$$

とすれば，クリープによるひずみ $\varepsilon_c'(\theta)$ は

$$\varepsilon_c'(\theta) = \int_\tau^\theta k_K \log\left(\frac{1+\theta}{1+K}\right)\frac{d\sigma}{dK}\,dK$$

そこで，本解析においては近似的に

$$\varepsilon_c'(\theta) \fallingdotseq \sum_i k_i \log\left(\frac{1+\theta}{1+\theta_i}\right)$$

と考える。しかして起点となる θ_i は一応 100 日ごとにとり，クリープ現象が顕著と考えられるところは，さらに細かく区切ることにする。

(5.2)　二瀬ダムにおける実例

二瀬ダムは荒川上流に設けられた高さ 95 m，堤頂長 290 m，堤体積 39.2 万 m³ の厚肉アーチダムであって，総貯水量 2180 万 m³ をもって洪水調節，農業，発電を行なう多目的ダムで 1960 年 11 月 16 日たん水を開始した。ベース標高は El. 455 m，満水面標高 545 m である。

ダムの挙動に影響を及ぼす支配的因子として，設計時には水圧，温度荷重等が考慮されているが，荷重分割法による計算，石膏模型実験等には多くの仮定を伴っているので，実際のダムに対するたわみ，ひずみ等の観測資料より設計方法の検証，改良をはかるため実測を行なった。

二瀬ダムの温度条件を代表する断面として一応次の 4 断面を選定した。

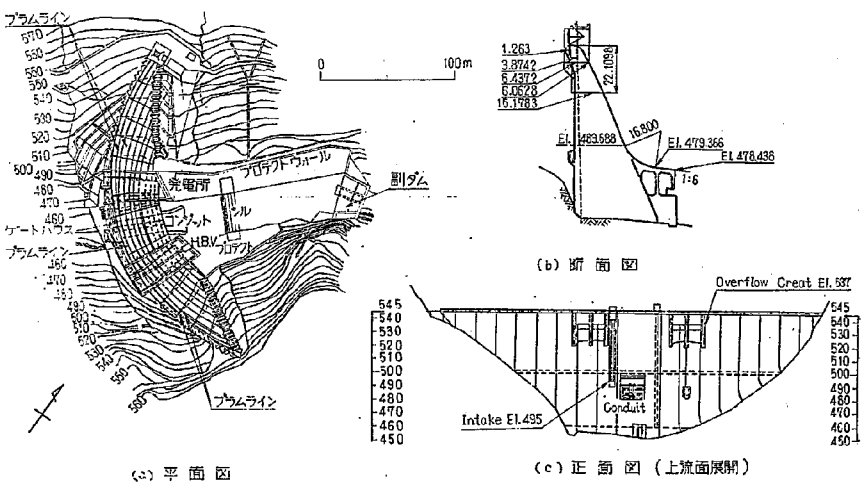


図-2.8　二 瀬 ダ ム

断面番号	標　高
4	El. 458.5
3	El. 495.5
2	El. 515.0
1	El. 535.0

二瀬ダムのたわみの構造式としては，まずたわみを δ，i 標高の平均温度を t_i，i 標高の温度こう配を α_i，クリープが顕著と思われる時点としてたん水開始日前 100 日を原点にとり日で計算し，θ_i として 100 日，145 日，299 日，451 日を図より選定し，1960 年 11 月 14 日より，1962 年 5 月 26 日の約 1 年半にわたる 32 個の実測資料により解析した。

構造式は

$$\delta = c + \sum_{i=1}^{4} a_i t_i + \sum_{i=1}^{4} b_i \alpha_i + \sum c_i (h-475)^i + \sum_i d_i \log\left(\frac{1+\theta}{1+\theta_i}\right) + e$$

で電子計算させ有意となった因子により $\hat{\delta}$ を作ってみると，

$$\hat{\delta} = 63.70 - 1.639(t_3 - 14.5) - 7.659(\alpha_3 + 0.2343) + 0.0432(h-239)^2 - 0.001169(h-239)^3 + 0.000000905(h-239)^4 - 164.9\log\left(\frac{1+\theta}{101}\right) + 161.8\log\left(\frac{1+\theta}{146}\right) + 22.28\log\left(\frac{1+\theta}{306}\right)$$

となった。これを実測値と対比してみると，水圧荷重による持分とクリープによる持分が初期において甚だしく大きいという結果を示している。

これは，たん水初期に固有の今までとり上げなかった因子の攪乱によるものと考え，1961 年 5 月 18 日以降 1962 年 5 月 26 日までの 21 個の資料について，前に有意となった因子ならびに θ_i として 100, 179, 313, 466, 603 をとり電子計算を行なった結果有意となった因子により $\hat{\delta}$ を作ってみると

$$\hat{\delta} = 45.35 - 1.540(t_3 - 14.5) - 11.55(\alpha_3 + 0.2343) + 0.002194(h-239)^2 + 14.37\log\left(\frac{1+\theta}{101}\right)$$

となり，この係数を用いて 1961 年 5 月以前に対し補外してみると残差は相当小さいものとなったが，たん水開始後 3 カ月間の残差はまだ大きい。

そこでこれは主としてクリープによるたわみの持分の外挿によるものと考えて 1961 年 5 月以降のデータについて平均温度，温度こう配，水圧荷重の持分を差引いた残りのたわみについて θ_i が 0, 100, 110, 120, 130, 200, 300, 450 のものについて解析を行なったところ

$$\hat{\delta}_\theta = 207.24 - 71.44\log(1+\theta) + 35.30\log\left(\frac{1+\theta}{131}\right) + 51.60\log\left(\frac{1+\theta}{201}\right)$$

となる。そこで前式と合成し

$$\hat{\delta} = 207.24 - 71.44\log(1+\theta) - 1.54(t_3 - 14.5) - 11.55(\alpha_3 + 0.2343) + 0.002194(h-239)^2 - 71.44\log(1+\theta) + 35.30\log\left(\frac{1+\theta}{131}\right) + 51.60\log\left(\frac{1+\theta}{201}\right)$$

を得た。残差不偏分散の平方根は 0.894 mm できわめて良い推定値を与えている。

この結果を水位，堤体の平均温度，温度こう配に分けてプロットしてみると初期の 3 カ月に約 15 mm 上流側に動き，以後 15 カ月間に 6 mm 回復する経年変化が見られる。

これは下部に水圧荷重がかかった場合岩盤の荷重履歴のない場合の変形係数がくり返し載荷後の弾性係数に比して大幅に小さいために起る上部と下部の相対変位によるものと考えられる。

平均温度によるたわみの振幅は約 17 mm，温度こう配によるたわみの振幅は約 12 mm，水圧によるたわみは水位 El. 515 m において約 12 mm であった。

入力データの様式は NEAC 2203 の様式で次のようなものである。

Futase　はダム名で最近のプログラムでは出力データの冒頭に FUTASE という名のほか，因子の対照表をアウトプットさせることになっている。

50 ZA　のうち ZA は格納番地を示し，今はこれ以降は 50 番地以下に格納すべきことを示している。

p 18　は x_i として因子を 18 種とっていることを示す。

ZI　は以下同様にその前の数字が整数であることを示す。

N 21　はデータの組数が 21 であることを示す。

f_1 1　は今やろうとする演算は常数項を考えるものであることを示している（考えないときは 0 とする）。

900 *ZA*　はこれ以下は 900 番地以降に格納すべきものであることを示している。

f_4 1　は初期値を 0 としないものであることを示す。（0 とするときは 0 と書く）

p_x 8　は T および α の項の合計数を示す。

f_2 12340000000　は水深 h について 1, 2, 3, 4 乗までを自動的に作ってそれを因子とすべきことを示している。もし 2, 4 乗のみでいいときは 2, 4, 0, 000 00000 とすればよい。

f_3 5　はクリープとして log をとる項の数の指定で，今の場合は θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 の 5 時点をスタートポイントとする 5 項を考えるべきことを示している。

f_6 0　はひずみ計算のときの等値直線温度分布と実際分布の差を因子として考えないことを示す。

l 4　は平均温度 T の項の数を示す。

m 4　は温度こう配 α の項の数を示す。

$f_5$1　は残差計算を引続き行なうべきであることを指定している。(必要ないときは0)

1700 *ZA*　はこれ以下を1700番地以降に格納すべきことを示す。

$h_0$5346940 2*D*　はhの初期値は469.40であることを示す。2*D*はその前の数字は浮動小数点表示であることを示し，最初の2ケタから50を引いたものが小数点以上の有効ケタ数を示し，今は53－50＝3ケタであることを示している。

1720 *ZA*　は以下を1720番地以降に格納すべきであることを示す。

$\theta_0$53100 *ZD*　はlogをとるときのθ_iの一つとして，100.0をとることを指定している。

以下同様に，$\theta_4$53603はθ_4として603.0をとることを示す。

Date　は日付で入力のときは無視される。

T_1～T_4　は各標高の平均温度

α_1～T_α　は各標高の温度こう配

h　は水深

θ　は原点より数えた日数

δ　はたわみ値でyの項に当り，いづれも浮動小数点表示で最初の2ケタより50を引いたものが小数点以上の有効ケタ数を示す。したがって502825は0.2825を，482600は0.002600を，－491110は－0.01110を示す。

最後に440 400 *ZE*が打たれる。44は停止を，400 *ZE*は400番地より演算実行開始を指定している。

次表2.6は計算結果でNEAC-2203で約40分を要した。

XI CONST　とあるのは常数項を入れた計算であることを示しx_1が常数項である。

01　より18に至るマトリクスは正規方程式の右辺の係数行列$X'X$を示している。x_1が常数項なので1行1列の左点はサンプルサイズnを示し今の場合21である（カッコ内は有効ケタ数を示す）。対称行列なので左下半分は省略している。

19　とあるベクトルは正規方程式の右辺$X'y$である。

B　というベクトルは正規方程式の解b_iを示す。これは形式的な解で，この中にはノイズと同程度あるいはそれ以下しかyに対して効果を持たぬ因子もはいっているので以下2次仮説の検討を行ない，他の因子の反映としての効果が大部分であるような因子の除去を自動的に行なう。

AOV-NO (14)

第1回目の分散分析結果で最下欄が全自由度21に対応する全変動2行上が18個の因子によって説明し得る二乗和の減少分で次の行はその差つまり誤差自由度21－18＝3に対応する誤差変動，その右のッカコ内は自由度で割った誤差分散である。

分散分析の結果は有意であるが，18個の因子全部を束にしているので，この中に一つでも有意なものがあればすべて有意との結論を示す。そこで，さらにその2行上に第18因子の持分とみなされた変動の中から第1ないし第17因子の影響分を差引いたときの変動を計算し，これを18(01,…, 17)で示してある。

このようにして下から順に検定したところ第18, 17, 16, 15因子はいずれも有意でなく第14因子が有意であることがわかった。表題の*NO*(14)はそれを示している。しかし，このことは第14因子が有意で第15ないし18因子が有意でないことを示しているだけで第13因子以下については何もわからない。そこで次に第14因子を第1因子の前に持っていって15因子以下を除き，同様に13因子の持分の中から第14, 1, 2,…, 12因子の影響分を差引く計算を行なわせたのが次の表である。

AOV-NO(11)

分散分析の結果13, 12は有意でなく，第11因子が有意であることがわかった。そこで同様第11因子をさらに第14因子の前に出して第10因子の持分より第10因子の持分より第11, 14, 1, 2,…, 9因子の効果を次に計算させる。この表で有意となった第11因子のところで打切ってあるのはアウトプット時間を節約するためである。

AOV-NO(08)

AOV-NO(04)

AOV-NO(01)

いずれも順次正規方程式の縮少入れ換えを行なって解き分散分析を行なっている。

P(05)　結局有意となったのは1, 4, 8, 11, 14の5個の因子であることを示している。

AOV-LAST

この5個のみで念のため分散分析を行なわせ，今後の計算に利用する残差不偏分散を計算しておく。

今の場合　V_E＝0.00797879である。

B　5因子のみによる正規方程式の解で，いわゆる偏回帰係数である。しかし各因子の単位やばらつきが任意にとってあるので，これらの大小関係でただちに各因子の影響程度を判断しにくい。

そこで各因子について平均0，分散1になるよう修正して標準化偏回帰係数を計算する。

IM　正規方程式の係数行列の逆行列

SR　残差積和行列で常数項が有意となったときはこれを除いたもの，いわゆる

$$S(xy) = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

として得られる残差積和の行列である。

表—2.5　二瀬ダム実測解析入力データ

	Futase	50Z A	P / 18	ZI	N / 21	ZI	f_1 / 1	ZI	900ZA	1ZI	f_4 / 1	ZI	P_x / 8	ZI	f_2 / 12340000000	ZI	f_3 / 5	ZI	f_6 / 0	ZI	l / 4	ZI	m / 4	ZI	f_5 / 1	ZI
		1700ZA	h_0 / 5346940	ZD	1720	2A	θ_0 / 53100	2D	θ_1 / 53179	2D	θ_2 / 53313	2D	θ_3 / 53466	2D	θ_4 / 53603	2D										
	Date		T_1		T_2		T_3		T_4		α_1		α_2		α_3		α_4		h		θ		δ	
1	35. 11. 17		52 1192		52 1380		52 1450		52 1265		−50 1244		−50 1480		−50 2343		−50 6032		53 46940		53 10		51 6370	
2	12. 04		52 1169		52 1308		52 1314		51 9458		−49 9240		−50 1330		−50 2564		−50 8918		53 49051		53 12		51 6265	
3	11		52 1149		52 1287		52 1260		51 8136		−49 8760		−50 1437		−50 2484		−50 7988		53 49585		53 127		51 6235	
4	24		52 1118		52 1181		52 1140		51 6274		−49 5290		−50 1126		−50 2435		−50 8577		53 50112		53 140		51 6225	
5	36. 01. 05		52 1102		52 1117		52 1015		51 3907		−49 2130		−49 8240		−50 2776		−50 8284		53 50160		53 150		51 6130	
6	02. 03		52 1023		51 9701		51 8318		51 1779		49 1050		−50 1173		−50 3864		−50 9264		53 50235		53 181		51 6250	
7	15		52 1011		51 9330		51 8060		51 2163		49 3220		−50 1160		−50 3444		−50 3725		53 50190		53 193		51 6285	
8	24		51 9560		51 8945		51 7808		51 1213		49 653		−50 1365		−50 3755		−51 1078		53 50165		53 202		51 6375	
9	03. 10		51 9723		51 8782		51 7570		51 2121		49 516		−50 1003		−50 3752		−50 5906		53 50170		53 216		51 6390	
10	24		51 9728		51 8844		51 7730		51 3333		49 704		−49 3300		−50 2441		−50 1762		53 50225		53 230		51 6350	
11	04. 13		51 9683		51 8804		51 8657		51 6448		49 622		49 7620		−50 1102		50 1529		53 50790		53 250		51 6380	
12	05. 18	↓以下21個のデータを使用	51 9641		51 9966		52 1122		52 1315		49 675		50 1536		48 2600		50 5043		53 51410		53 285		51 5820	
13	06. 01		51 9841		52 1110		52 1223		52 1549		49 962		50 1816		50 2825		50 6337		53 51410		53 299		51 5590	
14	20		51 9935		52 1123		52 1390		52 1776		49 947		50 2752		50 1326		50 8506		53 51500		53 318		51 5285	
15	29		51 9890		52 1131		52 1388		52 1814		50 1041		50 2288		50 1915		50 4768		53 53463		53 327		51 5820	
16	07. 08		51 9918		52 1203		52 1445		52 1952		50 1126		50 3207		50 4644		50 9168		53 53290		53 336		51 5320	
17	17		52 1002		52 1232		52 1541		52 2157		50 1077		50 3138		50 6068		51 1046		53 52988		53 345		51 4985	
18	08. 02		52 1016		52 1291		52 1651		52 2326		50 1163		50 3949		50 4760		50 7339		53 52105		53 361		51 4705	
19	11		52 1024		52 1315		52 1715		52 2350		50 1081		50 3960		50 4450		50 6693		53 51659		53 370		51 4620	
20	26		52 1054		52 1364		52 1793		52 2407		49 9820		50 4053		50 3713		50 4796		53 50455		53 385		51 4490	
21	09. 09		52 1065		52 1400		52 1844		52 2397		50 1292		50 4122		50 2315		50 3534		53 50283		53 399		51 4565	
22	27		52 1081		52 1437		52 1855		52 2262		50 1251		50 3488		50 1295		−49 226		53 51622		53 417		51 4720	
23	10. 26		52 1100		52 1424		52 1665		52 1839		50 1144		50 2177		−49 5570		−51 1148		53 53719		53 446		51 6040	
24	11. 22		52 1102		52 1311		52 1504		52 1328		49 9450		50 1349		−50 1760		−51 1029		53 53697		53 473		51 6350	
25	12. 20		52 1096		52 1173		52 1282		51 8771		49 8010		49 5370		−50 2985		−51 1894		53 53692		53 501		51 6870	
26	37. 01. 23		52 1036		51 9961		51 9795		51 4196		49 8860		−49 8150		−50 3901		−51 2109		53 53544		53 535		51 7465	
27	02. 14		52 1011		51 9153		51 8434		51 3196		50 1046		−49 7850		−50 3317		−51 1460		53 53141		53 557		51 7480	
28	03. 16		51 9882		51 7875		51 7815		51 3788		50 1129		−49 2510		−50 1430		−50 6360		53 51917		53 587		51 7090	
29	04. 07		51 9747		51 8796		51 7872		51 4953		50 1183		49 6840		−50 1193		50 4104		53 51622		53 609		51 6905	
30	25		51 9718		51 8883		51 8922		51 7950		50 1157		50 1338		−49 1110		50 6617		53 51820		53 627		51 6820	
31	05. 10		51 9647		51 9158		51 9955		52 1059		50 1267		50 2146		50 1200		50 8686		53 51964		53 642		51 6660	
32	26		51 9672		51 9486		52 1071		52 1299		50 1323		50 2941		50 2191		50 5599		53 52670		53 658		51 6455	

表-2.6 二瀬ダム出力データ

XI CONST.

NE.

	01	02	03	04	05	06
01	.210000(02)	−.365590(02)	−.513820(02)	−.268170(02)	.455040(02)	.486020(01)
02		.680965(02)	.103483(03)	.674210(02)	−.599081(02)	−.847794(01)
03			.207491(03)	.207520(03)	.136611(03)	−.118596(02)
04				.293664(03)	.428316(03)	−.608245(01)
05					.115305(04)	.109920(02)
06						.113023(01)

	07	08	09	10	11	12
	.747100(01)	.706770(01)	.135336(02)	.112231(04)	.622450(05)	.356595(07)
	−.128626(02)	−.129141(02)	−.290525(02)	−.192978(04)	−.105139(06)	−.589616(07)
	−.139324(02)	−.122509(02)	−.312691(02)	−.277026(04)	−.152504(06)	−.857334(07)
	−.463943(00)	.281080(01)	−.226587(01)	−.157207(04)	−.905114(05)	−.519319(07)
	.375329(02)	.490538(02)	.105903(03)	.193322(04)	.863172(05)	.405659(07)
	.174847(01)	.166588(01)	.324573(01)	.259077(03)	.143288(05)	.818442(06)
07	.314304(01)	.328496(01)	.695942(01)	.384707(03)	.206476(05)	.114945(07)
08		.399245(01)	.919423(01)	.356051(03)	.185814(05)	.100054(07)
09			.281916(02)	.606842(03)	.270369(05)	.117736(07)
10				.622450(05)	.356595(07)	.210026(09)
11					.210026(09)	.126600(11)
12						.777825(12)

	13	14	15	16	17	18
	.210026(09)	.133493(02)	.807939(01)	.306496(01)	.808192(00)	.862381(−01)
	−.339316(09)	−.232829(02)	−.141083(02)	−.540726(01)	−.166048(01)	−.193442(00)
	−.491881(09)	−.352094(02)	−.223150(02)	−.101072(02)	−.375438(01)	−.394110(00)
	−.299302(09)	−.220405(02)	−.153107(02)	−.900828(01)	−.415337(01)	−.389799(00)
	.200333(09)	.172569(02)	.583768(01)	−.508214(01)	−.397416(01)	−.155689(00)
	.480562(08)	.310607(01)	.188639(01)	−.724051(00)	.194344(00)	.216441(−01)
	.660369(08)	.456510(01)	.269024(01)	.903588(00)	.207653(00)	.322839(−01)
	.553690(08)	.411653(01)	.234288(01)	.654770(00)	.149721(00)	.310590(−01)
	.486803(08)	.769889(01)	.430262(01)	.110156(01)	.455786(00)	.109773(00)
	.126600(11)	.718202(03)	.436557(03)	.168041(03)	.435404(02)	.456076(01)
	.777825(12)	.400315(05)	.244110(05)	.948974(04)	.238108(04)	.242567(03)
	.485353(14)	.230134(07)	.140646(07)	.550118(06)	.132272(06)	.129736(05)
13	.306656(16)	.135850(09)	.831437(08)	.326303(08)	.746681(07)	.697730(06)
14		.876674(01)	.541670(01)	.221843(01)	.629713(00)	.694582(−01)
15			.338917(01)	.144928(01)	.426896(00)	.478166(−01)
16				.708611(00)	.231591(00)	.269766(−01)
17					.922689(−01)	.121102(−01)
18						.247574(−02)

	19
	−.971500(01)
	.151207(02)
	−.749733(01)
	−.508230(02)
	−.162407(03)
	−.229699(01)
	−.634984(01)
	−.801715(01)
	−.182423(02)
	−.414033(03)
	−.180951(05)
	−.807590(06)
	−.365917(08)
	−.446664(01)
	−.202865(01)
	.281288(00)
	.411912(00)
	.210095(−01)
19	.246498(02)

B	
01	−8.08463575
02	−.117073765
03	.017691445
04	−.217806667
05	.046839338
06	1.44989471
07	−2.33763993
08	−.650384102
09	−.030197952

表-2.6　つづき

10	−.828444623
11	.027768519
12	−.000411283
13	.000002275
14	61.9459210
15	−57.6512438
16	−1.21174385
17	−5.88337481
18	16.6094097

AOV——NO(14)

SS	DF	F	SV
4.49434404	001	819.78	01(00)
4.49434404	001		
.721593690	001	131.62	02(01)
5.21593773	002		
17.4861787	001	3189.5	03(01, 02)
22.7021164	003		
1.03226330	001	188.28	04(01, 02, 03)
23.7343797	004		
.000175800	001	.03206	05(01, 02, 03, 04)
23.7345555	005		
.044264500	001	8.0740	06(01, 02, 03, 04, 05)
23.7788200	006		
.010383900	001	1.8940	07(01, 02, 03, 04, 05, 06)
23.7892039	007		
.037098200	001	6.7668	08(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07)
23.8263021	008		
.182685500	001	33.322	09(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08)
24.0089876	009		
.475031800	001	86.647	10(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09)
24.4840194	010		
.043071700	001	7.8564	11(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10)
24.5270911	011		
.009273400	001	1.6915	12(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11)
24.5363645	012		
.000701300	001	.12791	13(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12)
24.5370658	013		
.065309900	001	11.912	14(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13)
24.6023757	014		
.000363400	001	.06628	15(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14)
24.6027391	015		
.004578800	001	.83519	16(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15)
24.6073179	016		
.013143400	001	2.3974	17(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)
24.6204613	017		
.012966700	001	2.3651	18(01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)
24.6334280	018		
.016447000	003	(.005482333)	E
24.6498750	021		T

AOV——NO(11)

SS	DF	F	SV
.046239800	001	6.8081	11(14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10)
24.5908094	012		
.009830600	001	1.4474	12(14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11)
24.6006400	013		
.001692400	001	.24918	13(14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12)
24.6023324	014		
.047542600	007	(.006791800)	E

AOV——NO(08)

SS	DF	F	SV
.177156000	001	26.993	08(11, 14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07)
24.5667458	010		
.001004700	001	.15308	09(11, 14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08)
24.5677505	011		
.023058900	001	3.5135	10(11, 14, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09)
24.5908094	012		
.059065600	009	(.006562844)	E

AOV——NO(04)

SS	DF	F	SV
.179767900	001	23.787	04(08, 11, 14, 01, 02, 03)

表-2.6 つづき

24.5329735	007		
.015979000	001	2.1143	05(08, 11, 14, 01, 02, 03, 04)
24.5489525	008		
.000377300	001	.04992	06(08, 11, 14, 01, 02, 03, 04, 05)
24.5493298	009		
.017415700	001	2.3045	07(08, 11, 14, 01, 02, 03, 04, 05, 06)
24.5667455	010		
.083129500	011	(.007557227)	E

AOV——NO(01)

SS	DF	F	SV
.961613800	001	115.16	01(04, 08, 11, 14)
24.5220686	005		
.008330500	001	.99765	02(04, 08, 11, 14, 01)
24.5303991	006		
.002574400	001	.30830	03(04, 08, 11, 14, 01, 02)
24.5329735	007		
.116901500	014	(.008350107)	E

P(05)

AOV——LAST

SS	DF	F	SV
4.49434404	001	562.64	01(00)
4.49434404	001		
15.4110177	001	1929.2	04(01)
19.9053617	002		
3.23109890	001	404.49	08(01, 04)
23.1364606	003		
1.04656730	001	131.01	11(01, 04, 08)
24.1830279	004		
.339040700	001	42.444	14(01, 04, 08, 11)
24.5220686	005		
.127806400	016	(.007987900)	E
24.6498750	021		T

B

01	−1.83470556
04	−.154047680
08	−1.15492596
11	.000219430
14	1.43729285

IM

	01	04	08	11	14
01	.350051(01)	−.247748(−01)	−.121773(01)	−.165994(−03)	−.406284(01)
04		.687381(−02)	−.344819(−01)	−.165922(−05)	.787748(−01)
06			.118689(01)	.798324(−04)	.845720(00)
11				.458239(−07)	.186076(−05)
14					.609310(01)

S R

	04	08	11	14	19
04	.259419(03)	.118362(02)	−.110246(05)	−.499340(01)	−.632290(02)
08		.161377(01)	−.236759(04)	−.376293(00)	−.474750(01)
11			.255293(08)	.463356(03)	.107006(05)
14				.280765(00)	.170903(01)
19					.201555(02)

R

	04	08	11	14	19
04	.100000(01)	.578484(00)	−.135469(00)	−.585092(00)	−.874416(00)
08		.100000(01)	−.368863(00)	−.559028(00)	−.832428(00)
11			.100000(01)	−.173070(00)	.471727(00)
14				.100000(01)	.718424(00)
19					.100000(01)

S B

04	−.552661450
08	−.326797325
11	.246956048
14	.169636709

表-2.6　つづき

RES, DEF

	D(O)	D(C)	RES	D(TEM)	D(GRD)	D(H)	D(T)
01	.000000	−1.83470	1.83470	.000000	.000000	.000000	.000000
02	−.105000	−1.38911	1.28411	.209504	.025523	.097785	.112775
03	−.135000	−1.22433	1.08933	.292690	.016284	.153514	.147881
04	−.145000	−.917490	.772490	.477547	.010625	.220781	.208260
05	−.240000	−.636044	.396044	.670107	.050008	.227514	.251031
06	−.120000	−.100894	−.019105	.952322	.175664	.238236	.367587
07	−.085000	−.076263	−.008736	.992067	.127157	.231773	.407444
08	.005000	.023229	−.018229	1.03088	.163075	.228221	.435750
09	.020000	.101883	−.081883	1.06755	.162729	.228929	.477380
10	−.020000	−.027286	.007286	1.04290	.011318	.236792	.516405
11	.010000	−.184443	.194443	.900100	−.143326	.325250	.568237
12	−.550000	−.514869	−.035130	.505276	−.273601	.438441	.649720
13	−.780000	−.963889	.183889	.349688	−.596865	.438441	.679551
14	−1.08500	−.991861	−.093139	.092428	−.423742	.456274	.717883
15	−.550000	−.562047	.012047	.095509	−.491767	.933665	.735250
16	−1.05000	−.997004	−.052995	.007702	−.806946	.884797	.752147
17	−1.38500	−1.37505	−.009940	−.140183	−.971408	.802638	.768599
18	−1.66500	−1.58248	−.082510	−.309635	−.820343	.585379	.796816
19	−1.75000	−1 72667	−.023321	−.408226	−.784541	.488648	.812145
20	−1.88000	−1.95451	.074514	−.528383	−.699423	.271111	.836886
21	−1.80500	−1.87526	.070264	−.606947	−.537964	.245227	.859125
22	−1.65000	−1.51114	−.138856	−.623893	−.420162	.481015	.886601
23	−.330000	−.435318	.105318	−.331202	−.206269	1.00838	.928471
24	−.020000	−.018289	−.001710	−.083185	−.067332	1.00185	.965080
25	.500000	.499518	.000481	.258800	.074146	1.00037	1.00090
26	1.09500	1.06883	.026164	.724794	.179937	.956997	1.04181
27	1.11000	1.12292	−.012920	.934453	.112489	.843762	1.06692
28	.720000	.732808	−.012808	1.02980	−.105444	.543540	1.09960
29	.535000	.657059	−.122059	1.02102	−.132816	.481015	1.12253
30	.450000	.430043	.019956	.859277	−.257779	.522560	1.14069
31	.290000	.165530	.124469	.700146	−.409190	.553854	1.15542
32	.085000	.116712	−.031712	.583840	−.523643	.720453	1.17076

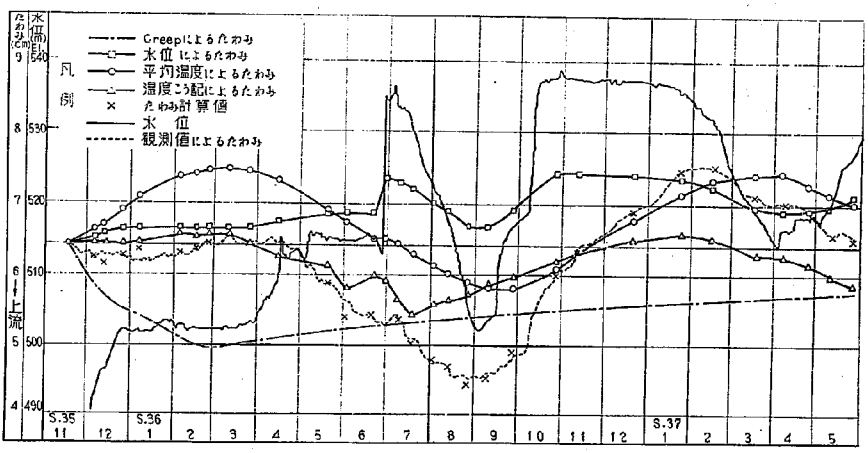


図-2.9　二瀬ダムのたわみ解析

R　これを用い，まず主対角線要素の平方根を作り，たとえば2行3列の交点の要素を2行および3行の主対角線要素の平方根の積で割り

$$V_{ij}=(x_ix_j)/\sqrt{S(x_ix_i)S(x_jx_j)}$$

とした相関係数の行列を作る。

SR　標準化偏回帰係数で上に求めた相関行列を係数行列とし

$$S(x_iy)=\Sigma(x_i-\bar{x}_i)(y-\bar{y})$$

のベクトルを右辺とする正規方程式を解くことによって得られる。この大小関係は各因子の影響程度を示し，たとえば04は最大の効果をもっていることがわかる。

次の表はこの構造式の推定量を用いて32個のデータに対し実測値D(O)と推定値D(C)の差つまり残差(RES)を示したものでD(C)のうち平均温度の持分D(TEM)，温度こう配の持分D(GRD)，水圧荷重の持分D(H)，経年変化の持分D(T)について，それぞれ計算してある。

この値をプロットしたのが図-2.9でたん水開始後3カ月間上流側，ついで回復に向う方向の経年変化および夏季に上流側冬季に下流側に向う温度こう配によるたわみならびにこれと約1月の位相のズレを示す温度こう配によるたわみ，および水位変動に追随する下流向きの水圧荷重によるたわみが見られる。点線は実測された全たわみ，×印は計算による値でよく一致しているが1961年5月ないし9月に至るみだれについては，さらに精査することによりこの期間に作用した新しい因子についての情報が得られるものと考えられる。

(5.3)　鳴子ダムにおける実例

鳴子ダムは北上川支流江合川に設けられた高さ95 m，堤頂長216 m，堤体積18万 m³の厚肉アーチダム（底部厚28 m），総貯水量5,000万 m³をもって洪水調節，かんがい，発電を行なう多目的ダムで1957年4月5日たん水を開始した。ベース標高はEl. 175 m，頂部標高はEl. 260 m，クラウンにおけるプラムラインの計測点はEl. 215 mおよびEl. 179 mである。（岩盤は閃緑花崗岩，石英粗面岩）

鳴子ダムの温度条件を代表する断面として一応次の3断面を選定した。

断面番号	標　高
3	El.　242 m
2	El.　226 m
1	El.　194 m

鳴子ダムのトップアーチクラウンにおけるたわみの構造式としては，各記号を二瀬ダムと同様にとり θ_i を0, 50, 100, 365, 800, 1460日として1957年3月31日より1961年12月20日までの約4年9カ月にわたる120個の資料により解析した。

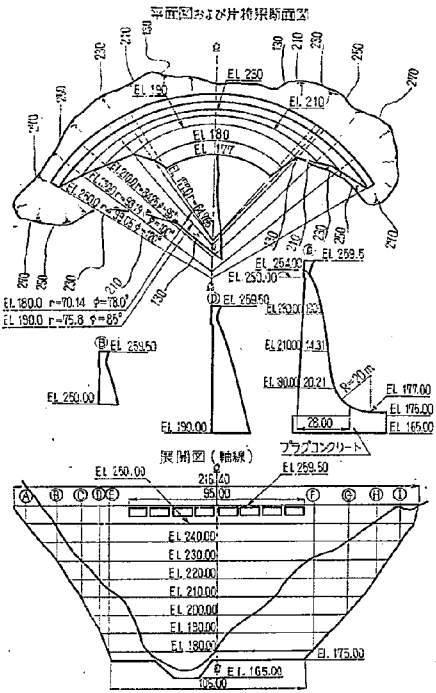


図-2.10　鳴子ダム一般図

電子計算の結果有意となった因子に対して，頂部標高および中間標高のたわみとそれぞれ δ_{260}, δ_{215} として推定式を作ってみると

$$\begin{aligned}\delta_{260}=&-25.196-0.8529(t_3-6.144)\\&-11.194(\alpha_1-0.1267)-1.148(\alpha_3-0.0562)\\&+0.7517(h-179.6)^2-0.0265(h-179.6)^2\\&+0.000267(h-179.6)^3+12.569\log(1+\theta)\\&-12.857\log\left(\frac{1+\theta}{366}\right)-31.371\log\left(\frac{1+\theta}{1461}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{210}=&-15.597-0.2514(t_3-6.144)\\&-4.147(\alpha_1-0.1267)-1.579(\alpha_2-0.107)\\&-0.4624(\alpha_3-0.0562)-0.05567(h-179.6)\\&-0.002577(h-179.6)^2+7.764\log(1+\theta)\\&-6.338\log\left(\frac{1+\theta}{366}\right)-14.216\log\left(\frac{1+\theta}{1461}\right)\end{aligned}$$

となった。残差不偏分散の平方根は δ_{260} に対して1.10 mm，δ_{215} に対し0.60 mmであった。

この結果を水位，堤体温度，温度こう配，経年変化に分けてプロットしてみると，δ_{260}, δ_{153} の経年変化はたん水開始より1957年までの約9カ月間にそれぞれ下流へ7 mm，5 mm程度の動きを示し，以後1960年10月ま

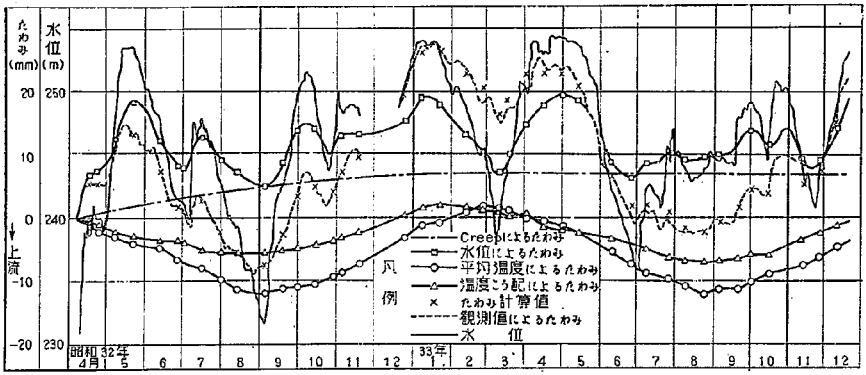


図-2.11　鴨子ダムたわみ解析図

で安定したが，その後上流向きの経年変化が表われていることは岩盤の動きを示すものとして注意を要する。

δ_{260} に対して水位 El. 255 m のたわみは約 20 mm，平均温度によるたわみの振幅は約 14 mm，温度こう配によるたわみの振幅は約 9 mm であった。

(5.4)　室牧ダムにおける実例

室牧ダムは神通川支流に設けられた高さ 81 m，堤頂長 115 m，堤体積 5.72 万 m³ の薄肉アーチダム（底部厚 7.5 m）で，総貯水量 1,700 万 m³ をもって洪水調節，かんがい，発電を行なう多目的ダムで 1961 年 3 月 30 日たん水を開始した。

ベース標高は El. 185 m，頂部標高は El. 216 m で本ダムのたわみは頂面における視準測量により測定を行なった。（岩盤は安山岩で一部凝灰岩および凝灰質れき岩が見られる。）

室牧ダムの温度条件を代表する断面として一応次の 3 断面を選定した。

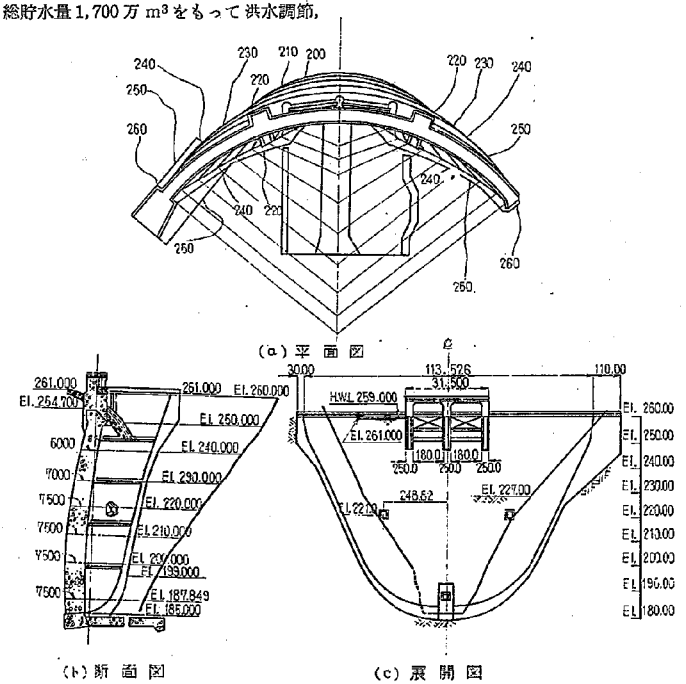


図-2.12　室牧ダム一般図

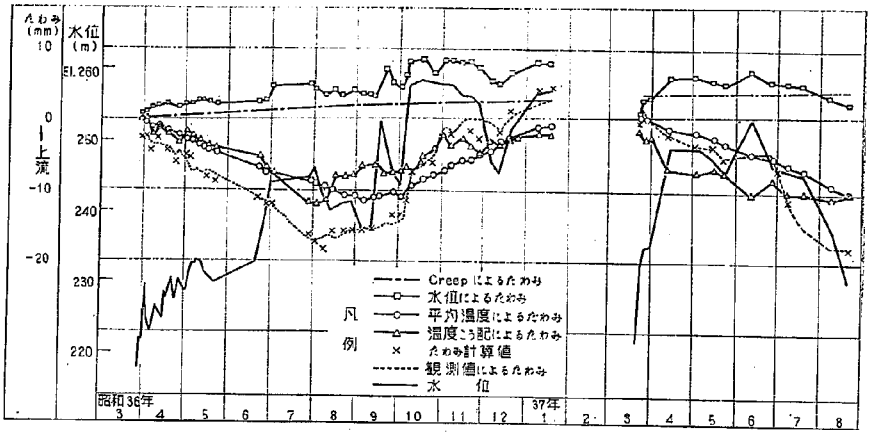


図-2.13　室牧ダムたわみ解析図

断面番号	標　高
3	El.　245m
2	El.　215m
1	El.　186m

室牧ダムのトップアーチクラウンにおけるたわみの構造式としては，たわみ，平均温度，温度こう配，経年変化の記号を二瀬ダムと同様にとり，θ_i として 0，100，130，200，400 を選定し，1961年3月30日より1962年6月まで55個の実測試料により解析を行なった。

電子計算により有意となった因子により $\hat{\delta}$（mm単位下流向きに正をとる）を作って見ると

$$\hat{\delta} = 10.063 - 0.5526\ (t_3 - 5.23)$$
$$-2.516\ (\alpha_2 + 0.5179) - 2.433\ (\alpha_3 + 0.9222)$$
$$+0.00255\ (h-200)^2 + 4.801\ \log\ (1+\theta)$$

残差不偏分散の平方根は 1.65 mm で他のダムより大であったが，これは本ダムが視準測量によったため精度が悪かったものと考えられる。

この結果，水位，堤体平均温度，温度こう配，経年変化の持分をプロットしてみると図-2.13のようになり，たん水開始より約15カ月に約3.5 mm の下流向き経年変化が認められ，その原因は二瀬ダムと同様と考えられる。

平均温度，温度こう配によるたわみの振幅はいずれも約11 mm，水圧によるたわみは水位 El. 261 m に対し約9 mm であった。

（5.5）　綾北ダムにおける実例

綾北ダムは大淀川支流に設けられた高さ 75 m，堤頂長 174 m，堤体積 7.4 万 m³ の薄肉アーチダム（底部厚 13 m）総貯水量 2,130 万 m³ をもって洪水調節，かんがい，発電を行なう多目的ダムで1959年4月2日たん水を開始した。ベース標高は El. 221 m，堤頂標高 El. 298 m，プラムラインはクラウンに2段に入れ，下段の計測点は El. 248.3 m である。（岩盤は砂岩，けつ岩，およびその互層）

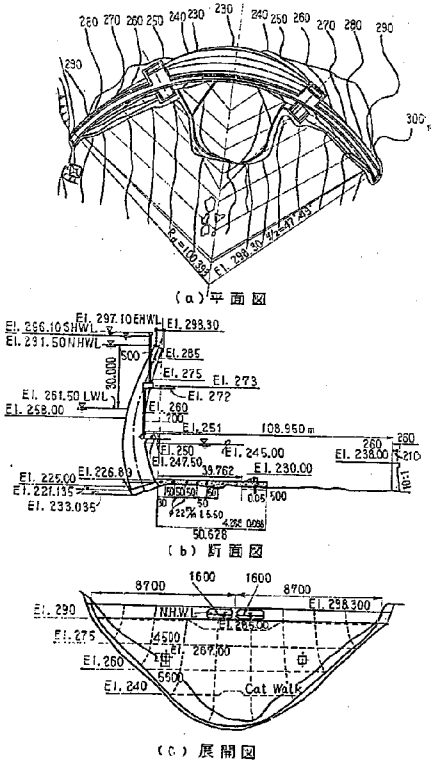


図-2.14　綾北ダム一般図

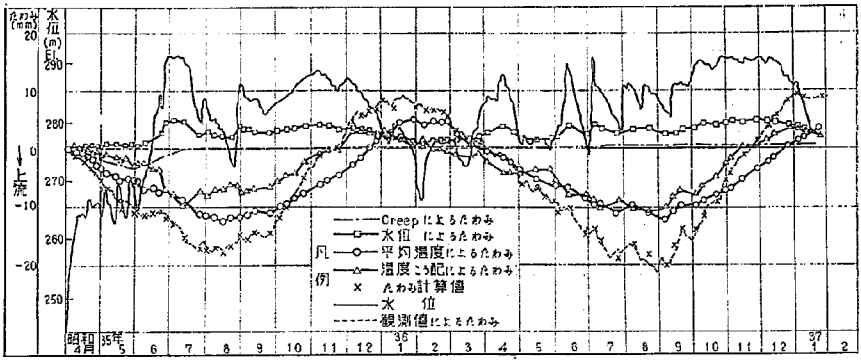


図-2.15　綾北ダムたわみ解析

綾北ダムの温度条件を代表する断面として一応次の4断面を選定した。

断面番号	標　高
3	El. 285 m
2	El. 275 m
1	El. 245 m

綾北ダムのトップアーチクラウンにおけるたわみの構造式としては，まずたわみを δ，i 標高の平均温度を t_i，温度こう配を α_i，クリープが顕著と思われる時点としてたん水開始前100日（ほぼジョイントグラウト時点）を原点にとり，θ_i として0，100，130，160，200，580日を図-2.15より選定し，1960年6月より1962年1月の約2年にわたる70個の実測資料より解析した。

構造式は

$$\delta = c+\sum_{i=1}^{3} a_i t_i+\sum_{i-1}^{3} b_i\alpha_i+\sum_{i-2}^{4} c_i h^i$$

$$+\sum_{i} d_i \log\left(\frac{1+\theta}{1+\theta_i}\right)+e$$

で電子計算により有意となった因子により $\hat{\delta}$ をつくって見ると

$$\delta = -0.8126\ (t_3-11.63)-4.217\ (\alpha_1+0.0769)$$
$$-2.094\ (\alpha_2-0.0292)-1.572\ (\alpha_3+0.0339)$$
$$+0.00182\ (h-238.9)^2$$
$$+58.56\log\left(\frac{1+\theta}{161}\right)-38.03\log\left(\frac{1+\theta}{201}\right)$$

となり，残差不偏分散の平方根は0.739 mmであった。この結果を水位，堤体平均温度，温度こう配，経年変化の持分にまとめてプロットしてみると図-2.15のようになり，たん水後2カ月にわたり約3 mmの上流向き経年変化が認められ，その後下流向きに転じ1カ月半の後に旧状に復した。水圧によるたわみはEl.299 mmに対し7 mm平均温度による振幅は20 mm，温度こう配による振幅は13 mmであった。

（5.6）　綾北ダムにおける気温による解析

ダムのたわみは前述のとおり温度条件としては堤体の平均温度および温度こう配を直接原因とするが，これらは結局太陽輻射を主原因とする変動で，グラフにもみられるとおり堤体平均温度変動の位相は気温に比して3～4週間のおくれ，温度こう配は多少のおくれはあるが，大体気温の動きに追従していることがわかる。

日本においてはいわゆる三楽四温の現象がみられるので，1週間の平均をとると小さな波を消すことができ，コンクリート温度の変化に及ぼす影響分をとり出すことが可能になると考え，堤体平均温度および温度こう配のうち有意となった t_3 と15～28日前のあいだの平均気温（$T_{3,4}$）との関係および α_1 と予測目的を加味した1～7日前の間の平均気温（T_1）との関係をグラフに描いてみると，相関係数はそれぞれ0.98，0.93となり高度に有意である。

そこで温度条件については t，α の代りに $T_{3,4}$ および T_1 を用い，前と同じ資料を用いて次のようなたわみの構造式について各因子の有意性検定を行なう。

$$\delta = c+a\,T_{3,4}+b\,T_1+\sum_{i-2}^{4} c_i h^i$$

$$+\Sigma d_i \log\left(\frac{1+\theta}{1+\theta_i}\right)+e$$

θ_i は前同様たん水開始前100日を原点として，0，100，130，160，200，580日を用いた。電子計算により有意と判定された因子によって $\hat{\delta}$ を作ってみると

$$\hat{\delta} = -0.151\,t_{(3,4)}-0.831\,t_1+0.00007409\,h^2$$

となり，残差不偏分散の平方根は1.83 mmであり，気温と水位のみによる予測を行なっても堤体平均温度こう配，経年変化の項を入れる場合に比較してそれほど際立って精度が落ちるものでないことがわかった。

（5.7）　多目的アーチダムの挙動に関する考察

二瀬，鳴子，室牧，綾北，各ダムのクラウンにおけるたわみの構造解析に情報量解析を適用した結果について

は個別に述べたが，ここにその結果を総括し，共通した問題点について考察を加えることにする。

a. 経年変化

4ダムともにたん水後の初期の段階における経年変化が著しい。鳴子，室牧ダムについてはたん水初期に下流向きの経年変化が認められたが，二瀬，綾北ダムではたん水初期に上流向きで，数カ月の後下流向きに転じ，後いずれも回復に向う動きが認められ，二瀬ダムでは特にこの動きが顕著であった。

このことは二瀬ダムのたん水後3カ月間は水位が上昇し温度が低下しているのであるから，水圧，温度，温度こう配のいずれによる効果も下流にたわませる方向のものでなければならないのに，実測されたたわみは上流向きのものであったこと，鳴子ダムで水位，温度，温度こう配のほぼ等しい1957年5月13日と1958年5月20日のたわみ値に5mmの差のあることなどからもその存在を確めることができる。

経年変化の原因としてはコンクリートのクリープや岩盤の塑性変形などいろいろ考えられるが，後者が支配的であると考えられる。

二瀬ダム，綾北ダムにおけるたん水初期の上流側への経年変化は中間水位の期間が比較的長かったために下部岩盤の変位が上部岩盤の変位に比して相対的に大きかったために生じたものと推定される。

b. 水圧荷重によるたわみ

たわみの構造式のうち水圧荷重による項の偏回帰係数は主としてダムのコンクリート，岩盤の材料特性とダムの形状特性に関係すると考えられる。そこでこれに関係する数値を表示して見ると表-2.7のようになる。

図-2.16は水位と構造式によって求めた水圧荷重によるたわみの関係図で，プラムラインの全高に対する割合がまちまちなので，各ダムについてダムベースに対する堤頂部の相対たわみに換算するため次の補正係数

$$C=\frac{1}{1-(1-H_1/H')^2}$$

H_1＝プラムラインの計測長

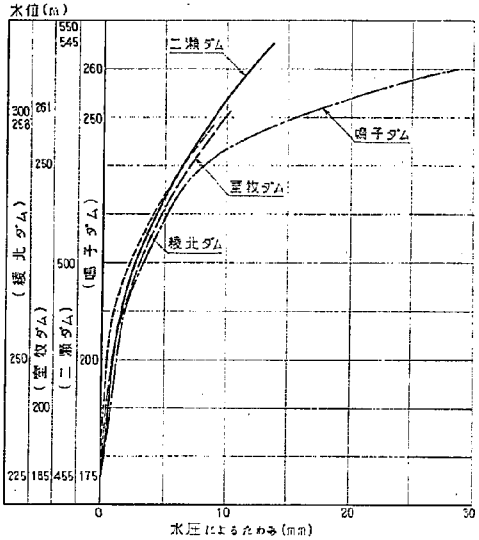


図-2.16　水深たわみ曲線図

を乗じ，かつベースでたわみが0となるように修正した。

満水位に対する各ダムのたわみは鳴子，二瀬，室牧，綾北ダムに対してそれぞれ28mm，14mm，10.5mm 8mmであるが，これを単位高さ，単位堤頂長で比較するため $H'L$ で割ればそれぞれ 15.3×10^{-4}，5.36×10^{-4}，13.5×10^{-4}，6.3×10^{-4} となる。単位アーチ平均厚で比較するため D を乗ずれば，これらの値はそれぞれ 30.6×10^{-3}，15.0×10^{-3}，9.45×10^{-3}，6.30×10^{-3} となり，厚肉グループの前二者と，薄肉グループの後二者の間の違いは形状特性による配分荷重の相違を反映しているものと考えられる。

c. 温度荷重によるたわみ

堤体平均温度と温度こう配の間には相関があるので温度に関する項の和を温度荷重によるたわみと考え，その振幅をとってみると，綾北，室牧，二瀬，鳴子の各ダムに対しそれぞれ27mm，20mm，24mm，22mmとなっ

表-2.7

特性	ダム名	綾北	室牧	二瀬	鳴子
形状特性	サドル面上高 H	73 m	76 m	90 m	85 m
	アーチ作用部分高 H'	66 m	65 m	82 m	75 m
	〃 基底厚 D_b	13 m	7.5m	40 m	28 m
	〃 平均厚 D_m	10 m	7.0m	28 m	20 m
	頂部半径 R_c	100 m	64 m	130 m	100 m
	〃 中心角 θ	100°	120°	120°	120°
	堤頂長 L	174 m	115 m	290 m	215 m
材料特性(設計値)	コンクリート弾性係数 E_c	200,000 kg/cm²	250,000 kg/cm²	200,000 kg/cm²	200,000 kg/cm²
	岩盤弾性係数(上) E_{ru}	60,000 〃	40,000 〃	50,000 〃	20,000 〃
	〃 (下) E_{rl}	80,000 〃	70,000 〃	100,000 〃	100,000 〃

表-2.8

ダム名	月平均気温 (°C)												気温振幅	T
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
綾北	6.0	7.0	12.0	15.0	19.0	23.0	26.0	27.0	22.0	18.0	13.0	9.0	21.0	0.890×10^{-2}
室牧	2.0	2.7	6.1	11.7	16.2	19.9	23.9	25.7	21.0	15.2	9.7	5.7	23.0	0.756×10^{-2}
二瀬	0.5	2.2	4.9	11.0	16.7	18.5	23.0	24.0	21.0	14.0	7.0	2.2	23.5	0.362×10^{-2}
鳴子	−1.3	−0.9	3.1	9.5	14.0	18.2	22.7	24.0	18.9	12.7	7.3	1.7	25.3	0.414×10^{-2}

表-2.9

ダム名		綾北	室牧	二瀬	鳴子
水位 たわみ計測区間		El. 295 El. 248～298	El. 260 El. 261（アラインメント）	El. 545 El. 460～545	El. 255 El. 180～260
実測解析結果		6 mm	9 mm	12 mm	20 mm
設計値	模型実験 荷重分割計算	11.5 mm 11.0 mm	11 mm 18 mm	17 mm —	24.0 mm

た。この値は各ダムサイトの気温の振幅，堤頂長に関係するので，補正係数 c を乗じ単位気温振幅当り，単位頂長当りの値（T）に換算すると表-2.8のようになる。

平均気温は綾北 16.4，室牧 13.3，二瀬 12.1，鳴子 10.8 °C で平均気温が低いほど振幅は大きくなっているが，これらの影響を除去した T について観察してみると，薄肉グループの前二者と厚肉グループの後二者との間に明らかな相違が見られる。堤体平均温度振幅のクラウンに沿う垂直分布をとってみると薄肉アーチでは上部の堤体平均温度の振幅が大となっている。各分散分析の結果から堤体平均温度はクラウンにおける堤頂より堤高の 1/3 下った点における値による持分で十分現わし得ることから，この点の堤体平均温度振幅を求めてみると厚肉グループで約 10°C，薄肉グループで約16°C となっており，この違いが反映したものと考えられる。

d. 設計値との比較

水圧によるたわみの設計値と実測解析結果を同一計測区間について比較すれば表-2.9のようになる。

表-2.9 より設計値が実測解析結果に比して全般的に大きいことがわかる。

e. 鳴子ダムにおける精密三角測量との比較

鳴子ダムにおいて 1957年3月23日，同年10月30日，1960年10月19日，1961年5月18日に精密三角測量を行なった。1957年3月23日の値は 4月5日のたん水開始時と同じと見て，後の3時点におけるクラウンの半径方向絶対変位を求めると，それぞれ図-2.17の③，④，⑤の実線のようになる。これに対して同じ日のプラムラインによる値をプロットすると③，④，⑤の点線と考えられ平行移動によって重ね合せることができる。そこでこのうちの③，④について考えると，③は④より水位高く温度が低いのであるから③のたわみ曲線は各標高で④より下流側にあることが予想さ

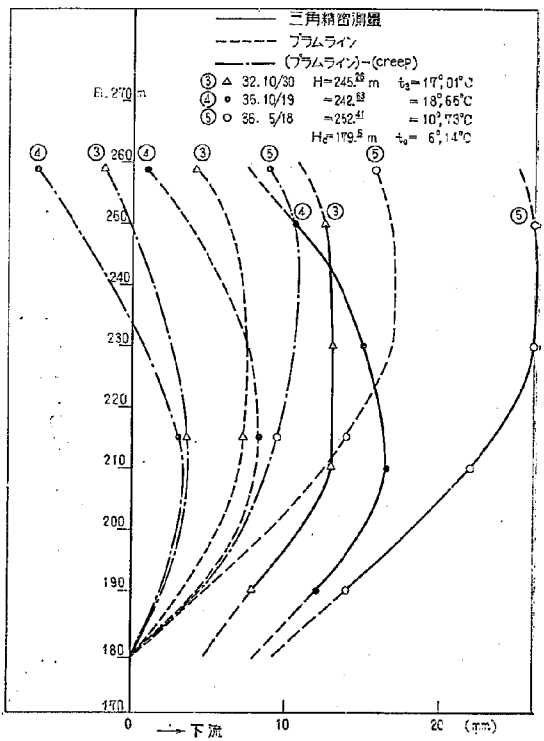


図-2.17

れるのに，実際観測された値は標高230～240mの付近で逆転した動きを示している。

しかしこのプラムラインによる実測値に対して解析によって得た経年変化を差引いた値は図-2.17に③，④，⑤の一点鎖線として示したものとなり，これについて③④を比較して見ると予想どおり③は④より各標高において下流側にあることを示している。すなわち実測の逆転現象は経年変化のために生じたものと考えることができる。

またこれらのたわみ曲線はいずれも標高210～220m付近で最大たわみを示しているが，この形の裏付けとしては次のことが考えられる。すなわち1958年7月27日の水位および温度条件を用い，拱頂調整法による荷重分割計算によるたわみ曲線はそれぞれ図-2.17の①および①′の実線であり，当日の実測値による解析結果は①および①′の点線で，これらは大体同様な形状を示している。この水圧荷重および温度荷重によるたわみを合成したもののうち実線②が荷重分割計算の結果，点線②が実測値による解析結果であり，この②の曲線はいずれも標高210ないし220mで最大のたわみを示している。

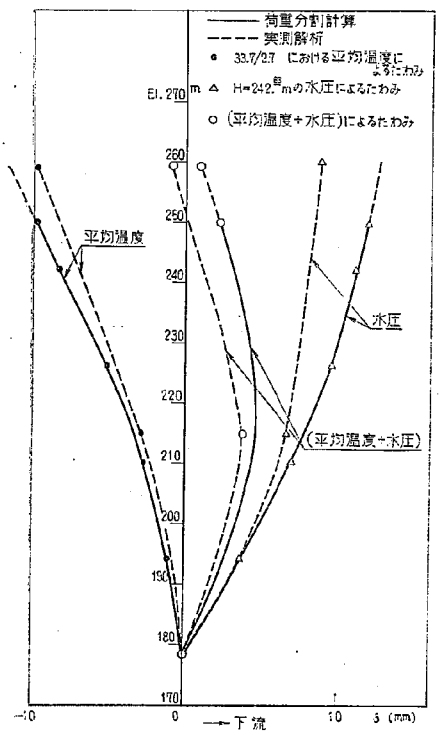


図-2.18

f.　安全管理

k 組の観測値と計算値との差のうち最大のものが $d_p\sqrt{V_E}$ より大きくなるか，または一方的に差が増大するときは異常原因が存在するものと判断してよい。(d_p は文献V－4に与えてある)。

(5.8)　有効雨量の計算に対する応用

河川の流出量は主として降水量の影響を受ける現象であるが，その因子としてはいろいろなものを考えることができる。ここでは竹内*にしたがい，一雨流出量をその流域面積で割った有効雨量(y) mm，に対し因子としては一雨降雨量 (x_1) mm，前期降雨指数 API (x_2) mm，週番号 (x_3)，降雨断続時間 (x_4) hr，の4つをとりあげ，さらにその2乗の項 x_i^2 および交互作用項 x_ix_j について考慮した。

ただし，　$API=\sum_{i=1}^{n} p_i k_i$ で

p：日雨量　mm

k：逓減係数

n：出水より対象とする降雨までさかのぼった日数

であり，kとしては例としてとり上げた神流川の場合は0.88を用いている。

また週番号は1月1日～1月7日の1週間を週番号1として打った週番号-33の絶対値をとった。

したがってデータの構造は

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{44}x_4^2+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{14}x_1x_4+b_{23}x_2x_3+b_{24}x_2x_4+b_{34}x_3x_4+e$$

となり，これに対応する1次の因子は竹内の報告の174頁にあげてある神流川資料を用い，2次の因子を計算機内部で計算させた後2次係数の検定を行なわせ，有意な

表-2.10　有効雨量解析入力データ

番　号	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	239.6	23.9	4	28	31.8
2	87.7	49.6	8	28	33.8
3	83.2	41.5	1	30	51.6
4	112.7	38.0	5	49	52.6
5	91.2	16.1	10	26	47.7
6	73.1	22.7	14	63	61.3
7	63.0	72.0	9	36	16.9
8	201.8	27.7	3	60	78.1
9	212.1	120.0	2	20	25.5
10	82.8	150.6	1	10	36.4
11	65.3	15.8	7	37	55.4
12	103.9	12.5	11	31	50.8
13	79.4	21.8	7	15	58.5
14	52.0	51.5	5	41	25.3
15	46.5	28.4	1	41	38.5
16	47.9	16.3	6	55	41.0
17	44.0	13.6	8	37	34.6
18	47.1	22.3	16	10	27.3
19	92.8	27.6	8	27	61.0
20	35.5	61.1	5	27	19.4

* 竹内俊雄，鶴岡稔雄：コアキシャル・リレイション法を用いた有効雨量の計算方法　土木研究所報告105号 (1961)

21	69.8	35.3	3	10	58.2
22	57.0	53.0	6	32	31.0
23	40.5	59.6	5	23	25.6
24	68.8	49.4	4	58	12.1
25	112.1	28.4	5	59	36.8
26	41.0	66.4	7	36	29.7
27	58.3	11.1	12	29	42.0
28	46.7	24.5	10	25	34.2
29	38.2	32.4	8	17	22.6
30	56.6	46.7	8	31	24.7
31	123.2	21.1	5	43	50.6
32	51.0	14.2	15	15	40.1
33	47.7	45.9	3	21	30.6
34	43.6	24.0	4	20	36.1
35	88.5	13.3	6	33	68.9
36	102.4	37.4	8	31	28.5
37	39.9	32.5	10	18	30.4
38	44.8	8.0	21	37	33.0
39	42.0	27.7	13	22	27.9
40	35.7	18.7	10	15	30.0
41	73.5	29.7	7	45	55.4
42	24.6	48.0	6	46	4.8
43	56.7	29.3	2	44	47.3
44	119.3	23.9	6	33	56.9
45	43.6	81.4	7	42	25.5
46	63.2	14.0	11	62	47.3

因子ならびにその偏回帰係数を計算させた。インプットデータは表-2.10のとおりで16因子のうち有意であったのは常数項，x_2，x_4，x_1^2，x_1x_3，x_3x_4であり，その構造方程式は

$$\hat{y} = -20.779 + 0.356\,x_2 + 0.417\,x_4 + 0.00293\,x_1^2 + 0.0399\,x_1x_3 - 0.0496\,x_3x_4$$

でこの場合の残差分散は AOV-LAST より 95.19，残差不偏分散の平方根は 9.77 となる。また SB の欄よりこれら6因子の標準化偏回帰係数は x_1^2 に対する 0.79 が最大で他の x_2，x_4，x_1x_3，x_3x_4 に対する偏回帰係数は大体 0.2 のオーダーのもので x_1^2 の項の利きが一ばん大きいことがわかる。

また $\sqrt{V_E}$ は前にのべたように 9.77 であるが，46個の資料に対し計算した残差の絶対値の平均は 6.98 となっており，相当な精密度で推定しているものと考えられる。

［6］ 周期現象の構造分析*

前節までは周期成分を含まない場合の入力信号ならびに出力信号による構造分析を論じてきたが，雨量，洪水量，ダムの挙動，交通量などのデータの中には周期成分を含むと考えられるものが少なくない。そしてこのような振動現象のパラメタとしては時間が考えられることが多い。つまり確率変数 X の実現値として標本 x が得られたと考えられる一般の場合に対して，確率過程 $X(t)$ の実現値として時系列データ $x(t)$ が得られたと考えると周期成分を含む一ばん簡単な場合は

$$y_t = C\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t + \theta\right) + e \qquad \cdots\cdots(2.42)$$

という単純振動の場合である。ここに C は振幅，λ は波長，θ は位相角，e は非周期性の変動で第一項とは相関がないものと考える。

実際には前節までのべたようないろいろな要因の影響とか，少なくとも時間 t についての1次，2次の項などが加わっているわけである。

これに対し，まず周期成分を誤差項にくみ入れて時間の1次成分による傾向変動を検出し，もし trend があれば，これを除去したデータについて特定の波長の波に着目してその波の有意性を検定し，有意な周期を検出した後改めてこれと常数項 b_0 および b_1t 等の項も含めて正規方程式を立てて解き，AOV表を作る手続きによって周期成分を含む場合の構造分析を行なう。

(6.1) 時間傾向変動の除去

時間に関する1次成分が存在するときは，これは今データをとった期間より長い波長の周期変動の影響であるとも考えられないことはない。しかし現在のところ特に周期変動であると考えなければならぬ理由もないので，これを上昇または下降の時間傾向変動と考える。

(2.42)式において周期成分を誤差項にくみ入れて考えると

$$y_j = b_0 + b_1t_j + e_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad \cdots\cdots(2.43)$$

n はデータの大きさで

$$\boldsymbol{y}' = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}' = (b_0\ b_1)$$

$$\boldsymbol{e}' = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

とおくことにより(2.43)式は

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e} \qquad \cdots\cdots(2.44)$$

となり，残差平方和 $\boldsymbol{ee}'$ を最小にするように $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を定めれば前節までの方法により

正規方程式

$$\boldsymbol{X'X\hat{\beta}} = \boldsymbol{X'y} \qquad \cdots\cdots(2.45)$$

したがって，今の場合は

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma t \\ \Sigma t & \Sigma t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y \\ \Sigma ty \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.46)$$

t は 1, 2, …, n の系列であるから

$$\Sigma t = n(n+1)/2$$

$$\Sigma t^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

したがって(2.46)式は

$$\begin{pmatrix} n & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & n(n+1)(2n+1)/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y \\ \Sigma ty \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.47)$$

となる。

* 中村廣一：周期現象の構造分析　土木技術資料　4巻8号 (1962)

これを解いて$\hat{\beta}$を求める。

$$\hat{\beta}=\begin{pmatrix}\hat{b}_0\\ \hat{b}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Sigma y\ \ \Sigma t^2-\Sigma yt\ \ \Sigma t}{n\Sigma t^2-(\Sigma t)^2}\\ \dfrac{n\Sigma yt-\Sigma t\ \ \Sigma y}{n\Sigma t^2-(\Sigma t)^2}\end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}'X'y=\hat{b}_0\Sigma y+\hat{b}_1\Sigma yt$$

$$=\frac{(\Sigma yt)^2-2\ \Sigma y\ \ \Sigma yt\ \ \Sigma t/n+(\Sigma y)^2\ \ \Sigma t^2/n}{\Sigma t^2-(\Sigma t)^2/n}$$

$$=\frac{\{\Sigma yt-\Sigma y\ \ \Sigma t/n\}^2}{\Sigma t^2-(\Sigma t)^2/n}+\frac{(\Sigma y)^2}{n}$$

帰無仮説 H_n：$\beta'=(b_0\ 0)$

対立仮説 H_a：$\beta'=(b_0\ b_1)$

とすれば2章 (2.35) 式より H_n と H_a の判別情報推定量$\hat{D}\,[H_a,\ H_n]$について

$$\hat{\sigma}^2\hat{D}\,[H_a,\ H_n]=\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^a-\hat{\beta}_1^{n\prime}S_{11}\hat{\beta}^n$$

が成立し

$$R(\beta^n)=\hat{\beta}^{n\prime}S_{11}\hat{\beta}^n=\left(\frac{\Sigma y}{n}\right)n\left(\frac{\Sigma y}{n}\right)=\frac{(\Sigma y)^2}{n}$$

$$R(\beta)=\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^a$$

$$=\frac{\{\Sigma yt-\Sigma y\ \ \Sigma t/n\}^2}{\Sigma t^2-(\Sigma t)^2/n}+\frac{(\Sigma y)^2}{n}$$

であるから

$$\hat{\sigma}^2\hat{D}\,[H_a,\ H_n]=R(\beta)-R(\beta^n)$$

$$=\frac{\{\Sigma yt-\Sigma y\ \ \Sigma t/n\}^2}{\Sigma t^2-(\Sigma t)^2/n}$$

$$=\frac{\left\{\Sigma yt-\dfrac{(n+1)\ \Sigma y}{2}\right\}^2}{\dfrac{n(n^2-1)}{12}}$$

$$F=\frac{\{R(\beta)-R(\beta^n)\}/(2-1)}{\{y'y-R(\beta)\}/(n-2)}$$

が自由度対 1，$n-2$ のF分布をすることから表-2.1[1]のAOV表を作ることができる。

このF_0の値を自由度対 $(1,\ n-1)$ のF分布表5%点と比較し，表の値より大きいときはそれぞれ有意と考える。

とくにb_1が有意のときは

$$y_r=y-\hat{b}_1t$$

を計算し，時間傾向変動を除去したデータy_rについて周期分析を行なう。

（6.2） 周期分析

ある特定の周期成分に着目すれば他の周期成分の効果は，ある程度データサイズが大きければ誤差項にくり入れて考えることができる。この場合，時間傾向変動を除去し，特定の波長λ_tに着目したときのデータの構造は

$$y_{rj}=b_0+C_t\ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j+\theta_j\right)+e_j$$

$$j=1,\ 2,\cdots,\ n\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.48)$$

ここに，　C_t：振幅

λ_t：波長

θ_t：位相角

e：誤差　$E\,[e]=0$，$V\,[e]=\sigma^2$

で，これはさらに

$$y_r=b_0+C_{ta}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t\right)+C_{tb}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t\right)+e$$

とおくことができる。ただし，

$$C_t=\sqrt{C_{ta}{}^2+C_{tb}{}^2}$$

$$\theta_t=\tan^{-1}\frac{C_{ta}}{C_{tb}}$$

で，これに対し残差平方和を最小にするように各係数を推定する。

この場合観測方程式は

$$y'=(y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_1\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_1\right)\\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_2\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_2\right)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_n\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_n\right)\end{pmatrix}$$

$$\beta'=(b_0\ \ C_{ta}\ \ C_{tb})$$

$$e'=(e_1\ \ e_2\cdots e_n)$$

表-2.11　AOV表

SV	*SS*	*DF*	*MS*	F_0
$H_n:\beta=(b_0\ 0)$	$R(\beta^n)=(\Sigma y)^2/n$	1	$(\Sigma y)^2/n$	$\dfrac{(\Sigma y)^2}{n\ V_E}$
$H_a\mid H_n$	$S_1=\hat{\sigma}^2\hat{D}\,[H_a,\ H_n]=\dfrac{\left\{\Sigma yt-\dfrac{(n+1)\ \Sigma y}{2}\right\}^2}{n(n^2-1)/12}$	1	S_1	$\dfrac{S_1}{V_E}$
$H_a:\beta=(b_0\ b_1)$	$R(\beta)=S_1+(\Sigma y)^2/n$	2		
E	$S_E=(n-p)\ \hat{\sigma}^2=y'y-R(\beta)$	$n-2$	$V_E=\dfrac{S_E}{n-2}$	
T	$y'y$	n		

とおけば

$$y = X\beta + e$$

となり正規方程式は

$$X'X\beta = X'y$$

で，これを書きおろせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{j=1}^{n_t}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) & \sum_{j=1}^{n_t}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \\ * & \sum_{j=1}^{n_t}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) & \sum_{j=1}^{n_t}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \\ * & * & \sum_{j=1}^{n_t}\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ c_{ta} \\ c_{tb} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n_t} y_j \\ \sum_{j=1}^{n_t} y_j\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n_t} y_j\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.49)$$

この係数行列は対称行列であり，n_t が周期 λ_t の倍数のときは次のようにさらに簡単になる。

a)　波長2の波の検出

n_2 が2の倍数のとき $\sin^2$ および $\sin$ の項はすべて0，$\cos$ は -1 および $+1$ で $\cos^2$ の項は1となるから

$$\sum_j^{n_2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right)=\sum_j^{n_2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}t_i\right)$$

$$=\sum_j^{n_2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right)=0$$

$$\sum_j^{n_2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right)=n_t$$

したがって正規方程式は

$$\begin{pmatrix} n_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ c_{2a} \\ c_{2b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_j^{n_2} y_j \\ \sum_j^{n_2} y_j\cos\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right) \\ \sum_j^{n_2} y_j\sin\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right) \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ C_{ta}=\frac{1}{n_t}\sum_j^{n_2} y_j\cos\left(\frac{2\pi}{2}t_j\right)$$

$$=\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})$$

帰無仮説　$H_n:\beta=0$

対立仮説　$H_a:\beta=(b_0\ C_{2a}\ C_{2b})$

とすれば，判別情報推定量 $\partial^2\hat{D}\ [H_a,\ H_n]$ について

$$R(\beta)=\hat{\beta}'S\hat{\beta}=\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})\right\}\times n_2\left\{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})\right\}^2$$

であるから

$$\partial^2\hat{D}=[H_a,\ H_n]=R(\beta)$$

$$=\frac{1}{n_2}\left\{\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})\right\}^2$$

で表-2.12のAOV表を作ることができる。

表-2.12　AOV表

SV	SS	DF
$\lambda_t=2$	$S_2=\frac{1}{n_2}\left\{\sum_{j=1}^{n_2/2}(-y_{2j-1}+y_{2j})\right\}^2$	1
E	$S_E=S_0'-S_2$	n_2-1
T	$S_0'=y_T'y_T$	n_2

MS	F_0
$V_2=S_2$	$F_0=\frac{V_2}{V_E}$
$V_E=\frac{S_E}{n_2-2}$	

ただし，y_T は trend についての修正を終わったデータとする。

F_0 を $F(1,\ n_2-2;0.05)$ と比較し，大きければ一応波長2は有意である可能性があるとして保留する。

S_0' は n_2 が偶数にとってあるので

$$S_0'=S_0=\sum^{n_2}y^2-(\sum^{n_2}y)^2/n_2$$

b)　波長2以外の波の検出

n_t を波長 λ_t の倍数にとるから，ちょうど n_t までの和については

$$\sum^{n_t}\sin\omega x=\sum^{n_t}\cos\omega x=0$$

$$\sum^{n_t}\cos 2\omega x=\sum^{n_t}(1-2\sin^2\omega x)$$

$$=\sum^{n_t}(2\cos^2\omega x-1)=0$$

であるから

$$\sum^{n_t}\sin^2\omega x=\sum^{n_t}\cos^2\omega x=\frac{n_t}{2}$$

$$\sum^{n_t}\sin\omega x\cdot\cos\omega x=-\frac{1}{2}\sum^{n_t}\sin 2\omega x=0$$

したがって係数行列は対角行列となる。

正規方程式は

$$\begin{pmatrix} n_t & 0 & 0 \\ 0 & n_t/2 & 0 \\ 0 & 0 & n_t/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ C_{ta} \\ C_{tb} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum^{n_t} y_j \\ \sum^{n_t} y_j\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \\ \sum^{n_t} y_j\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t}t_j\right) \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots(2.50)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{C}_{ta} \\ \hat{C}_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j}^{n_t} y_j/n_t \\ \frac{2}{n_t}\sum_{j}^{n_t} y_j \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t} t_j\right) \\ \frac{2}{n_t}\sum_{j}^{n_t} y_j \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t} t_j\right) \end{pmatrix} \quad \cdots(2.51)$$

また係数行列の逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1/n_t & 0 & 0 \\ 0 & 2/n_t & 0 \\ 0 & 0 & 2/n_t \end{pmatrix}$$

であるから共分散行列は

$$\begin{pmatrix} 1/n_t & 0 & 0 \\ 0 & 2/n_t & 0 \\ 0 & 0 & 2/n_t \end{pmatrix} \sigma^2$$

となり，C_{ta}，C_{tb} は独立で共通の分散 $2\sigma^2/n_t$ をもつ，したがって

$$(C_{ta}^2+C_{tb}^2)/(2\sigma^2/n_t)$$

は自由度2のカイ2乗分布をする。

帰無仮説　$H_n : \beta=0$

対立仮説　$H_a : \beta=(b_0\ C_{ta}\ C_{tb})$

とすれば，判別情報推定量　$\hat{\sigma^2 D}\ [H_a,\ H_n]$ について

$$R(\beta)=\hat{\beta}'S\hat{\beta}=\frac{(\sum^{n_t} y)^2}{n_t}+\frac{2}{n_t}\left\{\sum^{n_t} y \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_t} t_j\right)\right\}^2 + \frac{2}{n_t}\left\{\sum^{n_t} y \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_t} t_j\right)\right\}^2$$

で残差積和について考えれば

$$S(xy)=\Sigma xy-\Sigma x\Sigma y/n$$

とおいたとき残差積和マトリクス

$$\begin{pmatrix} S(x_2x_2) & S(x_2x_3)\cdots\cdots S(x_2x_n) \\ * & S(x_3x_3)\cdots\cdots S(x_3x_n) \\ \vdots & \cdots\cdots \\ * & \cdots\cdots * S(x_nx_n) \end{pmatrix}$$

は正規方程式（常数項のある場合，すなわち$x_1=1$のとき）

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_2 & \Sigma x_3\cdots\cdots\Sigma x_p \\ * & \Sigma x_2x_2 & \Sigma x_2x_3\cdots\Sigma x_2x_p \\ \vdots & & \cdots\cdots \\ * & \cdots\cdots & * \Sigma x_px_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y \\ \Sigma yx_2 \\ \vdots \\ \Sigma yx_p \end{pmatrix}$$

を解くときの第1段階に現われてくる。すなわち第1行の要素を1行1列の交点の要素nで割り，これと第i行第1列の交点の要素との積をもとの第1行から引けば計算の第1段階では次のようになっている。

$$\begin{pmatrix} 1 & \Sigma x_2/n & \cdots\Sigma x_p/n \\ 0 & \Sigma x_2x_2-\frac{\Sigma x_2\Sigma x_2}{n} & \cdots\Sigma x_2x_p-\frac{\Sigma x_2\Sigma x_p}{n} \\ \vdots & * \vdots & \cdots\cdots\ \vdots \\ 0 & \Sigma x_px_2-\frac{\Sigma x_p\Sigma x_2}{n} & \Sigma x_px_p-\frac{\Sigma x_p\Sigma x_p}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y/n \\ \Sigma yx_2-\Sigma y\Sigma x_2/n \\ \vdots \\ \Sigma yx_p-\Sigma y\Sigma x_p/n \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3\ \cdots\cdots\bar{x}_p \\ 0 & S(x_2x_2) & S(x_2x_3)\cdots S(x_2x_p) \\ 0 & S(x_3x_2) & S(x_3x_3)\cdots S(x_3x_p) \\ & \cdots\cdots & \\ 0 & S(x_px_2) & S(x_px_3)\quad S(x_px_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ S(yx_2) \\ S(yx_3) \\ \vdots \\ S(yx_p) \end{pmatrix}$$

逆行列を作れば

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$

において

$$S_{11}=1$$

$$S_{12}=(\bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \cdots,\ \bar{x}_p)$$

$$S_{21}'=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=0$$

$$S_{22}=\begin{pmatrix} S(x_2x_2) & S(x_2x_3)\cdots S(x_2x_p) \\ S(x_3x_2) & S(x_3x_3)\cdots S(x_3x_p) \\ & \cdots\cdots \\ S(x_px_2) & S(x_px_3)\cdots S(x_px_p) \end{pmatrix}$$

$$X_1'=\bar{y}$$

$$X_2'y=\begin{pmatrix} S(yx_2) \\ S(yx_3) \\ \vdots \\ S(yx_p) \end{pmatrix}$$

とおいたことになるので

$$\begin{pmatrix} S_{11}\beta_1+S_{12}\beta_2 \\ S_{21}\beta_1+S_{22}\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$

したがって

$$\hat{\beta}_1+(\bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \cdots,\ \bar{x}_p)\begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix}=\bar{y}$$

および

$$S_{22}\hat{\beta}_2=X_2'y$$

すなわち

$$\hat{\beta}_1=\bar{y}-\hat{\beta}_2\bar{x}_2-\hat{\beta}_3\bar{x}_3-\cdots\cdots-\beta_p\bar{x}_p$$

$$\hat{\beta}_2=\begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} S(x_2x_2) & S(x_2x_3) & S(x_2x_p) \\ S(x_3x_2) & S(x_3x_3) & S(x_3x_p) \\ \cdots\cdots & & \\ S(x_px_2) & S(x_px_3) & S(x_px_p) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S(yx_2) \\ S(yx_3) \\ \vdots \\ S(yx_p) \end{pmatrix}$$

であって残差積和マトリクスの逆行列によって$\hat{\beta}_2\cdots\cdots\hat{\beta}_p$を求めることができる。したがって常数項を含む場合は一般のＡＯＶ表に対して

全変動　$S_T=y'y$

に対して

全変動　$S_0=S_T-(\Sigma y)^2/n=\Sigma y^2-(\Sigma y)^2/n$
$=S(yy)$

それに対する自由度は常数項に対する１を引いて

$\phi_0=n-1$

として，後はまったく同様にとり扱ってよいことになる。そこで今の場合，残差積和について計算することにより

$$S_E=y'y-\hat{\beta}'S\hat{\beta}$$

$$=\Sigma y^2-\frac{(\Sigma y)^2}{n_i}-\frac{2}{n_i}\left\{\sum^{n_i}\Sigma y\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}t_j\right)\right\}^2$$

$$-\frac{2}{n_i}\left\{\sum^{n_i}\Sigma y\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}t_j\right)\right\}^2$$

$$=S(yy)-\frac{n_i}{2}(C_{ia}{}^2+C_{ib}{}^2)$$

とすれば，これはもとのなまの積和を用いた場合の誤差変動と同じもので母数が２つであるから，誤差自由度$\phi_E=n_i-1-2=n_i-3$で

$S_E/\sigma^2\in\chi^2(n_i-3)$

したがって

$$F_0=\frac{n_i(C_{ia}{}^2+C_{ib}{}^2)}{2}\Big/\frac{S_E}{n_i-2}$$

は自由度対（２，n_i-3）のF分布をする。

そこで表-2.13のＡＯＶ表を作り，計算したF_0をF（２，n_i-3；0.05）の値と比較し，これより大きければ一応有意と考える。

表-2.13　ＡＯＶ表

SV	SS	DF	MS	F_0
J	$S_J=\frac{n_i}{2}(C_{ia}{}^2+C_{ib}{}^2)$ $=\frac{2}{n_i}\left\{\left(\sum_{j=1}^{i}T_{ij}\cos\frac{2\pi}{i}j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{i}T_{ij}\sin\frac{2\pi}{i}j\right)^2\right\}$	2	$V_J=\frac{S_J}{2}$	$F_0=\frac{V_J}{V_E}$
E	$S_E=S_0-S_J$	n_i-3	$V_E=\frac{S_E}{(n_i-3)}$	
O	$S_0=\sum^{n_i}\Sigma y^2-(\sum^{n_i}\Sigma y)^2/n_i$	n_i-1		

ここにT_{ij}とは同じ位相のときのyの和である。すなわち$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$および$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$は波長$i$経過後には同じ係数になってくるので，$y$についても同じ位相のときの$y$をまとめて考えるため，波長$\lambda_i$について$i=2$3，…，$p$ごとに同じ位相のときの$y$の和$T_{ij}$を作り，おのおの対応する$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$および$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$との積を計算すればよい。

T_{ij}は，たとえば36個のデータがあるときは次のようにする。

$$p=2\begin{cases}T_{2.1}=y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{35}\\T_{2.2}=y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{36}\end{cases}\quad n_2=36$$

$$p=3\begin{cases}T_{3.1}=y_1+y_4+\cdots\cdots+y_{34}\\T_{3.2}=y_2+y_5+\cdots\cdots+y_{35}\\T_{3.3}=y_3+y_6+\cdots\cdots+y_{36}\end{cases}\quad n_3=36$$

……

$$p=11\begin{cases}T_{11.1}=y_1+y_{12}+y_{23}\\T_{11.2}=y_2+y_{13}+y_{24}\\\cdots\cdots\\T_{11.11}=y_{11}+y_{22}+y_{33}\end{cases}\quad n_{11}=33$$

……

また$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$および$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_p}i\right)$は，たとえば，$p=11$に対しては

$i=1$　$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\cdot1\right)=0.541$

$i=2$　$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\cdot2\right)=0.910$

……

$i=6$　$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\cdot6\right)=-0.282$

……

$i=1$　$\cos\left(\frac{2\pi}{11}\cdot1\right)=0.841$

$i=2$　$\cos\left(\frac{2\pi}{11}\cdot2\right)=0.415$

……

$i=6$　$\cos\left(\frac{2\pi}{11}\cdot6\right)=-0.959$

等として求める。これらは定数と考えられるので，表示すれば表-2.15のとおりである。

このようにして集計したT_{ij}を用いてn_iを波長iの倍数になるような最大のデータサイズとすれば

$$C_{2a}=\frac{2}{n_2}\left\{T_{2.1}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\cdot1\right)+T_{2.2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\cdot2\right)\right\}$$

$$C_{2b}=\frac{2}{n_2}\left\{T_{2.1}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\cdot1\right)+T_{2.2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\cdot2\right)\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}C_{3a}&=\frac{2}{n_3}\left\{T_{3\cdot1}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot1\right)+T_{3\cdot2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot2\right)\right.\\&\qquad\left.+T_{3\cdot3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot3\right)\right\}\\C_{3b}&=\frac{2}{n_3}\left\{T_{3\cdot1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot1\right)+T_{3\cdot2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot2\right)\right.\\&\qquad\left.+T_{3\cdot3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot3\right)\right\}\end{aligned}\right\}$$

.....

$$C_{pa}=\frac{2}{n_p}\sum_{t=1}^{p}T_{pt}\cos\left(\frac{2\pi}{p}i\right)$$

$$C_{pb}=\frac{2}{n_p}\sum_{t=1}^{p}T_{pt}\sin\left(\frac{2\pi}{p}i\right)$$

$$\left.\begin{aligned}S_t&=\frac{n_t}{2}(C_{ta}^2+C_{tb}^2)\\&=\frac{2}{n_t}\left\{\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\cos\frac{2\pi}{t}j\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\sin\frac{2\pi}{t}j\right)^2\right\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2.52)$$

したがって，これを用いて

$$F_0=\left[\frac{1}{n_t}\left\{\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\cos\frac{2\pi}{t}j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\sin\frac{2\pi}{t}j\right)^2\right\}\right]\Bigg/\left[\frac{1}{n_t-3}\left[S_{0t}-\frac{2}{n_t}\left\{\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\cos\frac{2\pi}{t}j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{t}T_{tj}\sin\frac{2\pi}{t}j\right)^2\right\}\right]\right]$$

を順に計算し，$F(2,\ n_t-2;0.10)$ と比較すればよい。また S_{0t} は近似的に

$$S_{0t}\fallingdotseq\{\Sigma y^2-(\Sigma y)^2/n\}\frac{n_t-1}{n-1}$$

と考えてもよい。

表-2.15には波長20までの係数が求めてあるが，波長20以上についてはその検出したい波長が20までの数の組合せに分解できるならこれを利用することができる。たとえば波長24に対しては 4×6 と考えてデータサイズが31であっても，最初の24個だけを用いてデータナンバーで1，7，13，17および2，8，14，18などという（4－1）とびのデータ系列6本について波長4の波の検出を準用すればよい。

系列の大きさを q，系列の本数を r，いま最初に選定した表にある適当な波長を s，検出しようとする波長を p，p の l 倍として選定した使用データサイズを n とすれば

$$p=rs$$
$$n=pl=qr$$

いま最初から $(i-1)r$ 群（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$），群の中の番号を k（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$），として一連番号 t_j を分解すればデータの構造は

$$y_j=b_0+C_{pa}\cos\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)+\frac{2\pi}{p}k\right\}+C_{pb}\sin\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)+\frac{2\pi}{p}k\right\}+l_{ik}$$

n が p の倍数であるから，正規方程式の係数行列の非対角要素はすべてゼロ，対角要素は各群について $\cos^2$ または $\sin^2$ の和で，しかも各群が完全サイクル q についての和なので $q/2$ となり，この群が r 群あるから $qr/2=n/2$ となる。

したがって正規方程式を解いて

$$C_{pa}=\frac{2}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}y_j\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\right\}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\cos\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)+\frac{2\pi}{p}k\right\}$$

ただし

$$\begin{aligned}Y_{(i-1)r+k}&=y_{(i-1)r+k}+y_{(i-1)i+k+1}+\cdots\cdots,\\&\quad+y_{(i-1)r+k+(f-1)p}\\&\quad+\cdots+y_{(i-1)r+(l-1)p}\\&=\sum_{f=1}^{l}y_{(i-1)r+k+(f-1)p}\end{aligned}$$

実際計算には C_{pa} の形にしないで

$$\begin{aligned}C_{pa}'&=\frac{n}{2}C_{pa}\\&=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\cos\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)+\frac{2\pi}{p}k\right\}\\&=\sum_{k=1}^{r}\cos\left(\frac{2\pi}{p}k\right)\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\times\sin\left\{\frac{2\pi}{s}(r-1)\right\}\\&\quad-\sum_{k=1}^{t}\sin\left(\frac{2\pi}{p}k\right)\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\times\sin\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{pb}'&=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\sin\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)+\frac{2\pi}{p}k\right\}\\&=\sum_{k=1}^{r}\cos\left(\frac{2\pi}{p}k\right)\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\times\sin\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)\right\}\\&\quad+\sum_{k=1}^{r}\sin\left(\frac{2\pi}{p}k\right)\sum_{i=1}^{s}Y_{(i-1)r+k}\times\cos\left\{\frac{2\pi}{s}(i-1)\right\}\end{aligned}$$

として

$$S_p'=\frac{2}{n}(C_{pa}'^2+C_{pb}'^2)$$

全変動は N 個の全データの変動 S_0 を比例配分し

$$S_0'=\left\{\sum_{i=1}^{N}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2/N\right\}\frac{n-1}{N-1}$$

として表-2.14 の AOV 表を作ればよい。

表-2.14　AOV 表

SV	SS	DF	MS.	F_0
p	S_p'	2	$V_p=\frac{S_p'}{2}$	$F_0=\frac{V_p}{V_E}$
E	$S_E=S_0'=S_p'$	$n-3$	$V_E=\frac{S_E}{(n-3)}$	
0	S_0'	$n-1$		

F_0 は $F(2,\ n-3;\ 0.05)$ と比較する。

(6.3)　パンチカードによる周期の検出

この計算を人力によって行なうにはパンチカードを利用すると便利である。パンチカードは1列7421 SF 法または2列7421 法による市販のヘリ孔カードを利用すればよい。1列の場合は7421 そのものに対しては，その孔と SF をパンチし，これ以外の数は

3=1+2　　5=4+1　　6=4+2　　8=7+1
9=7+2

と，2つの数字の和に分解しておのおのパンチする。0 はいまの場合パンチしない（一般に特定のカードを選出する目的でパンチカードを用いるときは 0≡7+4 と規約し7と4にパンチするのが普通であるが，今の場合はカードを1から順に並べるのが目的であるからノーパンチを0と規約する方がつごうがよい）。

2列孔のときも0はノーパンチとする。カードには1～99等の番号をマジックインキで大きく記入し，この番号にしたがって上のヘリに対し左から1247 1247 とあるときは，左を1位，右を10位に対応させる。

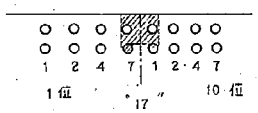


図-2.19

データは全体を10前後のクラスに分け，最小のものを1として全部正の数字のクラスマークに変換して記入する方が計算が早く間違いが少ない。なおもとのデータがマイナスからプラスにわたるものであっても，クラスマーク方式に移すときすべて正にしておいた方がよい。その理由は計算表（表-2.15）でマイナスの部分がすべてワクの中におさまるようにするためである。

序列操作はまず10位の7の孔に針を通し，落ちたものをその順序のまま向う側において，次に4の孔について全体のカードをソーティング，落ちたものはまたその順序のまま向う側に移して次に2と，順次1位の1の孔までこの操作を行なえば，1から順番にならんだカードが得られる。そこでこの序順操作を行なったカードを p=20 の場合ならば1～20，21～40，41～60 等の山に分け，各山の第1枚目 1，21，41 等のカードのクラスマークの和を作れば $T_{20\cdot1}$ が得られる。

$p=20$ のデータを用いて次のように $p=10,5,4,2$ に対する T_{tj} を作ることができる。すなわち，$T_{10\cdot1}$ ならば

$$T_{10\cdot1}=T_{20\cdot1}+T_{20\cdot11}$$

$T_{5\cdot4}$ ならば

$$T_{5\cdot4}=T_{20\cdot4}+T_{20\cdot9}+T_{20\cdot14}+T_{20\cdot19}$$

である。

同様に，p=18 のデータからは p=9，6，3 が得られ，p=16 からは p=8，4，2，p=14 からは p=7 が得られるしたがって10以下では 20，19，18，17，16，15，14，13，12，11 について行なった結果を利用すると簡単である。

これらのデータは表-2.15 の空欄に記入すると計算の計算に便である。この場合表-2.15 の太いワクの中はすべてマイナスであることに留意して右端に sin および cos の項について＋および－の和を作り，最後に総和を作ると間違いが少ない。また表-2.15 の右端には p ごとに集計に使用したデータの数を記入する。データは必ずしも全部使用するわけでなく，各山が等しい枚数になるようにするため，たとえば45枚のカードを用いて p=7 の計算を行なうときは各山は6枚ずつとし最後の 43，44，45 の3枚を除外して計算し，右端にそのとき使用した枚数 n_7=42 を記入する。

後はこれを用いて C_{ta} および C_{tb} を計算し AOV 表により検定し，有意な周期の選出を行なう。（表-2.15周期解析用係数表）

(6.4)　正規方程式

時間傾向変動および波長 p，q，r の波が有意である可能性があることが分ったとすれば，データの構造は

$$y_j=b_0+b_1t_j+C_p\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j+\theta_p\right)+C_q\sin\left(\frac{2\pi}{q}t_j+\theta_q\right)+C_r\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j+\theta_r\right)+e_j \quad \cdots\cdots(2.53)$$

すなわち

$$y_j=b_0+b_1t_j+C_{pa}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)+C_{pb}\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)+C_{qa}\cos\left(\frac{2\pi}{q}t_j\right)+C_{qb}\sin\left(\frac{2\pi}{q}t_j\right)+C_{ra}\cos\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right)+C_{rb}\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right)+e_j \quad \cdots\cdots(2.54)$$

そこで

$$y'=(y_1\ y_2\cdots\cdots y_n)$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cos\left(\frac{2\pi}{p}t_1\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{p}t_1\right)\cdots\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_1\right) \\ 1 & t_2 & \cos\left(\frac{2\pi}{p}t_2\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{p}t_2\right)\cdots\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots\cdots \quad \vdots \\ 1 & t_n & \cos\left(\frac{2\pi}{p}t_n\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{p}t_n\right)\cdots\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_n\right) \end{pmatrix}$$

$$\beta'=(b_0\ \ b_1\ \ C_{pa}\ \ C_{pb}\cdots\cdots C_{rb})$$

$$e'=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots\cdots e_n)$$

とおくことにより(2.50)は

表-2.15 週期解析用係数表

$\sin \frac{2\pi}{p} i$　　$\cos \frac{2\pi}{p} i$　　データはすべて正にしておれる方がよい。

p		i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ	枚
3	C	d	-0.500 0.866	-0.500 -0.866	1.000 0																			
	C		-	-	-																			S
	S		-	-	0																			
4	C	d	0 1.000	-1.000 0	0 -1.000	1.000 0																		
	C		0	-	0																			S
	S		-	0	-	0																		
5	C	d	0.309 0.951	-0.809 -0.588	-0.809 -0.588	-0.809 -0.951	1.000 0																	
	C		-	-	-	-	0																	S
	S		-	-	-	+	-																	
6	C	d	-0.500 0.866	-0.500 -0.866	-1.000 0	-0.500 -0.866	0.500 -0.866	1.000 0																
	C		-	-	0	-	+	0																S
	S		-	-	-	-	-	-																
7	C	d	0.623 0.782	-0.223 0.975	-0.901 0.434	-0.901 -0.434	-0.223 -0.975	0.623 -0.782	1.000 0															
	C		-	-	-	-	-	+	0															S
	S		-	-	-	-	-	-	-															
8	C	d	0.707 0.707	0 1.000	-0.707 0.707	-1.000 0	-0.707 -0.707	0 -1.000	0.707 -0.707	1.000 0														
	C		-	0	-	-	-	0	-	-														S
	S		-	-	-	0	-	-	-	0														
9	C	d	0.766 0.643	0.174 0.984	-0.940 0.866	-0.940 0.342	-0.940 -0.342	-0.500 -0.866	0.174 -0.984	0.766 -0.643	1.000 0													
	C		-	-	-	-	-	-	-	-	0													S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-													
10	C	d	0.809 0.588	0.309 0.951	-0.309 0.951	-0.809 0.588	-1.000 0	-0.809 -0.588	-0.309 -0.951	0.309 -0.951	0.809 -0.588	1.000 0												
	C		-	-	-	-	0	-	-	-	+	0												S
	S		-	-	-	-	-	-	-	+	-	-												
11	C	d	0.841 0.541	0.415 0.910	-0.143 0.990	-0.655 0.756	-0.959 0.282	-0.959 -0.282	-0.655 -0.756	-0.143 -0.990	0.415 -0.910	0.841 -0.541	1.000 0											
	C		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0											S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-											
12	C	d	0.866 0.500	0.500 0.866	0 1.000	-0.500 0.866	-0.866 0.500	-1.000 0	-0.866 -0.500	-0.500 -0.866	0 -1.000	0.500 -0.866	0.866 -0.500	1.000 0										
	C		-	-	0	-	-	-	-	-	0	-	-	-										S
	S		-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-										
13	C	d	0.885 0.465	0.568 0.823	0.121 0.993	-0.348 0.937	-0.748 0.663	-0.971 0.240	-0.971 +0.240	-0.748 -0.663	-0.348 -0.937	0.121 -0.993	0.568 -0.823	0.885 -0.465	1.000 0									
	C		-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	0									S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-									
14	C	d	0.901 0.434	0.623 0.782	0.223 0.975	-0.223 0.975	-0.623 0.782	-0.901 0.434	-1.000 0	-0.901 -0.434	-0.623 -0.782	-0.223 -0.975	0.223 -0.975	0.623 +0.782	0.901 -0.434	1.000 0								
	C		-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	+	-	-	0								S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
15	C	d	0.934 0.469	0.669 0.743	0.309 0.951	-0.105 0.995	-0.500 0.866	-0.809 0.588	-0.978 0.208	-0.978 -0.208	-0.809 -0.588	-0.500 -0.866	-0.105 -0.995	0.309 -0.951	0.669 -0.743	0.934 -0.407	1.000 0							
	C		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	0							S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-							
16	C	d	0.951 0.309	0.707 0.707	0.383 0.924	0 1.000	-0.383 0.924	-0.707 0.707	-0.924 0.383	-1.000 0	-0.924 -0.383	-0.707 -0.707	-0.383 -0.924	0 -1.000	0.383 -0.924	0.707 -0.707	0.924 -0.383	1.000 0						
	C		-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	0						S
	S		-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-						
17	C	d	0.972 0.261	0.759 0.674	0.446 0.895	0.092 0.996	-0.267 0.965	-0.615 0.789	-0.850 0.526	-0.983 0.184	-0.983 -0.184	-0.850 -0.526	-0.615 -0.789	-0.267 -0.965	-0.092 -0.996	0.446 -0.895	0.759 -0.674	0.972 -0.261	1.000 0					
	C		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0					S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-					
18	C	d	0.940 0.342	0.766 0.643	0.500 0.866	0.174 0.985	-0.174 0.985	-0.500 0.866	-0.766 0.643	-0.940 0.342	-1.000 0	-0.940 -0.342	-0.766 -0.643	-0.500 -0.866	-0.174 -0.985	0.174 -0.985	0.500 -0.866	0.766 -0.643	0.940 -0.342	1.000 0				
	C		-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0				S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-				
19	C	d	0.951 0.309	0.809 0.588	0.588 0.809	0.309 0.951	0 1.000	-0.309 0.951	-0.588 0.809	-0.809 0.588	-0.951 0.309	-1.000 0	-0.951 -0.309	-0.809 -0.588	-0.588 -0.809	-0.309 -0.951	0 -1.000	0.309 -0.951	0.588 -0.809	0.809 -0.588	0.951 -0.309	1.000 0		
	C		-	-	-	-	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0			S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0		
20	C	d	0.951 0.309	0.809 0.588	0.588 0.809	0.309 0.951	0 1.000	-0.309 0.951	-0.588 0.809	-0.809 0.588	-0.951 0.309	-1.000 0	-0.951 -0.309	-0.809 -0.588	-0.588 -0.809	-0.309 -0.951	0 -1.000	0.309 -0.951	0.588 -0.809	0.809 -0.588	0.951 -0.309	1.000 0		
	C		-	-	-	-	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0		S
	S		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		

$y=X\beta+e$　　正規方程式は $X'X\hat{\beta}=X'y$　　であるからこれを書きおろせば

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma t_j & \Sigma\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \Sigma\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \cdots & \Sigma\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \\ * & \Sigma t_j^2 & \Sigma t_j\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \Sigma t_j\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \cdots & \Sigma t_j\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \\ & & \Sigma\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \Sigma\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \cdots & \Sigma\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \\ & & & \Sigma\sin^2\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) & \cdots & \Sigma\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \\ & & & & & \\ * & & & & * & \Sigma\sin^2\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ C_{p1} \\ C_{p2} \\ \vdots \\ C_{r1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y_j \\ \Sigma y_j t_j \\ \Sigma y_j\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) \\ \Sigma y_j\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right) \\ \vdots \\ \Sigma y_j\sin\left(\frac{2\pi}{r}t_j\right) \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.55)$$

ただし t_j は $1, 2, \cdots\cdots, n$ の系列であるから

$$\sum_1^n t_j=n(n+1)/2$$

$$\Sigma t_j^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

$p, q, r, k, l, m, f, g, h, a, u, v$ がすべて正整数で

$n=kp+f$　　$(f<p)$

$n=lq+g$　　$(g<q)$

$n=mr+h$　　$(h<r)$

$n=du+v$　　$(v<u)$

d は p, q の最小公倍数とすれば

$$\sum_1^{kp}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)=\sum_1^{kp}\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)$$

$$=\sum_1^{du}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{q}t_j\right)$$

$$=\sum_1^{du}\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{q}t_j\right)$$

$$=\sum_1^{du}\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)\cos\left(\frac{2\pi}{q}t_j\right)$$

$$\sum_1^{kp}\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)=\sum_1^{kp}\sin^2\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)=\frac{kp}{2}$$

$$\sum_j^{kp}t_j\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)=\sum_j^{k}\left\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}(p-1)+(j-1)k\right\}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)=\sum_j^{k}T_{kpj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)$$

$$\sum_j^{kp}t_j\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)=\sum_j^{k}\left\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}(p-1)+(j-1)k\right\}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)=\sum_j^{k}T_{kpj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)$$

であるから正規方程式は残りの f, g, h, v 項についての集計にこれらを加え 2.55 式は

$$\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \sum_j^{l}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right) & \sum_j^{l}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right) & \cdots\cdots & \sum_1^{h}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right) \\ * & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \sum_j^{l}T_{kpj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)+\sum_j^{l}t_{kpj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right) & \sum_j^{h}T_{kpj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)+\sum_j^{l}t_{kpj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)\cdots\cdots & & \sum_j^{m}T_{mrj}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right)+\sum_j^{h}t_{mrj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right) \\ & & \frac{kp}{2}+\sum_j^{l}\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}j\right) & \sum\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right) & \cdots\cdots & \sum_1^{g}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right) \\ & & & \frac{kp}{2}+\sum_j^{l}\sin^2\left(\frac{2\pi}{p}j\right) & \cdots\cdots & \sum_1^{g}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right) \\ & & & & & \\ * & & & & * & \frac{mr}{2}+\sum_1^{h}\sin^2\left(\frac{2\pi}{r}j\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ C_{p1} \\ C_{p2} \\ \vdots \\ C_{r1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_1^{h}y_j \\ \sum_1^{n}y_jt_j \\ \sum_j^{l}T_{pj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)+\sum_j^{l}y_{kpmj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right) \\ \sum_j^{l}T_{pj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right)+\sum_j^{l}y_{kpmj}\sin\left(\frac{2\pi}{p}j\right) \\ \cdots\cdots \\ \sum_j^{r}T_{rj}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right)+\sum_j^{h}y_{mrmj}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right) \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.56)$$

となり，これを解いて $\hat{\beta}$ を求めAOV表を作る。

$$S_E=y'y-\hat{\beta}'X'y$$
$$=\Sigma y^2-b_0\Sigma y_j-b_1\Sigma y_j t_j$$
$$-C_{pa}\left\{\sum^{p}T_{pj}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)+\sum^{f}y_{kp+j}\cos\left(\frac{2\pi}{p}j\right)\right\}$$
$$-\cdots\cdots-C_{rb}\left\{\sum^{r}T_{rj}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right)\right.$$
$$\left.+\sum^{k}y_{mr+j}\sin\left(\frac{2\pi}{r}j\right)\right\}$$

誤差の自由度は今の場合未知母数が8（常数項を含む）であるから $\phi_E=n-8$

$$V_E=S_E/\phi_E=S_E/(n-8)$$

これに対し C_{rb} の有意性を検定するには前にのべた二次仮設の検定の手法を用いればよい。この場合は F_0 は $F(1,n-8;0.05)$ と5％の表を用いる。ただし，周期分析については偽周期の影響も考えられるので原則としてデータサイズの1/5以下の波長についてのみ計算を行ない，得られた周期成分の真の存在についてはさらに検討を行なうことが望ましい。

(6.5)　自動計算による周期分析の手続

電子計算によるときは表-1などの係数を記憶することは記憶容量の関係からあまり得策でないので，波長2以外の波の検出の場合はたとえば波長 p に対してその倍数になる n 個のデータを用い，波長 p に対する係数は

$$\sin\left\{\frac{2\pi}{p}(i+1)\right\}=\sin\left(\frac{2\pi}{p}i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$
$$+\cos\left(\frac{2\pi}{p}i\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$
$$\cos\left\{\frac{2\pi}{p}(i+1)\right\}=\cos\left(\frac{2\pi}{p}i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$
$$-\sin\left(\frac{2\pi}{p}i\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$

を用い，記憶装置には $\sin\frac{2\pi}{p}$，$\cos\frac{2\pi}{p}$ のみをあらかじめ計算して入れておき，$\sin\left(\frac{2\pi}{p}\cdot2\right)$，$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\cdot2\right)$ 次に，$\sin\left(\frac{2\pi}{p}\cdot3\right)$，$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\cdot3\right)$ と順次計算しながらこの係数を使用して

$$C_{pa}'=\frac{n}{2}C_{pa}=\sum_{j=1}^{n}y_j\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)$$

$$C_{pb}'=\frac{n}{2}C_{pb}=\sum_{j=1}^{n}y_j\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)$$

を計算し，波長 p の波による変動

$$S_p=\frac{2}{n}(C_{pa}'^2+C_{pb}'^2)$$

を求める方がよい。順序としては

手順1　時間傾向変動の検討

一たんデータを順に記憶し trend の検定を行なう。（危険率10%）b_1 が有意となったら trend の除去を行なったデータ y_r を作る。

手順2　有意な可能性のある波長の検出

大きな波長から順に検定（危険率5％）し，波長2までの検定を終わる。

もし圧倒的に大きな効果をもつ波長が検出されたときは手順4による。

手順3　最後の検定

有意な可能性のある因子を用いて二次仮説の検定を行ない，有意なもののみを残す。この際の危険率は5％とし F 表5％点は次の近似式による。

$$F(1,\phi;0.05)\fallingdotseq(1.40+1.00/\phi)^4$$
$$F(2,\phi;0.05)\fallingdotseq(1.32+1.15/\phi)^4$$

手順4　非常に大きな変動をもつ波長の効果の修正

S_p' が S_0 の1/2に達するくらいの大きなものであるときはこの効果を除去しないとノイズが非常に大きくなるので，次のように修正後の $\bar{y}_j$ を求め，爾後はこの値を用いて有意な波長の検出を行なう。

$$\bar{y}_j=y_j-C_{pa}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)-C_{pb}\sin\left(\frac{2\pi}{p}t_j\right)$$

全変動はもちろん修正後は減少し，自由度も修正の際用いた母数の数だけ減ずる。

(6.6)　周期分析の実例（1）

いま2つの正弦波を合成し，これにランダムノイズを加えてデータを作り，この構造を知らぬものとして構造推定を行なってみよう。なお時間に関する1次傾向も存在するものとして

$$b_0=28\quad b_1=2\quad C_3=10\quad \theta_3=+(2\pi/3)$$
$$C_5=20\quad \theta_5=-(2\pi/5)$$

すなわち

$$y_j=28+2t_j+10\sin\left(\frac{2\pi}{3}t_j+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+20\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)+e_j$$

として，あらかじめ計算したものに e_j としては母平均0，母分散4の正規分布から抽出した値として正規乱数表を用いて計算したものを加える。

表-2.16　周期解析入力データ

t	e	y	t	e	y
1	0	31.3	21	2	77.0
2	1	55.0	22	−1	81.3
3	0	50.8	23	−4	81.8
4	0	15.5	24	−4	65.2
5	−1	18.0	25	−1	49.3
6	−2	43.0	26	2	82.0
7	−1	51.3	27	−2	104.0
8	0	55.8	28	0	87.1
9	−3	36.2	29	0	74.2
10	−2	18.3	30	0	74.0
11	0	50.0	31	2	83.3
12	−4	72.0	32	1	112.0
13	−1	56.1	33	1	111.8
14	1	45.2	34	−3	72.5
15	0	44.0	35	1	80.0
16	2	53.0	36	−2	102.0
17	−1	80.0			
18	−2	78.8			
19	−2	43.5			
20	4	53.0			

このデータを入れて電子計算させた結果は表-2.17のとおりで，データの構造は次の推定量

$$g_j=27.0+1.97t_j+7.29\sin\left(\frac{2\pi}{3}t_j+\frac{2\pi}{2.7}\right)$$
$$+19.80\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{5.3}\right)$$

にノイズの加わったものであることになり，実際の構造に対し非常によい一致を示している。

なお，アウトプットデータの意味は

AOV-(1)　第1分散分析表で全変動 $S(OP)$ の1/2をこえるような大きな特定周期の変動 $S(P)$ の波長の存在を調べるためのもので，この場合は1次傾向および波長5が有意であるから，その順にその要因の影響分を除いてゆく，たとえば最初に1次傾向が全変動22065.9680のうち t_j という要因によって説明される変動が13822.4753と全変動の1/2以上あるので各データから t_j の変動分を引き，そのデータによって，つぎつぎと検定を行なったところ波長5に対しても変動が1/2以上あることがわかったので，これによる補正を行ない，そのデータによって次の全波長に対する検定にはいる。

SV：変動要因

DS：データの大きさ

$S(P)$：波長 P による変動

$S(OP)$：全変動

F：分散比

MS：平均平方

AOV-(2)　第2分散分析表ですでに極端に大きな変動をもつ要因の影響は除去してあるので，他の波長の分がノイズにはいってもそれほど検出力を悪くしていない。

NE　正規方程式 (normal equation) で残った因子は00(常数項)，01(1次傾向)，03C(波長3のcosの項)，03S(波長3のsinの項)，05C(波長5のcosの項)，05S(波長5のsinの項)の6因子で Y は正規方程式の右辺，00から05Sまでは正規方程式の係数行列で対称行列である。

$NO\cdot COMP$　は番号対照表で，ここから00ないし05S等の因子を番号に読み換える。

B　正規方程式の解

AOV-NO (06)　分散分析表でこの表によって第6因子が他の因子の影響を差引いても，なお有意であることを示している。SV で06 (01 02 03 04 05) というのは，第1ないし第5因子の効果を差引いた後の第6因子の効果を示す意で打ってある。

AOV-NO (05)　前同様であるが，この表以後は下から検定していって有意となった因子から上の方はクイプアウトさせない。

P (06)　は6個の因子が有意であることを示している。

AOV-LAST　は有意な因子のみによる分散分析表

B　有意な因子のみによる正規方程式の解

IM　逆行列 (inverse matrix)　対称行列

SR　残差散和マトリクス

SB　規準化偏回帰係数（残差散和マトリクスの解）

SOL　最終結果

$$y_j=27.0+1.97t_j+7.29\sin\left(\frac{2\pi}{3}t_j+2.34\right)$$
$$+19.80\sin\left(\frac{2\pi}{5}t_j-1.19\right)+e_j$$

$e_j\in N(0,\ 2.38^2)$

(6.7)　周期分析の実例（2）

和歌山県古座川ダムの計画に当って七川における最大日雨量が計画の基本に用いられている。この数値* について1次傾向ならびに周期成分が存在するかどうかを調べてみたい。連続したデータとしては大正9年より昭和27年に至る33年分の最大日雨量を使用する。その入力データは大正9年より順に

267.8	236.9	366.3	124.9	250.7	262.6
142.0	220.0	200.0	160.0	154.0	178.2
153.7	207.6	225.1	165.1	153.5	114.1
209.0	469.0	240.0	100.7	160.0	167.0
230.0	250.0	194.3	153.3	387.2	103.1
317.8	211.0	196.4	170.0		

このデータを電子計算させた結果は

AOV-(1)　では全変動の1/2をこすような大きな変動をもつ波長はないことを示している。

AOV-(2)　では，したがって修正しないもとのデータについて各波長ごとに調べたところ，危険率5％で有意なものはないことがわかった。

結論的にはこの34個のデータに対しては周期成分の存在は1次傾向を含めて認められないことになる。

3.　危険度の評価

構造物がどの程度に安全（したがって危険）であるかを評価するやり方としては，まず第一に何を指標としてとり上げるかを定め，次にこの指標に関する情報を標本として得て情報量解析を行なえばよい。これは構造物の危険という問題だけでなく，一般にある予測を立てて，この予測が誤りである確率をある限度（普通5％）以下におさえたいときにも同様に適用できる。

〔1〕　危険度の計算

(1.1)　危険度の定義

いままで一般的にある数値 A とある数値 B とがある

* 和歌山県古座川利水工事事務所；古座川総合開発七川ダム洪水調節の計算 (1953)

表-2.17 周期解析出力データ

AOV-(1)

SV	DS	S (P)	S (OP)	F	MS
001	036	13822.4753	22065.9680	57.0	242.455667
005	035	7051.71257	8200.26910	95.1	37.0502106

AOV-(2)

SV	DS	S (P)	S (OP)	F	MS
02	036	1.52660563	1178.29260	.040	
03	036	976.664266	1178.29260	72.6	6.72094466
04	036	9.03506055	1178.29260	.115	
05	036	26.5352397	1178.29260	.345	
07	035	4.81785597	1148.55630	.061	
08	032	1.85238210	969.213500	.024	
09	036	4.71907541	1178.29260	.060	
10	030	11.9294589	932.628500	.155	
11	033	5.69400715	1075.92650	.071	
12	036	.435089922	1178.29260	.005	
13	026	7.55962830	795.740400	.095	
14	028	8.96218964	849.311300	.117	
15	030	34.3117882	932.628500	.458	
16	032	25.5664755	969.213500	.352	
17	034	27.3846433	1129.84810	.347	
18	036	36.7220344	1178.29260	.482	
19	019	12.7561432	537.652900	.157	
20	020	25.7713242	580.766900	.325	
21	021	53.7261613	652.310300	.673	
22	022	29.1252818	707.539700	.343	
23	023	25.9957932	707.548200	.324	
24	024	32.5483950	731.344200	.419	
25	025	22.0234324	778.408400	.276	
26	026	21.8290676	795.740400	.282	
27	027	26.8411557	829.503600	.351	
28	028	22.3557385	849.311300	.297	
29	029	23.7849883	868.033900	.323	
30	030	33.7348601	932.628500	.450	
31	031	29.7462170	952.493200	.402	
32	032	33.7065365	969.213500	.468	
33	033	51.1425904	1075.92650	.673	
34	034	43.4227330	1129.84810	.559	
35	035	48.5286718	1148.55630	.639	
36	036	57.0369122	1178.29260	.763	

NE

	00	01	03 c	03 s	05 c	05 s
00	.360000(02)	.666000(03)	.000000(00)	.000000(00)	.309016(00)	.951056(00)
01		.162060(05)	.180000(02)	.103923(02)	.286246(02)	.101513(02)
03 c			.180000(02)	.000000(00)	−.904508(00)	.693786(−01)
03 s				.180000(02)	.369836(00)	−.509036(00)
05 c					.175954(02)	.293892(00)
05 s						.184045(02)

	Y
	.228630(04)
	.496246(05)
	.146550(03)
	−.122542(03)
	−.262572(03)
	.179833(03)
Y	.167265(06)

NO. COMP.

00 ——01
01 ——02
03 c ——03
03 s ——04
05 c ——05
05 s ——06
Y ——07

B

01	27.0083361
02	1.97089038
03	5.21997069
04	−5.08308585
05	−18.3520944
06	−7.42121719

表-2.17 つ づ き

AOV——NO(06)

SS	DF	F	SV
145199.101	001	25616.	01(00)
145199.101	001		
13822.4760	001	2438.6	02(01)
159021.577	002		
707.625000	001	124.84	03(01, 02)
159729.202	003		
593.090000	001	104.63	04(01, 02, 03)
160322.292	004		
5762.56000	001	1016.6	05(01, 02, 03, 04)
166084.852	005		
1010.17300	001	178.21	06(01, 02, 03, 04, 05)
167095.025	006		
170.045000	030	(5.66816666)	E
167265.070	036		T

AOV——NO(05)

SS	DF	F	SV
5854.81000	001	1032.9	05(06, 01, 02, 03, 04)
167095.026	006		
170.044000	030	(5.66813333)	E

AOV——NO(04)

SS	DF	F	SV
463.672000	001	81.803	04(05, 06, 01, 02, 03)
167095.026	006		
170.044000	030	(5.66813333)	E

AOV——NO(03)

SS	DF	F	SV
486.567000	001	85.842	03(04, 05, 06, 01, 02)
167095.025	006		
170.045000	030	(5.66816666)	E

AOV——NO(02)

SS	DF	F	SV
14855.5810	001	2620.8	02(03, 04, 05, 06, 01)
167095.026	006		
170.044000	030	(5.66813333)	E

AOV——NO(01)

SS	DF	F	SV
6218.11900	001	1097.0	01(02, 03, 04, 05, 06)
167095.027	006		
170.043000	030	(5.66810000)	E

P(06)

AOV——LAST

SS	DF	F	SV
145199.101	001	25616.	01(00)
145199.101	001		
13822.4760	001	2438.6	02(01)
159021.577	002		
707.625000	001	124.84	03(01, 02)
159729.202	003		
593.090000	001	104.63	04(01, 02, 03)
160322.292	004		
5762.56000	001	1016.6	05(01, 02, 03, 04)
166084.852	005		
1010.17300	001	178.21	06(01, 02, 03, 04, 05)
167095.025	006		
170.045000	030	(5.66816666)	E
167265.070	036		T

B

01	27.0083361
02	1.97089038
03	5.21997069
04	−5.08308585
05	−18.3520944
06	7.42121719

表-2.17 つ づ き

M

	01	02	03	04	05	06
01	.117310(00)	−.483734(−02)	.516266(−02)	−.302188(−02)	.619819(−02)	−.359593(−02)
02		.261478(−03)	−.280027(−03)	.161674(−03)	−.360169(−03)	.117026(−03)
03			.560006(−01)	−.239357(−03)	.325504(−02)	−.382028(−03)
04				.557242(−01)	−.142076(−02)	.163180(−02)
05					.575252(−01)	−.109179(−02)
06						.545197(−01)

SR

	02	03	04	05	06	07
02	.388500(04)	.180000(02)	−.103923(02)	.229077(02)	−.744319(01)	.732805(04)
03		.180000(02)	.000000(00)	−.904508(00)	.693786(−01)	.146550(03)
04			.180000(02)	.369836(00)	−.509036(00)	−.122542(03)
05				.175928(02)	.285728(00)	−.282197(03)
06					.183793(02)	.119433(03)
07						.220659(05)

R

	02	03	04	05	06	07
02	.100000(01)	.680676(−01)	−.392988(−01)	.876233(−01)	−.278547(−01)	.791464(00)
03		.100000(01)	.000000(00)	−.508286(−01)	.381438(−02)	.232534(00)
04			.100000(01)	.207828(−01)	−.279864(−01)	−.194441(00)
05				.100000(01)	.158898(−01)	−.452922(00)
06					.100000(01)	.187542(00)
07						.100000(01)

SB

02	.826982840
03	.149088046
04	−.145178466
05	−.518193678
06	.214180097

SOL

SV	A	B	C	T
(00)			27.0083361	
(01)			1.97089038	
(03)	+	−	7.28600409	2.34290942
(05)	−	+	19.7958033	−1.18651993
RVE	2.38079118			

表-2.18 古座川出力データ

AOV-(1)

SV	DS	S (P)	S (OP)	F

AOV-(2)

SV	DS	S (P)	S (OP)	F	SV	DS	S (P)	S (OP)	F
01	034	292.129889	215019.190	.043	18	018	11296.5176	66958.0370	1.52
02	034	9154.48264	215019.190	1.42	19	019	13283.2780	67048.5070	1.97
03	033	21353.3496	213358.800	1.66	20	020	32097.8137	135923.330	2.62
04	032	4886.63961	213127.990	.340	21	021	32842.4150	136607.113	2.84
05	030	16298.5278	201528.760	1.18	22	022	20027.6072	148964.759	1.47
06	030	26904.1133	201528.760	2.07	23	023	14568.7711	151290.433	1.06
07	028	7908.82378	158266.200	.657	24	024	10640.0030	152836.460	.785
08	032	7578.34312	213127.990	.534	25	025	10962.9621	153413.100	.846
09	027	9744.25570	155419.520	.802	26	026	12550.3181	155234.910	1.01
10	030	2740.83424	201528.760	.186	27	027	10794.4965	155419.520	.895
11	033	1243.00666	213358.800	.087	28	028	7248.09592	158266.200	.599
12	024	2956.25442	152836.460	.207	29	029	16501.4683	190075.020	1.23
13	026	5861.58367	155234.910	.451	30	030	9585.30653	201528.760	.674
14	028	9580.66457	158266.200	.805	31	031	14640.7648	213127.280	1.03
15	030	8988.82493	201528.760	.630	32	032	13887.7736	213127.990	1.01
16	032	9864.16606	213127.990	.703	33	033	12334.7161	213358.800	.920
17	034	6107.29158	215019.190	.453	34	034	9697.37341	215019.190	.732

とき B について起こり得る最大の値 B_0 を適当に定め，

$$n=A/B_0$$

を安全率と称していた。逆にチエーンに一定荷重がかかり，各リンクの中の最小強度のものに支配されてチエーンが切れる場合のように，A の方に起こりうる最小のもの A_0 を適当に定め

$$n=A_0/B$$

とすることもいわば同様の考え方である。

これに対し B_0 を適当に定めたとき A の変動を考慮したとえば A_i の分布について全体の 19/20 まで $0.8B_0$ を下らないようにする* といった取扱い方で確率的な考え方を多少導入しようとしたもの，A_i と B_i の双方の分布を考えようとしたものなどが現われているが，いずれも標本値と母数とを混同して用いているため破損の確率と称するものが非常に小さく出てきて，見掛け上いかにも安全らしく見える場合が多かった。

ここでは危険とは $Y=A-B$ が負になることであると定義した上で次の m 回の試行の中で Y が負になる割合の最大値を予想してその予想が誤りである確率を 5% 以下にするという考え方に統一し，Y が負になる割合の最大値を危険度と名づける。

この場合一つの問題は試行という言葉であって，たとえばリンクのように一つ一つが別々に作られる場合，あるいはアーチダムの水圧荷重，温度荷重や，雨量や流量のように1年サイクルの変動をするものなどは回の定義は比較的容易であるが，このような周期的変動の考えにくいものではいろいろと工夫をこらさなくてはならない。

たとえば長いロープの破断を論ずるときは，ロープ供試片としてある長さを切り出し，その破断強度に関する情報をもってその単位長さの何倍かの長さのロープについての破断強度を論ずることにすればよいし，コンクリートなどではある体積を代表するように供試体をとったとすれば，その単位体積の何倍かのものの中の最小強度を論ずるという形も考えられる。

(1.2)　模型化

いままでにのべた考え方で構造物の危険度を論ずる問題を模型化して考えてみると，A, B いずれか一方だけの分布を考える場合と A, B 双方の分布を考える場合に二大別して考えることができる。前者はたとえば袋の中にノーマルチップ A_i（または B_i）がはいっており，一つずつとり出して判定値 B_0（または A_0）と比較して

$$Y=A_i-B_0 \quad (\text{または} \quad Y=A_0-B_i)$$

が負になる割合の最大値を予想して，この予想が誤りである確率を5% 以下にしたいとき，n 回のサンプリングによって $\bar{x}$, $\sqrt{V_x}$ が得られて，この情報にもとづいて危険度を推定する問題となり，後者は二つの袋にそれぞれ母平均および母分散の異なるノーマルチップ A_i および B_i がはいっており，双方から一つずつとり出して比較し，

$$Y=A_i-B_i$$

が負になる割合の最大値を予想し，この予想が誤りである確率を5% 以下とした場合に，A, B についてそれぞれ n 回および m 回のサンプリングより $\bar{x}_a$, $\sqrt{V_a}$, $\bar{x}_b$, $\sqrt{V_b}$ が得られているとき，この情報に基づいて危険度を推定する問題と考えてよい。前者のタイプに属する問題としては堤防やダムの場合の最大洪水量，荷重一定の場合のチェーンやロープの破断の問題，交通量の問題などいろいろ考えることができ，これらは次にとる k 個のうちである割合以上のものが超さない限界を危険率 α で推定する問題であるが，これと似て非なるものに，次にとる k 個の中の極値をとるという操作を q 回くり返したとき，これら q 個の極値の中の半分は，これより大きくなり，半分はこれより小さくなる限界を危険率 α で推定する問題がある。

たとえば，ある期間の極値を x_i とし，これら k 個の平均を $\bar{x}$，不偏分散の平方根を $\sqrt{V}$ としたとき，K_p を正規偏差とすれば

$$\mu+K_p\sigma$$

より大きいものの全体に対する割合は p であるから

$$E[\bar{x}]=\mu$$

$$E[\sqrt{V}]=c_2^*\sigma$$

（ただし $n>10$ で c_2^* はほとんど 1）

ということを考えて，x が確率 $1-p$ で越さぬ限界を

$$\bar{x}+K_p\sqrt{V}$$

とおくやり方で，これは n が相当大きいときであっても，期待値をとった場合つまり平均的にしか正しくなく $\bar{x}+K_p\sqrt{V}$ をこえるものの全体に対する割合は p 以下であるという予測を多数回行なったとき，たとえば q 回行なったとき，その中の $q/2$ 回はこの予測が当り，残りの $q/2$ 回は外れることになってしまう。

これは長い間の経済効果のように平均的に物を考えることが望ましいの場合に適用すべきであって，次の m 回の試行の間に危険になることを論じているわけではないから，われわれのいま問題にしている危険度の評価にこの50% 点を用いることは誤りであると考えられる。

後者のタイプは一般的な危険度の評価の問題で，大部分はこのタイプに属している。

---

* 昭和31年度土木学会制定　コンクリート標準示方書。
無筋コンクリート99条　圧縮強度の許容限界「責任技術者の指示にしたがい，現場でとったコンクリートについて圧縮強度試験をする場合，同時につくった供試体3個の材令28日における圧縮強度の平均値はつぎの条件を満足しなければならない。どの平均値も構造物の設計においてとった材令28日における圧縮強度 σ_{28} の80% を，また引続きとったどの5回の平均値も上記の σ_{28} を少なくとも20回に1回以上の確率で下ってはならない。」

(1.3) 諸報告に現われた問題点

危険度を評価しようとする試みは，なにも安全率という名を冠してなくても，いろいろな分野で取扱われており，これに関する報告も多い。それらの中で問題となる点をまとめてみると次の3点があげられる。

a. 統計量と母数の混同

これはいわゆる確率的な考え方を導入したほとんどすべての報告に共通した問題点であり，要するに

$$x \in N(\mu,\ \sigma^2)$$

の場合，大きさ n のサンプルから $\bar{x}$ および $\sqrt{V}$ を計算しておいて

$$\bar{x} \pm K_p\sqrt{V}$$

とおいた K_p（正規偏差，正規分布の片側 p %点）を正規分布表より求め，この範囲外に落ちる確率は $2p$ であるとするもので，この考え方は母集団について

$$\mu \pm K_p\sigma$$

について考える場合ならよいが，μ の代りに $\bar{x}$ を，σ の代りに $\sqrt{V}$ を代入しただけの形ではサンプリングに伴うユラギを考慮してないために，一般に $2p$ の割合で外に落ちることが期待される場合には

$$\bar{x} \pm h\sqrt{V}$$

とおいた係数 h は K_p より大きいものでなければならないことになり，いわゆる危険度が実際のものより小さいように評価されることになる。*

またこの母数と統計量の混同という誤りのほかに，このやり方は c であげる極値に対する考慮という点でも問題がある。

b. t 分布，χ^2 分布の適用の誤り

残差平方和を S とすれば

$$\sqrt{V}=\sqrt{S/\phi}$$

$$\chi^2=S/\sigma^2$$

$$t=\frac{u}{\sqrt{\chi^2/\phi}}=\frac{(\bar{x}-\mu)/(\sigma\sqrt{1/n})}{\sqrt{S/\sigma^2\phi}}$$

$$=\frac{(\bar{x}-\mu)/\sqrt{1/n}}{\sqrt{V}}$$

であるから，$\bar{x}$ のユラギのみを考慮し

$$\left(\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{V}\right)+K_p\sqrt{V}=\bar{x}+\left(\frac{t}{\sqrt{n}}+K_p\right)\sqrt{V}$$

よりも大きくなる確率が5%以下とした報告がある。**

t^2 は分子の自由度1の F 分布をするから

$$\bar{x}+\sqrt{FV/n}$$

（V の代りに n^2 という記号を用いたものもある）

と書いても同じことであるが，これではサンプルサイズ n の $\bar{x}$ の信頼区間のみを考慮するに止まって，いま問題にしようとしている $\bar{x}+h\sqrt{V}$ の分布とはほど遠いものがある。

$\bar{x}$ と $\sqrt{V}$ 双方のユラギをそのまま加え

$$\chi^2=\frac{S}{\sigma^2}=\frac{\phi V}{\sigma^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\phi V}{\chi^2}}$$

を利用して全体の p 以下がこれより大きくなる限界として

$$\mu+K_p\sigma$$

に対して

$$\bar{x}+\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{V}+K_p\sqrt{\frac{\phi V}{\chi^2}}$$

$$=\bar{x}+\left(\frac{t}{\sqrt{n}}+K_p\sqrt{\frac{\phi}{\chi^2}}\right)\sqrt{V}$$

などとしている例***なども μ が

$$\bar{x}+\left(\frac{t(\phi,\ 0.10)}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{V}$$

より大きくないこと，σ が

$$\sqrt{\frac{\phi V}{\chi^2(\phi,\ 0.05)}}$$

より大きくないことは，それぞれ危険率5%で確かであるとしても，これらを同時に使用すると危険率が変わってくる点が問題である。

c. 極値の問題に対する考慮

極値というとGumbel****などのいう極値分布と混同されやすいが，ここでは，ある区間の最大値または最小値という意味だけに用い，母集団は正規分布またはなんらかの手段で正規化された分布と仮定し，正規母集団から抽出された標本のある大きさのものの中の最大値または最小値を議論しているものと考える。ここにいうなんらかの方法とは逆正弦変換，対数変換，平方根変換などのすべてを含み，既存の固有技術の知識によって適当な変換を用いて正規母集団からの抽出と考えてさしつかえない状態にしておいて，この標本について考察を進めればよい。

計画洪水量の問題でも定差図などにより適当な非心対数正規分布の定数 a を定め，$X=\log(x \pm a)$ などとおいた X について考えるところは医学，化学工業での濃度や収率，粒度分布，寿命，材料強度などでの取扱いとまったく異なるところはない。

---

* 高橋浩一郎：気象統計　河出書房 (1942)
建設省中国四国地建調査課：太田川内水排除に関する報報告 (1946)
岩井重久：水文学における非対称分布について　土木学会論文集2号 (1946)
Freudenthal, A. M.: The Safety of Structure. T. ASCE Vol. 112 (1947)
池田彰夫：構造物の安全率と破損の確率，土木学会誌，Vol. 40 No. 5 (1955)

** たとえば，米屋秀三：発電水力　コロナ社　P. 37

*** Prot, M.: Travaux. Avril 1953

**** Gumbel: Statistics of Extreme Value (1961)

このXをある期間（たとえば1年）の中での極値であるとして，たとえば100個のXの中で99個は下廻わるはずであるが，1/100以下の割合で，つまり高々100個のうち1個は上廻わるかも知れないような値をいわゆる100回確率量と称するものとすれば，いままでよく用いられて来たやり方では，このような100回のサイクル自身を無限回くり返したときの確率1/2の点つまり「この値を上廻わるものが得られる割合の最大値は0.01である」という予想が正しいものである確率が50%の点を推定していたことになる。

しかし，ある予想を立ててこれに基づいて次の行動を決定する以上，このような確率50%つまり当るも八卦当らぬも八卦というような予想では困まるわけで，やはりその予測が当らぬ確率は一般に用いられている5%程度のものにしなければ具合がわるい。もちろん前に述べたように今後非常に長い期間の平均的な経済効果といったようなものを問題にするときは確率50%でよい場合もあろうが，少なくとも越しては困まるような現象を議論しているときは，このような極値の問題に対する考慮が必要である。

(1.4)　一方だけの分布を考える場合

a.　非心 t 分布による解

母平均 m，分散 σ^2 の母集団から抽出したサイズ n の標本について

$$\chi^2 \equiv \sum^{n} (x_i-\bar{x})^2/\sigma^2 = S/\sigma^2$$

を作れば，これは自由度 $n-1$ の中心カイ二乗分布をする。この場合分散が等しく母平均の異なる正規母集団からの抽出を考えると，

$$\bar{\bar{m}} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i/k$$

とすれば

$$\chi'^2 \equiv \sum^{n} (x_i-\bar{\bar{m}})^2/\sigma^2$$

は自由度 $n-1$，離心率 $\varphi^2 = \sum^{n} (m_i-\bar{\bar{m}})^2\sigma^2$ の非心カイ二乗分布 $\chi'^2(n-1,\ \varphi^2)$ をする。

$$\chi_1'^2 \in \chi_1'^2\ (\phi_1,\ \varphi^2)$$

$$\chi_2^2 \in \chi_2^2\ (\phi_2)$$

とすれば

$$F' \equiv \frac{\chi_1'^2(\phi_1,\ \varphi^2)}{\chi_2^2\ (\phi_2)}$$

は自由度対 $(\phi_1,\ \phi_2)$，離心率 φ^2 の非心 F 分布をする。

分子の自由度1の F の値は同じ自由度の t の値の2乗に等しいから

$$t' \equiv \frac{(\bar{x}-m)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S/\phi_2\sigma^2}} = \frac{(\bar{x}-m)/\sqrt{1/n}}{\sqrt{\bar{V}}}$$

は自由度 ϕ_2，偏位 $s=m/(\sigma/\sqrt{n})$ の非心 t 分布をする。

第5章1節の平均の一様性に関する検定において，$p=2$，つまり二つの平均値の差を論ずる場合，判別情報量は

$$\partial^2\hat{D}\ [H_a,\ H_n] = R\ (\beta^n|\beta^a) = (\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 \Big/ \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

で母平均 μ との差を論ずる場合は

$$R\ (\beta^n|\beta^a) = (\bar{y}_1-\mu)^2/(1/n_1)$$

となるから

$$t = \sqrt{F} = \sqrt{\frac{R\ (\beta^n|\beta^a)}{S_E/(n-1)}} = \frac{(\bar{y}-\mu)/\sqrt{1/n}}{\sqrt{\bar{V}}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布をする。同様に μ と異なる m との差を論ずる場合は

$$t' = \frac{(\bar{y}-m)/\sqrt{1/n}}{\sqrt{\bar{V}}}$$

は自由度 $n-1$，偏位 $s=m/(\sigma/\sqrt{n})$ の非心 t 分布をする。

ところで，サンプルサイズ n のデータから $\bar{x}$ および $\sqrt{\bar{V}}$ を得たとき，指定された U に対し

$$\bar{x} + k\sqrt{\bar{V}} \leqq U$$

となるような k を危険率5%で定めることができれば，この k が今問題とする一方だけの分布を考える場合の限界係数である。

式を変形すれば

$$\frac{\sqrt{n}\ (U-\bar{x})}{\sqrt{\bar{V}}} \geqq \sqrt{n}\ k$$

$$\left\{\frac{\sqrt{n}\ (U-\mu)}{\sigma} - \frac{\sqrt{n}\ (\bar{x}-\mu)}{\sigma}\right\} \Big/ \frac{\sqrt{\bar{V}}}{\sigma} \geqq \sqrt{n}\ k$$

となる。

このとき左辺は自由度 $n-1$，偏位

$$s = \frac{\sqrt{n}\ (U-\mu)}{\sigma} = \sqrt{n}\ K_p$$

の非心 t 分布であるから，非心 t 分布表*によって

$$p_r\{t \geqq \sqrt{n}\ k\}$$

が0.05となるような k を定めればよい。

ただし，K_p は正規偏差で正規分布表より求める。

$$p_r\{t \geqq \sqrt{n}\ k\} = 1 - p_r\{t \leqq \sqrt{n}\ k\}$$

$$= 1 - p_r\left\{\frac{t}{\sqrt{n-1}} \leqq \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ k\right\}$$

$$= 1 - p_r\left\{n-1,\ \sqrt{n}\ K_p,\ \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ k\right\}$$

普通非心 t 分布表は各自由度ごとに K_p の p の値をインデックスにして

$$p_r\left\{n-1,\ \sqrt{n}\ K_p,\ \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ k\right\}$$

* Resnikoff & Lieberman: Tables of the Non-Central t-Distribution. Stanford University Press (1950)

表-3.1 非心 t 分布より求めた k

n	ϕ \ p	0.25	0.15	0.10	0.065	0.04	0.025	0.010	0.004	0.0025	0.001
3	2	3.83	5.18	5.86	7.12	7.71	8.90	10.57	11.97	12.64	13.86
4	3	2.62	3.52	4.17	4.78	5.39	6.02	7.04	7.97	8.41	9.21
5	4	2.15	2.89	3.41	3.92	4.43	4.91	5.74	6.48	6.84	7.50
6	5	1.90	2.55	3.00	3.46	3.87	4.33	5.07	5.72	6.03	6.61
7	6	1.73	2.33	2.76	3.17	3.59	3.97	4.64	5.25	5.54	6.07
8	7	1.66	2.19	2.58	2.96	3.37	3.72	4.35	4.92	5.19	5.68
9	8	1.54	2.07	2.45	2.83	3.21	3.55	4.14	4.69	4.94	5.41
10	9	1.46	1.94	2.35	2.71	3.07	3.41	3.99	4.50	4.75	5.21
11	10	1.41	1.93	2.27	2.62	2.98	3.29	3.85	4.31	4.59	5.03
12	11	1.37	1.86	2.21	2.55	2.89	3.22	3.76	4.24	4.47	4.90
13	12	1.33	1.81	2.15	2.49	2.83	3.12	3.66	4.19	4.36	4.79
14	13	1.29	1.77	2.11	2.43	2.77	3.06	3.59	4.06	4.28	4.69
15	14	1.27	1.74	2.07	2.39	2.71	3.00	3.52	3.98	4.20	4.61
16	15	1.24	1.71	2.03	2.34	2.67	2.95	3.47	3.92	4.13	4.53
17	16	1.22	1.68	2.00	2.31	2.63	2.92	3.41	3.86	4.07	4.47
18	17	1.21	1.65	1.97	2.28	2.60	2.88	3.37	3.82	4.02	4.41
19	18	1.19	1.63	1.95	2.26	2.56	2.84	3.33	3.77	3.98	4.36
20	19	1.17	1.62	1.93	2.22	2.53	2.81	3.29	3.73	3.93	4.31
21	20	1.15	1.60	1.90	2.20	2.51	2.78	3.26	3.69	3.90	4.27
22	21	1.14	1.58	1.89	2.18	2.48	2.76	3.23	3.66	3.87	4.24
23	22	1.13	1.56	1.87	2.16	2.46	2.73	3.21	3.63	3.83	4.21
24	23	1.12	1.55	1.85	2.14	2.45	2.71	3.18	3.60	3.81	4.17
25	24	1.11	1.54	1.84	2.13	2.43	2.69	3.17	3.58	3.77	4.15
30	29	1.06	1.51	1.77	2.06	2.35	2.60	3.07	3.47	3.67	4.02
35	34	1.03	1.45	1.74	2.01	2.30	2.55	3.00	3.39	3.59	3.93
40	39	1.00	1.41	1.70	1.98	2.25	2.50	2.94	3.34	3.53	3.87
45	44	0.98	1.38	1.67	1.94	2.22	2.47	2.90	3.28	3.48	3.81
50	49	0.91	1.37	1.64	1.91	2.19	2.44	2.85	3.25	3.44	3.76

が与えられているから $p=0.25$, 0.10等に対して表の値が0.95となるところをさがすと，これが $\sqrt{n/(n-1)}\,k$ を与える。

したがって，これによって各対応する ϕ に対して k を求め

$$\bar{x}+k\sqrt{V}$$

を求めればよい。

非心 t 分布表より各 $\sqrt{n}$，自由度および p に対し5%点を求め表示すれば表-3.1のとおりである。

b. 許容限界より求めた場合

前述のとおり

$$\frac{\sigma^2\chi^2}{\phi}=\frac{S}{\phi}=V$$

$$\sqrt{V}=\sigma\chi/\sqrt{\phi}$$

$$E[\chi^2]=\phi$$

そこで $\sqrt{V}$ の期待値および分散は

$$E[\sqrt{V}]=\frac{\sigma}{\sqrt{\phi}}E[\chi]$$

$$V[\sqrt{V}]=\frac{\sigma^2}{\phi}V[\chi]$$

$$\frac{E[\chi]}{\sqrt{\phi}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\left\{\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}$$

$$\fallingdotseq\sqrt{\frac{\phi+1}{\phi}}\left(1-\frac{3}{4(\phi+1)}+\cdots\right)$$

$$\fallingdotseq\sqrt{1-\frac{1}{2\phi}}\fallingdotseq 1$$

$$\frac{V[\chi]}{\phi}=\frac{1}{\phi}[E[\chi^2]-\{E[\chi]\}^2]$$

$$=\frac{E[\chi^2]}{\phi}-\left\{\frac{E[\chi]}{\sqrt{\phi}}\right\}^2$$

$$\fallingdotseq 1-1+\frac{1}{2\phi}\fallingdotseq 1/2\phi$$

$$\therefore E[\sqrt{V}]\fallingdotseq\sigma$$

$$V[\sqrt{V}]\fallingdotseq\sigma^2/2\phi$$

$n>5$ 程度では $\sqrt{V}$ の分布は近似的に母平均 σ，分散 $\sigma^2/2\phi$ の正規分布をすると考えられるから，いまサンプルサイズ n の標本より $\bar{x}$ および $\sqrt{V}$ を計算し $\bar{x}+h\sqrt{V}$ という線型結合を作ったとき，この $\bar{x}+h\sqrt{V}$ の分布を考えてみる。X の母平均を μ，分散を σ^2 とすれば

$$E[\bar{x}+h\sqrt{V}]=E[\bar{x}]+hE[\sqrt{V}]$$

$$=\mu+h\sigma$$

$$D[\bar{x}+h\sqrt{V}]=\sqrt{V[\bar{x}]+h^2V[\sqrt{V}]}$$

$$=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{h^2\sigma^2}{2(n-1)}}$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{h^2}{2(n-1)}}$$

そこで $\bar{x}+h\sqrt{V}$ という点をこえるものの割合が全体の p 以下であるという予測を立て，この予測の危険率を5

表-3.2 許容限界係数 k の表

ϕ	n \ p	1/4	1/5	1/10	1/20	1/40	1/50	1/100	1/200	1/400	1/500	1/1000	1/2000	1/4000	1/5000	1/10000	$1/2\times10^4$	$1/4\times10^4$	$1/5\times10^4$	$1/10^5$	$1/2\times10^5$
2	3	4.42	5.25	7.53	9.46	11.16	11.67	13.16	14.52	15.81	16.19	17.35	18.45	19.52	19.85	20.83	21.77	22.70	22.97	23.85	24.69
3	4	2.00	3.03	4.23	5.26	6.18	6.45	7.25	7.98	8.68	8.89	9.51	10.11	10.69	10.87	11.40	11.91	12.41	12.56	13.03	13.49
4	5	2.00	2.43	3.37	4.17	4.89	5.10	5.73	6.30	6.85	7.01	7.50	7.97	8.42	8.56	8.98	9.38	9.78	9.89	10.27	10.62
5	6	1.84	2.14	2.95	3.66	4.28	4.46	5.01	5.51	5.99	6.13	6.56	6.96	7.36	7.48	7.85	8.19	8.54	8.64	8.97	9.28
6	7	1.68	1.96	2.70	3.35	3.91	4.09	4.58	5.04	5.48	5.61	6.00	6.37	6.73	6.84	7.18	7.49	7.81	7.90	8.20	8.48
7	8	1.58	1.83	2.54	3.14	3.67	3.83	4.30	4.73	5.13	5.26	5.62	5.97	6.31	6.42	6.73	7.03	7.32	7.41	7.69	7.95
8	9	1.50	1.74	2.41	2.99	3.49	3.65	4.09	4.50	4.89	5.00	5.35	5.68	6.01	6.11	6.40	6.69	6.97	7.05	7.32	7.57
9	10	1.43	1.67	2.32	2.87	3.36	3.50	3.93	4.33	4.70	4.81	5.15	5.47	5.78	5.87	6.16	6.43	6.70	6.78	7.04	7.28
10	11	1.38	1.61	2.24	2.78	3.25	3.39	3.81	4.19	4.55	4.66	4.98	5.29	5.59	5.69	5.96	6.23	6.49	6.57	6.82	7.05
11	12	1.34	1.57	2.18	2.70	3.16	3.30	3.71	4.08	4.43	4.53	4.85	5.15	5.45	5.54	5.81	6.06	6.32	6.39	6.64	6.87
12	13	1.30	1.53	2.13	2.64	3.09	3.23	3.62	3.98	4.33	4.43	4.74	5.04	5.32	5.41	5.68	5.93	6.18	6.25	6.49	6.71
13	14	1.27	1.49	2.08	2.58	3.03	3.16	3.55	3.91	4.24	4.34	4.65	4.94	5.22	5.31	5.56	5.81	6.06	6.13	6.36	6.58
14	15	1.25	1.46	2.04	2.54	2.97	3.11	3.49	3.84	4.17	4.27	4.57	4.85	5.13	5.21	5.47	5.71	5.95	6.02	6.25	6.47
15	16	1.22	1.44	2.01	2.50	2.93	3.06	3.43	3.78	4.11	4.20	4.50	4.78	5.05	5.14	5.39	5.63	5.86	5.93	6.16	6.37
16	17	1.20	1.41	1.98	2.46	2.89	3.01	3.39	3.73	4.05	4.15	4.44	4.71	4.98	5.07	5.31	5.55	5.78	5.85	6.07	6.29
17	18	1.18	1.39	1.95	2.43	2.85	2.98	3.34	3.68	4.00	4.09	4.38	4.66	4.92	5.00	5.25	5.48	5.71	5.78	6.00	6.21
18	19	1.17	1.37	1.93	2.40	2.82	2.94	3.31	3.64	3.95	4.05	4.33	4.60	4.87	4.95	5.19	5.42	5.65	5.72	5.93	6.14
19	20	1.15	1.36	1.91	2.38	2.79	2.91	3.27	3.60	3.91	4.01	4.29	4.56	4.82	4.90	5.14	5.37	5.59	5.66	5.87	6.08
20	21	1.14	1.34	1.89	2.35	2.76	2.88	3.24	3.57	3.88	3.97	4.25	4.51	4.77	4.85	5.09	5.32	5.54	5.61	5.82	6.02
21	22	1.12	1.33	1.87	2.33	2.74	2.86	3.21	3.54	3.84	3.94	4.21	4.48	4.73	4.81	5.05	5.27	5.49	5.56	5.77	5.97
22	23	1.11	1.31	1.85	2.31	2.71	2.83	3.19	3.51	3.81	3.90	4.18	4.44	4.69	4.77	5.01	5.23	5.45	5.51	5.72	5.92
23	24	1.10	1.30	1.84	2.29	2.69	2.81	3.16	3.48	3.78	3.88	4.15	4.41	4.66	4.74	4.97	5.19	5.41	5.47	5.68	5.88
24	25	1.09	1.29	1.82	2.28	2.67	2.79	3.14	3.46	3.76	3.85	4.12	4.38	4.63	4.71	4.94	5.16	5.38	5.44	5.64	5.84
25	26	1.08	1.28	1.81	2.26	2.65	2.77	3.12	3.43	3.73	2.82	4.09	4.35	4.60	4.68	4.90	5.12	5.34	5.40	5.61	5.80
26	27	1.07	1.27	1.80	2.25	2.64	2.76	3.10	3.41	3.71	3.80	4.07	4.32	4.57	4.65	4.87	5.09	5.31	5.37	5.57	5.77
27	28	1.06	1.26	1.79	2.23	2.62	2.74	3.08	3.39	3.69	3.78	4.04	4.30	4.54	4.62	4.85	5.06	5.28	5.34	5.54	5.74
28	29	1.06	1.25	1.78	2.22	2.61	2.72	3.06	3.37	3.67	3.76	4.02	4.28	4.52	4.60	4.82	5.04	5.25	5.31	5.51	5.71
29	30	1.05	1.24	1.77	2.21	2.59	2.71	3.05	3.36	3.65	3.74	4.00	4.25	4.50	4.57	4.80	5.01	5.23	5.29	5.49	5.68
39	40	0.99	1.18	1.69	2.12	2.49	2.60	2.93	3.23	3.51	3.60	3.85	4.09	4.33	4.40	4.62	4.82	5.03	5.09	5.28	5.47
49	50	0.95	1.14	1.64	2.06	2.42	2.53	2.85	3.15	3.42	3.51	3.75	3.99	4.22	4.29	4.50	4.71	4.91	4.96	5.15	5.33
59	60	0.93	1.11	1.60	2.02	2.38	2.48	2.80	3.09	3.36	3.44	3.69	3.92	4.14	4.21	4.42	4.62	4.32	4.87	5.06	5.24
119	120	0.85	1.03	1.50	1.90	2.24	2.34	2.65	2.92	3.16	3.26	3.49	3.71	3.93	3.99	4.19	4.38	4.57	4.62	4.80	4.97
∞	∞	0.67	0.84	1.28	1.64	1.96	2.05	2.33	2.58	2.81	2.88	3.09	3.29	3.48	3.54	3.72	3.92	4.06	4.11	4.27	4.42

表-3.2 つづき

ϕ	n \ p	1/4×10^5	1/5×10^5	1/10^6	1/2×10^6	1/4×10^6	1/5×10^6	1/10^7	1/2×10^7	1/4×10^7	1/5×10^7	1/10^8	1/2×10^8	1/4×10^8	1/5×10^8	1/10^9	1/2×10^9	1/4×10^9	1/5×10^9	1/10^{10}
2	3	25.52	25.75	26.55	27.30	28.03	28.30	28.97	29.74	30.53	30.63	31.31	31.98	32.63	32.81	33.35	34.06	34.68	34.88	35.49
3	4	13.94	14.07	14.50	14.91	15.31	15.45	15.82	16.23	16.66	16.72	17.09	17.45	17.80	17.90	18.20	18.58	18.92	19.03	19.36
4	5	10.98	11.08	11.42	11.74	12.05	12.17	12.45	12.78	13.12	13.16	13.45	13.74	14.01	14.09	14.32	14.62	14.39	14.98	15.23
5	6	9.59	9.68	9.97	10.25	10.52	10.62	10.87	11.16	11.45	11.49	11.75	11.99	12.23	12.31	12.51	12.77	13.00	13.08	13.30
6	7	8.77	8.85	9.12	9.37	9.62	9.71	9.94	10.20	10.47	10.51	10.74	10.97	11.19	11.25	11.43	11.67	11.89	11.96	12.16
7	8	8.22	8.29	8.55	8.79	9.02	9.11	9.32	9.57	9.82	9.85	10.07	10.28	10.49	10.55	10.72	10.94	11.14	11.21	11.40
8	9	7.82	7.90	8.14	8.37	8.59	8.67	8.87	9.11	9.35	9.38	9.58	9.79	9.98	10.04	10.20	10.42	10.61	10.67	10.85
9	10	7.52	7.59	7.83	8.05	8.26	8.34	8.53	8.76	8.99	9.02	9.22	9.41	9.60	9.66	9.81	10.02	10.20	10.26	10.44
10	11	7.29	7.36	7.58	7.79	8.00	8.08	8.27	8.48	8.71	8.74	8.93	9.12	9.30	9.35	9.51	9.71	9.88	9.94	10.11
11	12	7.10	7.16	7.38	7.59	7.79	7.86	8.05	8.26	8.48	8.51	8.69	8.88	9.06	9.11	9.26	9.45	9.62	9.68	9.84
12	13	6.94	7.00	7.21	7.42	7.61	7.69	7.87	8.07	8.29	8.31	8.50	8.68	8.85	8.90	9.05	9.24	9.41	9.46	9.62
13	14	6.80	6.86	7.07	7.27	7.47	7.54	7.71	7.92	8.13	8.15	8.33	8.51	8.68	8.73	8.87	9.06	9.22	9.28	9.44
14	15	6.68	6.75	6.95	7.15	7.34	7.41	7.58	7.78	7.99	8.01	8.19	8.36	8.53	8.58	8.72	8.90	9.07	9.12	9.28
15	16	6.58	6.64	6.85	7.04	7.23	7.30	7.47	7.66	7.87	7.89	8.07	8.24	8.40	8.45	8.59	8.77	8.93	8.98	9.14
16	17	6.49	6.55	6.76	6.95	7.13	7.20	7.37	7.56	7.76	7.79	7.96	8.13	8.29	8.34	8.47	8.65	8.81	8.86	9.01
17	18	6.42	6.47	6.67	6.86	7.04	7.11	7.28	7.47	7.67	7.69	7.86	8.03	8.19	8.24	8.37	8.55	8.70	8.75	8.90
18	19	6.34	6.40	6.60	6.79	6.97	7.03	7.20	7.39	7.58	7.61	7.78	7.94	8.10	8.15	8.28	8.45	8.61	8.66	8.81
19	20	6.28	6.34	6.53	6.72	6.90	6.96	7.12	7.31	7.51	7.53	7.70	7.86	8.02	8.06	8.20	8.37	8.52	8.57	8.72
20	21	6.22	6.28	6.47	6.66	6.83	6.90	7.06	7.25	7.44	7.46	7.63	7.79	7.95	7.99	8.12	8.29	8.44	8.49	8.64
21	22	6.17	6.23	6.42	6.60	6.77	6.84	7.00	7.18	7.37	7.40	7.56	7.72	7.88	7.92	8.05	8.22	8.37	8.42	8.57
22	23	6.12	6.18	6.37	6.55	6.72	6.79	6.94	7.13	7.32	7.34	7.50	7.66	7.82	7.86	7.99	8.16	8.31	8.35	8.50
23	24	6.08	6.13	6.32	6.50	6.67	6.74	6.89	7.08	7.26	7.29	7.45	7.61	7.76	7.80	7.93	8.10	8.25	8.29	8.44
24	25	6.04	6.09	6.28	6.46	6.63	6.69	6.85	7.03	7.22	7.24	7.40	7.56	7.71	7.75	7.88	8.04	8.19	8.24	8.38
25	26	6.00	6.05	6.24	6.42	6.59	6.65	6.80	6.98	7.17	7.19	7.35	7.51	7.66	7.70	7.83	7.99	8.14	8.19	8.33
26	27	5.96	6.02	6.20	6.38	6.55	6.61	6.76	6.94	7.13	7.15	7.31	7.46	7.61	7.66	7.78	7.95	8.09	8.14	8.28
27	28	5.93	5.98	6.17	6.34	6.51	6.57	6.73	6.91	7.09	7.11	7.27	7.42	7.57	7.62	7.74	7.90	8.05	8.09	8.23
28	29	5.90	5.95	6.14	6.31	6.48	6.54	6.69	6.87	7.05	7.07	7.23	7.38	7.53	7.58	7.70	7.86	8.00	8.05	8.19
29	30	5.87	5.92	6.11	6.28	6.44	6.51	6.66	6.84	7.02	7.04	7.20	7.35	7.50	7.54	7.66	7.82	7.97	8.01	8.15
39	40	5.65	5.70	5.88	6.05	6.21	6.27	6.41	6.58	6.76	6.78	6.93	7.08	7.22	7.26	7.38	7.54	7.67	7.72	7.85
49	50	5.51	5.56	5.74	5.90	6.05	6.11	6.26	6.42	6.59	6.61	6.76	6.90	7.04	7.08	7.20	7.35	7.49	7.53	7.66
59	60	5.41	5.46	5.63	5.79	5.95	6.00	6.15	6.31	6.48	6.50	6.64	6.78	6.92	6.96	7.07	7.22	7.35	7.40	7.53
119	120	5.14	5.18	5.34	5.50	5.64	5.70	5.83	5.99	6.15	6.17	6.30	6.44	6.57	6.61	6.71	6.86	6.98	7.02	7.14
∞	∞	4.57	4.61	4.76	4.89	5.03	5.07	5.19	5.33	5.48	5.49	5.62	5.74	5.85	5.95	5.99	6.11	6.22	6.26	6.37

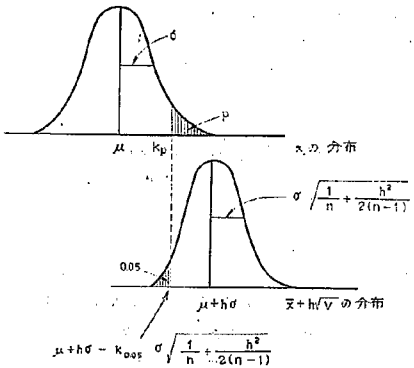


図-3.1

%以下にするためには図-3.1の x の分布で $\mu + K_p$ という点と $\bar{x} + h\sqrt{V}$ の分布で

$$E[\bar{x} + h\sqrt{V}] - K_{0.05} D[\bar{x} + h\sqrt{V}]$$

という点を等置して h を求めればよい。

そこで

$$E[\bar{x} + h\sqrt{V}] - K_{0.05} D[\bar{x} + h\sqrt{V}] = \mu + K_p\sigma$$

$$\mu + h\sigma - K_{0.05}\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{h^2}{2(n-1)}} = \mu + K_p\sigma$$

$$h = K_p + K_{0.05}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{h^2}{2(n-1)}}$$

$$h = \frac{K_p + \sqrt{K_p^2 - \left(1 - \frac{K_{0.05}^2}{2(n-1)}\right)\left(K_p^2 - \frac{K_{0.05}^2}{n}\right)}}{1 - K_{0.05}^2/2(n-1)}$$

この h を n および p について電子計算させた結果は表-3.2のとおりである。

(1.5)　一方だけの分布を考える場合の実例

2. 〔6〕(6.8) において古座川ダムの計画に用いた七川村の年最大日雨量の連続34年分の記録について周期分析を行なったところ，時間に関する1次傾向も，周期成分も認められないことがわかった。そこでこのデータに大正6年および大正7年のデータを加え，全部で36個のデータより，次の 4，10，40，100，400，1,000 個の中で最大値以外にこの限界を越えるものがないという予測をしたとき，その予測が誤りである確率が5%以下となるような限界を求めてみる。

いままでの議論は正規母集団よりの抽出を考えているのでデータのヒストグラムを作って検討した結果，いわゆる非心対数正規分布をするものと考え，log $(x - a)$ の偏位 a を定差図によって求めれば $a = -170$ となる。

この結果 log $(x + 170)$ について平均値および不偏分散を求めれば

$$\bar{X} = 2.565$$

$$\sqrt{V_x} = 0.0796$$

非心 t 分布表より

$$\phi = 36 - 1 = 35$$

$p = 0.25$　0.10　0.025　0.010　0.0025　0.001

に対して k を求め次のように計算する。

p	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}k$	k	$d = \bar{x} + k\sqrt{V_x}$
0.25	1.03	1.01	2.645
0.10	1.76	1.73	2.703
0.025	2.59	2.54	2.767
0.010	3.04	2.98	2.802
0.0025	3.64	3.56	2.849
0.0010	3.99	3.91	2.876

$\log^{-1} d$	$x = \log^{-1} d - 170$
441	271
505	335
584	414
633	463
705	535
750	580

これに対して許容限界より求めた結果は

p	h	$c = \bar{X} + h\sqrt{V_x}$	$\log^{-1} c$	$x = \log^{-1} c - 170$
0.25	1.02	2.646	442	272
0.10	1.73	2.703	504	334
0.025	2.54	2.767	584	414
0.010	2.99	2.803	635	465
0.0025	3.58	2.850	707	537
0.0010	3.92	2.877	752	582

この二つの結果を比較すると三ケタ目で1～2程度の違いできわめてよく一致している。

これを従来行なわれていた $\bar{x} + K_p\sqrt{V}$ といったやり方で計算すると次のようになり，いま非心 t 分布や許容限界から計算したものより予想どおり大分小さなものになってしまう。

p	K_p	$e = \bar{X} + K_p\sqrt{V_x}$	$\log^{-1} e$	$x = \log^{-1} e - 170$
0.25	0.67	2.618	414	244
0.10	1.28	2.667	464	294
0.025	1.96	2.721	525	355
0.010	2.33	2.750	561	391
0.0025	2.81	2.789	614	444
0.0010	3.08	2.810	645	475

この結果について 1/36 のものを考えてみると，$p = 1/36 = 0.0278$ に対して非心 t 分布または許容限界法で 400 となるのに対して，従来のやり方では 350 程度となる。実際の 36 個のデータについてみると非心 t 分布または許容限界法によって求めた 400 を超すものの割合が 1/36 以下という予想とぴったり合っている。(危険率 5%) これに対し従来のやり方では 350 を超えるものが3個あり，このようなやり方で予想すると 36 個の中で 350 を超すものが全体の 1/36 以下という予想は外れており，350 という限界は危険すぎることになる。(危険率 50%)

(1.6)　双方の分布を考えた場合

x が母平均 μ_x，分散 σ_x^2 の正規分布から無作為抽出され，y が母平均 μ_y，分散 σ_y^2 の正規分布から x と独立に無作為抽出されたとき

$$t \equiv \frac{x-y-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{V_x+V_y}}$$

は $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ が成立するとき自由度 $\phi_x+\phi_y$ の中心 t 分布をし，帰無仮説 $\mu_x=\mu_y$ に対し

$$t=\frac{x-y}{\sqrt{V_x+V_y}}$$

は自由度 $\phi_x+\phi_y$ の t 分布をする。

$\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$ の場合は Welch の近似法* により

$$\phi=\frac{\phi_x\phi_y}{c^2\phi_y+(1-c)^2\phi_x}$$

$$c=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

として求めた相当自由度 ϕ を用いて近似的に t 検定することができる。そこで $\mu_x\neq\mu_y$ の場合にはさらに非心 t 分布を用いて解くことができる。

すなわち

$$t'=\frac{x-y-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{V_x+V_y}}$$

は

自由度　$\phi=\dfrac{\phi_x\phi_y}{c^2\phi_y+(1-c)^2\phi_x}$

偏　位　$\varphi=(\mu_x-\mu_y)/\sigma$

の非心 t 分布をするので，非心 t 分布表を用いて計算すればよい。

(1.7)　双方の分布を考えた場合の例題

$n_a=10$　のサンプルにより　$\bar{x}_a=300$　$\sqrt{V_a}=30$

$n_b=15$　のサンプルにより　$\bar{x}_b=180$　$\sqrt{V_b}=15$

が得られているとき，任意に各母集団から x_a および x_b をサンプリングし，x_a-x_b が何回に1回以上の割合で負になることはないという予想を危険率5%以下で下だし得るかを求めてみる。

分散比が $30^2/15^2=4.00>F(9,14;0.025)=3.21$ で分散の間には差があると考えられるので，Welchの近似法を用い，

$$c=\frac{V_1/n_1}{V_1/n_1+V_2/n_2}$$

ただし，$\bar{x}_a-\bar{x}_b$ でなくて x_a-x_b の分布を論じているので $n_1=n_2=1$ とおけば

$$c=\frac{30^2}{30^2+15^2}=0.800$$

$$c^2=0.64\quad 1-c=0.2\quad (1-c)^2=0.04$$

$$\therefore\quad \phi=\frac{(10-1)(15-1)}{(10-1)(0.64)+(15-1)(0.04)}=11.9$$

$$\delta=\frac{300-180}{\sqrt{30^2+15^2}}=3.56$$

非心 t 分布表より　$\delta=3.56$ に対し

$p=0.025$　のとき　　0.9740

$p=0.010$　のとき　　0.9181

したがって $p=0.018$ に対し95%（危険率5%）となる。すなわち56回に1回以下の割合で負になることが期待される。

これを $\bar{x}_a/\bar{x}_b$ といったいわゆる安全率として評価すれば $300/180=1.67$ というどの程度の危険度があるのかよくわからない表示になり，また x_a の項（普通の場合材料のバラツキに関する項）のみに着目し

$$\frac{300-180}{\sqrt{V_a}}=4.00$$

をもし正規偏差 K_p などと考えようものなら，この程度のバラツキで x_a-180 が負になることは1/30,000程度のきわめて稀れな現象として評価されてしまうし，正規偏差でなくて t 分布としてとり扱っても自由度15−1に対しては x_a-180 が負になることは1/1,000程度と評価される。

双方の分布に着目したときでも $\sqrt{V_a+V_b}=33.6$ を用いて

$$\frac{300-180}{33.6}=3.67$$

を正規偏差 K_p と考えたのでは x_a-x_b が負となる割合は1/7,000程度となり，いずれも非常に稀れな現象であるかのように評価されてしまうことになる。

〔2〕　最大洪水量に対する危険度の評価の応用

(2.1)　井川ダムにおける実例

井川ダムの計画に関連して向測水所（流域面積 533.0 km²）の記録より，井川ダム地点（流域面積459.3 km²）に換算した昭和5年より昭和37年に至る33年分の年最大洪水量は表-3.3のとおりである**。

表-3.3

年　度	Q(m³/s)	年　度	Q(m³/s)
昭和 5	619	昭和 22	464
6	285	23	871
7	567	24	1335
8	433	25	551
9	1312	26	689
10	2787	27	568
11	662	28	1576
12	519	29	1416
13	760	30	681
14	286	31	677
15	310	32	462
16	909	33	1314
17	1184	34	2355
18	443	35	855
19	833	36	1331
20	1434	37	561
21	538		

このデータを用いて周期成分の検出を行なった結果は次表のとおりである。

すなわち6年の波が有意で，電子計算の結果による振幅，波長，位相角を入れた $\hat{Q}$ は

* Welch, B.L.; "The Generalization of Student's Problem when several Different Population Variances are Involved" Biometrika 34 (1947) p.28

** 中部電力建設部：井川発電所工事誌14頁の表に中部電力を通じて得た昭和27年以後の値を追加したもの

$$\hat{Q}=907.457+359.088\sin\left(\frac{2\pi}{6}t_j+1.57\right)$$

$$=907.457+359.088\cos\left(\frac{2\pi}{6}t_j\right)$$

で，これに対し $\sqrt{V_E}$ は 517.765 となる。 $\phi_E=31$ に対し許容限界係数 h を用い

p	h	$h\sqrt{V_E}$
0.25	1.03	532
0.10	1.75	905
0.025	2.57	1329
0.010	3.03	1566
0.0025	3.63	1880
0.0010	3.98	2060

を $\hat{Q}$ に加えればよい。今後4年，10年，40年，100年，400年1000年間の $\hat{Q}$ の最大値に $h\sqrt{V_E}$ を加えれば求めるものが得られる。

p	年	$\hat{Q}_{\max}+h\sqrt{V_E}$
0.25	4	1838
0.10	10	2171
0.025	40	2591
0.010	100	2832
0.0025	400	3196
0.0010	1000	3326

これらは，いずれも昭和38年以降の n 年間にこれを越すものが $1/n$ 以下であると述べたときこの設言が誤りである確率は5％以下であるような値を示している。

したがって井川ダム計画において中部電力の採用した $Q_{\max}=2400\,m^3/s$ という値*は $p=0.05$（20年に対しては 1266+1132=2398 m^3/s となる）に近いものでほぼ20年程度のものと考えられる。

もっとも井川ダム計画当時は昭和5年より昭和28年までの24年間のデータであった他に昭和10年の2787m^3/s という値を異常なものとして棄却し，昭和11年より昭和28年に至る18個の値しか用いなかったという事情もあるが，その後昭和27年より37年に至る11年間のデータを追加して考えてみると，昭和10年の2787m^3/sは決して当時考えられたほど珍らしいものでなく，現に昭和34年には 2355 m^3/s という値も得られており，スチューデント化絶対残差

$$d=\max\frac{|x_i-\bar{x}|}{\sqrt{V}}$$

によって検定を行なってみても

$x_i=2787$

$\bar{x}=897$

$\sqrt{V}=571$

に対して

$$d=\frac{2787-897}{571}=3.31$$

で自由度30，サンプルサイズ30に対し表**より3.95となり，いずれにせよ 2787 m^3/s という値は現在の値の出方に照してみて棄却することはできない。

4. 最適条件決定と情報量解析

いろいろな因子が複雑な形で影響している現象について，その極大または極小を与える組み合せ（最適条件）とその値を求めたという問題は非常に多い。たとえばダムアバットの安定について調べたい場合，アバットに断層その他きわ立った欠陥がなく，岩盤全体としてほぼ一様と考えていい場合，円弧すべり面を考えた危険度の検討が必要となる場合がある。この場合二次元的に考えてもこの危険度は円弧すべり面の中心点の座標 x_1x_2 と半径 r との関数になり，その関数形は解析的に求めることはできるが，その最小値を求めることは容易でない，また x_1x_2r と危険度 y による4次元空間について x_1x_2r のつくる応答曲面を計算によって推測し，その極値を求めることもきわめて困難である。

一般にはこのような関数形の求められている現象は稀れで，ある条件を考えてその応答を実験によって得る他ない場合が大部分である。

このような場合任意の条件から出発して周囲一定の距離の点の応答を求め，この近傍では曲面の代りに平面を当てはめてもよいことを確めた後，この近似平面の最急こう配の方向に前進し，その直線上の極値を示す点を中心として，また周囲一定の距離の点の応答を求め平面の当てはめが可能ならばまたまた最急こう配の方向に進み，何回かくり返した後最早平面の当てはめが不可能となったならば，その点の近傍でさらに点を追加して二次曲面の当てはめを行ない，その二次曲面の最値を示す点を求めれば，これが求める最適条件の点となることを Box-Wilson が示した。

しかし，一次平面の当てはめが不可能であるかどうかの判定がただ係数の大小関係を論ずるのではっきりした根拠が得られないこと，関数形が与えられているときは全自動計算に持ち込むことが最も有利であるが，この場合の計画行列，F 検定などの手続きが記憶容量の関係で普通のやり方では多くの因子を考えなければならぬ一般の場合にまで拡張することが不可能であることなどの点について改良を施すことができたので，以下この方法についてのべる。

〔1〕 1次平面の当てはめ

応答関数を $y=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p)$ としその i 点における応答を $y_i=f(x_1^i, x_2^i, \cdots\cdots, x_p^i)$ と書く。出発点を $O(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_p^0)$ とし，ここを原点として距離 r 離れた点のうち応答が最大を示す点 Q $(x_1^q, x_2^q$

* 中部電力建設部：井川発電所工事誌 (1961) p. 15

** Halperin, M., Greenhouse, W., Cornfield, J. and Zalokar, J.: "Tables of Percentage Points for the Studentized Maximum Absolute Deviate in Normal Samples." Jour. of Am. Stat. Assoc. March 1955 p. 188

……, $x_p{}^q$) を求めるには $f(Q)-f(O)$ を

$\sum_{i=1}^{p}(x_i{}^q)^2=r^2$ の条件のもとに最大にするよう Q を定めればよい。

Lagrange の未定乗数を λ とすれば

$$\phi=f(Q)-f(O)-\frac{1}{2}\lambda\sum_{i=1}^{p}(x_i{}^q)^2 \quad \cdots\cdots(4.1)$$

を最大にするよう Q を定める。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\frac{\partial f(Q)}{\partial x_i}-\lambda x_i{}^q=0$$

これら p 個の方程式と条件式より $x_i{}^q$ を定めればよいが，いま考えている領域では応答関数の導関数は連続であるとすれば ϕ は原点 O の周りに Taylor 展開できる。

$$f(Q)=\sum_{t=0}^{q-1}\left\{\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^t\Big/t!\right\}f(O) \quad \cdots(4.2)$$

2次以上の項が無視できるものとすれば

$$f(Q)=f(O)+\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)f(O) \quad \cdots\cdots(4.3)$$

また

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(Q)=\frac{\partial}{\partial x_i}f(O)+\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}f(O)+\cdots\cdots$$

2次以上の項が無視できるとすれば，つまり1次平面を当てはめてもその違いが無視できるくらい小さければ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(Q)=\frac{\partial}{\partial x_i}f(O)$$

$$\therefore\ \lambda x_i{}^q=\frac{\partial}{\partial x_i}f(O)$$

$$\therefore\ x_i{}^q=\frac{\dfrac{\partial}{\partial x_i}f(O)}{\dfrac{\partial}{\partial x_1}f(O)}x_1$$

すなわち O での1次導関数に比例して因子を変化させる方向が応答に関し最急こう配の方向となる。

一方応答関数は

$$y=\beta_0+\sum_{u=1}^{p}\beta_u x_u+\sum_{u,v=1}^{p}\beta_{uv}x_u x_v+\cdots \quad \cdots(4.4)$$

によって必要な近似度で表現できる。

2次以上の項が無視できるものとすれば

$$y=\beta_0+\sum_{u=1}^{p}\beta_u x_u \quad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.3) と (4.5) を比較すれば

$$\beta_i=\frac{\partial}{\partial x_i}f(O)$$

そこで O の近傍で実験を行なって β_i を推定し

$$x_i=\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_1}x_1$$

となるように因子を変化させれば最急こう配を上昇することになる。実測値は

$$y_r=\beta_0x_{0r}+\beta_1x_{1r}+\cdots\cdots+\beta_px_{pr}+e_r \quad \cdots(4.6)$$

マトリクス表示により $(r=1, 2, \cdots\cdots n,)$

$$y=X\beta+e \quad \cdots\cdots(4.7)$$

と書くことができる。X は計画行列で直交計画の場合は

$$X'X=D$$

と対角行列になる。

e について

$$E[e]=0$$

$$C[e]=\sigma^2I$$

の仮定をおけば Gauss-Markoff の定理により β の最良線型不偏推定量 $\hat{\beta}$ は

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \quad \cdots\cdots(4.8)$$

2^p 計画を用いたときは $X=(x_{ij})$ の構成要素が0か1で，しかも X は直交行列であるから

$$(X'X)^{-1}=D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\cdots\cdots0\\ 0 & \frac{1}{n}\cdots0\\ \vdots & \ddots\ \vdots\\ 0 & \cdots\cdots\frac{1}{n}\end{pmatrix} \quad \cdots(4.9)$$

$$X'y=\left[\sum_r^n x_{ir}\ y_r\right] \quad \therefore\ \hat{\beta}_i=\frac{1}{n}\sum_r^n x_{ir}\ y_r$$

$$V[\hat{\beta}]=D^{-1}\sigma^2$$

$$V[\hat{\beta}_i]=\frac{1}{n}\sigma^2$$

となる。そこでこの $\hat{\beta}_i$ を用いて最急こう配の方向に進み y を求め，その頂点で次の方向を求める。ただし，この1次平面の当てはめは2次以上の項を省略しているので2次以上の項が無視できない場合に1次近似を行なったことによる β_i の推定値の偏りの程度を調べる必要がある。

式(4.7)

$$y=X\beta+e$$

において2次以上に関係する項を X_2, β_2 とすれば

$$y=(X_1X_2)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}+e=X_1\beta_1+X_2\beta_2+e$$

ところが

$$\hat{\beta}_1=(X_1'X_1)^{-1}X_1'y$$

としたのであるから

$$\hat{\beta}_1=(X_1'X_1)^{-1}X_1'y=(X_1'X_1)^{-1}X_1'(X_1\beta_1+X_2\beta_2+e)$$

$$E[\hat{\beta}_1]=(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_1\beta_1+(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\beta_2=\beta_1+(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\beta_2$$

X は直交計画であるから (4.9) を用い

表-4.1　AOV表

SV	SS	DF	MS	F_0
H_n	$R(\beta^n)=\hat{\beta}_1{}^{n\prime}S_{11}\hat{\beta}_1{}^n$	r	$V_{\beta^n}=\dfrac{R(\beta^n)}{r}$	
$H_a\|H_n$	$R(\beta^n\|\beta^a)=R(\beta)-R(\beta^n)$	$p-r$	$V_{\beta^n\|\beta^a}=\dfrac{R(\beta^n\|\beta^a)}{p-r}$	$F_0=\dfrac{V_{\beta^n\|\beta^a}}{V_E}$
H_a	$R(\beta)=\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}^a$	p		
E	$S_E=(n-p)\hat{\sigma}^2=y'y-R(\beta)$	$n-p$	$V_E=\dfrac{S_E}{n-p}$	
T	$y'y$	n		

$$E[\hat{\beta}_1]=\beta_1+\frac{1}{n_i}X_1'X_2\beta_2$$

したがって第2項の大小，つまり各因子の交互作用項に対応する回帰係数 β_{ij} の有意性を調べればよい。

2次以上の項に関係した $X_2\beta_2$ と，1次の項 X_1,β_1 について帰無仮説 $H_n:\beta'=(\beta_1'\ 0)$ を立て，対立仮説を $H_a:\beta'=(\beta_1'\beta_2')$ とすれば H_n と H_a の判別情報推定量は (3.35) 式により

$$\hat{D}[H_a,\ H_n]=\{\hat{\beta}^{a\prime}S\hat{\beta}-\hat{\beta}_1{}^{n\prime}S_{11}\hat{\beta}_1{}^n\}/\hat{\sigma}^2$$

であるから表-4.1 AOV表により2次以上の偏回帰係数の有意性を検定できる。

この F_0 を $F(p-r,\ n-p;0.05)$ の値と比較し，F_0 の方が小さければ仮説 H_n は有意，つまり2次以上の偏回帰係数は0とは考えられないことになるので，次の2次曲面の当てはめの操作にはいるし，F_0 の方が自由度対 $(p-r,\ n-p)$ の F 表5%点の値より大きければ1次平面の当てはめもさしつかえないことになる。

β_{ij} が0とは見なせないくらい大きいときは，この付近では1次近似が成立しないとして2次の項までとり

$$y=\beta_0x_0+\sum_{i=1}^{p}\beta_ix_i+\sum_{i,\,j-1}^{p}\beta_{ij}x_ix_j$$

として，いままでの 2^p 計画では交互作用項に対応する回帰係数を推定するにはサンプルサイズが不足するので 2^p またはその一部実施法に p 個の軸に沿って原点から α ずつ離れた点および原点の $2p+1$ 個の追加実験を行なう。

[2]　2次曲面の当てはめ

前節にのべたように β_{ij} が0とは認められないときは

$$y=X\beta+e$$

において計画行列を 2^p 計画

$$X=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&\cdots\cdots\\1&1&-1&-1&\cdots\cdots\\1&-1&1&-1&\cdots\cdots\\1&1&1&-1&\cdots\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\cdots\\1&1&1&1&\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

から次のように拡大する。

$$X=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&\cdots\cdots&-1\\1&1&-1&-1&\cdots\cdots&-1\\1&-1&1&-1&\cdots\cdots&-1\\1&1&1&-1&\cdots\cdots&-1\\1&-1&-1&1&\cdots\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\cdots&\vdots\\1&0&0&0&\cdots\cdots&0\\1&-\alpha&0&0&\cdots\cdots&0\\1&\alpha&0&0&\cdots\cdots&0\\1&0&-\alpha&0&\cdots\cdots&0\\1&0&\alpha&0&\cdots\cdots&0\\1&0&0&-\alpha&\cdots\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\cdots&\vdots\\1&0&0&0&\cdots\cdots&\alpha\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\\vdots\\2^p+1\\2^p+1+1\\2^p+2+1\\2^p+\{2\}\{1\}+1\\2^p+\{2\}\{2\}+1\\2^p+\{3\}\{1\}+1\\\vdots\\2^p+2p+1\end{matrix}$$

この計画行列 X を用いた場合正規方程式

$$X'X\hat{\beta}=X'y$$

は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}2^p+2\alpha^2&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&2^p+2\alpha^2&\cdots&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&2^p&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&2^p&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&2^p+2p+1&2^p+2\alpha^2&2^p+2\alpha^2&\cdots&2^p+2\alpha^2\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&2^p+2\alpha^2&2^p+2\alpha^4&2^p&\cdots&2^p\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&2^p+2\alpha^2&2^p&2^p+2\alpha^4&\cdots&2^p\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&2^p+2\alpha^2&2^p&2^p&\cdots&2^p+2\alpha^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\\\vdots\\\hat{\beta}_{12}\\\hat{\beta}_{13}\\\vdots\\\hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_{11}\\\hat{\beta}_{22}\\\vdots\\\hat{\beta}_{pp}\end{pmatrix}=X'y$$

したがって x_i, $x_{ij}(i \neq j)$ は互いに直交しているので，$\hat{\beta}_i$ および $\hat{\beta}_{ij}$ はただちに求まるが $\hat{\beta}_{ii}$ および $\hat{\beta}_0$ は正規方程式を解いて求める。

2次曲面

$$Y = b_0 + \Sigma b_i x_i + \Sigma b_{ij} x_i x_j$$

が求まったとして等高面の中心は

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = b_i + 2b_{ii}x_i + \Sigma b_{ij}x_j = 0$$

を満足する $W(x_1^w, x_2^w, \cdots\cdots, x_p^w)$ となりその点の応答は

$$Y_w = b_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} b_i x_j^w$$

となる。

そこでこの点に座標原点を移し，次に主軸の方向に座標軸の回転を行なう。すなわち

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12}\cdots\cdots l_{1p} \\ l_{21} & l_{22}\cdots\cdots l_{2p} \\ \cdots\cdots & \\ l_{p1} & l_{p2}\cdots\cdots l_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12}\cdots\cdots\frac{1}{2}b_{1p} \\ \frac{1}{2}b_{21} & b_{22}\cdots\cdots\frac{1}{2}b_{2p} \\ \cdots\cdots & \\ \frac{1}{2}b_{p1} & \frac{1}{2}b_{p2}\cdots\cdots b_{pp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & & 0 \\ & B_{22} & \\ 0 & & B_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12}\cdots\cdots l_{1p} \\ l_{21} & l_{22}\cdots\cdots l_{2p} \\ \cdots\cdots & \\ l_{p1} & l_{p2}\cdots\cdots l_{pp} \end{pmatrix}$$

を満足するような l_{ij} を求めればよい。

第1行より

$$l_{11}(b_{11}-B_{11}) + \frac{1}{2}l_{12}b_{12} + \cdots\cdots + \frac{1}{2}l_{1p}b_{1p} = 0$$

$$\frac{1}{2}l_{11}b_{12} + l_{12}(b_{22}-B_{11}) + \cdots\cdots + \frac{1}{2}l_{1p}b_{2p} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}l_{11}b_{1p} + \frac{1}{2}l_{12}b_{2p} + \cdots\cdots + l_{1p}(b_{pp}-B_{11}) = 0$$

同様にして $l_{11} = l_{12} = \cdots\cdots = l_{1p} = 0$ 以外の解を求めるためには

$$\begin{vmatrix} b_{11}-B & \frac{1}{2}b_{12} & \cdots\cdots\frac{1}{2}b_{1p} \\ \frac{1}{2}b_{12} & b_{22}-B\cdots\cdots & \frac{1}{2}b_{2p} \\ \cdots\cdots & & \\ \frac{1}{2}b_{1p} & \frac{1}{2}b_{2p} & \cdots\cdots b_{pp}-B \end{vmatrix} = 0$$

の解を $B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{pp}$ とすれば，反応曲面は

$$Y = Y_w + \Sigma B_{ii} X_i^2$$

となり，B_{ii} がすべて負ならば定常点は最大，1つ以上が正で他の B_{ii} がすべて負ならば定常点は鞍点で B_{ii} が正の方向は，より高い反応を示す方向となり，1つ以上の B_{ii} が0に近づくならば分水嶺であることを示している。

[3] 最適条件を求める自動計算手順

前述したように関数形が指定されているときは，自動計算はもっともその効果を発揮するが，特に2次以上の係数の有意性検定を自動的に行ないうるならば，初期値と応答関数形を入れてやるだけで完全に最適条件追求の手続きを行ない，最適条件ならびにそのときの応答をアウトプットさせることができる。

手順1　事前の指定

因子の数 p（記憶容量の関係で NEAC 2203 では $p \leqq 7$ とする），各因子の1単位のきざみ l_i，応答関数 $y = f(x_1, \cdots, x_p)$ の形で入れるか（Ⅰの場合），または実験結果として数値を入れるか（Ⅱの場合）の別をそれぞれ指定する。

手順2　2^p 計画

a. 出発点 $O(x_1^o, x_2^o, \cdots, x_p^o)$ を読込み，次の 2^p 計画にしたがってⅠの場合は $x_i + l_{ii}$ を計算し y_i を求める。

Ⅱの場合は $x_i^o + l_{ii}x_{ii}$ の値をタイプアウト

b. 2^p 計画行列 $X = (x_{it})$ は次のとおりとする。

i. $i = 0$ のとき　$x_{it} = 1$

ただし，　$i = 0, 1, \cdots, p$

$t = 1, 2, \cdots, 2^p$

ii. $i \geqq 1$ のとき

t の順に 2^{i-1} 個の組を作り，組番号 k について

$k = 2n-1$ のとき　$x_{it} = 1$

$k = 2n$ のとき　$x_{it} = -1$

手順3　偏回帰係数の計算

a. Ⅰの場合　計算した y_i をⅡの場合新らたにインプットした y_i を読込み，次の偏回帰係数を計算しタイプアウト

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{2^p}\sum_{t=1}^{2^p} x_{it}y_t \qquad (i \neq 0)$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \frac{1}{2^p}\sum_{t=1}^{2^p} x_{it}x_{jt}y_t \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, p \quad i \neq j)$$

b. 次の AOV 表作成のため全変動 $S(yy)$ および1次回帰による変動 S_R を計算

$$S(yy) = \sum_{t=1}^{2^p} y_t^2 - \frac{1}{2^p}\left(\sum_{t=1}^{2^p} y_t\right)^2$$

$$S_R = \frac{1}{2^p}\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{2^p} x_{it}y_t\right)^2$$

手順4　1次平面のあてはめの検定

a. AOV 表

表-4.2　AOV表

SV	SS	DF	MS	F_0
R	S_R	p	$V_R = S_R/p$	$F_0 = \frac{V_R}{V_E}$
E	$S_E = S(yy) - S_R$	2^p-1-p	$V_E = \frac{S_E}{(2^p-1-p)}$	
O	$S(yy)$	2^p-1		

$$F \fallingdotseq \left(a+\frac{b}{2^p-1-p}\right)^4$$

を計算し F_0 と比較

$F_0 \geqq F$ なら，F_0 の数値の右に＊印を打ち手順5に進む。

$F_0 < F$ なら，手順7に進む。

b.　F表5％点の近似式

自由度対 $(p,\ 2^p-p-1)$ のF表5％点の近似値は次式＊による。

$$F \fallingdotseq \left(a+\frac{b}{2^p-1-p}\right)^4$$

表-4.3

p	a	b
1	1.40	1.00
2	1.32	1.16
3	1.27	1.28
4	1.24	1.35
5	1.22	1.40
6	1.20	1.44
7	1.19	1.48
8	1.18	1.51
9	1.17	1.54
10	1.16	1.56

手順5　最大傾斜方向への前進

最大の $\hat{\beta}_t$ を $\hat{\beta}_m$ とし，これに対する単位きざみを l_m としたときIの場合はyを計算しタイプアウト（yの最大が現われるまで）Ⅱの場合は表のみタイプアウト

		$X1$	$X2$	……	Xp	Y
基本水準	$X0$	x_1^o	x_2^o	……	x_p^o	y_0
	M	$l_1\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_m$	$l_2\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_m$	……	$l_p\hat{\beta}_p/\hat{\beta}_m$	
実　験	1	$x_1^o+l_1\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_m$	$x_2^o+l_2\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_m$	……	$x_p^o+l_p\hat{\beta}_p/\hat{\beta}_m$	y_1
〃	2	$x_1^o+2l_1\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_m$	$x_2^o+2l_2\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_m$	……	$x_p^o+2l_p\hat{\beta}_p/\hat{\beta}_m$	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮
〃	q	$x_1^o+ql_1\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_m$	$x_2^o+ql_2\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_m$	……	$x_p^o+ql_p\hat{\beta}_p/\hat{\beta}_m$	y_q

手順6　第2回の1次平面の当てはめ

yが最大の点を$M(x_1^m,\ x_2^m,\cdots,\ x_p^m)$とし，この値をタイプアウトした後，手順2の x_i^o の代りに入れて第2回の計画を実施し，$F_0 \geqq F$なら以後この手続きをくり返す。

手順7　2次曲面の当てはめ

$F_0 > F$ となったときは，2次係数が無視し得ないとみて，そのときの2^p計画にさらに次の計画を追加する。

a.　新計画行列 (x_{it}) を作る。

i　$t \leqq 2^p$ はもとの2^p計画

ii　$i=0$のとき $x_{it}=1$

iii　$t=2^p+1$のとき $x_{it}=0$

iv　$i \geqq 1$のとき

$t=2^p+2i$ に対し　$x_{it}=2$

$t=2^p+2i+1$ に対し　$x_{it}=-2$

これ以外のtに対し　$x_{it}=0$

b.　x_i^o としては一ばん最後の回の x_i^m がはいっているはずであるから

1を　$x_i^m+l_i$

0を　x_i^m

-1を　$x_i^m-l_i$

としてIの場合は y_t を計算，Ⅱの場合は $x_i^o \pm l_i x_{it}$ の値をタイプアウト（$t>2^p$について）

手順8　偏回帰係数の計算

Iの場合は y_t を実験番号順に読込み，Ⅱの場合はインプットされた実験結果を読込んで次の偏回帰係数を計算

$$\hat{\beta}_i=\frac{1}{2_p+8}\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{it}y_t \quad (i \neq 0)$$

$$\hat{\beta}_{ij}=\frac{1}{2_p}\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{it}x_{jt}y_t \ (i,j=1,2,\cdots,p\ \ i \neq j)$$

$\hat{\beta}_0\hat{\beta}_{ii}$ は次の正規方程式を解いて求める

$$\begin{pmatrix} 2^p+2p+1 & 2^p+8 & 2^p+8 & 2^p+8 & \cdots & 2^p+8 \\ * & 2^p+32 & 2^p & 2^p & \cdots & 2^p \\ & & 2^p+32 & 2^p & \cdots & 2^p \\ & & & 2^p+32 & \cdots & 2^p \\ * & \cdots & \cdots & * & & 2^p+32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \\ \hat{\beta}_{33} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{pp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{0t}y_t \\ \sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{1t}{}^2y_t \\ \sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{2t}{}^2y_t \\ \sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{2t}{}^3y_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{pt}{}^2y_t \end{pmatrix}$$

AOV表作成のため次の$S(yy)$およびS_Rを計算

$$S(yy)=\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} y_t{}^2 - \frac{1}{2^p+2p+1}\left(\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} y_t\right)^2$$

$$S_R=\sum_{i=1}^{p}\hat{\beta}_i\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{it}y_t+\sum_{i=1}^{p}\hat{\beta}_{ii}\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{it}{}^2y_t + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{p}\hat{\beta}_{ij}\sum_{t=1}^{2^p+2p+1} x_{it}x_{jt}y_t$$

表-4.4　AOV表

SV	SS	DF	MS	F_0
R	S_R	$2^p+\frac{p(p+1)}{2}+1=\phi_R$	$V_R=\frac{S_R}{\phi_R}$	$F_0=\frac{V_R}{V_E}$
E	$S_E=S(yy)-S_R$	$2^p+\frac{p(p+1)}{2}-1=\phi_E$	$V_E=\frac{S_E}{\phi_E}$	
O	$S(yy)$	2^p+2p		

$$F \fallingdotseq \left(a+\frac{b}{\phi_E}\right)^4$$

＊　ダム構造研究室　F表t表5％点の近似式　土木技術資料5巻5号 (1963)

を計算，$F_0 \geqq F$ なら F_0 の数値の右に＊を打ち次の9°で計算した $W(x_1^w, x_2^w, \cdots, x_p^w)$ を手順2の w^o の代りに用い再スタート，$F_0 < F$ なら次の手順9に進む。

手順9　等高面の中心計算

$$\hat{\beta}_{it} + 2\hat{\beta}_{tt}x_t + \sum_{\substack{j=1 \\ t<j}}^{p} \hat{\beta}_{tj}x_j = 0$$

の $i = 1 \sim p$ の p 個を連立方程式を解き x_t を求め，$W(x_1^w, x_2^w, \cdots, x_p^w)$ をタイプアウト。

手順10　座標軸の回転

$$\begin{vmatrix} \hat{\beta}_{11}-B & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{12} & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{1p} \\ * & \hat{\beta}_{22}-B & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots\cdots & * & \hat{\beta}_{pp}-B \end{vmatrix} = 0$$

を解き p 個の解 B_{tt} を求めタイプ。

手順11　係数の判定

a.　B_{tt} がすべて負のとき，PEAK とタイプし $y_w = f(w)$ を計算しタイプして終了。

b.　1つ以上の B が正で他がすべて負のとき SADDLE とタイプし，正の中で最大の B を B_{tt} とすれば

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11}-B_{tt} & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{12} & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{1p} \\ * & \hat{\beta}_{22}-\beta_{tt} & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\hat{\beta}_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots\cdots & * & \hat{\beta}_{pp}-\beta_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{t1} \\ m_{t2} \\ \vdots \\ m_{tp} \end{pmatrix} = 0$$

と

$$\sum_{j=1}^{p} m_{tj}^2 = 1$$

より m_{tj} を求め，手順5の x_j^o に x_j^w を，$\hat{\beta}_j$ に m_{tj} を入れて計算続行。

c.　1つ以上の B_{tt} が0に近く他がすべて負のとき，RIDGE とタイプし，0に最も近い B を B_{tt} とし b. と同様計算を進める。

［4］　ダムアバットの安定計算に対する応用

岩盤を安定解析という面から眺めると

1.　良質な岩塊よりなり不連続面を持たぬ良好な岩盤
2.　地質構造的意味での不連続面を持ち，その不連続面が安定性解析の支配的要素となるが，他の部分は良質な岩塊から成り立っている岩盤
3.　地質構造的意味での不連続面は持たないが，良好でない岩質で成り立っている岩盤

の三つに大別される。したがって安定解析法も異なり，1.に対しては岩本来の力学的性状の検討を行なえば足り安定性解析の必要は少ない。2.については岩本来の力学的性質の外に不連続面で作られる領域に構造力学的検討を加える必要があり，この目的に対し岩盤の石膏模型実験とかロッキーピラー検討法等が用いられる。3.のタイプに対しては岩塊は土に似た性質を持つものとみなされ，土質力学的取扱いが準用され得る。

下久保ダム右岸のサブダムの安定性の検討についてはこの3.のタイプの検討を必要とし，円形すべり面法による検討を行なった。これは堤防などの破壊が経験的に対数螺旋または円形に近いというところから，あらかじめ破壊面を円形とみなし，その面上で破壊力と抵抗力の比が最小となる点で破壊が生ずるものとして計算を行なうもので，一般にはこの意味での安全係数 F は円弧の中心座標 x，y およびその半径 r の関数となる。

$$F = F(x, y, r)$$

この三因子の関数の最小値を求めれば，これが求める安全係数 F となるが，この試し計算には膨大な手数を要するので前述の最適条件を求める方法を利用する。

F の関数形としてはまず円形すべり面法の仮定として

1.　すべり面を単純な円形とし，岩塊は一様
2.　岩盤のせん断力は次式で示される。

$$\tau = c + \sigma \tan\phi$$

ただし，　c：粘着力，
　　σ：垂直応力，
　　ϕ：内部摩擦角，

3.　逐次破壊は考えない。

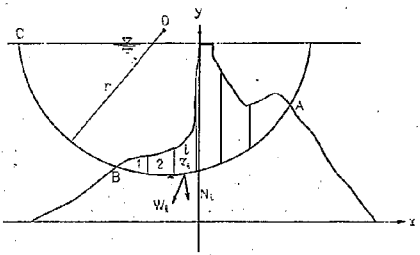


図-4.1

荷重としては自重，水圧を考えて限界すべり面を定め，その点の近傍で揚圧力，地震力を考慮する。

計算手順としては

1.　岩盤より2次元断面を選出，その境界線は折線と仮定し，その折点の座標20組までを記憶させる。
2.　x 座標，y 座標を指定，y 座標はサブダム天端上流端とする。
3.　出発点の座標 x_0，y_0 および半径 r_0 を定め，この円弧と断面との交点をA，Bとする。
4.　$\angle AOB$ を n 等分し，スライスを作る。
5.　各スライスの自重 W_i を求め重心に作用させる。水が存在するスライスはその水重も含める。
6.　$\overset{\frown}{BC}$ 間は水のみが存在するものとし，すべり面上の自重を計算する。
7.　スライス重心に作用する自重をすべり面に平行な成分 τ_i と垂直な成分 N_i に分ける。

8. $\overset{\frown}{BC}$ 間は水を $\phi_w=0$, $c_w=0$ とする。
9. 円弧のスライス間での長さを a_i とする。
10. Σw_i, $\Sigma \tau_i$, ΣN_i, Σa_i を計算する。
11. 安全係数は

$$F=\frac{r_0\{(\Sigma N_i)\,r_i m\tan\phi\cdot 10^{-3}+c\Sigma a_i\}}{r_0(\Sigma\tau_i)\,r_i m\cdot 10^{-3}}$$

$$=\frac{mr_i\tan\phi\,\Sigma N_i\cdot 10^{-3}+c\Sigma a_i}{mr_i\Sigma\tau_i\cdot 10^{-3}}$$

ただし m は図面の縮尺

［5］ 下久保ダムにおける実例

下久保ダムは神流川に築造中の高さ 129 m の重力ダムで，ダム地点で本川が大きく蛇行し，右岸は半島状に突出した岩盤から成っている。ダムの頂部は標高 EI. 300 に対し半島状の尾根の標高は EI. 270～280 であり，厚さ 20～30 m の表土または風化帯を除くと EI. 240～260 となり，高さ 40～50 m の副ダムを設ける必要がある。

そこでこの半島状岩盤の安定性検討の一部として，円弧すべり面法による安全度の計算を行なった。本ダムにおいては自重および水圧について $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ を光弾性実験で求めておいた値を格子点について記憶させておき，x_0, y_0 を中心とし半径 r_0 の円弧の岩盤中の弧長を 10 等分し，その i 番目の円弧に近い格子点の σ_{xj}, σ_{yj}, τ_{xyj} を用い

$$\sigma_{Yj}=\frac{1}{r_0^2}\{\sigma_{xj}(x_j-x_0)^2+\sigma_{yj}(y_j-y_0)^2+\tau_{xyj}(x_j-x_0)(y_j-y_0)\}$$

$$\tau_{xyj}=\frac{1}{r_0^2}[(\sigma_{xj}-\sigma_{yj})(x_j-x_0)(y_j-y_0)+\tau_{xyj}\{(y_j-y_0)^2-(x_j-x_0)^2\}]$$

として

$$F=\left\{3Nc+\tan\phi\left\{\sigma_{Y_0}+\sigma_{Y_N}+4\sum_{K=0}^{N/2}\sigma_{Y_{2k-1}}+2\sum_{K=1}^{(N/2)-1}\sigma_{Y_{2k}}\right\}\right\}\Big/\left\{\tau_{xy_0}+\tau_{xy_N}+4\sum_{K=0}^{N/2}\tau_{xy_{2k-1}}+2\sum_{K=1}^{(N/2)-1}\tau_{xy_{2k}}\right\}$$

ただし，　$N=10$

$C=20$：せん断力

$\tan\phi=0.7$：内部摩擦係数

を計算し，プログラムは最大値を求めるものになっているので符号を反転して考察するようにした。ただし座標原点は図-4.3 の C，12 で上方に y 軸，右方に x 軸をとり 1 格子区間は 40 m とした。

計算結果は表-4.5 のとおりで，いわゆる 円弧すべり面安全率は 6.002 という結論で，その中心座標と半径は

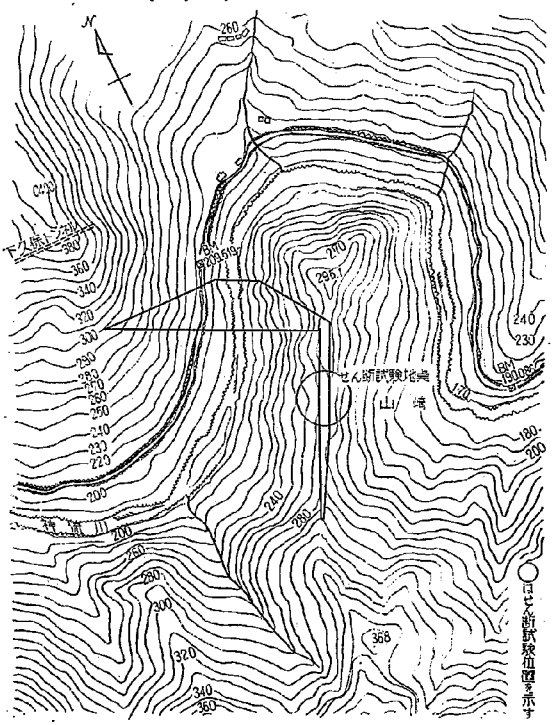


図-4.2　　下久保ダムサイト一般平面図

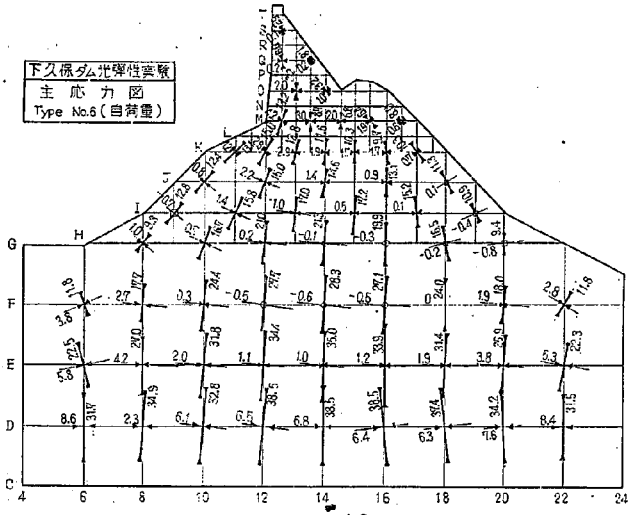


図-4.3

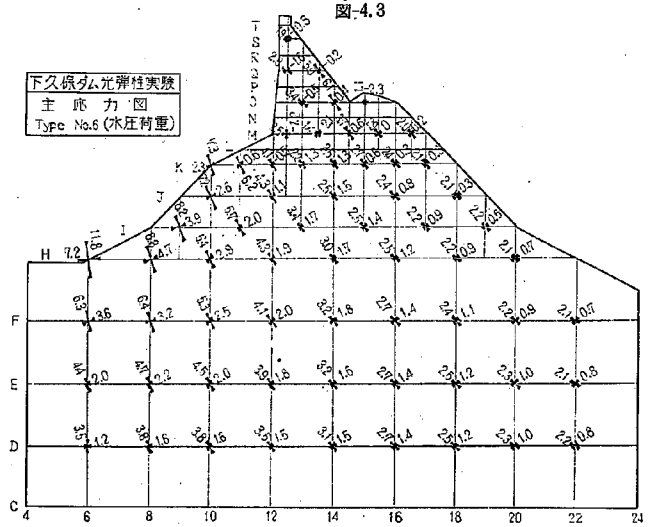


図-4.4

$x=146.7$, $y=274.7$, $r=189.3$

であった。

山登り法のアウトプットデータは次のルートを示している。

出発点を $x=130.0$, $y=240.0$, $r=150.0$ でせん断力 C は 20 kg/cm² きざみを $x=10$, $y=10$, $r=10$ で計算し，まず出発点のまわりに±1きざみ離れた点の応答を計算して1次超平面の当てはめを試みる。

BI は1次係数を示し，BI は x の1次係数を示す。1次超平面よりのハズレに対し分散分析を行なう

AOV は分散分析結果で1次超平面よりのハズレは無視できないことを示す。

F はその自由度対(3, 4)に対応する F 表5%点の値で，$F>F_0$ であるから上の結論に導かれる。そこでその点の座標軸上 ±2 の点 および その点の応答を計算し2次曲面の当てはめを行なう。

BO は常数項

BI は1次係数 β_i

BII は2乗の項の係数 β_{ii}

BIJ は相乗積の項の係数 β_{ij}

(BII) は座標変換を行なったときの B_{ii} で，一つだけ

表-4.5　すべり面計算アウトプット

```
START.  (130.0  240.0  150.0)
STEP.   ( 10.0   10.0   10.0)   C = 20.0
BI
      B1          B2          B3
   -.0083      -.5081       .8240
AOV
  SV      SS        DF        MS        FO
   R     7.499     3.000     2.499     1.205
   E     8.294     4.000     2.073
   O    15.79      7.000
F.      6.391
BO.    -6.234
BI
      B1          B2          B3
    .0595       -.4401       .9792
BII
      B11         B22         B33
   -.1013       -.3104       -.6349
BIJ
         1           2           3
1                 .1261       .1120
2       .1261                 .9946
3       .1120       .9946
 (BII)
        .0008      -.0013      -.0099
SADDLE
  Q         Y
  00     -7.095
  01     -6.802
  02     -6.126
  03     -6.043
  04     -5.689
  05     -5.534
  06     -6.400
M
     151.3       277.6       184.0
BI
      B1          B2          B3
    .0990       -.7707       .9148
AOV
  SV      SS        DF        MS        FO
   R     11.52     3.000     3.842     1.556
   E      9.871    4.000     2.469
   O     21.39     7.000
F.      6.391
BO.    -5.507
BI
      B1          B2          B3
    .0059       -.7864       .8672
BII
      B11         B22         B33
   -.2155       -.7046       -.6163
BIJ
         1           2           3
1                  .3680      -.1825
2       .3680                 1.032
3      -.1825      1.032
 (BII)
       -.0010      -.0021      -.0121
PEAK
XW
      146.7       274.7       189.3
YW     -6.002
```

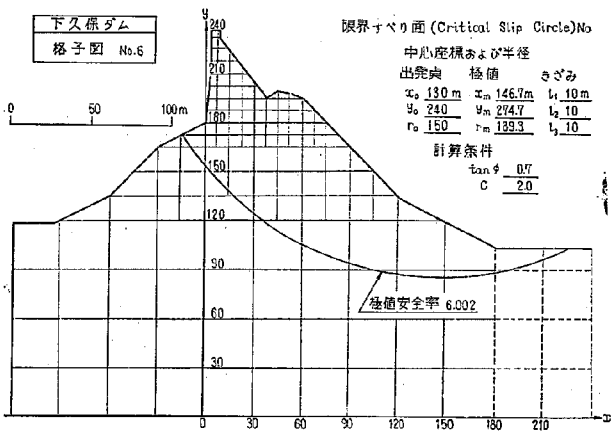


図-4.5

正，他が負であるからこの原点は Saddle point である。

SADDLE　そこでサドルと印刷し，正で最急こう配の方向に上り応答を計算。

QY　でその方向のピークをさがす。No. 5 の点がピークでその座標を計算。

M　の点を中心に ±1 の点の応答を求め，1次平面の当てはめを行なう。

BI　は1次係数。

AOV　は分散分析表で，$F > F_0$ でノイズは無視できない。そこで2次曲面の当てはめを行ない停留点を求め B_{II} について符号を調べるとすべて負，つまりどの方向にふみ出しても応答は小さくなるからこの点が極大（安全率は最小値を求めているので負にして最大をさがせるようになっている）

PEAK　そこで，この点を極値と判断。

X_w　座標は $x=146.7$, $y=274.7$, $r=189.3$

Y_w　この点の応答つまり安全率は符号を変え 6.002

5. 報報量解析の効率*

データが得られたとき，このデータから母集団に関する情報を最も多く引き出すことのできる方法が最も効率がいい方法とされている。これに対して工業技術の場ではできるだけ少ない計算手数で，できるだけ多くの情報を手に入れることのできる方法の方を効率が良いと考える方が合理的である。一般き引に出し得る情報の量の評価は，その母数の推定値の分散の比で行なうことができ最も分散の小さい方法の分散に対するパーセンテージで表現することが行なわれてきた。これに対し計算手数の評価は多少困難であるが，たとえば10進法1ケタの数字の加減算に要する仕事量を1AU(arithmetic unit)とすれば k ケタの数字と l ケタの数字の掛け算に要する仕事量は乗数1ケタごとに平均5回 k ケタの加算を行なうので $5kl$ AU，除算も同様 $5kl$ AU としてAUに直して比較する方法も考えられる。しかし，このAUの仕事量と分散の比の低下量との組み合せを議論することが困難なので常識的に分散については50％程度以上を確保できているのに対しAUでは1/5～1/10以下となるような方法を効率の良い方法と考え，これについて吟味してみることとしたい。

［1］ 平均の一様性に関する検定

$$\varepsilon = y - X\beta$$

において

$$x' = (z_{11}\, z_{12}\cdots z_{1n_1}\, z_{21}\, z_{22}\cdots z_{2n_2} \cdots z_{p1}\, z_{p2}\cdots z_{pn_p})$$

$$y' = (y_{11}\, y_{12}\cdots y_{1n_1}\, y_{21}\, y_{22}\cdots y_{2n_2} \cdots y_{p1}\, y_{p2}\cdots y_{pn_p})$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} n_1 \\ \left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} n_2 \\ \cdots \\ \left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} n_p \end{matrix}$$

$$\beta' = (\underbrace{\beta_1\, \beta_1\cdots\beta_1}_{n_1}\ \underbrace{\beta_2\, \beta_2\cdots\beta_2}_{n_2}\cdots\underbrace{\beta_p\, \beta_p\cdots\beta_p}_{n_p})$$

とする。

帰無仮説 H_n として p 組の平均はすべて等しいものとすれば

$$X^{n\prime} = (\underbrace{1,\ 1\cdots1}_{n_1},\ \underbrace{1,\ 1\cdots1}_{n_2},\cdots,\ \underbrace{1,\ 1,\cdots1}_{n_p})$$

対立仮説 H_a としてはこれらの平均のすべては等しくないものにすれば

$$S^n = X^{n\prime}X^n = n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_p = n$$

$$X^{n\prime}y = \Sigma\Sigma y = n\bar{y}$$

$$\hat{\beta}^n = S^{n-1}X^{n\prime}y = \left(\frac{1}{n}\right)n\bar{y} = \bar{y}$$

$$S^a = X^{a\prime}X^a = \begin{pmatrix} n_1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & n_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots 0 & & n_p \end{pmatrix}$$

$$S^{a-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots 0 & & \frac{1}{n_p} \end{pmatrix}$$

$$X^{a\prime}y = \begin{pmatrix} n_1\bar{y}_1 \\ n_2\bar{y}_2 \\ \vdots \\ n_p\bar{y}_p \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}^a = S^{a-1}X^{a\prime}y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_p \end{pmatrix}$$

二つの仮説の判別情報量は

$$\hat{D} = [H_a,\ H_n] = (\hat{\beta}^a - \hat{\beta}^n)'S(\hat{\beta}^a - \hat{\beta}^n)/\partial^2$$
$$= (\hat{\beta}^{a\prime}S^a\hat{\beta}^a - \hat{\beta}^{n\prime}S^n\hat{\beta}^n)/\partial^2$$

また

$$(n-p)\,\partial^2 = y'y - \hat{\beta}^{a\prime}S^a\hat{\beta}^a$$

であるから

$$R(\beta) = \hat{\beta}^{a\prime}S^a\hat{\beta}^a = \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{y}_i)^2$$

$$R(\beta^n) = \hat{\beta}^{n\prime}S^n\hat{\beta}^n = n(\bar{y})^2$$

$$R(\beta^n|\beta^a) = R(\beta) - R(\beta^n)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{y}_i)^2 - n(\bar{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$S_x = y'y - R(\beta)$$

$$= \Sigma\Sigma y^2 - \sum_{i=1}^{p} n(\bar{y}_i)^2$$

$$= \Sigma\Sigma(y - \bar{y}_i)^2$$

に対し表の表-5.1のAOVを作ることができる。

* 秋草，深谷，横田，中村：工事管理とその実際，山海堂 (1961) p. 212–268

表-5.1　AOV表

SV	SS	DF	MS	F_0
H_n :	$R(\beta^n)=n(\overline{y})^2=\Sigma\Sigma y/n$	1		
$H_n\|H_a$	$R(\beta^n\|\beta^a)=\sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{y}_i-\overline{y})^2$	$p-1$	$V_{n\|a}=R(\beta^n\|\beta^a)/(p-1)$	$F_0=V_{n\|a}/V_E$
H_a	$R(\beta)=\sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{y}_i)^2$	p		
E	$S_E=\Sigma\Sigma(y-\overline{y}_i)^2$	$n-p$	$V_E=S_E/(n-p)$	
T	$\Sigma\Sigma y^2$	n		

この F_0 を $F(p-1,\ n-p\ ;0.05)$ の値と比較することにより平均値の一様性を検定することができる。

$p=2$ つまり分子の自由度が1の特別な場合を考えてみると一般に

$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\in N(0,\ 1^2)$$

のとき

$$\sum_{}^{n}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1)$$

で

$$t=\frac{u}{\sqrt{\chi^2/(n-1)}}$$

$$=\frac{(\bar{x}-\mu)/\sqrt{1/n}}{\sqrt{V}}\in t(n-1)$$

また，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ のとき

$$E=\frac{\chi_1^2/\phi_1}{\chi_2^2/\phi_2}=\frac{V_1}{V_2}\in F(\phi_1,\ \phi_2)$$

となり $\phi_1=1$ の場合，F は t^2 に等しい。つまり $p=2$ すなわち二つの平均値の差を論ずる場合にはその平方根について t 検定が可能である。

$p=2$ の場合

$$\begin{aligned}R(\beta^n|\beta^a)&=n_1(\overline{y}_1-\overline{y})^2+n_2(\overline{y}_2-\overline{y})^2\\&=n_1\overline{y}_1^2-2n_1\overline{y}_1\overline{y}+n_1\overline{y}^2\\&\qquad+n_2\overline{y}_2^2-2n_2\overline{y}+n_2\overline{y}^2\\&=n_1\overline{y}_1^2+n_2\overline{y}_2^2+\overline{y}^2(n_1+n_2)\\&\qquad-2\bar{x}(n_1\overline{y}_1+n_2\overline{y}_2)\\&=n_1\overline{y}_1^2+n_2\overline{y}_2^2-\overline{y}^2(n_1+n_2)\\&=\frac{n_1n_2(\overline{y}_1-\overline{y}_2)^2}{n_1+n_2}\\&=(\overline{y}_1-\overline{y}_2)^2\Big/\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\end{aligned}$$

すなわち

$$\sqrt{F_0}=\frac{(\overline{y}_1-\overline{y}_2)\Big/\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}{\sqrt{V_E}}=t\in(n-2)$$

となり，二つの平均の差について t 検定を行なえばよい。すなわち二つの平均の差に関する判別情報量の平方根は

$$\hat{\sigma}\sqrt{\hat{D}[H_a,\ H_n]}=\frac{(\overline{y}_1-\overline{y}_2)\Big/\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}{\sqrt{V_E}}$$

となり，真の平均の差 $\mu_1-\mu_2$ に対する信頼係数95％の区間は

$$(\overline{y}_1-\overline{y}_2)\pm t[n-2;0.05]\sqrt{V_E}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

となる。

ところで，このような検定推定を行なう際 $\sqrt{V_E}$ を計算する必要が生じるが，$\sqrt{V_E}$ は一般に n 項の二乗和および平方根の計算を含むので，AU に換算すると相当な仕事量となる。これに対し範囲 $R=x_{\max}-x_{\min}$ は n 個のデータ中最大のものと最小のものの値ならびに他の $n-2$ 個はすべてこの間にはいっているという情報だけしか利用していないので，母数の推定値の精密度に着目した効率は当然低下している。しかしこの低下の程度は $\sqrt{V}$ について

$$E[\sqrt{V}]=c_2^*\sigma$$
$$D[\sqrt{V}]=c_3^*\sigma$$

ただし，$E[\ ]$ は期待値演算子 $D[\ ]$ は標準偏差演算子，c_2^*, c_3^* は次の d_2, d_3 とともにサンプルサイズ n に関する定数で表-5.2のようなものである。

表-5.2

n	c_2^*	c_3^*	d_2	d_3
2	0.7979	0.6028	1.128	0.853
3	0.8862	0.4632	1.693	0.888
4	0.9213	0.3888	2.059	0.880
5	0.9400	0.3412	2.326	0.864
6	0.9515	0.3076	2.534	0.848
7	0.9594	0.2822	2.704	0.833
8	0.9650	0.2621	2.847	0.820
9	0.9693	0.2458	2.970	0.808
10	0.9727	0.2322	3.078	0.797

したがって

$$E[\sqrt{V}/c_2^*]=\sigma$$
$$D[\sqrt{V}/c_2^*]=(c_3^*/c_2^*)\sigma$$

また R について

$$E[R]=d_2\sigma$$
$$D[R]=d_3\sigma$$
$$\therefore E[R/d_2]=\sigma$$

$D[R/d_2]=(d_3/d_2)\sigma$

したがってRによるσの推定量の$\sqrt{V}$によるσの推定量に対するいわゆる効率ηは

$$\eta=\left(\frac{1}{D[R/d_2]}\right)^2\Big/\left(\frac{1}{D[\sqrt{V}/c_2^*]}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{(d_3/d_2)\sigma}\right)^2\Big/\left(\frac{1}{(c_3^*/c_2^*)\sigma}\right)^2$$

$$=(c_3^*/c_2^*)^2/(d_3/d_2)^2$$

そこでおのおのについてηを計算してみると

表-5.3

n	η
2	1.00
6	0.96
10	0.85
20	0.71
100	0.35

となる。

$n=2$では$\sqrt{V}$によるときもRによるときも2個の値のもたらす情報のすべてを利用しているのであるから，効率は1つまり同じことになるが，　$n\leq 10$程度では少なくも85％のいわゆる効率を確保している。

nが大きい場合にはm個ずつk組に分けて各組のRを平均した$\bar{R}$を用いると

$$E[\bar{R}/d_2]=\sigma$$

$$D[\bar{R}/d_2]=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)\sigma$$

となるから，たとえば100個のデータについて$\sqrt{V}$による推定の標準誤差は

$(c_3^*/c_2^*)\ \sigma=0.071\,\sigma$

であるのに対して4個ずつ25組に分けて4個の中のRを平均して用いると，そのときの推定の標準誤差は

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)\sigma=0.086\,\sigma$$

となり，そのいわゆる効率は

$\eta=(0.071/0.086)^2=0.68$

で100個全体のRを用いた場合の効率0.35に対して，相当大幅に大きいものになっている。

したがって効率なるものを同じ精密度の推定値を得るための最もデータ数が少なくてすむ方法を用いたときのデータ数との比だけでなく，この他に計算手数も考慮に入れたものにすることは，日常の情報量解析が生産に直結した重要な意味をもっている工鉱業分野では重要なことであって，この意味でRを用いることは直接$\sqrt{V}$を計算する場合に比べて極端に計算手数が少なくてすみ，情報量解析に大いに活用すべきであると考えられる。

ところで，いままでは$\sqrt{V}$またはRによるσの推定を論じてきたが，情報量解析の立場からはRによる$\sqrt{V}$の推定が必要となってくる。

Patnaik* によれば

$$\{D[\bar{R}]\}^2=V[\bar{R}]=E[\{\bar{R}-E[\bar{R}]\}^2]$$

$$=\{E[\bar{R}]\}^2-\{E[\bar{R}]\}^2$$

$$\therefore\quad E[(\bar{R})^2]=\{E[\bar{R}]\}^2+\{D[\bar{R}]\}^2$$

$$=(d_2\sigma)^2+(d_3\sigma)^2/k=(d_2^2+d_3^2/k)\sigma^2$$

したがって$d_2^2+d_3^2/k=C^2$とおけば

$$E[(\bar{R}/C)^2]=\sigma^2$$

そこで

$$E[(\bar{R}/C)^2]=E[V]\qquad E[\bar{R}/C]=E[\sqrt{V}]$$

の2つがともに成り立つようにCおよび相当自由度ϕ_cを求めれば，$\bar{R}/C$または$(\bar{R}/C)^2$を自由度ϕ_cの$\sqrt{V}$またはVと同等に取扱うことができる。

$$C=\sqrt{d_2^2+d_3^2/k}$$

ϕ_cは

$$E[\sqrt{V}]=c_2^*\sigma=\left\{\sqrt{\frac{2}{\phi}}\,\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}\sigma$$

$$E[\bar{R}/C]=(d_2/C)\,\sigma$$

$$\frac{d_2}{C}=\sqrt{\frac{2}{\phi}}\,\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

であるから

$$\frac{d_2}{\sqrt{d_2^2+d_3^2/k}}=\sqrt{\frac{2}{\phi}}\,\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

をϕについて解けば求める相当自由度が得られる。

これを表示すれば表-5.4のとおりである。

表-5.4

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$		$k>5$	
	ϕ_c	C	ϕ_c	C	ϕ_c	C	ϕ_c	C	ϕ_c	C	ϕ_c	C
2	1.0	1.41	1.9	1.28	2.8	1.23	3.7	1.21	4.6	1.19	$0.88k+0.25$	$1.128+0.32/k$
3	2.0	1.91	3.8	1.80	5.7	1.77	7.5	1.75	9.3	1.74	$1.82k+$ 〃	$1.693+0.23/k$
4	3.0	2.24	5.7	2.15	8.4	2.12	11.2	2.11	13.9	2.10	$2.74k+$ 〃	$2.056+0.19/k$
5	3.8	2.48	7.5	2.40	11.1	2.38	14.7	2.37	18.4	2.36	$3.62k+$ 〃	$2.326+0.16/k$
6	4.7	2.67	9.2	2.60	13.6	2.58	18.1	2.57	22.6	2.56	$4.47k+$ 〃	$2.534+0.14/k$
7	5.5	2.83	10.8	2.77	16.1	2.75	21.3	2.74	26.6	2.73	$5.27k+$ 〃	$2.704+0.13/k$
8	6.3	2.96	12.3	2.91	18.3	2.88	24.4	2.88	30.4	2.87	$6.03k+$ 〃	$2.847+0.12/k$
9	7.0	3.08	13.8	3.02	20.5	3.01	27.3	3.00	34.0	2.99	$6.75k+$ 〃	$2.970+0.11/k$
10	7.7	3.18	15.2	3.13	22.6	3.11	30.1	3.10	37.5	3.10	$7.45k+$ 〃	$3.078+0.10/k$

* Patnaik, P. B.: The Use of Mean Range as an Estimator of Variance in Statistical Test. Biometrika 37 (1950) p. 78

したがって2つの平均値の差に関する判別情報量について

$$\delta\sqrt{D}\,[H_a,\ H_n]=\frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\Big/\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}{\sqrt{\frac{\Sigma(y_1-\bar{y}_1)^2+\Sigma(y_2-\bar{y}_2)^2}{n_1+n_2-2}}}=t$$

が自由度 n_1+n_2-2 の t 分布をすることを利用して検定するのに対し

$$t\fallingdotseq\frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\Big/\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}{\frac{R_1}{C_1}+\frac{R_2}{C_2}}$$

とおき，これら C_1，C_2 等 n_1 n_2 に関係した項をあらかじめ計算して

$$t''=\frac{\bar{y}_1-\bar{y}_2}{R_1+R_2}$$

の両側5％点を表示すれば表-5.5となる。

表-5.5

n_2 \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.714								
3	0.915	0.635							
4	0.732	0.511	0.407						
5	0.619	0.429	0.353	0.307					
6	0.519	0.391	0.319	0.207	0.250				
7		0.360	0.294	0.256	0.240	0.213			
8			0.276	0.240	0.217	0.200	0.187		
9				0.228	0.206	0.189	0.177	0.167	
10					0.197	0.181	0.169	0.160	0.152

〔2〕 品質管理限界に対する R の利用*

前節で述べたように工業技術分野では $\sqrt{V}$ を用いるかわりに R を用いる方法が計算手数と得られる情報量の程度を考慮すれば最も効率がよい。そこで，日常の管理ならびに解析の道具として用いられる管理図についても，$\bar{x}-R$ 管理図がよく用いられているが，そのもつ意味についていろいろな誤解があるため，たまたま $\bar{x}-R$ 管理図が用いられても誤って用いられることが多かったり，$\bar{x}-R$ 管理図が用いられなかったりしている。そこで，まず問題の本質を掘り下げるために品質管理に対するいろいろな誤解点について議論してみる。

(2.1) 品質管理に対する誤解**

1. 品質管理を行なうとコストがかかるという誤解

建設事業においては工事のための調査，計画，設計，施工の諸段階で常に何物かを造っているわけであるが，これには必ずなんらかの形での規格が存在する。この規格は必ずしも文章としてまとまったものでなく，先輩から受けつぎ，あるいは過去の経験にもとづくなんらかの標準といった形のものであることも多い。しかし，いずれにせよ，なんらかの標準値，規格値などがあってできるだけ計量化しながら仕事を進めて行くのが普通で，技能の段階から技術の段階への移行の程度はこのような標準化された計量値にもとづく作業へと移行した程度によって計られるといってもよい。

また技術者の職能はこのような現場のもつ技能を技術化することと，実験室，研究室および他の分野で得られた成果を現場に正しく適用できるように工夫し，改良し実施可能な形にするという2つの面をもっていると考えられ，この広い意味での規格，標準をできるだけ現場の技能の中から抽出する必要がある。

いずれにせよ，このような規格があることが普通であるが，今までこれらの規格が必らずしも守られていなかったとすれば，規格を守らないための不都合が起こったものならば，これを守るようにするためにはコストがかかるのは当然の話であるが，これは不都合が起こったための費用で，品質管理のためのにかかるものではない。

もし不都合が起こっていないし，将来も起こらないと考えていいならその守る必要のない規格はもっとゆるい規格にするか，あるいは廃止してしまう必要がある。

むしろ品質管理は規格を満足した製品を最も経済的に生産する方法を教えてくれるものであって，品質管理を行なうと金がかかるという非難は守るべき規格を守らなかったことに対する入費を品質管理のための費用と誤解したところから始まる誤りであるといわなければならない。

2. 建設事業のような粗いものを作っているところは品質管理以前の状態であるという誤解

このような表現は建設事業だけでなく，重土工機械の製造，造船などの現場でもしばしば聞くことができる。しかしよく考えると，品物の精粗と品質管理ができるかどうかとはまったく無関係で，バラツキが大きい場合にはバラツキが大きいという現実の上に立って，最も経済的に規格を満足する方法を品質管理が与えてくれるものである。したがって生産物が粗いものであっても少量の注文生産品であっても品質管理は適用可能であるし，また適用すべきものであると考えられる。

3. 管理図に規格を記入し $\bar{x}$ のプロット点が，この規格を満足しておればよいと考える誤解

満足な品物をつぎつぎと造り出していくためには次の2つの条件を満足することが必要である。

(1) 製品が規格を満足すること，（ヒストグラムで調べる）

(2) 工程が安定していること，（管理図で調べる）

この2条件はたがいに独立であって，工程が安定していても規格を満足しない製品がつぎつぎと作られることもありうるし，製品が規格を満足しても工程が安定していないこと，今後の保証が立たず，いつ規格外製品がで

* 中村良一：品質管理限界について，土木研究所報告　110号（1962）

** 中村良一：品質管理（I，II，III）　土木施工　2巻　8，9，10月（1962）

きるかわからぬといった状態も起こり得る。

管理図は本来n個の平均$\bar{x}$がプロットされ，この図面上ではバラツキが$1/\sqrt{n}$となっているので，管理図上で規格値を満足していても，製品が規格を満足していることにはならない。規格値を記入すべきものは，もとの値で書かれているヒストグラムだけであって，このヒストグラムを用いて製品が規格を満足するよう工程調節を行なうべきで，管理図は工程の安定状態を判定するための道具である。

4. 母集団が正規分布しなければならぬと考える誤解

大きさnのサンプルから平均値$\bar{x}$および不偏分散の平方根$\sqrt{V}$を計算したとき

$$\bar{x} \pm 3\sqrt{V}$$

の範囲に全データの99.7%が含まれているはずであるとか，いないとか，いろいろ気にするものが多い。また正規分布からの外れかたをいろいろ気にしたような表現をする向きも多いが，たしかに母平均μ，母分散σ^2の正規分布では

$$\mu \pm 3\sigma$$

の範囲に全体の99.7%が含まれることはそのとおりであるが，μ，σを求めることが不可能であるので$\bar{x}$，$\sqrt{V}$をサンプルにもとづいて計算した場合，もはや

$$\bar{x} \pm 3\sqrt{V}$$

の範囲に全体の99.7%はいるとか，はいらぬとか議論することは無意味である。

中心極限定理によって，個々の値は正規分布しなくても，何個かの平均をとってその分布を作れば，その分布はサンプルサイズnを大きくすることによって正規分布に近似させることができ，後で述べるように$\bar{x}$を20～40点とる間に最大または最小の$\bar{x}$が

$$\bar{x} \pm 3\sqrt{V}\sqrt{1/n}$$

の範囲より外ずれたとき，この$\bar{x}$は一様でないものと判断すればその判断が誤りである確率は大体5%以下となり，日常20回に1回程度以下くらいしか起こらぬ現象が起こったとき，異状なことが起こったのだと考える判断の規準にも合ったもので，決して100～99.7=0.3%程度の非常に珍らしいことが起こつたから工程に異状ありと判断するわけではない。

5. 去年の実績とか，標準としたい値から計算した管理図を使用するべきだという誤解

去年のデータを用いた方がデータ数が多いから正確に$\bar{x}$や$\sqrt{V}$を求めることができるとか，標準としたい値から計算した管理限界こそ，われわれが作りたいと考える目的に合うように追い込む限界となり，これが正しいものであるという主張をときどき見受ける。しかし，これは話が逆で，管理図はあくまでも工程の現在の実力を目安にして，工程が安定しているかどうかを判定する道具であって，工程調節はヒストグラムによって行なうべきものであり，骨材もセメントも，施工条件も変わってしまった去年の実績や，現在の工程の実力にあまり関係もない標準としたい値やらを用いて管理限界を作って，点がうまく中におさまらぬと考えてみても始まらぬわけである。しかし今年のデータが全くないとか，はじめてとりかかる仕事の場合などは，去年のデータや標準としたい値をはじめの数点をとる間参考として用いることもあろうが，これもいわば管理限界らしきものであって，少しデータがとれたらやはり今の工程の実力を早く見つけ，これを基にしてヒストグラムにより規格に合わぬおそれがあるときは，合うように調節し，管理図により工程が安定するようにつとめる必要がある。

6. 同じバッチの中のバラツキを基準として限界が狭ますぎると考える誤解

コンクリートの同じバッチの中からとってよくかきまぜて3個の供試体を作った場合，その3個のデータのバラツキはキャッピングの違い，供試体の中の骨材の分布の仕方の違い，ねりまぜの違いなどで，まず試験誤差程度のものしか反映していないといってよい。ところで，われわれが工事を行なっていく上に，なにも試験誤差の程度でばらついている違い方を検出しようとしているわけではなく，日によって還によっていろいろと作用しているはずのもっと大きな異常，すなわち普通の工事を行なってゆく上には避けられないような料料のバラツキ，計量のバラツキ，混合度のバラツキ，温度湿度の変化，それに試験誤差によるバラツキなどをひっくるめて偶然原因による変動と考えて，これをものさしにして異状原因による変動を検出しようという立場をとっているわけで，もし試験誤差しか反映しないような，同一バッチからとった供試体の間のバラツキをものさしにしたのでは，工事中における偶然変動までもあたかも異状であるかのように検出してしまうことになるわけである。

このために，こうして描いた管理図は限界が狭ますぎて異状がないのにoutとなるものが続出することが多くこの場合は合理的な群としてはもっと大きな単位をとるべきであるということになる。

7. 変動係数の管理図を書くことが望ましいという誤解

変動係数（$V=\sqrt{V}/\bar{x}$が二つの群のチラバリの比較に用いられることがあるが，このときは$\sqrt{V}$と$\bar{x}$との間に比例関係が成り立っということが前提条件になっている。しかし，このような関係が存在することが証明できる現象はあまり多くなく，同じコンクリートの異なった材令の2群などには多少このような現象が認められるが，すでに材令の異ならない2群の間では$\bar{x}$と$\sqrt{V}$は独立でこのような事実は認められない。

一般に同一母集団からサンプリングした群の$\sqrt{V}$と$\bar{x}$の間には，まったく関係がないのが普通であって，コン

クリートの場合でも同一のコンクリートが7日材令のときと91日材令のときに示したチラバリ方の違いを比較するといった使い方のほか，あまり意味をなさない。

そこでこの CV を管理図にすると，もしこれで out になっても，それは $\sqrt{V}$ の異状なのか $\bar{x}$ の異状なのかを分離することは不可能で，したがって品質管理として最もたいせつな処置と直接結びつかないような管理図は書いてみてもむだということになる。

世界各国で管理図法を国家規定として制定しているが，CV の管理図なるものを制定しているのはイギリス規格* だけで，しかもこの場合でも n が小さいときは危険なので $n<5$ での CV の使用を禁じている。

日本での CV 管理図を説明してあるパンフレット**などで $n=3$ の例を示してあるなどは二重の意味で問題があるといえよう。

8.　3シグマ法は近似法であるという誤解

3シグマ法は大量生産のみにしか適用できないとか，係数が3などという簡単なものでは不可で，F 分布や t 分布を用いてなければ〝推計学〟的でないとする主張は最近まであとをたたない。JISにどの管理図法を採用するかについて議論されたとき，3シグマ法か，確率限界法***か，棄却限界法****かと大いに論争***** されたが，3シグマ法がいろいろな面から妥当であることが証明されて長期にわたる論争は終了し3シグマ法がJISに採用されることとなった。(JIS Z 9021—1954 管理図法)

しかし，はっきりした数理的根拠が公表されていないために各方面でまだこの議論が尾を引いている。著者はこの問題について極値に着目した場合 20～40 点中の最大値または最小値が

$$\bar{x} \pm 3\sqrt{V}\sqrt{1/n}$$

を越えた場合，工程に異状ありと判断したときの危険率が大体5％であることをたしかめることができたが，これについては次節で詳論することとし，ここでは3シグマ法による $\bar{x}-R$ 管理図こそ，工程異状を極値に着目して危険率5％（ただし，20～40点について）で行なう判定方法の中で計算手数も考慮した最も効率のよい方法であることを強調するに止どめる。

(2.2)　管理図の性格

管理図の性格をある組数の間の極値に着目して工程の安定状態をチエックする道具と規定すると，次には安定状態の定義が必要となる。ここでは安定状態とは異状原因によるバラツキと偶然原因によるバラツキを分離し，これにもとづいて異状原因をさがして再び起こらぬよう処置をとり，偶然原因によるバラツキのみを持つようにした状態と定義する。

また異状原因とは，その原因を追求して再発しないよう処置をとることが経済的にできるようなものと定義しておく。

したがって過去の情報により平均 $\bar{x}_0$，不偏分散の平方根 $\sqrt{V_0}$ (その自由度 ϕ_0) を得て，この知識をもとにして爾後の工程で得られるデータを観察しながら，工程の異状（逆に平均値，分散などの一様性）を検定する方式が管理図ということになる。

$\bar{x}-R$ 管理図はデータを合理的な群に分け，その群の中の範囲 R とその群の平均値 $\bar{x}$ を組にして管理しようとするもので，いわば測定値と期待値の差を偏差，測定値と期待値の推定値との差を残差といえば，前者が大きいとき正確度が悪いといい，後者が大きいときは精密度が悪いと考えることができ，この二者が管理状態になければ（安定していなければ）信頼度が悪いという表現をされるべきで，$\bar{x}$ 管理図は正確度の管理を，R 管理図は精密度の管理を，$\bar{x}-R$ 管理図は信頼度の管理を行なうものと考えてよい。

一般に2つの平均値の差の判別情報量として

$$\partial 2\hat{D}[H_1,\ H_2] = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|/\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}{\sqrt{V}} = t$$

は $\sqrt{V}$ の自由度を $n-1$ とすれば，自由度 $n-1$ の t 分布をする。ただし $\sqrt{V}$ は独立にサンプリングされたサイズ n の標本から計算したものとし，x_1, x_2 のサンプルから計算したときに限り $n-1=n_1+n_2-2$ となるものとする。

そこで真の平均 $\mu_1-\mu_2$ の信頼係数 95％の区間は

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{0.05}[n-1]\sqrt{V}\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}$$

で，これが和気幸太郎の提案の根拠となり，特に $n_2=1$ の場合，次の1点に対する棄却限界として

$$\bar{x}_1 \pm t_{0.05}[n-1]\sqrt{V}\sqrt{(n_1+1)/n_1}$$

が得られ，これが増山の棄却限界法の根拠となっている。

したがってこの方法は次の1個あるいは次の1組のデータが今までと同じ母集団に属するかどうかの検定としてはまさに危険率5％の検定方式であるが，工程の安定

---

*　BS 600 R：1942 Quality Control Charts

**　丸安隆和：コンクートの品質管理　土木学会

***　Pearson, E. S.：The Application of Statistical Methods to Industrial Standardization and Quality Control. (1935) BS 600

****　和気幸太郎：品質管理論，コロナ社(1949)
増山元三郎：推計学への道　東大出版会(1950) p. 145

*****　討論3シグマ法批判の再批判　品質管理 I-4(1950) p. 173
討論F分布による管理図法の研究　品質管理 I-5(1950) p. 258
和気幸太郎：討論品質管理を読んで　品質管理 I-8(1950) p. 362

度を検定する限界としては k 組の $\bar{x}$ のうちの最大値または最小値が越したならば全体として一様でないと判定する立場に立つので，上に述べた方法では危険率が過大となり実は工程に別段異状がないのに異状と判断してむだな，またはかえって有害な処置をとる危険が増大する。このことは

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)/\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}{\sqrt{V}}$$

とスチューデント化範囲 q

$$q=\frac{(\bar{x}_{max}-\bar{x}_{min})/\sqrt{1/n}}{\sqrt{V}}$$

の大小関係を見ても明らかで，たとえば次の4群について

	A_1	A_2	A_3	A_4
	47.9	47.6	47.0	47.6
	47.8	47.5	46.5	46.5
	48.4	48.9	48.0	47.5
	48.2	47.9	47.6	46.8
	47.0	46.8	47.5	46.5
$\bar{x}_i$	47.86	47.74	47.32	46.98
S_i	1.152	2.332	1.348	1.148
V_i	0.288	0.583	0.337	0.287
$\sqrt{V_i}$	0.537	0.764	0.581	0.536

4群の中の $\bar{x}_{max}=\bar{x}_1=47.86$ と $\bar{x}_{min}=\bar{x}_2=46.98$ をこれらが，それぞれ最大および最小のものであるということを知らずに，つまり A_2 と A_3 の情報なしにこの2群だけについてその差の判別情報量を計算し，t 検定した場合

$$t_0=\frac{(47.86-46.98)/\sqrt{(1/5)+(1/5)}}{\sqrt{(1.152+1.148)/(5+5-2)}}=2.585$$

自由度8の t 分布5％点は $t(8,\ 0.05)=2.306$ で

$$t_0>t(8,\ 0.05)$$

であるから，有意差があることとなる。これに対して，実は A_1 A_2 は4群の中のそれぞれ最大または最小の平均を与えるものであることがわかった場合，この4つの平均が一様であるかどうかの検定はスチューデント化範囲 q によって行なうが，，予備データの平均値 $\bar{x}_0$ に対し

$$\bar{x}_0\pm h\sqrt{V}$$

として次の k 組の間の $\bar{x}$ の一様性検定の限界は $\phi>30$ に対し $\phi=15\sim30$ の間では k が大体3となり，$\sqrt{V}$ を効率よく範囲 $\bar{R}$ で推定した場合は工程平均の一様性検定のための限界は一般に用いられている3シグマ管理限界と一致し

$$\bar{x}_0\pm A_2\bar{R}$$

が相当広い範囲に適用されることは文献V-4,7に述べてあるとおりで，$n>2$ の一般の場合は予備データと同程度の組数の間の管理限界が3シグマ管理限界と一致するので最初の5組のデータを用いて次の5組の間の管理限界を，次に最初の10組のデータを用いて次の10組の間の管理限界を計算するという，いわゆる

5＋5＋10＋20＋20方式

(20組を越す場合は最近の20組のデータを用いて次の20組の間の管理限界を計算する)

を用い，$n=2$ の特別な場合（合理的な群の大きさとして2しかとれないか，または一点管理図で逐次レンジをとる場合）は予備データの半分の組数の間の管理限界が3シグマ管理限界と一致することから

5＋3＋5＋10＋10方式

を用いればよいことになる。(文献V—4)

結　論

以上5.章を費して情報量解析の概要ならびに線型推定，周期分析，危険度の評価，最適条件の決定，品質管理等の問題で主として河川工学に関連して現われる諸現象の解析への適用方法などについて論じた。河川工学に関連した諸現象は多くの因子の複雑な影響を受け，しかも得られる試料の数も多くないのが普通であるが，このような諸現象を予測するためには，これに関連すると考えられる諸因子の観測を行ない，関連因子の情報がまったくない場合のあいまいさに対して諸因子の観測によるあいまいさの減少の程度が偶然変動に比して有意であるときに，その因子を取り上げようとする情報量解析の諸方法が最も有用であり，また今後予測にあまり役立たぬ測定は河川工学関係の諸現象については特に経費のかさむものが多いという理由から，早く打ち切りたいという希望にも合致し，また主成分分析などの方法により新しいしかもより数少なく，より有効な測定因子を見いだすこともまた望ましい方向である。

従来周期成分を含むと考えられた現象についても，その解析方法の複雑さと意味のある周期を選別することの困難さから，河川関係の現象についてはあまり取扱われていなかったが，やはり情報量解析の立場から解析しうることを示した。また多くの因子の複雑な影響を受ける現象について，その最適条件およびそのときの値を求めることも Box-Wilson の提案以来割合普及しているものの，一次平面の当てはめの当否についてただ係数の比較を行なうといった主観的なやり方に止どまり，F 検定の自動化の困難さと相まって，ことさらに複雑な河川関係の諸現象の解析への適用が困難であった。

これらの非常に計算手数を要し，しかも中途で人間の判断を必要とした計算手続きを情報量解析の立場から一貫した自動計算を可能ならしめ，さらに F 検定の自動化も適当な近似式の導入により可能とすることにより，全自動計算のプログラムを作成し，多くの計算実例を示すことができた。

これとまた逆に時間的制約の多い河川事業関係の日常

の情報量解析手法としては，データのもたらす情報を利用し得る程度で測る従来の効率に対し，計算手数も考慮し必要十分な情報を最小の計算労力によって解析を行なう方法が最良であることを提案し，この最もよい応用例として3シグマ法による$\bar{x}-R$および$x-R_s$管理図がある区間の極値に着目して工程の安定状態検定方法として厳密かつ最良であることおよび予備データサイズが少ない場合も適当な注意のもとに3シグマ管理限界が適用しうることをたしかめることができた。

複雑かつその観測に時間ならびに高額の費用を要するものが多い河川工学関係の諸現象の解析に，この情報量解析手法が大いに利用されることを期待して本論を終わることとしたい。

なお2.〔5〕ダムのたわみ解析に対する応用については ダム構造研究室三池技官（現 熊本大学）4.〔5〕下久保ダムにおける実例については同室岸本技官の協力を得た末尾ながら記して謝意を表する。

参考文献

Ⅰ-1 Lee, Y. W.: Statistical Theory of Communications. Wiley (1960)

Ⅰ-2 Reza, F. M.: An Introduction to Information Theory. McGraw-Hill (1961)

Ⅰ-3 Goldman, S.: Information Theory. Prentice-Hall (1953)

Ⅰ-4 Kullback, S: Information Theory and Statistics. Wiley (1959)

Ⅰ-5 喜安善一，室賀三郎：情報理論 岩波講座 現代応用数学 岩波 (1957)

Ⅰ-6 科学技術連盟：時系列論および情報の理論とその応用 日本科学技術連盟 (1953)

Ⅰ-7 Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton Univ. Press (1946)

Ⅱ-1 Wilks, S. S.: Mathematical Statistics. Wiley (1962)

Ⅱ-2 Anderson, T. W.: An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley (1957)

Ⅱ-3 Graybill, F. A.: An Introduction to Linear Statistical Models. Vol. 1. McGraw-Hill (1961)

Ⅱ-4 Keeping, E. S.: Introduction to Statistical Inference. Van Nostrand (1962)

Ⅱ-5 Kendall, M. G.: A Course to Multivariate Analysis. Charles Griffin (1957)

Ⅱ-6 森口繁一：統計解析 岩波講座 現代応用数学 岩波 (1958)

Ⅱ-7 日本応用力学会：応用統計学 金原出版 (1956)

Ⅱ-8 森田優三：経済変動の統計的分析 岩波全書 岩波 (1955)

Ⅱ-9 松原康夫：需要の分析と予測 日刊工業新聞社 (1959)

Ⅱ-10 中村慶一：実測資料による構造分析（Ⅰ） 土木技術資料 4-6 (1962)

Ⅱ-11 中村慶一：実測資料による構造分析（Ⅱ） 土木技術資料 5-6 (1963)

Ⅱ-12 中村慶一：周期現象の構造分析 土木技術資料 4-8 (1962)

Ⅱ-13 ダム構造研究室：河川総合開発事業昭和37年度成果報告書 (1963)

Ⅱ-14 Rocha, M. Serafim, J. L. & Silveria, A.F.: A Method of Quantitative Interpretation of the Results Obtained in the Observation of Dams. 6th Congress of Large Dams (1958)

Ⅲ-1 秋草，深谷，横田，中村：工事管理とその実際 最新土木施工法講座 山海堂 (1958)

Ⅲ-2 中村慶一：危険度の評価 土木技術資料 4-9 (1961)

Ⅳ-1 Box, G. E. P. & Wilson, K. W.: On the Experimental Attainment of Optimum Condition. J. Roy. Stat. Soc. Series 13 131-45 (1951)

Ⅳ-2 Box, G. E. P.: Evolutionary Operation: A Method for Increasing Industrial Productivity. Applied Statistics V. 4 N. 2 p. 3-23 (1957)

Ⅳ-3 島田正三：最適条件を求めるための統計的方法 品質管理 7-4 p. 219-26 N. 5 p. 293-8 (1956)

Ⅳ-4 長尾義三：Box Wilson 法による円弧すべりの計算法 土木学会誌 45-7 p. 69-77 (1960)

Ⅳ-5 中村慶一：山登り法による最適条件追跡プログラム 土木技術資料5巻8号 (1963)

Ⅴ-1 森口繁一：品質管理 岩波全書 岩波 (1955)

Ⅴ-2 Sarhan & Greenberg: Contribution to Order Statistics. Wiley (1962)

Ⅴ-3 中村慶一：品質管理（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）土木施工 2巻 8, 9, 10月号 山海堂 (1961)

Ⅴ-4 中村慶一：品質管理限界について 土木研究所報告 (105号) (1961)

Ⅴ-5 David: Revised Upper Percentage Points of the Studentized Deviate from the Sample Mean. Biometrika (1956) p. 446

Ⅴ-6 Nair: The Distribution of the Extreme Deviate from the Sample Mean and its Studentized Form. Biometrika (1948) p. 118

Ⅴ-7 中村慶一：品質管理の限界—3シグマ法の妥当性—セメントコンクリート No. 128 (1961)

路盤の荷重分散効果(2)

(昭和 38 年2月)

竹下春見*

岩下義治**

要旨

本文は昭和 35 年度に発表した"路盤の荷重分散効果"に関する研究の続報である。建設省土木研究所千葉支所において行なった大型試験とその結果の考察についてのべる。

目次

1. まえがき……(1)
2. 舗装厚設計法の考え方……(1)
3. 今までの研究……(2)
4. 千葉支所におけるテストピットと載荷試験装置……(3)
5. 試験に使用した材料と路床路盤の施工……(5)
〔1〕昭和 35 年度に利用した路床路盤材料について……(5)
〔2〕昭和 36 年度に利用した路床路盤材料について……(6)
〔3〕テストピットにおける路床路盤の施工…(7)
6. テストピットにおける試験とその結果の考察(10)
〔1〕支持力係数……(11)
〔2〕変形係数……(12)
〔3〕路盤効果……(13)
〔4〕路床面以下の土圧……(14)
〔5〕上層底面に生ずる引張り応力……(15)
〔6〕コヘイジョメーター値……(16)
〔7〕破壊作用係数について……(17)
〔8〕繰返し載荷による路床路盤の状態……(18)
7. 結論……(20)
参考文献……(21)
付表……(22)

1. まえがき

建設省土木研究所千葉支所においては，道路構造に関する大型試験を実施している。路床路盤の問題については昭和 35 年度と 36 年度に，路盤材料と路床土をかえて載荷試験を実施した。その間，いままでに発表した報告の再検討と考察をくりかえしてきた。本文は載荷試験のデータを中心にして，その考察の結果について報告する。

2. 舗装厚設計法の考え方

舗装厚の設計法にはいろいろな種類のものが発表されている。しかしそれらの設計法を分析すれば，その考え方の基礎となる立場としては，そんなにたくさんのものがあるわけではない。大きく分類すればつぎの2つになるであろう。

(i) 表層あるいは基層の曲げによる引張り応力をある限度内におさえようとする考え方。

(ii) 表層表面の沈下をある限度以内(限界沈下量)におさえようとする考え方。

コンクリート舗装の設計法は一般に(i)の方法を採用している。しかしたわみ性舗装といわれるアスファルト舗装の場合にも，表層あるいは基層の曲げを問題にしようとする傾向があらわれてきている。アスファルト混合物の曲げを繰返し試験により研究しようとする傾向が増加しているのはそのあらわれであるとも考えられる。また Hveem のコヘイジョメーターなどは，表層あるいは基層の曲げを強調している試験法であり，アスファルト舗装に対するカリフォルニヤ法においては，明らかに曲げを問題にしているといえる。

曲げを問題にする場合には Westergaard, Hogg-Odemark, Burmister-Fox などによって発展させられた弾性理論が近似的に利用できるであろう。粘弾性論的な研究が未だ十分に行なわれていない現状では，上記の弾性理論が少なくとも定性的には役立つはずであり，実験結果を利用してこれらの弾性理論の結果を補正するという方法が現在でも実用的な面では主力となるであろう。

Westergaard 流の弾性理論は，版の沈下は曲げ作用のみにより生じ，荷重の垂直圧力による沈下は考慮に入れていない。また版の下の層は無限個数のスプリングがならんでいる状態と仮定されている。これに対して，Burmister, Fox 流の考え方は上下両層ともに弾性体として考えているから，上層の沈下を考える場合には曲げ作用と荷重による垂直圧力による沈下をともに考慮していることになる。純理論的にはもちろんBurmister, Fox による解の方が Westergaard による方法よりも正し

* 前道路部長，工学博士(現日本舗道株式会社技術部長)
** 前道路部 舗装研究室研究員

い。しかし上層と下層の弾性常数の差がある程度大になった場合には，定性的な関係は両者の方法の間にたいした差異はない。もし大略的な値を問題にするならば，Westergaard の式を利用した方が Fox などの解法を利用するよりもずっと簡単で便利である。

（ii）の方法すなわち限界沈下量を問題にする場合には，表層あるいは基層の材料と厚さとが適当なものであれば，路面に生ずる不等沈下は路盤や路床，とくに路床部分の不等沈下によるものが多いから，垂直圧力により路面にある限度以上の不等沈下を生ぜしめないように，路床土の状態により必要な路盤厚をきめようとする原則に立つものである。CBR 法など多くの経験的な方法は，この考え方によるものが多い。

限界沈下量を考える方法においては，表層あるいは基層が曲げによる応力には抵抗できても，繰返し荷重をうける場合には一般に上部にある層ほど下層の材料よりは良質であって永久変形量が少ない。したがって累積される変形量は下部ほど大きくなるであろうし，材料は決して均一なものではないから同一水平面にある点でも永久変形量は異なり不等沈下の原因となる。下部の不等沈下が上部の層に影響して表層の不等沈下が生じ，過大な応力が生じて表層の破壊に至る。したがって表面の沈下量をある一定限度におさえる必要があり，曲げによる応力に抵抗するだけの強度特性をもった表層をつくるという以前に限界沈下量を経験的にきめておかなければならないという立場にたつものである。

Westergaard の式を改良して使用しているコンクリート舗装厚の設計法においても，K 値を決定する場合に沈下量 0.125cm に相当する値をとるという点において，限界沈下量の考え方が導入されている。

表層あるいは基層の曲げと限界沈下量とは当然同時に考慮さるべき問題であろう。また限界沈下量を考慮する場合には，舗装の深さ方向のある一点における垂直圧力の大きさも当然考慮に入れねばならない要素となるであろう。

本文における研究は深さ方向の垂直圧力と上層底面に生ずる引張り応力を大きくとりあげることにする。上層底面に生ずる引張り応力――いいかえれば上層の曲げ応力については直接測定は行なっていないが，間接的な実験結果は千葉支所ができる以前の赤羽支所におけるデータを利用する。

3. 今までの研究

路床路盤の荷重分散性に関して筆者らが行なった研究のうちで組織的なものは昭和 31 年に土研報告において発表した。[1] この報告での主な結論はつぎのようであった。

（i） 路盤上で測定した支持力係数を K_1，路床上で同じ載荷板を利用して測定した支持力係数を K_2，路盤厚を h，載荷板の半径を a とすれば，K_1/K_2 と h/a の間には一定の傾向がありそうである。

（ii） 路盤直下の土圧と載荷荷重強度の比と h/a の間には一定の関係があるが，Fox の理論による関係とは傾向が違う。

その後 K_1/K_2 と h/a の関係について，広範な研究をつづけた結果は昭和 35 年に発表した。[2),3)] その主な結論はつぎのようである。

（iii） K_1/K_2 と h/a の間には路盤と路床の強度特性に応じて一定の関係がある。

（iv） 路盤と路床の平均の変形係数を CVT 試験により測定して，それぞれ E_1'，E_2' とすれば，K_1/K_2 と h/a の関係は Burmister[4)] の弾性理論による結果とよく一致する。しかし Burmister により提案されている方法により E_1 と E_2 を計算した値と CVT 試験による E_1' と E_2' とは同じにならない。

（v） 一般に現場で施工されている施工法によれば，K_1/K_2 と h/a の関係は Burmister の結果とその傾向が大分異なり，h/a が大になっても Burmister より予想されるほどには K_1/K_2 は大にならない。

（vi） 普通に現場で施工されているローラー転圧には路床の状態に応じて路盤上で支持力係数が増加する割合には限度がある。つまり，粒状材料を使用した路盤の場合には普通のローラー転圧では K_1/K_2 に一定の限度がある。

（vii） 自然交通はローラー転圧の効果よりも大である。

（viii） 代表的な路盤材料を利用して，砂層路床よりも支持力係数の小さい路床上に路盤をつくった場合の K_1/K_2 と h/a の関係を一つの図表にあらわした。

昭和 35 年に発表した K_1/K_2 と h/a の関係を検討した結果，昭和 37 年度に粒状材料を利用した路盤の場合に，K_1/K_2 と h/a の間には[5)]，

（ix） α と β を常数とすれば

$$\frac{h}{a}=\alpha\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{\beta} \quad \cdots\cdots(1)$$

なる関係が成立していることが判明した。

ここに $\beta=1.65$

$\alpha=0.415$（A曲線）

$=0.832$（B曲線）

$=0.500$（C曲線）

$=0.265$（D曲線）

である。β はローラー転圧の性質に関する常数で，α は路盤材料の性質を表現する常数である。

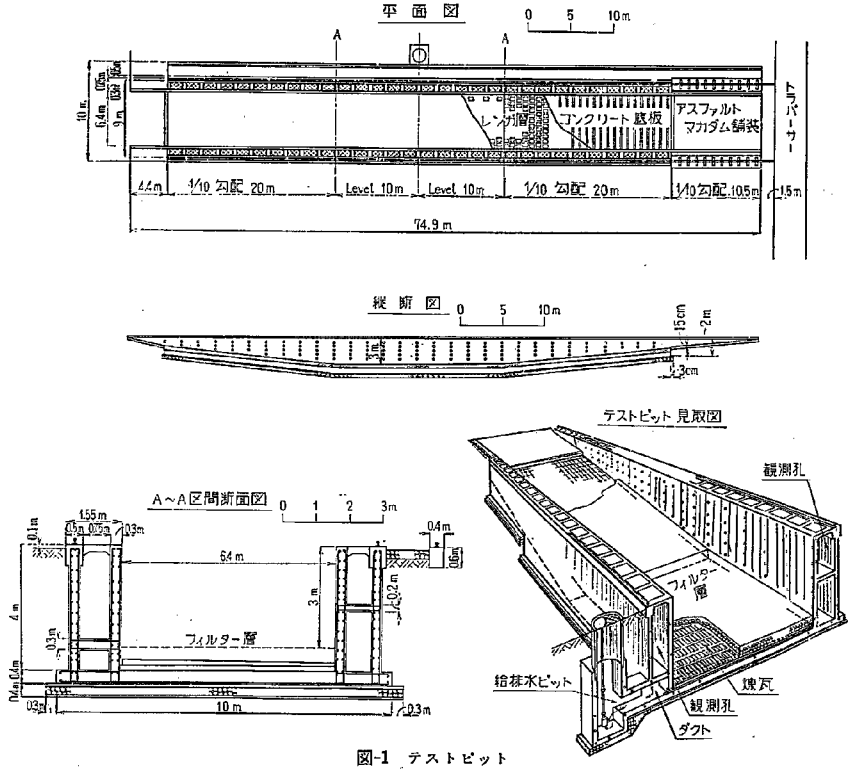


図-1　テストピット

4. 千葉支所におけるテストピットと載荷試験装置

千葉支所に構築したテストピットは 図-1 に示すように長さ約 75 m, 幅員は約 6 m の路床路盤が構築できるようになっている。深さは最深部が 3 m である。底部は煉瓦をしきつめた透水層で側面の観測孔に連絡している。将来道路構造に対する地下水位の変動の影響を研究する予定でつくられたもので，地下水位を任意にかえることができる。

観測孔の外側壁の上面にレールがとりつけられてい

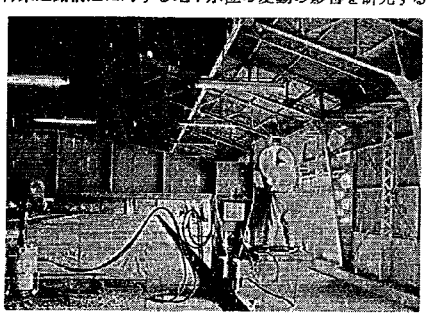


写真-1　載荷試験装置

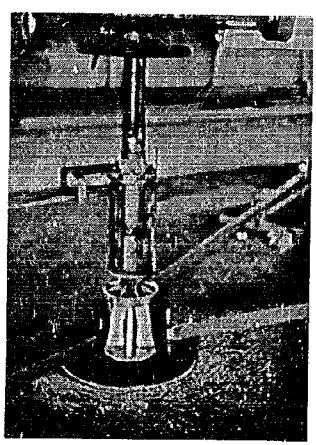


写真-2　載荷試験中の載荷板の沈下測定

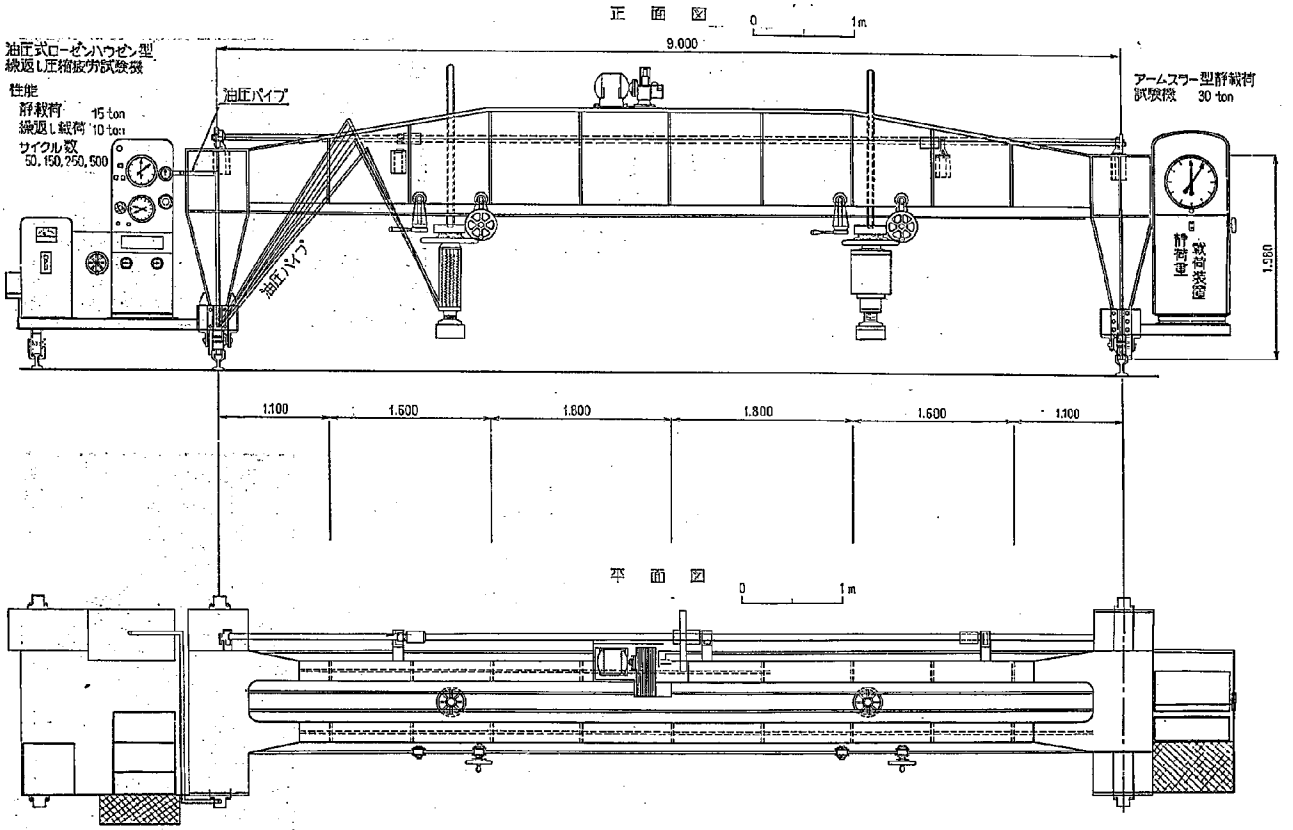


図-2 30 ton 載荷試験機

る。このレールは載荷試験装置の移動と載荷試験装置を保持して，載荷装置が荷重をかける場合の支えをする役目をもっている。

載荷試験用に使用した載荷試験装置は 図-2 に示すようである。アムスラー型静荷重試験機は 30 t までの荷重をかけることができる。油圧式ローゼンハウゼン型試験機は静荷重で最大 15 t，繰返し載荷で最大 10 t の能力があり，繰返し載荷のサイクル数は 50，150，250，500 cpm である。

載荷試験中の試験機の状態を 写真-1 に，載荷板の沈下をベンケルマンビームで測定しているところを写真-2 に示す。

5. 試験に使用した材料と路床路盤の施工

テストピットを利用して，昭和 35 年度と昭和 36 年度に試験路盤を作成した。昭和 35 年度においては路盤材料の変形係数と路床土の変形係数の比が比較的大きくなるような材料をえらび，昭和 36 年度にはこの比が比較的小になるような材料をえらんだ。

〔1〕 昭和 35 年度に利用した路床路盤材料について

昭和 35 年度においては，路床材料として千葉市穴川町地内の土木研究所千葉支所構内の関東ローム を使用した。使用した関東ロームの粒度は 図-3 に示すようである。この土を含水量が 60 % になるまで室内乾燥して JIS A 1210 にしたがって試験をした結果によると，最適含水量は 74 % 付近であった。

路床部分の構築中に管理試験として，締固められた路床土中より乱さない試料を採取して試験をした結果は 図-4 および 図-5 に示すようで，含水量は大体 105～120 % の範囲内にばらついており，含水量と乾燥密度，乾燥密度と変形係数の間には一定の関係はみだされない。含水量の変化が小なるように，また乾燥密度のばらつきもできるだけ小になるように，施工にあたっては十分に注意をしたつもりであるが，試験誤差を考えても相当のばらつきがみられ，このような小規模工事で十分に注意をしても，施工の一様性ということは相当に困難であることがわかる。

関東ローム路床土が軟弱であるために，通常の道路の施工法にしたがってしゃ断層として砂層を 10 cm 厚に施

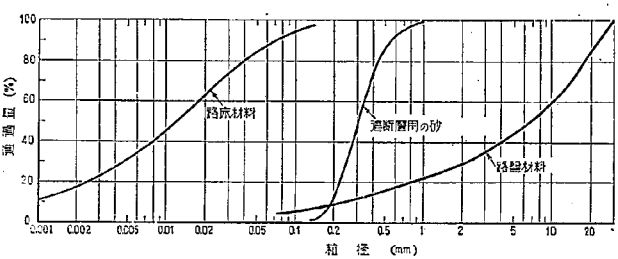


図-3　昭和 35 年度に施工した路床路盤材料の粒度

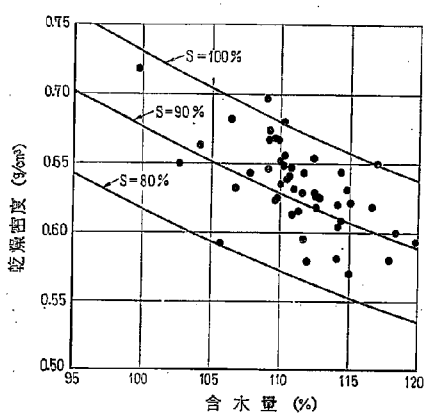


図-4　路床土の施工管理試験結果
（乱さない試料による）

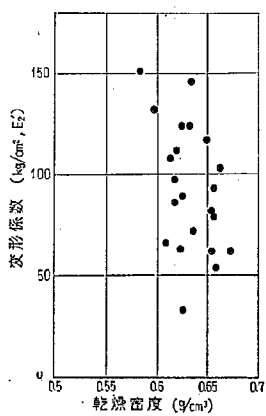


図-5　乱さない試料による CVT 試験結果
（関東ローム路床土）

工した。砂の粒度は 図-3 に示すようで，JIS A 1211 による突固め試験と CBR 試験の結果によれば，最適含水量は 12.4％，最大密度の 95％ に相当する密度のときの水浸 CBR は 22 である。試験現場においては軟弱な路床の上に砂層を 10 cm 厚に施工をしても，路床を乱さないためには十分に締固めることができないので，締固めは突固め試験におけるほどには締固めることができなかった。試験終了後掘削して密度を測定したところ，平均の乾燥密度は 1.5 g/cm³ であった。現場の含水量で，この密度付近に締固めた試料につき行なった CVT 試験の結果は図-6 に示すようであるので，現場における砂層の変形係数は平均440kg/cm²程度であろう。

路盤材料として使用した砂利，砂の混合物の粒度は図-3 に示すようで，この材料につき JIS A 1211 の方法により試験をした結果は 図-7 に示すようである。現場に施工する場合には，この材料に細粒部分として炭酸カルシウム 10％ を混合した材料を使用した。図-8 にはこの混合物の乾燥密度と変形係数の関係が示されている。図中の●印は試料を現場と同じ条件で養生をしたときの値であり，×印は試料をその含水量が変化しないようにシールして養生をしたときの値を示している。図によると，施工後ほぼ 2 週間までは季節変化の影響を受けないで，乾燥密度の増大とともに変形係数も増加しているが，ほぼ 1 カ月前後を経過した場合には炭酸カルシウムの影響と季節変化の影響があらわれているようである。

〔2〕 昭和 36 年度に利用した路床路盤材料について

昭和 36 年度においては路床土として千葉県東金市郊

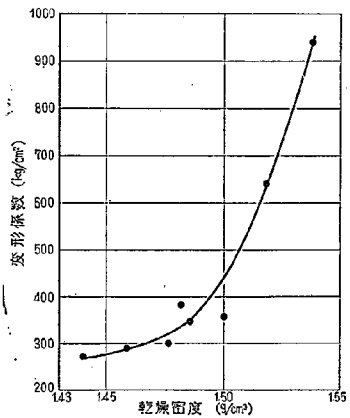


図-6　砂の乾燥密度と CVT 試験結果

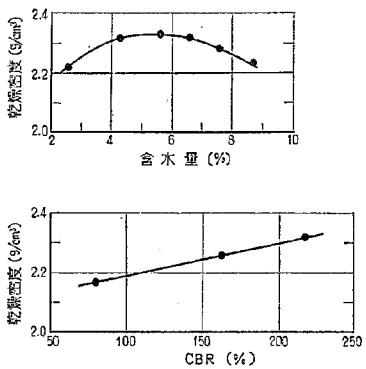


図-7　路盤材料についての CBR 試験結果

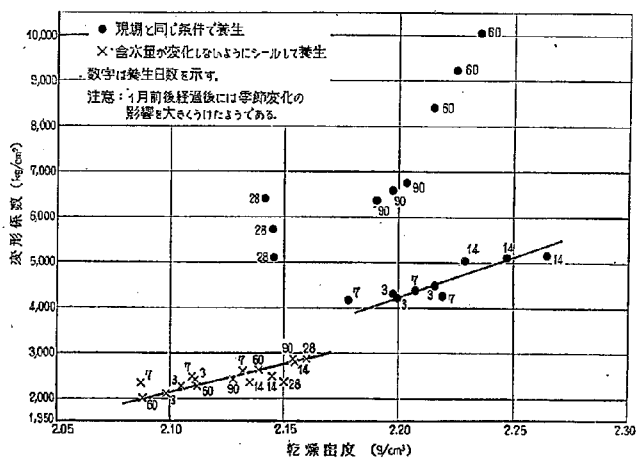


図-8　路盤材料の CVT 試験結果

外の山砂を利用した。山砂の粒度は 図-9 に示すようである。突固め試験の結果は図-10に示すようで，乾燥密度と CBR の関係は 図-11 に示すようである。現場に施工した含水量は管理試験の結果 15.5～19.0％であったが，路床中より乱さない試料を採取して行なった CVT 試験の結果および突固めて作成した試料につき行なった CVT 試験の結果は 図-12 に示すようである。図によればこの路床土においては，乱した試料と乱さない試料との間に力学的な差異はなさそうである。しかし昭和 35 年度における場合と同様に，現場の状態には相当のばらつきがまぬかれないことがわかる。

路盤材料としては 図-9 に示す粒度をもつクラッシャーランを使用した。クラッシャーランについての乾燥密度と CVT 試験結果の関係は 図-13 に示すようである。

〔3〕 テストピットにおける路床路盤の施工

図-14 に示すように，テストピット中央部 3 m を底面フィルター表面から 2.4 m までを路床とし，16 等分して 1 層厚を 15 cm として転圧しながら路床の構築を行なった。路床材料の運搬は昭和35年度においてはダンプトラックとブルドーザーの併用を用い，昭和 36 年度においてはベルト・コンベヤーを利用した。路床土の転圧には昭和 35 年度においてはブルドーザーを往復 3 回，昭和 36 年度においては 10 t マカダムローラーと 1.5 t 振動ローラーを使用した。材料運搬およびローラー転圧の状況は写真-3 および写真-4 に示すようである。

第 4，第 8，第 12 および第 16 層目においては，転圧完了後に含水量，密度，現状土 CBR および現状土 CVT の各試験用の試料採取を行なった。写真-5～8 は試料の採取中と採取した試料を示すものである。

図-15 に示す位置の所定の深さに土圧計を埋設した。その状況は写真-9 に示すようである。

路盤については厚さ 60 cm を 4 等分して，1 層 15 cm 厚として転圧構築を行なった。昭和 35 年度においては炭酸カルシウムを利用したので，コンクリート・ミキサーにより所定の配合に混合した材料をベルトコンベヤーにて運搬し所定の位置にまき出した。昭和 36 年度においては安定材は利用していない。写真-10 は路盤の転圧，写真-11 は材料運搬用のベルトコンベヤー，写真-12 は路盤面をビニール布でおおい含水量の変化を極力おさえるように工夫した状況を示す。

路盤の密度測定は写真-13 および写真-14 に示すように砂置換法によって行ない，現場の乾燥密度を出し，そ

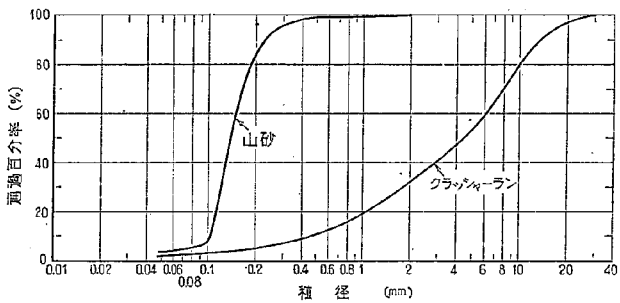


図-9　昭和 36 年度に施工した路床路盤材料の粒度

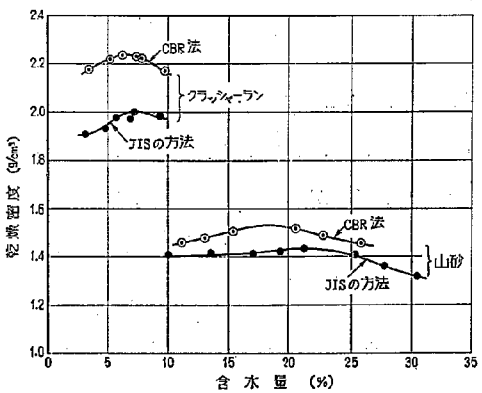


図-10　路床路盤材料の突固め試験結果

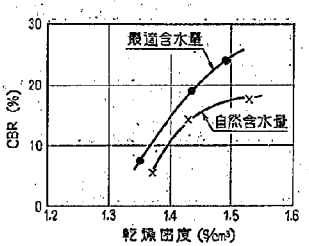


図-11　路床土（山砂）の CBR 試験結果

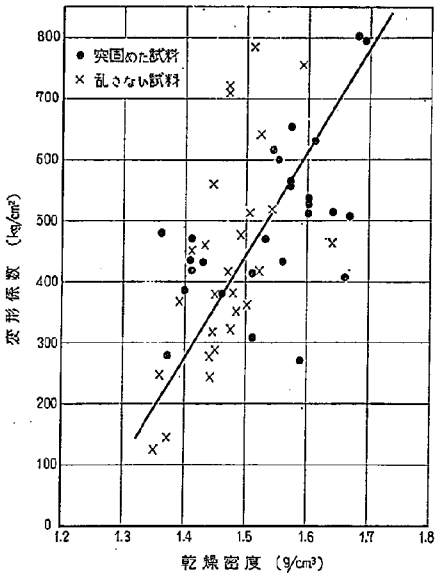


図-12　路床土（山砂）に関する CVT 試験結果

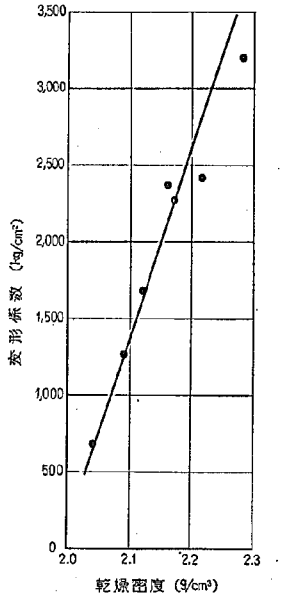


図-13　路盤材料（クラッシャーラン）の CVT 試験結果

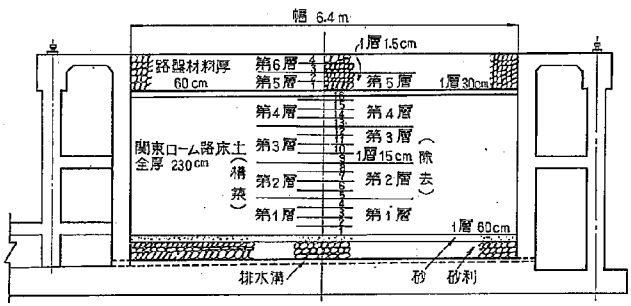


図-14　テストピット中央付近断面図

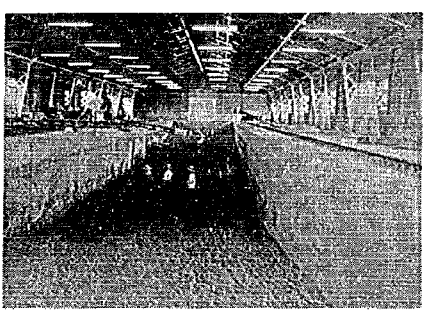


写真-3　路床材料の運搬と締固め

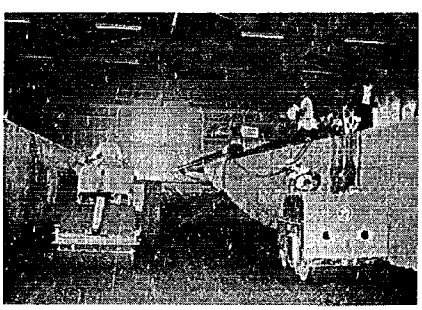


写真-4　路床の各層転圧

写真-5　CVT 試験用の試料採取

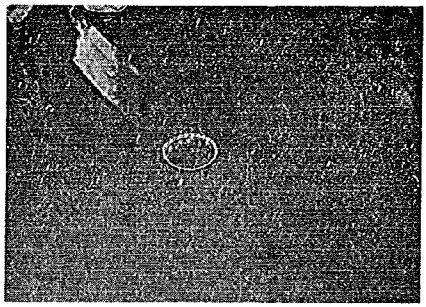


写真-6　CVT 試験用の試料採取

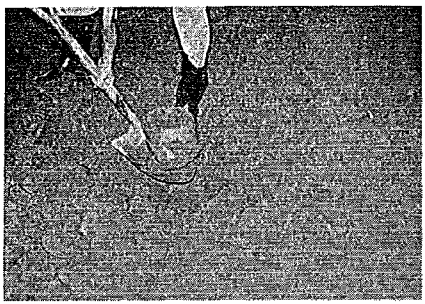


写真-7　CVT 試験用の試料採取

写真-8　採取された CVT 試験用の試料

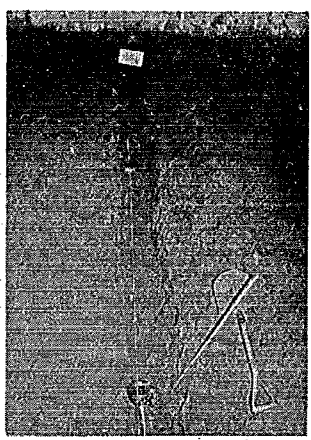


写真-9　土圧計の設置状況

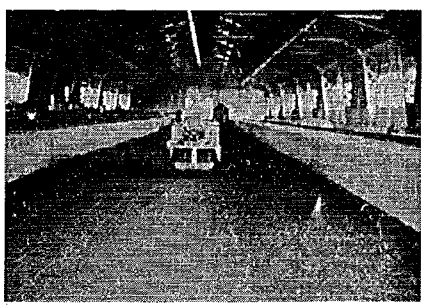


写真-10　路盤のローラー転圧

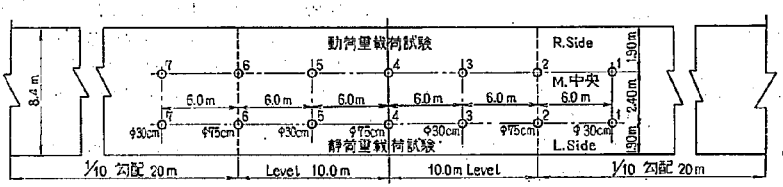


図-15　テストピット平面図（載荷試験位置を示す）

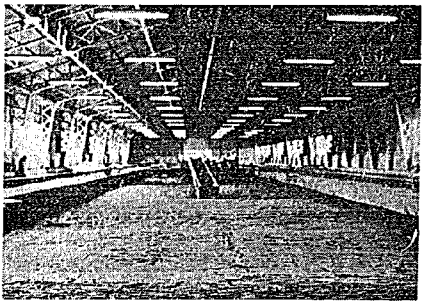


写真-11 ベルトコンベヤー

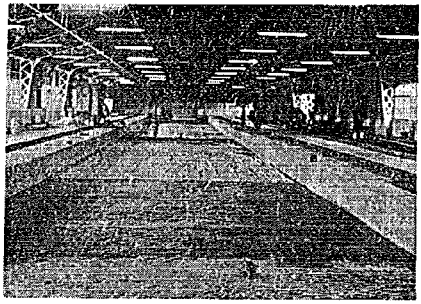


写真-12 ビニール布でおおわれた路盤面

写真-13 路盤の密度測定

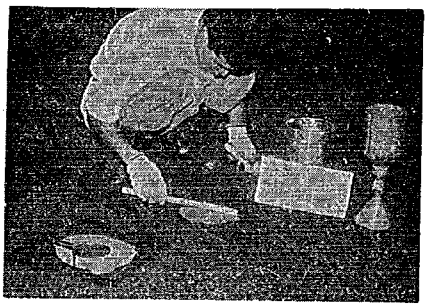


写真-14 路盤の密度測定

写真-15 CVT 試験用の試料

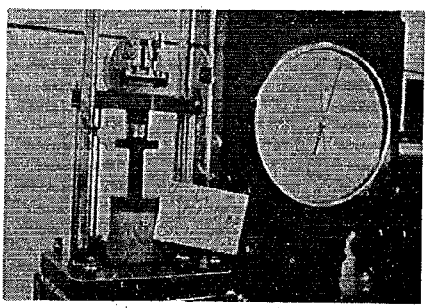


写真-16 CVT 試験中

れに等しい乾燥密度に路盤材料を締固めて CVT 試験用の試料とした。CVT 試験用の試料は 写真-15 に示すようで，写真-16 は CVT 試験中の状況である。

6. テストピットにおける試験とその結果の考察

試験路盤および路床において静荷重載荷試験と動荷重載荷試験を行なった。載荷試験の状況は 写真-1 および写真-2 に示すようである。載荷板としては直径30cm と 75 cm の剛性板を利用し，沈下の測定には主としてベンケルマンビームを利用した。載荷試験時に土中にうめ込んだ土圧計により路床中のいろいろな深さにおける土圧を測定した。

静荷重載荷試験は JIS A 1215 に準じて行ない，動荷重載荷試験の場合には荷重の繰返し速度は 250 cpm で行なった。昭和 35 年度においては路盤と路床の変形係数の比 E_1'/E_2' は 60～86 の範囲で平均値は 73，昭和 36 年度においては E_1'/E_2' の範囲は 4～5.3 で，その平均値は 5 である。

載荷試験の結果の主なるものは一括して，付表 1～4 に示す。

〔1〕 支持力係数

支持力係数を求めるための載荷試験は，円形載荷板を利用して荷重を漸次増加させながらそれにともなう沈下量を測定する。しかし路床あるいは路盤は完全弾性体ではないので，荷重沈下曲線は普通最初から曲線をなしており直線部分はみとめられない。また荷重をとりのけても沈下は完全には元へもどらない。地盤が弾性体に近いほど沈下量の復元は大で永久沈下量は小なるはずである。支持力係数を求めるには，荷重沈下曲線の直線部分がないことと限界沈下量という概念をふくめる意味で沈下量が 0.125 cm または 0.25 cm に相当する荷重強度をその沈下量で割った値をとっている。本文においては路床，路盤のみを研究の対象としているので，沈下量は 0.25 cm をとることにした。

載荷試験を行なったときに，永久沈下量の全沈下量に対する割合を測定した結果が 図-16 と 図-17 に示されている。図-16 によると路床上での載荷試験結果は路床のK値の大小により永久沈下量の割合が規則的に変化するという傾向はみられない。図-17 によると路盤上での載荷試験結果は，関東ロームのような粘性土よりなる路床土の場合には，K値が大になるにしたがって永久沈下量の割合が減少するような傾向がみられる。しかし山砂を路床土に使用した場合には，この傾向は認めがたい。

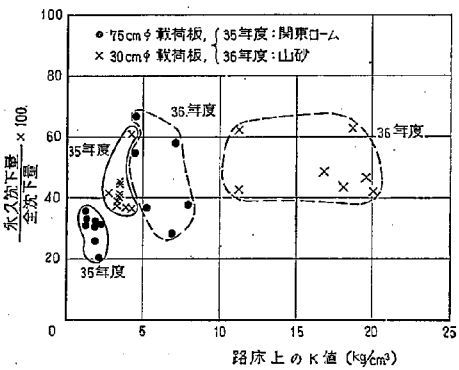


図-16　路床上での載荷試験結果

図-16 と 図-17 を比較すると，永久沈下量の全沈下量に対する割合は路盤があるなしにかかわらず同程度のものであるという結果になっている。

一様地盤上において，剛性載荷板に載荷された場合，Timoshenko[6] によれば載荷板の沈下量は，

$$\Delta = \frac{\pi}{4}\frac{2pa(1-\mu_2^2)}{E_2} \quad \cdots\cdots(6.1)$$

ここに，μ_2 と E_2 はそれぞれ一様地盤のポアソン比と弾性係数である。また，p は載荷強度，a は載荷板の半径，Δ は載荷板の沈下量である。

μ_2 を 0.5 とすれば，

$$\Delta = \frac{1.18pa}{E_2} \quad \cdots\cdots(6.2)$$

となる。したがって支持力係数（路床支持力係数にあたる）は，

$$K_2 = \frac{p}{\Delta} = \frac{E_2}{1.18a} \quad \cdots\cdots(6.3)$$

したがって，支持力係数は地盤の弾性的性質が一定であれば，載荷板の半径に逆比例することになる。

いま，一様地盤上で 30 cm 載荷板と 75 cm 載荷板を利用して支持力係数を測定したとすれば，

$$K_{30} = \frac{E_2}{1.18\times\frac{30}{2}} \quad \cdots\cdots(6.3)'$$

$$K_{75} = \frac{E_2}{1.18\times\frac{75}{2}} \quad \cdots\cdots(6.3)''$$

であるから

$$\frac{K_{30}}{K_{75}} = \frac{75}{30} = 2.5 \quad \cdots\cdots(6.4)$$

となる。普通載荷試験を行なう場合に 30 cm 載荷板を利用し，これを 75 cm 載荷板を利用した場合に換算す

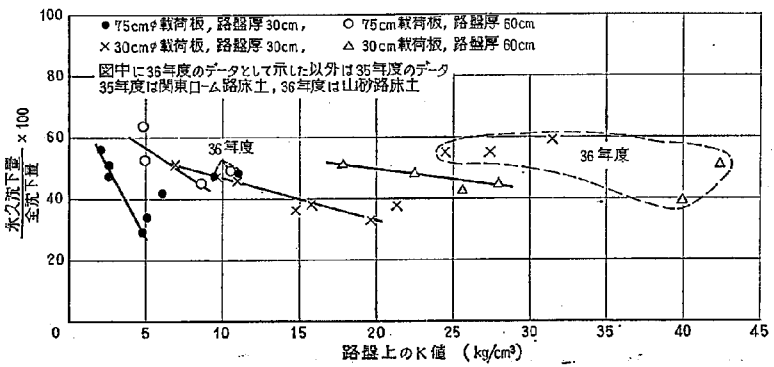


図-17　路盤上での載荷試験結果

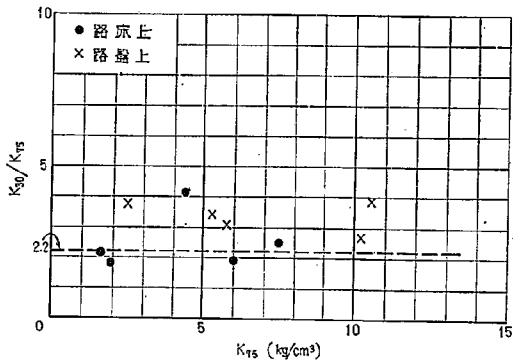


図-18 K_{30} と K_{75} の関係

るのに，

$$K_{30}/K_{75}=2.2 \quad \cdots\cdots(6.4)'$$

なる関係を利用している。[7]

図-18 には測定された K_{30} と K_{75} の関係がプロットされている。これによると路床上において測定された場合には，ほぼ一様地盤とみなされるが，そのときにはごく大略的に (6.4)′ 式を利用しても差支えなさそうであるということを示している。

路盤上で載荷試験を行なう場合は，Burmisterによれば，

$$\left.\begin{aligned} \Delta&=\frac{1.18pa}{E_2}F_w, \\ K_1&=\frac{p}{\Delta}=\frac{E_2}{1.18a\,F_w} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6.5)$$

となり，Barber[8] によれば，

$$F_w=\frac{1}{[1+(h/a)^2(E_1/E_2)^{2/3}]^{1/2}}+\frac{1}{(E_1/E_2)}\left\{1-\frac{1}{[1+(h/a)^2(E_1/E_2)^{2/3}]^{1/2}}\right\} \quad \cdots\cdots(6.6)$$

となる。ここに E_1 は路盤の弾性係数，h は路盤厚である。路盤上で載荷試験を行なう場合には，載荷板の沈下量は E_1/E_2 が一定であっても，h/a の値によって F_w が変化し，したがって沈下量が変化してくる。したがって K_{30}/K_{75} の関係は (6.4) 式あるいは (6.4)′ 式のように簡単にはあらわされないことになる。

たとえば路盤厚を 37.5 cm，路盤の弾性係数を 1,000 kg/cm³，路床の弾性係数を 100 kg/cm² とすれば，計算の結果は 表-1 に示すようになる。

表-1 計算結果

	30 cm 載荷板	75 cm 載荷板
a	15 cm	37.5 cm
h/a	2.5	1.0
$(h/a)^2$	6.25	1.0
$(E_1/E_2)^{2/3}$	4.63	4.63
F_w	0.265	0.478
K_1	21.3 kg/cm³	4.74 kg/cm³

表-1 より

$$\frac{K_{30}}{K_{75}}=\frac{21.3}{4.74}=4.5$$

となり (6.4) 式あるいは (6.4)′ 式とは大分異なる。

図-18 には路盤上で測定した K_{30} と K_{75} の関係も示されている。図によると測定されたすべての点が $K_{30}/K_{75}=2.2$ の線よりも上にちらばっている。

以上，理論的にも実験的にも，K_{30} の値から K_{75} の値を推定することは，一様地盤の場合をのぞいては矛盾があることに注目しなければならない。

〔2〕 変形係数

Burmister による弾性係数の計算法[4] は (6.3) 式あるいは (6.5) 式を利用する。しかし K の値は沈下量が 0.125 cm あるいは 0.25 cm に相当するときの値をとっているので，Burmister の計算法も純粋の弾性係数が求められるわけではなく，いわゆる変形係数が求められるわけである。

変形係数を表現する一つの方法として，筆者は CVT 試験を提案した。[2),3)] CVT 試験により求められる変形係数を CVT であらわしているが，混乱のおそれのない場合には，一般の変形係数の表現法にしたがって E' と書くことにする。*

載荷試験の結果より (6.3) 式を利用して計算した変形係数と，乱さない試料を採取して CVT 試験を行なった結果とをプロットすると図-19 に示すようになる。両者の変形係数が同じ値になるものとすれば，図-19 にプロットされた点は縦軸の 100 % の線にのるはずである。しかし測定された結果は関東ロームと山砂の場合で大分傾

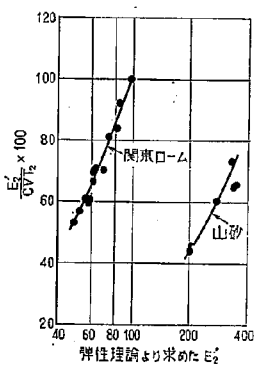


図-19 弾性理論より求めた変形係数と乱さない試料による CVT の関係(路床土の場合)

* E' を C と書く場合もある。参考文献 2)，3) においては C と書いた。

向がちがうことがあきらかである。これよりみても弾性理論より求められる変形係数と CVT の関係は土質によって変化することが明らかであろう。また両方の土で，弾性理論より求められる変形係数よりも CVT の方がいつも大きい値となってあらわれている。しかし，一つの土に対しては弾性理論により求められる変形係数が大のときには CVT も大であるという傾向がかなりはっきりとあらわれている。

図-20 は式 (6.5) を利用して計算した路盤の変形係数と，路盤と同じ材料を路盤と同じ乾燥密度に締固めた場合の CVT の関係を示すものである。図中に示される変形係数の値の小さい材料は実際には路盤材料として使用されない土である。

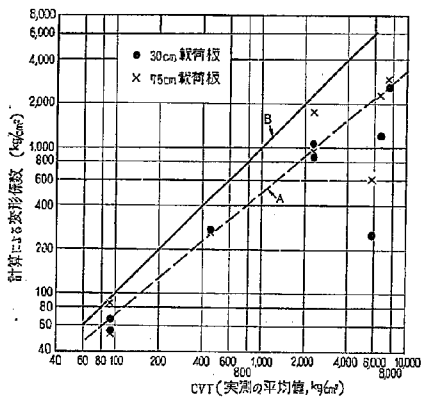


図-20　弾性理論より求めた変形係数と実測による CVT の関係（路盤材料の場合）

図-20 によれば，計算による変形係数と CVT との関係は図中にA線として示されている線のまわりにバラツイているようである。もし計算による変形係数と CVT とが同じ値を示すものであれば，測定点はB線にのるはずである。しかし図によれば，図-19 の場合と同様に弾性理論を利用して計算した変形係数はつねに CVT よりも小になっている。

図-19 と図-20 とよりわかることは，弾性体とはみなされない路床や路盤に対して弾性理論を使用していることに第一あやまりがあるのであろう。しかし計算より求めた変形係数と CVT の間には，実験の範囲内においては一定の関係がありそうであるので，定性的な沈下の傾向などをしらべるためには，弾性理論が十分役割をはたすであろう。

〔3〕 路盤効果

路床上で測定した支持力係数を K_2，路盤上で測定した支持力係数を K_1 とすれば，路盤をつくったことによる効果つまり路盤効果は K_1/K_2 によりあらわすことができる。図-21 は路盤厚と路盤効果の関係を示す図表

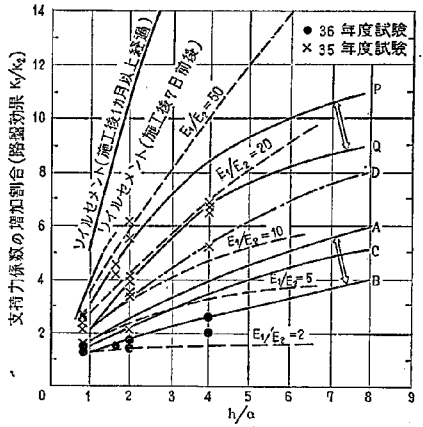


図-21　路盤厚と路盤効果の関係
（ソイルセメントの曲線は暫定的なもの）

で，文献2に発表した図表の横軸を h/a の形にし，ソイルセメントに関する曲線をつけ加えたものである。ソイルセメントに関してはデータが少ないために信頼性は少ない。

図-21 における A, B, C, および D 曲線はつぎの式により表わすことができる。

$$\frac{h}{a}=\alpha\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{\beta} \quad \cdots\cdots(6.7)$$

ここに，α と β は実験常数であるが，β はローラー転圧の性質に関係する常数で，α は路盤材料と路床土の性質を表現する常数であろう。30 cm 載荷板を使用する場合に，路盤厚と K_1/K_2 の関係を示したものが図-22 である。

図-21 に昭和 35 年度と昭和 36 年度にえられた載荷

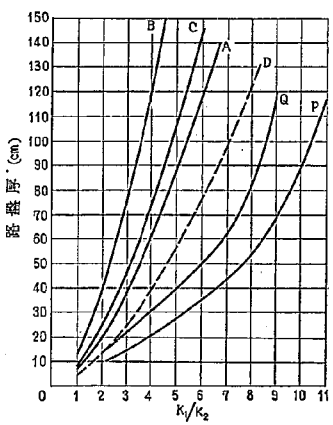


図-22　路盤厚と K_1/K_2 の関係
（30 cm 載荷板を使用する場合）

試験のデータがプロットされている。昭和 35 年度においては関東ローム路床土上に理想粒度の砂利，砂，細粒土および炭酸カルシウム（10％）の混合物を路盤材料として施工したものである。路床土の関東ロームの含水量は 図-4 に示すように 100～120％で，乱さない試料による CVT は 図-5 に示すように 50～150 kg/cm² である。このように軟弱な路床上に良質材料をしきつめても十分には締まらないし，路盤としての強度特性も大にはならない。このために炭酸カルシウムを路盤材料に混合して密度の不足を石灰の効果によりおぎなった。その結果，現場で試験をしたときの状態における路盤材料と路床土の変形係数の比が73±13という大きなものをつくることができた。昭和 36 年度においては山砂を路床土として，その上にクラッシャーランを用いて路盤を構築した。クラッシャーランは図-13 に示すように相当大きい変形係数の値を示したが，山砂の変形係数が図-12 に示すように大きいので，路盤材料と路床土の変形係数の比は 5±1 くらいである。

図-21 によれば E_1'/E_2' が大きい昭和 35 年度の場合には，弾性理論で示されるほど大きな路盤効果はあらわれていない。すなわち

$$\frac{E_1'}{E_2'}=60\sim86\ (\text{平均 }73)$$

であるのに，弾性理論の結果によれば，この路盤効果は

$$\frac{E_1'}{E_2'}=10\sim50$$

に相当するものしかあらわれていない。

昭和 36 年度の E_1'/E_2' の値が小なる場合には，

$$\frac{E_1'}{E_2'}=4\sim6\ (\text{平均 }5)$$

であるが，この路盤効果は弾性理論よりみれば

$$\frac{E_1'}{E_2'}=2\sim5$$

の範囲である。

いずれにしても弾性理論により予期されるほどには，路盤の荷重分散効果はないものといえる。

〔4〕 路床面以下の土圧

載荷試験に平行して，路床面以下に埋めこんだ土圧計により土圧を測定した。その結果をとりまとめたものが図-23 である。縦軸には土圧計の表面からの深さの載荷半径に対する比，横軸には測定した土圧の載荷強度に対する比が示されている。

図-23 によれば点のバラツキは相当に大きいが，土圧計の精度などを考慮すると図に示すような平均線がえがける。昭和 35 年度における

$$\frac{E_1'}{E_2'}\fallingdotseq73$$

の場合と，昭和 36 年度における

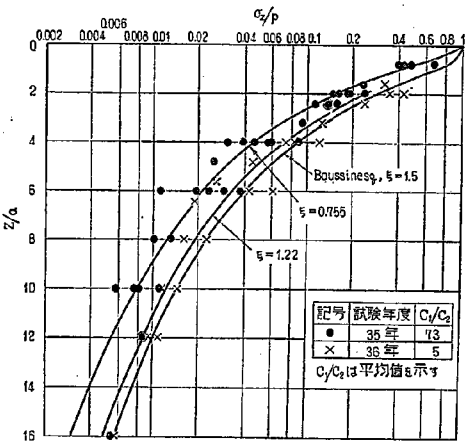


図-23　σ_z/p と z/a の関係

$$\frac{E_1'}{E_2'}\fallingdotseq5$$

の場合の平均線をみるとその平均線は近似的に

$$\frac{\sigma_z}{p}=\frac{\zeta}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(6.8)$$

であらわすことができる。ここに z は地表面より土圧計までの深さ，σ_z は土圧計にあらわれた土圧，p はその土圧に相当する載荷強度である。そして

$E_1'/E_2'=73$ に対しては　$\zeta=0.755$

$E_1'/E_2'=5$ に対しては　$\zeta=1.22$

である。

Boussinesq によれば，

$$\frac{\sigma_z}{p}=1-\frac{\left(\frac{z}{a}\right)^3}{\left[1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \cdots\cdots(6.9)$$

である。Boussinesq の式は一様弾性地盤の場合に適用されるものであるから，

$$\frac{E_1'}{E_2'}=1$$

の場合に相当する。

(6.8) 式と (6.9) 式を等しいとおけば，$E_1'/E_2'=1$ の場合の ζ を計算で出すことができる。

$$\frac{\zeta}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}=1-\frac{\left(\frac{z}{a}\right)^3}{\left[1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\therefore\ \zeta=\left[1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]\left[1-\frac{\left(\frac{z}{a}\right)^3}{\left\{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right\}^{3/2}}\right]$$

$$=\left(\frac{z}{a}\right)^2\left[1+\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2}-\left\{1+\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2}\right\}^{-1/2}\right]$$

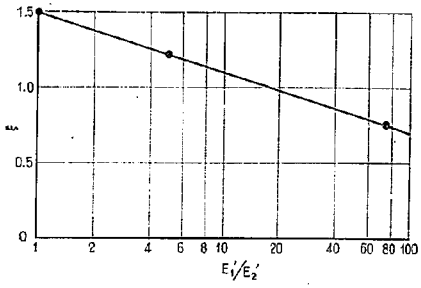


図-24　ζ と E_1'/E_2' の関係

したがって z/a が1にくらべて十分大きいときには，

$$\zeta=\left(\frac{z}{a}\right)^2\left[1+\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^3}-\left\{1-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{3}{2}=1.5$$

となる。

縦軸に ζ，横軸に E_1'/E_2' の log をとってプロットすれば，図-24 に示すように3つの点は一直線上にある。E_1'/E_2' の値が異なる多くの場合についてのデータがないので残念であるが，暫定的には ζ は E_1'/E_2' の関数で，

$$\zeta=1.5-0.4\log\frac{E_1'}{E_2'} \quad \cdots\cdots(6.10)$$

と表現できるであろう。

図-25 は土研報告第 95 号に発表した図[1]より再製したものである。この場合の点の平均線は

砂利路盤の場合　$\zeta=0.82$

砂路盤の場合　$\zeta=1.22$

がよくあう。これは砂利路盤の場合には E_1'/E_2' が 59，砂路盤の場合には E_1'/E_2' が 5 の場合に相当する。土研報告第 95 号の場合には，変形係数の測定が正確に行なわれなかったために，Burmister の理論より計算したが，そのときの E_1'/E_2' は砂利路盤の場合に 8～12，砂路盤の場合に 3～4 となっている。しかし (6.8) 式，(6.10) 式よりの結果からすると，砂利路盤の場合には Burmister 理論による E_1'/E_2' の推定よりも大分大きく，砂路盤の場合にはわずかに大きい程度であることがわかる。

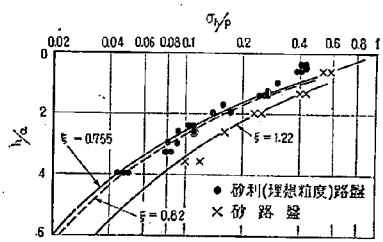


図-25　土研報告 95 号の 図-17 より再製

土研報告第 95 号の砂利路盤の場合が昭和 35 年度の場合と同程度の E_1'/E_2' の値になることはちょっと考えられない。これは (6.10) 式が不正確なためであるかも知れない。

〔5〕 上層底面に生ずる引張り応力

Westergaard によれば，中央部載荷面の中心部における上層の底面に生ずる引張り応力は，コンクリート版厚を h とすれば，

$$\sigma_r=\frac{3(1+\mu_1)P}{8\pi h^2}\,ln\,\frac{E_1h^3}{K_2b^4}$$

$$=\frac{1.1(1+\mu_1)P}{h^2}\left\{\log\frac{l}{b}+\log\sqrt[4]{12(1-\mu_1^2)}\right\} \quad \cdots\cdots(6.11)$$

$$l^4=\frac{E_1h^3}{12(1-\mu_1^2)K_2} \quad \cdots\cdots(6.12)$$

また，

$h/a>0.58$ のときには

$$b=a\left\{\sqrt{1.6+\left(\frac{h}{a}\right)^2}-0.675\frac{h}{a}\right\}$$

$h/a\leqq0.58$ のときには

$$b=a$$

$\cdots\cdots(6.13)$

である。b の値は図-26 に示すようであるが，舗装の各層のうちで砂利や砕石は引張り応力をうけもてないので，引張り応力が問題になる層は路面から 30 cm の厚さをこすことはまずない。したがって h/a が2をこすことは少ないので，

$$b=a$$

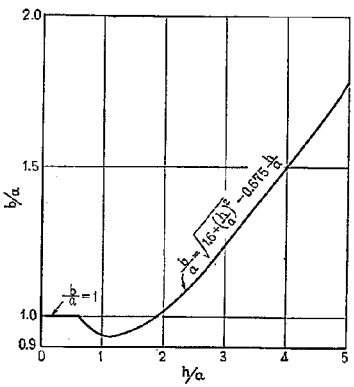


図-26　Westergaard の式における b と a の関係

としても実際上さしつかえはないであろう。

理論的には疑問があるが，(6.11) 式において

$$P=\pi a^2p$$

$$K_2=\frac{E_2'}{1.18a}$$

$\cdots\cdots(6.14)$

とおき E_1 のかわりに E_1' と書けば，

$$\sigma_r=\frac{1.1(1+\mu_1)\pi p}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right] \quad \cdots\cdots(6.15)$$

となる。この式において

$\mu_1=0.15$

とおけば，

$$\frac{\sigma_r}{p}=\frac{\xi}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right]$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right] \quad \cdots(6.16)$$

となる。また (6.15) 式において

$\mu_1=0.5$

とおけば

$$\frac{\sigma_r}{p}\fallingdotseq\frac{1.3}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right] \quad \cdots(6.17)$$

となる。実際には ξ は 1～1.5 の範囲をとるであろう。

昭和 35 年度と昭和 36 年度においては 2 層問題の実験にあたって引張り応力の測定は行なわなかった。しかし赤羽分室構内において回転式載荷試験装置を利用して，ソイルセメント層の破壊実験を行なったことがある。載荷試験結果は図-27 に示すようで，試験条件はつぎのようであった。

ソイルセメント層厚……30 cm

目標とした 6 日養生 1 日水浸の圧縮強度

……10 kg/cm²

ソイルセメント層の CVT (E_1')

…… 7,500 kg/cm²

路床土の CVT (E_2') ……60 kg/cm²

路床上での支持力係数 ${}_{30}K_2$……2.4 kg/cm³

ソイルセメント層上での支持力係数 ${}_{30}K_1$

…… 40 kg/cm³, 50.4 kg/cm³

破壊をおこしたときの荷重強度…… 5.8 kg/cm², 7.8 kg/cm²

破壊をおこしたときの沈下量

…… 0.16 cm, 0.17 cm

したがって，

$h=30$ cm, $a=15$ cm, $h/a=2$

$$\frac{E_1'}{E_2'}=\frac{7,500}{60}=125$$

であるから，(6.16) 式によれば，

$$\frac{\sigma_r}{p}=\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\times2}\log[1.18\times2^3\times125]$$

$$=0.766$$

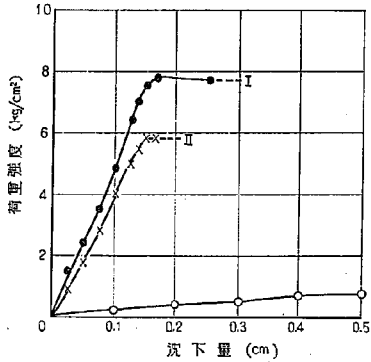


図-27　ソイルセメント層の載荷試験結果

したがって

$$\sigma_r=0.766\,p=\begin{cases}0.766\times5.8=4.83\ \text{kg/cm}^2\\0.766\times7.8=5.98\ \text{kg/cm}^2\end{cases}$$

(6.17) 式によれば上の値の 1.3 倍であるから

$$\sigma_r=\begin{cases}4.83\times1.3=6.28\ \text{kg/cm}^2\\5.98\times1.3=7.78\ \text{kg/cm}^2\end{cases}$$

となる。

これより上記の載荷試験の場合のソイルセメントの曲げ強度は

4.8～7.8 kg/cm²

の見当であるといえる。なおソイルセメントに関する曲げ試験が行なわれた例はきわめて少ない。

〔6〕 コヘイジョメーター[9] 値

コヘイジョメーターは米国カリフォルニヤ州で使用している一種の曲げ試験で，その説明図は図-28 に示すように，マーシャル試験に使用する試料と同じ寸法の試料を折りまげるものである。カリフォルニヤ州においては試験の結果を C 値で表わしている。

$$C=\frac{L}{4(0.2h+0.044h^2)}=\frac{L}{0.8h+0.176h^2}\ \text{g/in}^2 \quad \cdots\cdots(6.18)$$

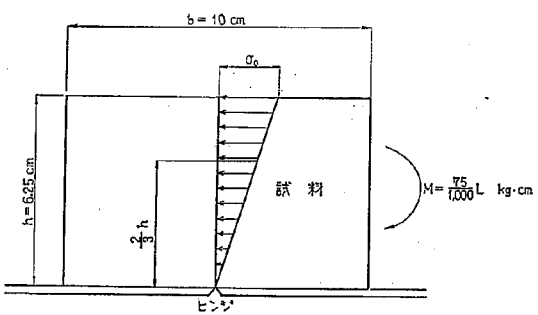


図-28　コヘイジョメーターの説明図

表-2　代表的なコヘイジョメーター値と最大曲げ応力

材料	C	最大曲げ応力 (kg/cm²)*
コンクリート版（セメント 300 kg/m³）	15,000	26.9
〃　（セメント 240 kg/m³）	7,000	12.6
ソイルセメント（圧縮強度 30 kg/cm²）	3,000	5.4
〃　（圧縮強度 10 kg/cm²）	1,500	2.7
アスコン（80～300 Pen）	600	1.1
プラント混合カットバックアスファルト使用アスコン (SC-6)	400	0.7
〃 (SC-5)	300	0.5
オープングレードのアスコン	200	0.4
路上混合のアスコン	200	0.4
砕石ベース	100	0.2

* 最大曲げ応力は式（6.22）により計算した。

ここに L は折りまげるときの荷重（g）で，試料の中心から 75 cm 離れたところに加えられる。h は試料の高さで 2.5″ を標準にしている。したがって試料の高さがちょうど 2.5″ のときには（6.18）式より，

$$C=0.322L$$

となるから L は

$$L=\frac{C}{0.322}=3.11C\ (\mathrm{g}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.19)$$

となる。

カリフォルニヤ州においては C の値の代表的なものを発表している。それは 表-2 に示すようである。表-2 を利用して折り曲げに当っての最大曲げ応力を計算してみるとつぎのようになる。

図-28 を参考にすれば，試料を折りまげる曲げモーメントは

$$M=75\times\frac{L}{1,000}\ (\mathrm{kg\cdot cm}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.20)$$

これに抵抗するモーメントは

$$M=\sigma_0\cdot\frac{h}{2}\cdot b\cdot\frac{2h}{3}=\sigma_0\frac{10h^2}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots(6.21)$$

ここに，　σ_0：最大引張り応力 (kg/cm²)

b：試料の直径 (10 cm)

したがって（6.20）式と（6.21）式を等しいとおいて，

$$\sigma_0=\frac{45}{2h^2}\cdot\frac{L}{1,000}$$

高さ h を標準の 2.5″=6.25 cm とすれば，

$$\sigma_0=\frac{0.577L}{1,000} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.22)$$

となる。

（6.19）式と（6.22）式により最大曲げ応力を計算した結果を 表-2 の最後の欄に示した。これによるとカリフォルニヤ州においてはソイルセメントの曲げ強度を 2.7～5.4 kg/cm² 程度に考えていることになる。

コヘイジョメーターの性質上，上述のような計算が正しいかどうかに疑問があることと，コンクリート版（セメント量が 300 kg/m³）の曲げ強度が 26.9 kg/cm² というのは小さすぎるように思われる。あるいはカリフォルニヤ州で発表している C 値の代表値は安全率がみこまれているのかも知れない。

一般に用いられている舗装用コンクリートの曲げ強度は 40～55 kg/cm² であるから，

$$\frac{40}{26.9}=1.49\rightarrow 1.5$$

となり 表-2 に示されている最大曲げ応力の最小 1.5 倍の値が実際の値に近いとすれば，ソイルセメントの曲げ強度は

$$2.7\times1.5\sim5.4\times1.5\ \mathrm{kg/cm^2}=4.1\sim8.1\ \mathrm{kg/cm^2}$$

となり 4～8 kg/cm² が期待されるものと思われる。

以上のように考えれば，6.5 における載荷試験結果の解析が信頼性があるように考えられる。

しかし実際のソイルセメント・ベースは細かいヒビワレが数多くはいるはずであるので，交通に供用されている現場として期待できるソイルセメントの曲げ強度は 2.7～5.4 kg/cm² 程度であるかも知れない。

〔7〕 破壊作用係数について

重い輪荷重はたとえ通過回数が少なくても，軽い輪荷重が数多く通過するのにひっ敵する破壊作用を舗装におよぼすはずである。そこで舗装に対する自動車の破壊作用というものを定義する必要にせまられる。自動車の重量とその破壊作用の関係については，各方面でいろいろな試みがなされているが，この問題に関しては関連する要素が極めて多いために決定的な関係は見出されていない。カリフォルニヤ州においては，舗装厚の決定の場合に交通係数（Traffic Index, T. I.）なる量を考えている。交通係数は，

$$\text{交通係数 T. I.}=\log EWL_{50}=\frac{\sqrt{P}\log N}{\sqrt{5,000}} \qquad \cdots\cdots\cdots(6.23)$$

であらわされている。

ここに，　P：任意の輪荷重 (lb)

N：舗装の設計寿命年間に P なる輪荷重群が通過する回数

EWL_{50}：任意の輪荷重群を 5,000 lb 輪荷重に換

算したときの通過回数

である。

(6.23) 式より，

$$\sqrt{P}\log N=\text{const.}$$

であるから，破壊作用係数 ($H.K.$) として，

$$H.K.=\sqrt{P}\log N \quad \cdots\cdots(6.24)$$

または

$$H.K.=\sqrt{p}\log N \quad \cdots\cdots(6.25)$$

なる量を考えることにする。[10] ここに p はタイヤの接地圧力 (kg/cm²) である。

支持力係数が大であれば，自動車の大きい破壊作用，つまり大きい輪荷重と大きい繰返し回数にたえるはずである。繰返し載荷試験を行なった結果より，沈下量と繰返し回数の関係を求め，曲線のこう配が急に大になる回数を N として，$\sqrt{P}\log N$ を計算し，それを K 値に対してプロットしたものが図-29 である。

図-29 のデータには路床上および路盤上でのデータを含んでいるので，1層の場合も2層の場合もともに1つの線上にのりそうである。しかし図-29 によると，30 cm 載荷板を利用した場合と 75 cm 載荷板を利用した場合とでは K 値の増加による破壊作用係数の増加の状態がちがっている。つまり接地面積の大きいほど，いいかえれば大きいタイヤを利用するほど，同じ支持力係数をもつ道路としては有利であるといえる。

図-30 は $\sqrt{P}\log N$ のかわりに $\sqrt{p}\log N$ とおきかえた場合を示している。これによると載荷板の直径が 30 cm の場合も 75 cm の場合もともに比較的よく1つの直線にのっている。このことは輪荷重による破壊作用としては，接地半径の影響よりも接地圧の影響の方が大きいのであるかも知れない。しかしタイヤ圧はトラック，バスの場合でも大体一定のもので 4～5.6 kg/cm² くらいのものが多い。そして輪荷重の大きいトラック，バスには接地半径の大きいタイヤを利用しているので，理論的な研究の場合をのぞいては，破壊作用係数としては $\sqrt{P}\log N$ をとる方が便利であろう。

〔8〕 繰返し載荷による路床路盤の状態

繰返し載荷試験の結果を繰返し回数と沈下量の関係につき模型的に描けば，近似的に 図-31 に示すようにな

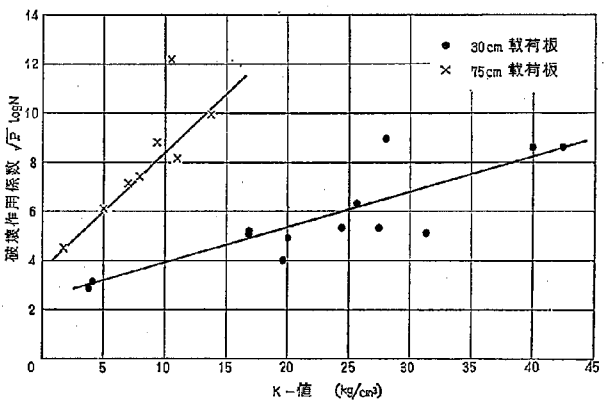


図-29　K 値と $\sqrt{P}\log N$ の関係

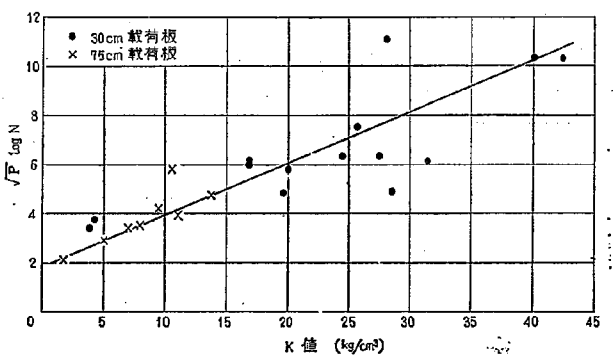


図-30　K 値と $\sqrt{p}\log N$ の関係

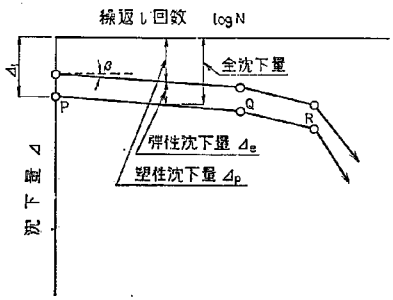


図-31　繰返し載荷試験結果の模型図

る。すなわち載荷回数が比較的少ない間は沈下量 Δ と繰返し回数の対数 $\log N$ の間には近似的に直線関係がなりたつ。ある繰返し回数以上になると Δ と $\log N$ の関係がいくぶんわん曲してきて，さらにある繰返し回数を超過すると急激に沈下量が大になって，破壊沈下の様相を呈するようになる。この状態は載荷板の大きさ，荷重強度，路床路盤の支持力の大小などによりいくぶん変化してくる。

繰返し載荷試験の初期においては近似的につぎの関係式が成立する。

$$\Delta_n=\Delta_1+\beta\cdot\log N \qquad \cdots\cdots(6.26)$$

ここに，　Δ_n：繰返し回数 N における載荷板の全沈下量

Δ_1：繰返し回数1回目の載荷板の全沈下量

β：初期直線部分のこう配

N：繰返し回数

繰返し載荷試験の結果によれば，全沈下量のうちある部分は荷重がとり去られた後に復元する。復元する沈下量は繰返し試験のある回数までは近似的に一定である。復元する沈下は弾性沈下であり，復元しない永久沈下は塑性沈下に属するものであろう。弾性沈下量を Δ_e，塑性沈下量を Δ_p とすれば，

$$\Delta_n=\Delta_e+\Delta_p \qquad \cdots\cdots(6.27)$$

となる。

（i）　路床路盤の支持力の大小と繰返し載荷試験結果

路床路盤の支持力の大小をあらわすのに普通支持力係数が用いられる。支持力係数を求めた沈下量に対する荷重強度をとれば，破壊にいたるまでの支持力の大小を kg/cm² の形であらわすことができる。しかしこの表現も支持力係数と本質的な差異はない。

路床路盤の支持力の大小をあらわすインデックスと載荷試験の結果を図示したものが図-32 と図-33 である。両方の図をみると載荷試験の結果はバラツキが多く，一定の関係を見出すことができない。

（ii）　破壊作用係数と繰返し載荷試験結果

破壊作用係数として $\sqrt{p}\log N$ をとり，これと繰返し

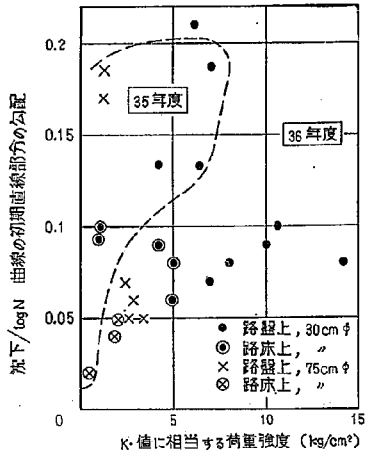


図-32　路床路盤の支持力の大小と初期直線部分のこう配

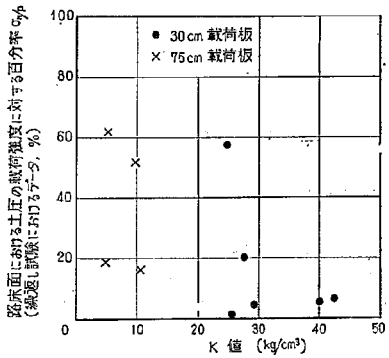


図-33　K 値と繰返し載荷による σ_h/p との関係

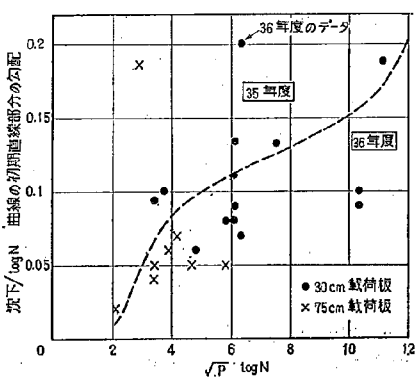


図-34　$\sqrt{p}\log N$ と沈下/$\log N$ 曲線の初期直線部分のこう配

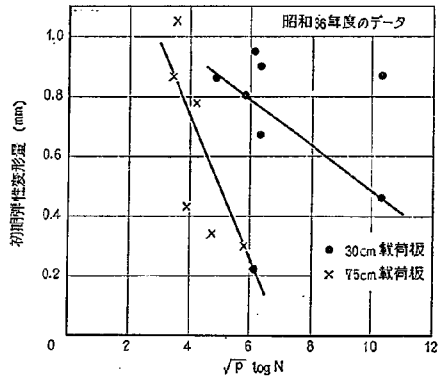


図-35 $\sqrt{p}\log N$ と初期弾性変形量の関係

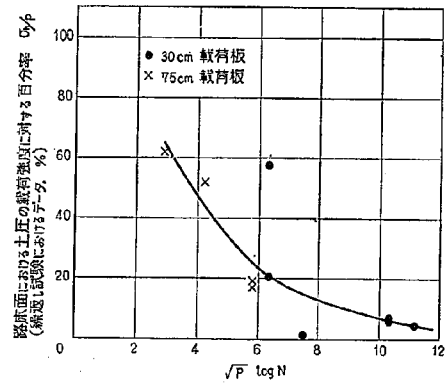


図-36 $\sqrt{p}\log N$ と σ_v/p の関係

載荷試験結果の関係をプロットしたものが図-34, 図-35, 図-36 である。

支持力係数と $\sqrt{p}\log N$ の間には一定の関係がある (図-30)。$\sqrt{p}\log N$ と沈下-$\log N$ 曲線の初期直線部分のこう配の関係をみたものが図-34 である。図によると点のバラツキが大きく一定の関係は見出しにくいが, $\sqrt{p}\log N$ が大になるほどこう配が大になる傾向がみられる。$\sqrt{p}\log N$ が大であれば路床路盤の支持力係数は大であるはずである。その場合に繰返しの初期においては沈下の割合が大きいということは説明に苦しむところである。しかし, $\sqrt{p}\log N$ は破壊沈下をおこす点におけるインデックスであり, 沈下のこう配は破壊以前のものであるので, 直接関係づけることが無理なのかも知れない。

図-35 は $\sqrt{p}\log N$ と初期弾性変形量 (Δ_e) の関係を示すものであるが, 前述と同様の疑問がある。すなわち $\sqrt{p}\log N$ が大であれば初期弾性変形量は大になってもよさそうな気がするが, 図によると点のバラツキは大きいが予想とは逆のように見受けられる。

しかし図-36 の場合は常識的に説明しやすい。図は路床面において測定した土圧の載荷した強度に対する割合を, $\sqrt{p}\log N$ に対してプロットしたものである。これによると $\sqrt{p}\log N$ が大になるにしたがって, 路床面に加わる圧力が減少する傾向がかなりはっきりとあらわれている。

(iii) 路床中の土圧

図-37 は路床中に生ずる土圧の載荷強度に対する割合を深さに対してプロットしたものである。図中の曲線は式 (6.8) と式 (6.10) とより計算したものである。

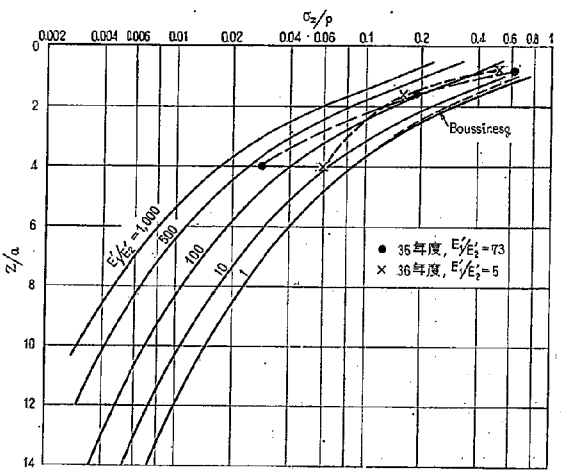


図-37 繰返し載荷試験結果

図によると繰返し載荷試験結果は, 静荷重試験におけるよりも E_1'/E_2' が大きいような結果になっている。すなわち動載荷の場合には静荷重の場合よりも, 土中における垂直圧力が小になり, 結果的には路盤の荷重分散効果が増大したようになっている。動荷重による土中の圧力は静荷重による場合よりも小さいということができる。

7. 結論

昭和 35 年度と昭和 36 年に行なった試験は決して満足すべきものではなかったが, 今までの研究および考察を批判し, さらに発展させ, 今後の研究に対して方向をつけるという意味で価値があったものと考えられる。

主な結論としてつぎのことがいえる。

(1) K_{30} より K_{75} の値を推定することは, 少なく

とも一様地盤の場合をのぞいては，理論的にも実際的にも矛盾がある。

（2） 変形係数を測定するのに CVT 試験は有効である。

（3） 路盤効果（K_1/K_2）はつぎの式によりあらわされる。

$$\frac{h}{a}=\alpha\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{\beta}$$

β はローラー転圧の性質に関する常数で，α は路盤材料と路床土の性質を表現する常数であると思われる。α は E_1'/E_2' のある関数として表わされるであろう。α と β に関しては今後の研究結果をまたなければならない。

（4） 路盤の効果は弾性理論により予期されるほど大きくはない。

（5） 荷重により路床中に生ずる垂直圧力は近似的に，

$$\frac{\sigma_z}{p}=\frac{\zeta}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

であらわすことができる。ζ は E_1'/E_2' の関数で α と関係がありそうである。

$$\zeta=1.5-0.4\log\frac{E_1'}{E_2'}$$

の関係式は再検討の必要があるが，暫定的には使用できるであろう。

（6） 上層底面に生ずる引張り応力は近似的に，

$$\frac{\sigma_r}{p}=\frac{\xi}{\left(\frac{h}{a}\right)^2}\log\left[1.18\left(\frac{h}{a}\right)^3\left(\frac{E_1'}{E_2'}\right)\right]$$

であらわされる。ξ は 1～1.5 の値であるが，ξ と ζ あるいは α の関係については明らかでない。

（7） 破壊作用係数としては $\sqrt{P}\log N$ よりも $\sqrt{p}\log N$ の方が理論的であるが，実際的には $\sqrt{P}\log N$ の方が便利であろう。$\sqrt{p}\log N$ と K 値との間には一定の関係がある。

（8） 繰返し試験の結果を支持力係数または破壊作用係数と関係づけることは，少なくとも繰返し回数の小なる間はむずかしいようである。

（9） 動荷重による土中の垂直圧力は静荷重の場合よりも小さい。

（10） α, β, ξ, ζ の間の関係を求めることが今後の研究テーマの1つである。

路床路盤の支持力に関する一連の研究にあたっては，小田切照男，松崎猛，田中淳七郎，遠藤福三の諸氏には長年月の間ご協力を受けた。その他道路研究室時代より舗装研究室に勤務しておられる人達には有形無形のご援助を受けた。ここに深甚なる謝意を表する。

参考文献

1) 竹下春見
寒地道路の路床路盤に関する調査研究　土木研究所報告第 95 号（昭和 31年）。

2) 竹下春見
路盤の荷重分散効果　土木研究所報告第 106 号（昭和 35 年）。

3) Takeshita, H.
Load Bearing Capacity of a Base Course, Proc., 5th Int. Conference on S. M. & Foundation Eng., Paris, (1961)

4) Burmister, D.M.
The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways, Proc., H.R.B., Vol. 23 (1943)

5) 竹下春見
舗装厚設計法の基礎　道路建設 No. 173,（昭和 37 年）。

6) Timoshenko, S., Goodier, J.N.
Theory of Elasticity. (1951)

7) 日本道路協会
コンクリート舗装要綱　（昭和 30 年）。

8) Barber は文献 4) 中の Discussion において発表している。

9) State of California
Materials Manual.

10) 竹下春見
舗装の寿命と簡易舗装　道路建設 No. 166（昭和 36 年）。

付表-1 昭和 35 年度

① 位置	② 路盤厚 (cm)	③ K 値 (kg/cm³) K_{30}	④ K 値 (kg/cm³) K_{75}	⑤ K に相当する荷重(kg/cm²) $p=0.25K_{30}$	⑥ K に相当する荷重(kg/cm²) $p=0.25K_{75}$	⑦ 試験した最高荷重 (kg/cm²)	⑧ ⑦に相当する最大沈下量 (cm)
3′L3	0	3.18		0.795		2.80	1.106
3′R3	〃	3.20		0.80		2.45	1.034
3′L4	〃		2.1		0.525	0.964	0.549
3′R4	〃		1.8		0.45	0.875	0.634
3′L5	〃	4.24		1.06		2.625	1.233
3′R5	〃	3.40		0.85		2.625	1.060
4L3	0		1.31		0.328	1.05	1.063
4R3	〃	3.24		0.81		2.10	1.121
4L4	〃		1.16		0.29	1.05	1.093
4R4	〃	3.38		0.845		2.10	1.051
4L5	〃		1.24		0.31	1.05	1.069
4R5	〃	2.72		0.68		2.10	1.074
4′M1	〃	3.48		0.87		2.80	1.099
4′M2	〃		2.16		0.54	1.75	1.100
4′L3	〃	3.81		0.96		3.50	1.081
4′L4	〃		1.82		0.455	1.925	1.114
4′L5	〃	4.12		1.03		3.675	1.186
4M6	〃		1.88		0.47	1.75	1.018
4M7	〃	3.44		0.86		3.15	1.035
5L3	30		2.12		0.53	2.10	1.291
5R3	〃	11.0		2.75		8.05	1.047
5L4	〃		2.64		0.66	2.10	1.099
5R4	〃	7.0		1.75		6.65	1.039
5L5	〃		2.56		0.64	2.10	1.054
5R5	〃	9.6		2.4		7.35	1.014
5′M1	〃	19.6		4.9		15.75	1.026
5′M2	〃		6.0		1.50	4.375	1.010
5′L3	〃	14.8		3.7		15.05	1.015
5′L4	〃		5.0		1.25	4.025	1.057
5′L5	〃	16.0		4.2		14.00	1.016
5′M6	〃		4.8		1.20	3.85	1.050
5′M7	〃	21.2		5.3		15.05	1.040
6M1	60	17.8		4.45		14.35	1.023
6M2	〃		4.88		1.22	4.20	1.038
6L3	〃	25.6		6.4		20.65	1.004
6L4	〃		4.8		1.20	4.20	1.057
6L5	〃	28.0		7.0		21.35	1.034
6M6	〃		8.6		2.15	6.00	1.025
6M7	〃	22.4		5.6		19.25	1.025

備考 1) 位置の説明，最初の数字は図-14 における層の番号を示す。ダッシュをつけた数字は路盤または路床をす。第3番目の数字は図-15 における平面的な位置を示す。他の付表についても同様である。またたとえ

2) K の値は沈下量 0.25 cm に相当するものを採用した。

付表-2 昭和 35 年度

① 位置	⑤ K に相当する荷重 (kg/cm²) $p=0.25K_{30}$	⑥ K に相当する荷重 (kg/cm²) $p=0.25K_{75}$	⑭ 繰返し荷重 (t)	⑮ ⑭の荷重強度 (kg/cm²)	⑯ ⑮÷⑤ or ⑥	⑰ 1回目沈下量 (mm)
4′R3	0.96		0.7	0.99	1.03	1.71
4′R4		0.455	1.2	0.272	0.598	0.85
4′R5	1.03		0.7	0.99	0.96	1.64
5′R3						
5′R4		1.25	2.2	0.498	0.398	0.43
5′R5	4.2		1.4	1.98	0.472	0.895
6R3	6.4		2.2	3.11	0.486	0.23
6R4		1.20	5.7	1.35	0.806	0.25
6R5	7.0		3.7	5.23	0.747	0.42

静荷重載荷試験結果

⑧	⑩	⑪				⑫	⑬
⑧に対する永久沈下量 (cm)	永久沈下量 / 全沈下量 ×100	⑧，④に相当する土圧 (kg/cm²)				CVT の平均 (kg/cm²)	E_1'/E_2'
		路床面	路床面下 60cm	路床面下 120cm	路床面下 180cm		
0.431	39.0			0.08	0.02		
0.389	37.6			0.086	0.04		
0.112	20.4			0.115	0.02		
0.194	30.6			0.113	—		
0.759	61.6			0.10	0.01		
0.477	45.0			0.09	—		
0.350	32.9		0.045	0.01		96.8	
0.440	39.3		0.075	0.025		96.8	
0.394	36.1		0.10	0.015		90.1	
0.420	40.0		0.045	0.01		90.1	
0.333	31.1		0.097	0.017		90.3	
0.453	42.2		0.08	0.016		90.3	
0.456	41.5					87.4	
0.346	31.4					93.1	
0.403	37.3		0.073	0.02		96.8	
0.360	32.3		0.115	0.045		96.8	
0.435	36.7		0.13	0.02		90.3	
0.257	25.7					90.3	
0.418	40.4					87.4	
0.736	56.0	0.35	0.06	0.02		5,800	60.0
0.480	45.8	0.53	0.08	0.02		〃	60.0
0.518	47.1	0.31	0.09	0.02		〃	64.3
0.529	51.0	0.42	0.04	0.01		〃	64.3
0.526	50.9	0.25	0.10	0.035		〃	64.2
0.476	46.9	0.45	0.09	0.03		〃	64.2
0.335	32.7					7,500	85.8
0.418	41.4					〃	80.5
0.365	36.0	0.60	0.08	0.03		〃	77.5
0.357	33.7	0.53	0.17	0.11		〃	83.2
0.359	35.7	0.65	0.08	0.05		〃	83.1
0.300	28.6					〃	83.1
0.391	37.6					〃	85.8
0.524	51.2					6,500	74.4
0.545	52.5					〃	69.8
0.419	41.9	0.37	0.085	0.055		〃	67.1
0.669	63.3	0.28	0.11	0.03		〃	72.1
0.465	45.0	0.32	0.07	0.06	0.04	〃	72.0
0.457	44.6					〃	72.0
0.489	47.7					〃	74.4

掘削するときに測定したことを示す。第2番目の L, R, M は図-15 における L 側，R 側および中央をあらわす。$\overline{4}M2$ の $\overline{4}$ は4層上において平面的な位置2の付近で試験したことを示す。

動荷重載荷試験結果

⑱	⑲	⑳	㉑			
初期直線部分のこう配	沈下量 0.25cm に相当する繰返し回数	曲線のこう配が急に大になる回数	初期直線部分のおわりにおける土圧 (kg/cm²)			
			路床面	路床面下 60cm	路床面下 120cm	路床面下 180cm
0.094	5,500	2,700			0.22	
0.02	45,000	12,000			0.145	
0.10	11,000	5,800			0.07	
0.185	45,000	13,000	0.31	0.12	0.04	
0.134	52,000	20,000		0.125	0.06	
0.133	100,000以上	18,000	0.04	0.019	0.01	
0.17	〃	100,000以上	0.257	0.105	0.063	
0.188	〃	45,000	0.23	0.155	0.03	

付表-3 昭和 36 年度

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
位置	路盤厚 (cm)	K 値 (kg/cm³)		K に相当する荷重 (kg/cm²)		試験した最高荷重 (kg/cm²)
		K_{30}	K_{75}	$p=0.25K_{30}$	$p=0.25K_{75}$	
4M2	0		7.0		1.75	4.2
4M6	〃	19.6		4.9		9.35
4R3	〃	20.0		5.0		9.4
4R4	〃		7.92		1.98	4.55
4R5	〃	16.8		4.2		8.4
$\bar{4}M1$	0		4.4		1.1	3.5
$\bar{4}M1'$	〃	18.0		4.5		7.7
$\bar{4}M7$	〃		4.4		1.1	3.5
$\bar{4}M7'$	〃	18.6		4.65		8.4
$\bar{4}M2$	0	11.2		2.8		6.3
$\bar{4}M2'$	〃		5.2		1.3	2.8
$\bar{4}M6$	〃	11.2		2.8		7.0
$\bar{4}M6'$	〃		6.8		1.7	3.8
5M2	30	31.4		7.85		14.0
5M2′	〃		11.0		2.75	5.25
5R3	〃	24.4		6.1		11.9
5R4	〃		9.4		2.35	4.9
5R5	〃	27.4		6.85		14.0
6R3	60	40.0		10.0		22.05
6R4	〃		10.5		2.63	5.95
6R5	〃	42.4		10.6		18.9

付表-4 昭和 36 年度

①	④	⑤	⑬	⑭	⑮=⑭÷④, ⑤	⑯
位置	K に相当する荷重 (kg/cm²)		繰返し荷重 (t)	⑬の荷重強度 (kg/cm²)	繰返し荷重 K に相当する荷重に対する比	1 回目沈下量 (mm)
	$p=0.25K_{30}$	$p=0.25K_{75}$				
4L3	5.0		1.2	1.7	0.34	2.634
4L4		1.98	2.7	0.611	0.308	2.054
4L5	4.2		1.2	1.7	0.405	1.614
4M2		1.75	2.5	0.566	0.323	1.764
4M6	4.9		1.0	1.41	0.288	2.060
5M2	7.85		1.4	1.98	0.252	1.034
5M2′		2.75	3.3	0.746	0.271	1.286
5L3	6.1		1.4	1.98	0.325	1.694
5L4		2.35	3.3	0.746	0.318	1.574
5L5	6.85		1.4	1.98	0.289	1.634
6M2	14.2		3.7	5.23	0.369	1.232
6M2′		3.43	7.2	1.63	0.475	1.292
6L3	10.0		3.7	5.23	0.523	1.900
6L4		2.63	8.0	1.81	0.688	1.578
6L5	10.6		3.7	5.23	0.493	2.186

静荷重載荷試験結果

⑧	⑨	⑩=⑨/⑧	⑪				⑫
⑦に相当する最大沈下量 (cm)	⑧に対する永久沈下量 (cm)	永久沈下量 / 全沈下量 ×100	⑧, ④に相当する土圧 (kg/cm²)				平均 CVT (kg/cm²)
			路床面	路床面下 60cm	路床面下 120cm	路床面下 180cm	
0.586	0.338	57.7					510
0.516	0.243	47.1					
0.510	0.215	42.2		0.495	0.13	0.065	
0.535	0.202	37.8		0.780	0.265	0.1	
0.525	0.255	48.6		0.530	0.06	0.035	
0.568	0.381	67.1					440
0.523	0.227	43.4					
0.519	0.284	54.8					
0.540	0.342	63.4					
0.533	0.227	42.6					440
0.532	0.198	37.2					
0.580	0.362	62.4					
0.540	0.150	27.8					
0.593	0.350	59.0					2,270
0.529	0.255	48.2					
0.549	0.298	54.3	2.14	0.26	0.07	—	
0.517	0.241	46.6	2.41	0.58	0.2	0.06	
0.562	0.307	54.6	2.77	0.41	0.1	0.01	
0.549	0.213	38.8	0.72	0.16	0.09	0.06	2,270
0.534	0.260	48.7	0.84	0.34	0.12	0.05	
0.547	0.230	51.2	1.28	0.25	0.12	—	

動荷重載荷試験結果

⑰	⑱	⑲	⑳	㉑			
初期弾性変形量 (mm)	初期直線部分のこう配	沈下量 0.25cm に相当する繰返し回数	曲線のこう配が急に大になる回数	初期直線部分のおわりにおける土圧 (kg/cm²)			
				路床面	路床面下 60cm	路床面下 120cm	路床面下 180cm
0.801	0.08	—	30,000		0.18	0.017	0.01
1.054	0.05	60,000	30,000		0.18	0.08	0.04
0.948	0.09	52,000	50,000		0.22	0.02	—
0.867	0.04	58,000	30,000				
0.857	0.06	9,500	10,000				
0.220	0.08	41,000	20,000				
0.433	0.06	71,000	30,000				
0.904	0.21	40,000	30,000	1.14	0.11	0.02	
0.779	0.07	100,000以上	70,000	0.386	0.08	0.02	
0.668	0.07	100,000以上	30,000	0.40	0.03	0.017	
0.421	0.08	100,000	—				
0.335	0.05	100,000	5,000				
0.871	0.09	16,000	30,000	0.293	0.02	—	
0.300	0.05	85,000	20,000	0.30	0.22	0.02	
0.459	0.10	3,500	30,000	0.335	0.037	0.015	

城山ダム水理模型実験報告

(昭和36年9月)

村　幸雄*・永田二生**
藤崎利雄***・佐藤健一****
築地俊秀+・金井昭男+

要旨

重力ダムの余水吐設計にあたり，理論および経験的に決められた当初案について，現場の地形，状況等を考慮の上，種々の形状について比較実験をおこない，安全且つ経済的な余水吐と減勢機構を設計する資料および門扉操作方法に関する資料を得るとともに，既設の津久井ダムの流量係数について，模型実験をおこない，洪水疎通能力，貯水池内水位に関する検討をおこなった。

目　次

1. 城山ダム水理模型実験……(1)
〔1〕概　　説……(1)
〔2〕実験目的および実験方針……(3)
〔3〕模型および相似律について……(4)
〔4〕余水吐の設計およびその経緯……(4)
〔5〕ダム下流水位の検討……(7)
〔6〕1型模型の実験結果……(8)
(1) 水位—流量曲線……(8)
(2) ローラーバケット機能に関する実験結果……(8)
〔7〕オリフィス部の形状について……(9)
〔8〕最終案形状について……(9)
〔9〕最終案形状による実験結果とその考察……(17)
(1) 水位—流量関係の測定……(17)
(2) 堤体面圧力分布……(17)
(3) 導流壁の形状寸法について……(21)
(4) 減勢池内の流速分布，水面形状と流況について……(21)
(5) 移動床による洗掘実験の結果……(23)
(6) 余水吐門扉操作について……(24)
〔10〕結　　論……(24)
2. 津久井ダムの洪水疎通能力に対する検討…(25)
〔1〕実験の目的……(25)
〔2〕模型および測定装置について……(25)
〔3〕実験計画および相似律……(30)
〔4〕水位測定について……(31)
〔5〕実験結果……(32)
〔6〕実験結果の考察と流出量の推定方法…(45)
〔7〕結　　論……(50)
3. 城山・津久井両貯水池の不等流計算の結果……(51)
4. 結　　語……(52)

1. 城山ダム水理模型実験

〔1〕概　説

相模川は，その源を富士五湖に発し，山梨県では桂川と呼ばれ，神奈川県に入って相模川となり，遊船そして水田および畑地灌漑と，沿岸の住民をうるおし，下流は平塚市の東方で，馬入川となって相模湾に注いでいる。上流の富士山麓地帯は熔岩で覆われているので，流況は比較的良く，山梨県内の各所には，水力発電所が早くから建設され，神奈川県下でもわが国最初の河川総合開発計画といわれる相模川河水統制事業の一環として，図-1に示すように相模ダムを始め，津久井ダム，支川の道志川には道志ダムなどが建設されて，相模，津久井発電所および道志発電所で，多大の電力を供給するとともに，水道用水として横浜，川崎を始め神奈川県内の東部各地，そして東京の一部に供給されているが，京浜地帯の発展は著しく，上水の需要は急速に増加し，再び水不足の問題が緊急の課題として表面化してきた。ここに城山ダムすなわち神奈川県津久井郡城山町地先の相模川に，コンクリートダムを建設し，本川流量は勿論，支川中津川，串川よりも流域変更により取水し，ダム機能の高度化を計り，上水需要に応ずるとともに，境川上流支川本沢に貯水池を設け，城山貯水池の水を揚水して貯水し，

* 前ダム部長　工学博士（現水資源公団調査役）
** 前ダム部　ダム水理研究室長（現日本技術開発株式会社）
*** 前ダム部　ダム水理研究室研究員（現江戸川工事事務所調査第二課）
**** 神奈川県技師
\+ ダム部　ダム水理研究室

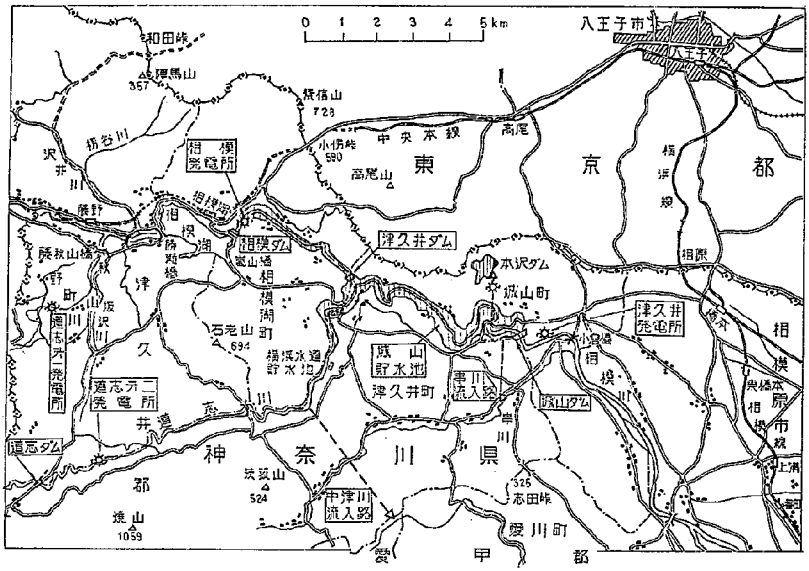
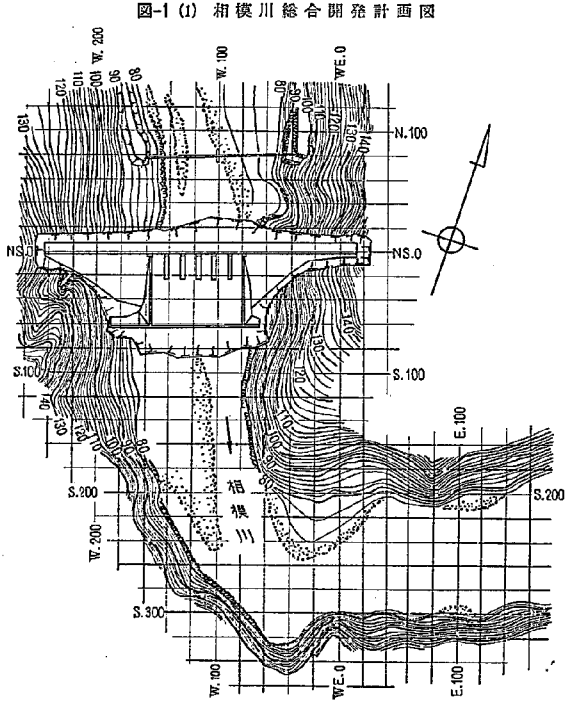


図-1 (1) 相模川総合開発計画図



注： 模型河道製作範囲は大略本図と同じである。

0 50 100 150m

図-1 (2) 城山ダム付近平面図

ピーク時に発電するいわゆる揚水発電所を建設するほか，既設の各発電所の出力を増強するものである。そして一方，相模川は本邦河川の例にもれず，豪雨があると相当に出水し，下流沿岸地帯にはいまだ未改修地帯が多く，毎年莫大な被害を受けている。その対策として50年確率洪水量，4,000m³/sec を，一定率調節を行ない，3,000m³/sec 放流することにより，洪水による災害を防止するいわゆる多目的ダムとして城山ダムが計画された。

城山ダムの諸元および水理に関係する資料は，表-1に示す。

表-1 (1) ダムおよび貯水池諸元

ダム	河川名	相模川		
	位置	右岸 神奈川県津久井郡津久井町大字大井字発 左岸 〃 〃 城山町大字川尻水源		
	型式	中央越流型直線重力式コンクリートダム		
	堤高	75.0m	堤頂長	260.0m
	堤頂幅	9.6m	堤体積	345,000m³
	非越流部堤頂標高	EL. 127.0m		
貯水池	集水面積	(直接) 1,201.3km² (流域変更分) 121.8km²		
	湛水面積	2.39km²	総貯水容量	62,300,000m³
	有効貯水容量	54,700,000m³	洪水調節容量	27,500,000m³
	予備放流容量	14,400,000m³	サーチャージ容量	3,500,000m³
	常時満水位	EL. 124.0m	サーチャージ水位	EL 125.5m
	予備放流最低水位	EL. 113.0m	夏期制限水位	EL. 120.0m
	最低水位	EL. 95.0m	推定堆砂面標高	EL. 85.5m

表-1 (2) 水理資料

計画洪水量	確率 100年洪水	4,900m³/sec
異常洪水量		5,880m³/sec
予備放流量	貯水位 EL. 113.0m において	1,500m³/sec
計画最大放流量		4,150m³/sec

〔2〕 実験目的および実験方針

城山ダム水理模型実験の目的は次の通りである。

1) 貯水位と越流および流出量の検討すなわち流量係数の測定
2) 堤頂越流部形状の検討
3) 水叩形状の検討
4) オリフィスまたはカーテンウォール形状の検討
5) ガイドウォール形状の検討
6) その他，設計，維持管理上必要と考えられる水理資料の測定および検討

以上の実験目的にしたがって実験計画および方針を番号順に列記すると，

1) 最終案形状について種々の流量について貯水位を測定し，自由越流時，門扉操作時ともに水位—流量曲線を作製する。
2) 越流頂付近の圧力分布を測定し，どんな流量，門扉操作状態においても，許容値以上の負圧が発生しないような形状にする。
3) 現場の状況を考慮の上，形状寸法の概略を設計し，細部形状は，模型実験により得られた水面形状，流速分布，流況観察等の資料を参考にして決定する。
4) 抽出模型で種々の形状について検討の上決定する。
5) 水面形状測定結果より決定する。
6) それぞれ最良と思われる実験方法により測定し，改良の必要があるものについては，そのつど改造し，形状寸法を決定し，最終案とする。

移動床実験，流況写真，貯水池背水関係，下流水位関係等，実験上必要なものその他参考資料等は出来る範囲

内で測定記録する。

〔3〕 模型および相似律について

模型は，土木研究所藤崎分室ダム水理実験場内に1/40の縮尺で図-2に示すように製作した。河道模型は，ダム軸上流約150m，下流は，約500mまでが模型化され，コンクリートブロックで周囲の側壁を作り，神奈川県企業庁電気局で測量した平面図と付属の縦横断面図を基に，コンクリート破片，砂利，砂等を中詰材料とし，モルタル刷毛引き仕上げとしたが，水叩終端部から下流約100mの区間は，現地における基礎掘削や，砂礫の移動などによる変形を考慮して，現況とは多少異なった模型河床を製作した。

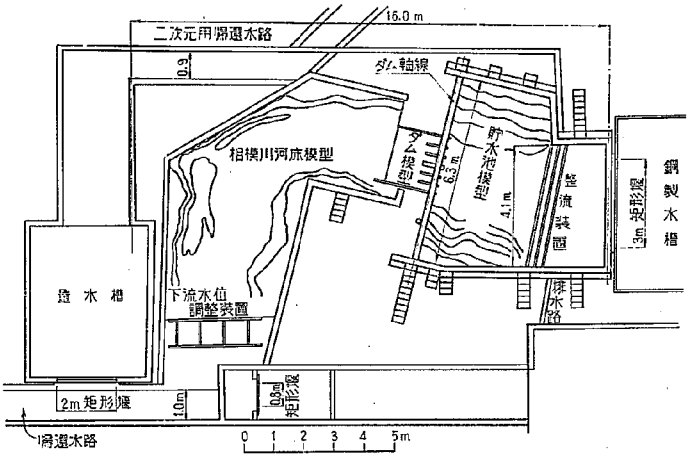


図-2 城山ダム模型配置図

ダム本体の模型は，木材を骨格とし，その上に木造の橋脚および橋台をとりつけ，堤体越流面の曲線部および斜面は，モルタル下塗り，セメントペースト上塗りとし，砥石で磨いて仕上げた。また水叩部分，ガイドウォール等は木製とし，減勢池内の流況を観察できるように，ガラスをとりつけたほか，堤体越流面および水叩面の圧力分布状態を測定するために，中央越流部と測部越流部の中心線上に，測定孔 1m/m のピエゾメーターを設置した。その他，模型河道の下流端には，ダム下流水位を調節出来るように，下流水位調節装置を，また上流部には整流装置を設けた。

流量は，幅 3.0m の鋭縁矩形ぜきで，越流水深を水面測定器で測定し，沖公式* により算出した。貯水池の水位は，ダム軸から約60m上流に相当する断面のほぼ中心付近より，径25m/m のゴム管で，径100m/m の硝子管に導き，水面測定器で測定した。ダム下流の水位は，直接水位測定器で測定したほか，流速は，ピトー管又は回転式小型流速計を用い，圧力は，測定孔1m/mのピエゾメーターより，ビニール管で，目盛付硝子管(内径10m/m)に導き測定し，特に圧力変動の著しい場所で，負圧発生の心配がある場所は，オシログラフにより記録した水面形は，水位測定器を用いて直接測定したもので測定値は平均値である。

* 土木学会水理公式集 P. 81

模型実験による測定値（以下実験値という）より，実物値を知るのには，模型は幾何学的に相似に作られているから，フルードの相似律にしたがった。

幾何縮率1/40に対する諸量の換算縮率は，表-2のとおりである。

表-2 模型諸量の換算縮率

基本量	次元	縮率	
長さまたは水深	L	m	1：40
面積	L^2	m^2	1：1,600
体積	L^3	m^3	1：64,000
時間	T	$m^{1/2}$	1：6.3246
流速	LT^{-1}	$m^{1/2}$	1：6.3246
流量	L^3T^{-1}	$m^{5/2}$	1：10,119,288
圧力強度	$ML^{-1}T^{-2}$	m	1：40
越流係数	$L^{1/2}T^{-1}$	1	1：1

〔4〕 余水吐の設計およびその経緯

城山ダムの余水処理方式を決定するため，現地の立地条件に合致した経済的且つ安全な形状という点から考えると，設計条件は次の通りである。

1) 異常洪水量 5,880m^3/sec を，橋梁および門扉などの下端に，水脈を接触させることなく，また堤体その他の主要構造物に損傷を与えずに放流出来ること。

2) 予備放流最低水位 EL. 113.0m で，1,500m³/sec を放流出来ること。

3) 各種の洪水に対しても，自由に放流量を調節しうること。

4) いかなる洪水においても，放流された水脈が，減勢池内で跳水せずに飛散してはならない。

5) 4)とは反対に，高速潜流となり，河床を洗掘しないような水叩形式とする。

等であり，ダムの余水吐に関する案はいろいろなものが考えられたが，立地条件に合致した経済的且つ安全な形状という点から，図-3に示す3案にしぼられた。

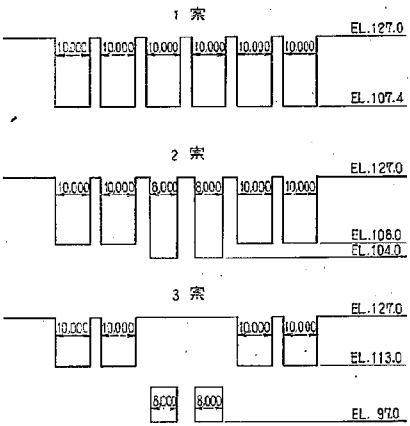


図-3　余水吐比較案

すなわち

1案　越流頂の標高を同一とする案。

2案　越流頂の標高に段をつけて，低い部分にはカーテンウォールを設けるか，あるいはオリフィスとする案。

3案　越流部の他に放水管を設置する案

で，以上の3種の案にさらに検討を加えた結果，一応第2案が選ばれた。

なお水叩の型式は，現地の砂礫堆積層の厚さが20m以上であり，掘削面で制約されるのと，下流河道がダム軸下流約200m付近で，左へ90°近く曲っているほか，自然下流水位が相当に高いから，ローラーバケット型水叩を採用するのが，経済的であると考えられるので，この3種の案はいずれもローラーバケット型水叩を用い，バケットインバートの標高は EL. 65.0m，リップ角は45°として比較することにした。

比較検討の対称としては，予備放流最低水位 113.0m において，1,500m³/sec の放流が可能であること，下流水深が副ダム等の，下流水位維持構造物を設置しなくても得られること，サーチャージ水位 125.5m において異常洪水量5,880m³/sec が完全に放流できるかどうかの3点を比較検討することにした。

なお，越流水脈の減勢に必要な減勢池水深の求め方は，土木研究所で行なった秋葉ダム実験* で得たフルード数—飛散巻込臨界水深係数関係曲線，図-4を利用した。

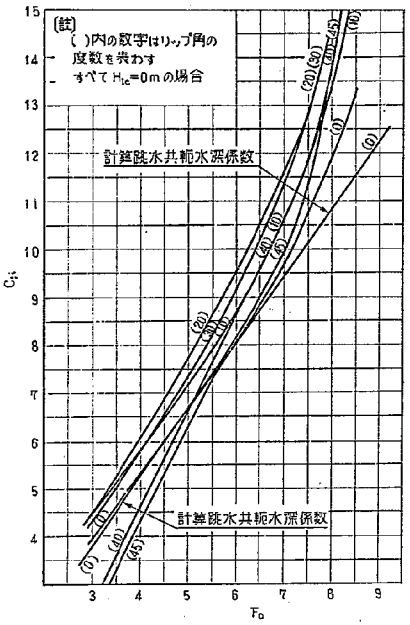


図-4　フルード数—飛散巻込臨界水深係数関係曲線

この図の範囲に含まれない $F_0>8$ のような場合には，J. B. Tiffany** の方法によった。Tiffany は跳水共軛水深と飛散巻込および巻込飛散の両臨界水深との間の関係を，図-5に示すような形で提示した。

同図は，ローラーバケットの半径が 15.24m リップ角が45°の場合だけに適用されるものであるが，城山ダムはバケット半径15mリップ角45°を計画しているから，この図を使用してもさしつかえないと思われる。

6) 第1案クレストの標高を同一とする場合

a　予備放流最低水位で 1,500m³/sec を放流する場合

$$Q=CBH^{3/2} \quad \cdots\cdots(1)$$

式(1)において $C=1.9$ と仮定すると $Q=1,500$m³/sec $B=60$m ととした場合，$H=5.6$m であるから，越流頂標高は，

EL. 113.0−5.6=EL. 107.4m となる。

バケットインバート付近における単位幅当りの流量 q

* 村幸雄・伊集院敏：土木研究所報告 93号-P31

** J. B. Tiffany: Laboratory Research Applied to the Hydraulic Design of Large Dams, Waterway Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, Bulletin 32 1948

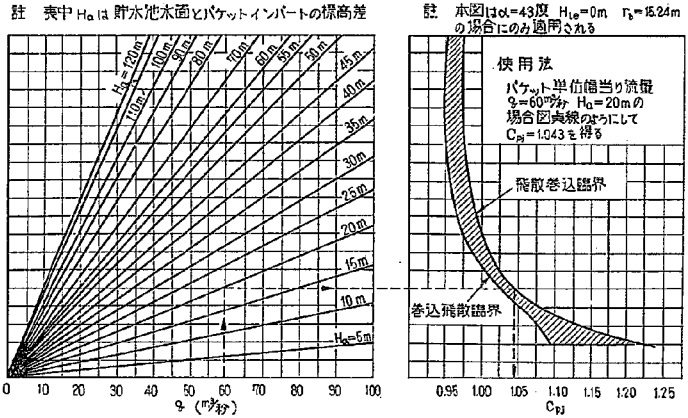


図-5　跳水共軛水深と飛散巻込臨界水深との関係

は

$$q=\frac{Q}{60+3\times5}=\frac{1500}{75}=20\text{m}^3/\text{sec}$$

流速 v_0 は，

$$v_0=0.9\sqrt{2gH}=0.9\sqrt{2\times9.8\times48}=27.6\text{m/sec}$$

露出射流水深 h_0 は

$$h_0=\frac{q}{v_0}=\frac{20}{27.6}=0.725\text{m}$$

フルード数 F_0 は

$$F_0=\frac{v_0}{\sqrt{gh_0}}=\frac{27.6}{\sqrt{9.8\times0.725}}=10.33$$

跳水共軛水深を求めると，

$$h_j=\frac{1}{2}h_0(\sqrt{1+8F_0^2}-1)=\frac{0.725}{2}\times(\sqrt{1+8\times10.33^2}-1)=10.25$$

図-5より C_{pj}=1.08

ゆえに　$h_2=h_j\times C_{pj}=10.25\times1.08=11.07\text{m}$

バケットインバートの標高が EL. 65.0m であるから，飛散—巻込臨界水位 H_2 は

H_2=EL. 65.0m+11.07m=EL. 76.07m

以下同様に，比較案について飛散—巻込臨界水位を求め，表-3に示す。

表-3　飛散巻込臨界水位の比較

型式	流量 m³/sec		q m³/sec	h_0 m	F_0	h_j m	C_{pj}	C_{pi}	飛散—巻込臨界水深 h_2 m	飛散—巻込臨界水深 H^2 EL.m	備考
1型	1,500		20.0	0.725	10.33	10.25	1.08		11.07	76.07	
	4,900		65.3	2.140	6.66	19.11		9.3	19.90	84.90	
	5,880		78.4	2.232	6.63	19.84		9.2	20.53	85.53	
2型	1,500	710	28.4	1.035	8.66	12.17	1.03		12.54	77.54	オリフィス
		790	15.8	0.574	11.62	9.15	1.12		10.25	75.25	越流部
	4,900	1,600	64.0	2.093	6.74	18.97		9.4	19.72	84.72	オリフィス
		3,300	66.0	2.163	6.63	19.23		9.2	19.90	84.90	越流部
	5,880	1,800	72.0	2.326	6.49	20.21		9.0	20.93	85.93	オリフィス
		4,080	81.6	2.636	6.09	21.43		8.3	21.88	86.88	越流部
3型	1,500		60.0	2.179	5.96	17.30		8.1	17.65	82.65	放水管
	4,900	1,700	68.0	2.229	6.53	19.50		9.1	20.28	85.28	〃
		3,200	64.0	2.093	6.74	18.97		9.4	19.72	84.72	越流部
	5,880	2,000	80.0	2.584	6.16	21.27		8.4	21.71	86.71	放水管
		3,880	77.6	2.506	6.25	20.93		8.6	21.30	86.30	越流部

第2案を選定した理由は，第1案のように，サーチャージ水位で門扉を全門開放した場合 10,000m³/sec 以上の放流が可能なものは，門扉操作のあやまり，装置の故障，その他，越流頂が低いため，門扉製作の問題，堤体の安定等に関連するのと，3案のように高額の工費を要する大口径放水管は，出来得れば設置したくないので，結局第2案を基本型として，余水吐の細部形状寸法を決定した結果を1型として，図-6に示す。

〔5〕 ダム下流水位の検討

減勢池の，飛散巻込臨界水位は先に求めたが，実際に自然下流水位がどのようになるかを，城山ダム下流約1.5kmの地点に，逆調節池として建設予定の小倉ダムの越流水位を出発水位とし，不等流計算により算出した結果を，表-4に示す。

表-4 ダム下流水位—流量関係

流量 m³/sec		1,000	2,000	3,000	4,000	4,900	5,880
出発水位 EL. m		72.36	73.55	74.44	75.14	75.22	75.52
下流水位	逐次計算法	76.39	78.67	79.76	80.70	81.67	82.52
	図式解法		77.80	79.20	80.20	81.10	82.20
	式(7)による計算結果			78.90	80.12	81.38	82.55

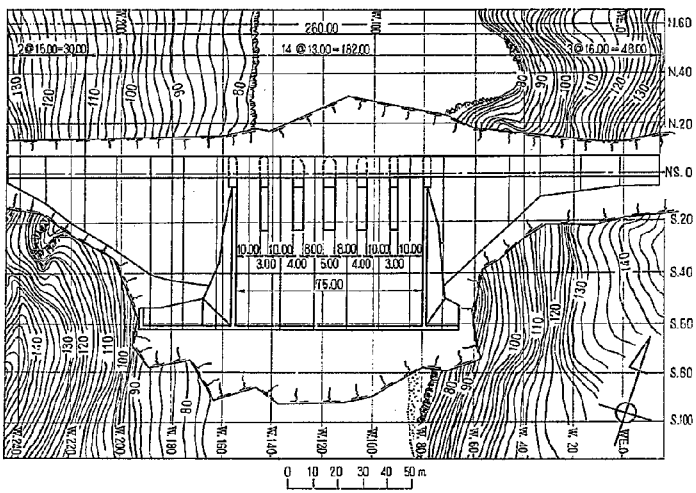


図-6 (1) 1 型 余 水 吐 平 面

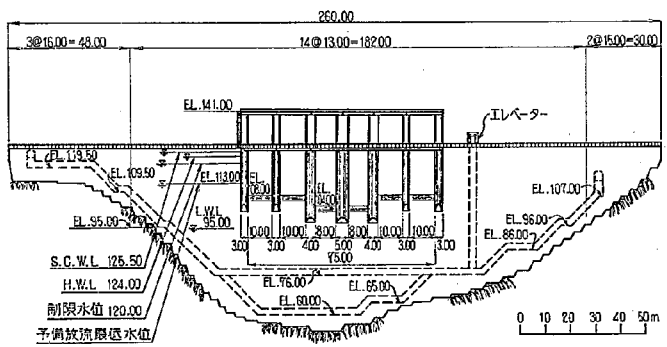


図-6 (2) 上 流 面

この場合の小倉ダムの越流水位は，本間公式*のモグリゼキの項を用いたのと，計算の最終地点は城山ダム軸下流約120m（図-1においてS120付近）である。

以上の諸点を考慮して，余水吐形状各案の特徴を比較検討するのに，いろいろな項目別に各案の適応性を，表-5に列記する。なお適応性の評価は，ローラーバケットのインバート標高をEL. 65.0mとしたときを基準としたものである。

表-5　余水吐型式各案の比較

比較の対称	第　1　案	第　2　案	第　3　案
下流水位との関係	良	良	不　良
流れの均等性	良	良	不　良
可能最大放流量	10,100m³/sec	8,000m³/sec	6,000m³/sec
副ダムの必要性	無	無	有
ゲートの所要面積	170m²×6=1,020m²	154m²×4+73.6m²×2=763.2m²	114m²×4+92m²×2=640m²

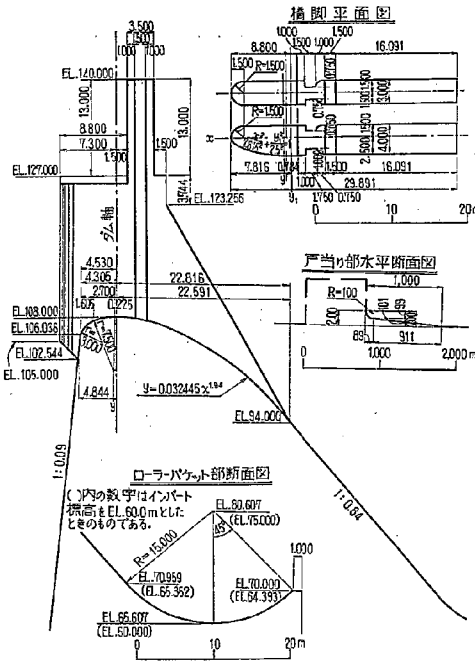


図-6 (3)　越流部定規図（側部）

〔6〕　1型模型の実験結果

（1）　水位—流量曲線

図-7，表-6は1型越流部で，貯水位と越流および流出量に関する実験結果で，全門自由越流の水位—流量曲線と，両側すなわち，越流頂EL. 103m部分の4門を開放して，中央部EL. 104mの部分を閉鎖して実験を行なった自由越流時と門扉操作時の水位—流量曲線である。

図-8，表-7は，図-7に示したものと逆に，両側部の4門を閉鎖し，中央部2門についての水位—流量曲線である。

（2）　ローラーバケット機能に関する実験結果

城山ダム余水吐の減勢方法は，先に記述した理由により，ローラーバケット型水叩を採用する方針に決定し，当初案の細部形状は，図-6に示され，これをローラーバケット1型と呼び，各流量における跳水水位を測定した結果，図-9を得た。

図中，飛散—巻込臨界水位実験値とあるのは，下流水位が不足しているために，越流水脈が巻込み状態にならず，飛散状態を呈しているものを，巻込み状態にするのに必要な水位であり，また巻込—飛散臨界水位とは，前者とは逆に，巻込み状態から下流水位を下げて，巻込み状態を続けるのに不足な状態になり，水脈が飛散状態に入る時の水位のことである。

下流水位の測定は，水面を直接測定する方法をとったために，水面の動揺により，その測定値に相当のばらつきが見られたため，実験値は図中帯状をもってあらわした。またこの下流水位の測定位置は，ダム軸から170m下流の地点をとっているために，自然下流水位の値もこの付近の水位を用いてある。

実験結果からわかるように，放流量が3,000m³/secをやや越えると飛散状態になり，この状態ではダム下流河床を極度に洗掘することが予想され，好ましくない状態なので，この対策としては，バケットのインバート標高を下げて，相対的に自然下流水位を高くする方法と，副ダムを設けて，人工的に下流水位を高くするとか，下流河床をコンクリートで，保護する方法などが考えられるが，経済的な見地から，インバートの標高を下げる方法，すなわち，バケットをそのまま斜面に沿って，必要なだけ下げる方法が得策であると考えられる。

* 土木学会水理公式集

この場合，実験結果からわかるように，異常洪水量付近で，下流水位は，飛散巻込臨界水位まで約5mほど不足しているから，バケットインバートを5m下げて，相対的に下流水位を上げることにする。

バケットインバートの標高を5m下げて，リップの角度を45°とした場合の形状を，ローラーバケット2型とし，飛散巻込臨界水位を計算すると図-9に示すようになり，これでわかるように，バケットインバートの標高をEL. 60.0mにすれば，自然下流水位は，ほぼ充分になることが予測できるので，模型を改造して飛散巻込臨界水位の実験を行なった結果，同図に示されるような結果になり，異常洪水量5,900m³/secにおいては，自然下流水位は，臨界水位一ぱいで，流況も不安定になり，ダム建設後に予想される，下流河床の低下にともなう自然下流水位の低下により，飛散状態になることが考えられるから，その対策として，リップ角45°を40°にした3型について，飛散巻込臨界水位の実験をおこなった結果，図-9に示すように，異常洪水流量付近における自然下流水位で，跳水を起すことが確認され，2型に比較して，流況も相当によくなった。

〔7〕 オリフィス部の形状について

中央越流部すなわち，オリフィス部の形状を決めるために，この部分だけを抽出した部分模型を製作し，形状決定についての実験を行なった。

模型は，オリフィス部を2門分だけ，水路幅1mの二次元実験用水路に，橋脚堤体ともに木材で製作した。その他，圧力分布を測定するために，測定孔1m/mのピエゾメーターを設け，ビニール管により，内径 10m/mの目盛付硝子管に導水して測定することにした。

実験は，貯水位113.0mで1,500m³/secを放流しなければならないので，先ず貯水位を113.0mにして越流水脈を測定し，図-10，表-8を得た後に，計画洪水量4,900m³/sec流下時に，余水吐各門の放流量がなるべく均等になるようにするため，全体模型の実験結果，図-7，8を参考にして，オリフィス部呑口始点をEL. 113.5mにおく事により，貯水位をいろいろ変えて，噴出流の水面形を測定した結果を，図-11，表-9に示す。この図より負圧発生の最も少ないと考えられる貯水位125.5mの時の水面形を基に，図-12に示される形状をオリフィス1型として，模型に取付けて，圧力分布を測定した結果を，図-13，表-10に提示する。

この結果によれば，堤体面の圧力測定点No.10～13付近に許容値を上まわる負圧を生じていることがわかった。この原因はオリフィスよりの流出水脈が堤体面に沿わずに離れる傾向にあることを示しているが，オリフィス上面形状の改良により，水脈剝離の傾向を押える目的で，図-14に示す2型について実験の結果，図-15，表-11に示すように圧力分布は一向に好転しないので，オリフィス部の形状を大幅に改めることにより，3型とし圧力分布の好転を計った。

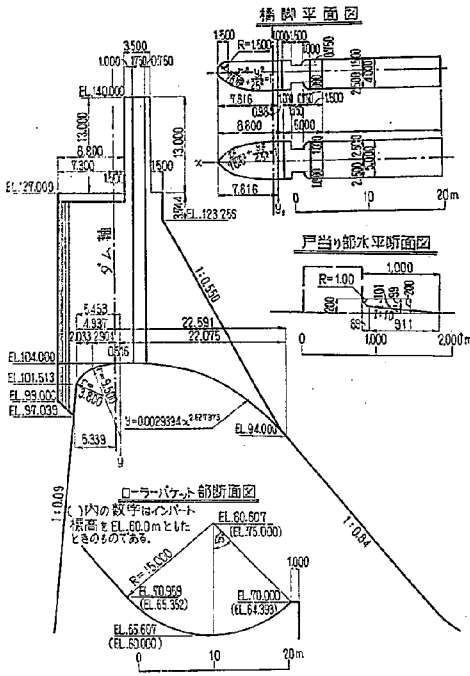


図-6 (4) 越流部定規図（中央部）

オリフィス3型の形状は，オリフィス1型あるいは2型の流出水脈が，堤体より離れる傾向にあるのが原因で，負圧が生じたものであると考えられるから，水脈の離れるのを防ぐために，オリフィスを短かい放水管のように水平に対して2°傾けて設置すれば，水脈の離れは解決でき負圧発生の原因をなくすことが，実験の結果より予想されるので，3型として，図-16に詳細図を示し実験の結果は，図-17，表-12に提示する。

これによればオリフィス部の圧力分布は，いずれも正圧であり，最も心配された堤体面の圧力分布も許容値内にあり，充分満足出来るものと考えられる。

〔8〕 最終案形状について

当初案について種々実験した結果，最終案模型実験にとり入れた最終案候補の形式および形状等について，記述する。

余水吐の平面形状は，図-18に示すように，橋脚幅3mを4mに改めたことにより，橋脚を含めた越流部幅が

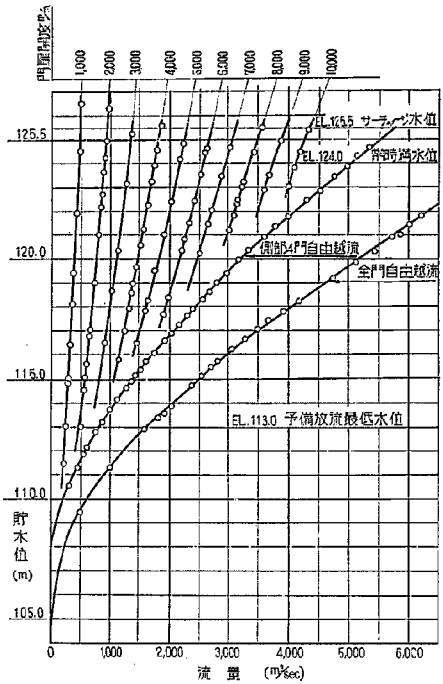


図-7　1型余水吐水位—流量曲線

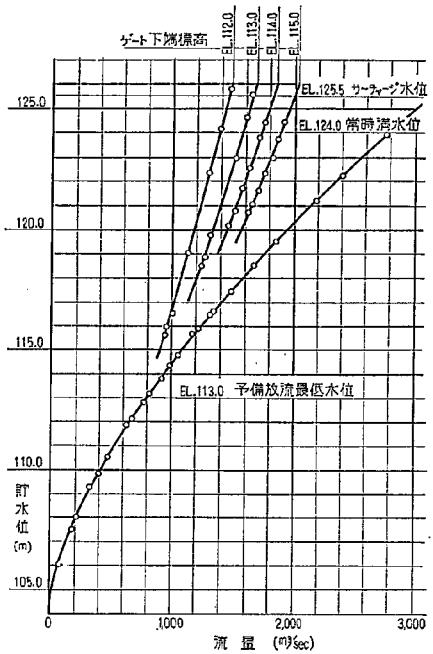


図-8　1型余水吐中央部水位—流量曲線

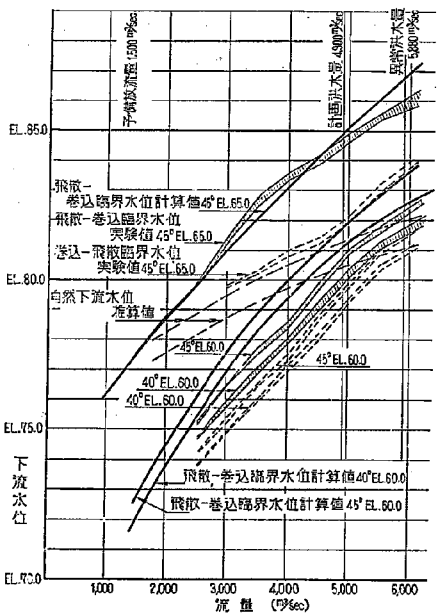


図-9　跳水水位の比較

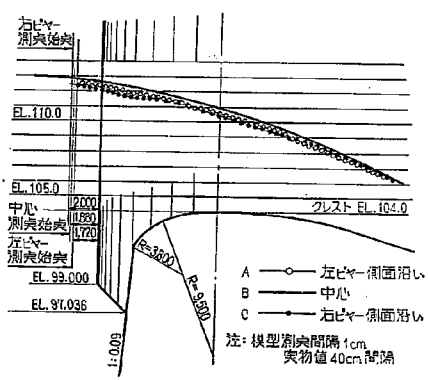


図-10　オリフィス抽出実験越流水脈水面形状

表-6　1型余水吐水位—流量実験値

番号	全門自由越流時		両側4門自由越流		門扉開度1.0m開放		門扉開度2.0m開放	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	109.44	506.00	110.56	331.00	111.52	213.00	113.05	506.00
2	111.32	1016.00	111.31	453.00	113.06	256.00	114.60	571.00
3	112.93	1609.00	111.89	567.00	114.86	299.00	115.09	589.00
4	113.40	1821.00	112.19	617.00	115.07	309.00	115.60	612.00
5	113.62	1943.00	112.80	766.00	116.48	336.00	116.80	658.00
6	113.92	2024.00	113.23	870.00	118.12	362.00	117.08	672.00
7	114.76	2368.00	113.72	998.00	119.47	397.00	119.06	744.00
8	115.16	2528.00	114.14	1135.00	121.95	428.00	121.02	812.00
9	115.52	2689.00	114.61	1285.00	124.50	481.00	122.20	855.00
10	115.77	2833.00	114.97	1396.00	126.53	503.00	122.71	873.00
11	116.28	3067.00	115.14	1452.00			123.65	901.00
12	116.69	3305.00	115.37	1543.00			124.18	925.00
13	117.08	3501.00	115.73	1624.00			124.98	946.00
14	117.47	3681.00	116.10	1761.00			126.30	990.00
15	117.82	3926.00	116.58	1913.00				
16	118.27	4188.00	116.92	2039.00				
17	119.17	4751.00	117.25	2155.00				
18	119.89	5129.00	117.68	2292.00				
19	120.34	5452.00	117.90	2393.00				
20	120.91	5712.00	118.36	2565.00				
21	121.04	5879.00	118.64	2644.00				
22	121.39	6021.00	119.04	2808.00				
23	121.80	6225.00	119.47	2988.00				
24			119.94	3172.00				
25			120.38	3365.00				
26			120.96	3623.00				
27			121.36	3795.00				
28			121.72	3992.00				
29			122.46	4306.00				
30			122.84	4523.00				
31			123.41	4761.00				
32			123.82	4999.00				
33			124.28	5151.00				
34			124.61	5340.00				

番号	門扉開度3.0m開放		門扉開度4.0m開放		門扉開度5.0m開放		門扉開度6.0m開放	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	116.504	939.00	115.79	1177.00	116.52	1477.00	117.69	1920.00
2	118.660	1057.00	117.04	1275.00	117.892	1609.00	118.36	1988.00
3	120.372	1156.00	117.97	1343.00	118.272	1644.00	120.35	2206.00
4	123.144	1295.00	118.60	1393.00	119.556	1766.00	120.80	2252.00
5	125.260	1391.00	119.00	1412.00	121.012	1927.00	121.48	2325.00
6			119.60	1473.00	122.420	2029.00	122.44	2426.00
7			120.56	1548.00	124.204	2176.00	123.53	2537.00
8			121.24	1596.00	124.800	2236.00	124.42	2613.00
9			122.27	1667.00			124.55	2626.00
10			123.23	1725.00				
11			123.90	1771.00				
12			124.54	1816.00				
13			125.63	1888.00				

表-6 （つづき）

番号	門扉開度7.0m開放		門扉開度8.0m開放		門扉開度9.0m開放		門扉開度10.0m開放	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	120.20	2510.00	121.19	3018.00	122.87	3608.00	123.01	3990.00
2	121.42	2666.00	121.82	3109.00	123.51	3694.00	123.78	4093.00
3	122.02	2725.00	122.30	3152.00	124.95	3881.00	124.44	4194.00
4	123.52	2899.00	122.44	3172.00			125.36	4311.00
5	124.70	3026.00	122.996	3238.00				
6			123.17	3269.00				
7			124.48	3435.00				
8			125.47	3562.00				

表-7 1型余水吐水位—流量実験値（中央2門操作時）

番号	自由流出時		開度EL.112.00(m)		開度EL.113.00(m)		開度EL.114.00(m)		開度EL.115.00(m)	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	106.16	71.00	115.60	941.00	118.46	1235.00	120.14	1452.00	120.68	1614.00
2	107.52	175.00	115.90	946.00	118.83	1265.00	120.77	1503.00	121.06	1649.00
3	108.05	218.00	116.55	992.00	119.78	1316.00	121.68	1563.00	121.59	1690.00
4	109.23	319.00	119.06	1139.00	122.91	1518.00	122.54	1619.00	122.32	1746.00
5	109.82	385.00	122.35	1295.00	124.60	1599.00	123.84	1700.00	122.97	1821.00
6	110.52	462.00	124.15	1386.00	125.56	1649.00	124.42	1751.00	123.72	1857.00
7	110.93	516.00	125.83	1465.00					124.40	1923.00
8	111.82	632.00								
9	112.08	676.00								
10	112.78	767.00								
11	113.18	810.00								
12	113.81	911.00								
13	114.32	980.00								
14	114.76	1042.00								
15	115.63	1169.00								
16	115.88	1214.00								
17	116.42	1310.00								
18	116.57	1341.00								
19	117.41	1477.00								
20	118.50	1660.00								
21	119.46	1852.00								
22	121.20	2186.00								
23	122.23	2400.00								
24	123.94	2768.00								

表-8 オリフィス抽出実験越流水脈水面形状実験値

測点	左ピアー側面沿い	中心	右ピアー側面沿い	測点	左ピアー側面沿い	中心	右ピアー側面沿い	測点	左ピアー側面沿い	中心	右ピアー側面沿い
1	112.48	112.76	112.41	19	111.30	111.56	111.04	37	108.96	109.52	109.08
2	112.52	112.70	112.34	20	111.12	111.50	111.15	38	108.86	109.40	108.94
3	112.48	112.70	112.28	21	110.99	111.40	110.99	39	108.65	109.24	108.82
4	112.48	112.68	112.23	22	110.92	111.38	110.88	40	108.54	108.96	108.64
5	112.44	112.66	112.17	23	110.82	111.20	110.73	41	108.44	108.90	108.52
6	112.32	112.56	112.10	24	110.71	111.08	110.68	42	108.28	108.74	108.32
7	112.23	112.52	112.00	25	110.62	110.96	110.57	43	108.10	108.62	108.18
8	112.20	112.46	111.88	26	110.44	110.90	110.38	44	107.95	108.42	108.06
9	112.04	112.42	111.77	27	110.35	110.77	110.20	45	107.76	108.26	107.83
10	111.92	112.35	111.72	28	110.24	110.66	110.03	46	107.62	108.11	107.69
11	111.88	112.28	111.58	29	110.14	110.53	109.92	47	107.50	107.96	107.58
12	111.84	112.20	111.52	30	110.00	110.43	109.80	48	107.31	107.78	107.44
13	111.72	112.14	111.52	31	109.96	110.32	109.76	49	107.08	107.48	107.16
14	111.70	112.15	111.56	32	109.84	110.16	109.67	50	106.98	107.40	107.07
15	111.60	111.96	111.53	33	109.72	110.02	109.54	51	106.80	107.14	106.92
16	111.52	111.88	111.52	34	109.48	109.89	109.36	52	106.62	106.92	106.72
17	111.48	111.80	111.46	35	109.39	109.80	109.20	53	106.42	106.74	106.54
18	111.42	111.74	111.40	36	109.28	109.60	109.13				

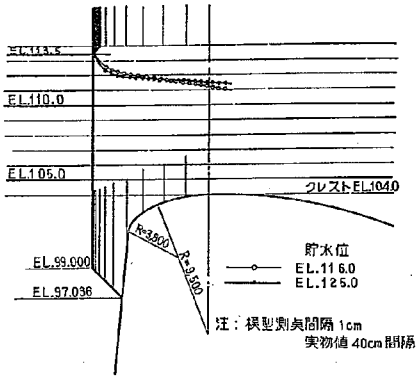


図-11　オリフィス抽出実験噴出流水面形状

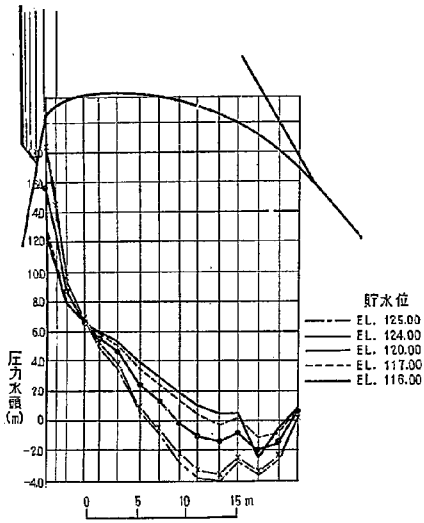


図-13　オリフィス１型圧力分布図

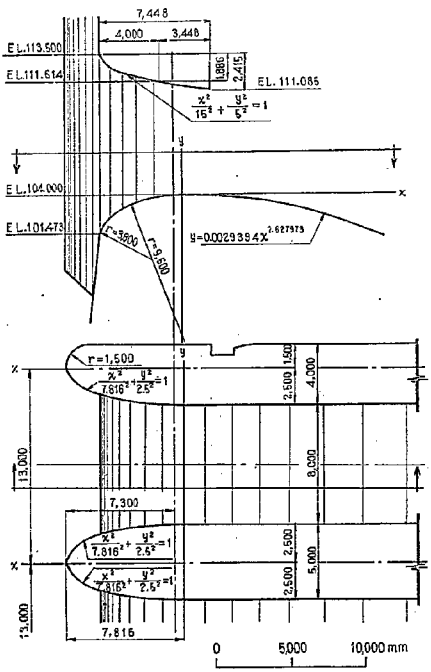


図-12　オリフィス１型詳細図

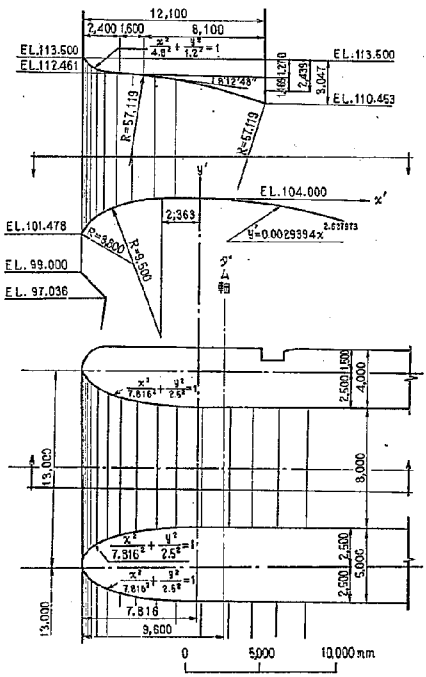


図-14　オリフィス２型詳細図

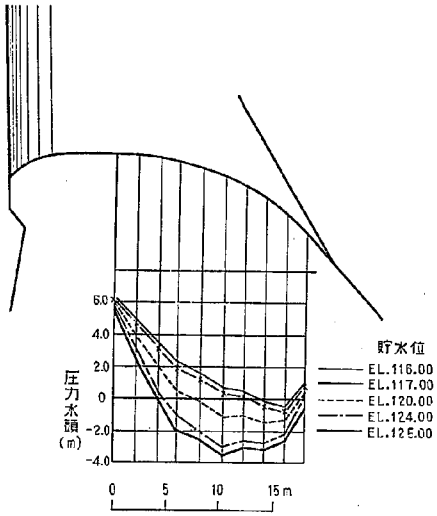


図-15　オリフィス2型圧力分布図

表-9　オリフィス抽出実験噴出流水面形状実験値

測点	EL. 116.00	EL. 120.00	EL. 124.00	EL. 125.00
1	112.56	112.48	112.40	112.40
2	112.36	112.32	112.24	112.29
3	112.28	112.16	112.12	112.12
4	112.16	112.08	112.00	112.04
5	112.04	112.00	111.92	111.96
6	112.00	111.92	111.90	111.92
7	111.96	111.84	111.82	111.84
8	111.84	111.80	111.80	111.80
9	111.82	111.80	111.76	111.77
10	111.80	111.76	111.68	111.72
11	111.74	111.74	111.66	111.68
12	111.68	111.72	111.64	111.68
13	111.62	111.68	111.69	111.64
14	111.54	111.64	111.62	111.58
15	111.52	111.60	111.60	111.54
16	111.48	111.60	111.58	111.56
17	111.44	111.56	111.56	111.62
18	111.38	111.52	111.54	111.56
19	111.28	111.52	111.52	111.50
20	111.16	111.44	111.50	111.48
21	111.08	111.40	111.40	111.40

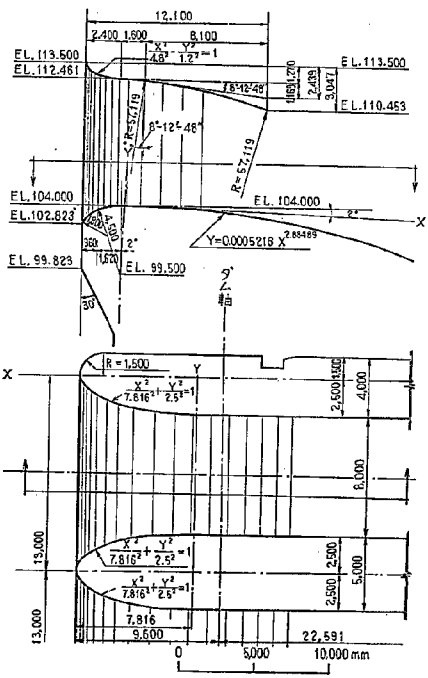


図-16　オリフィス3型詳細図

表-10　オリフィス1型圧力分布実験値

測点	EL. 116.00	EL. 117.00	EL. 120.00	EL. 124.00	EL. 125.00
1	12.80	13.60	15.80	18.80	19.40
2	10.32	10.80	12.40	14.80	15.04
3	7.92	8.04	8.60	9.28	9.32
4	6.60	6.60	6.68	6.72	6.68
5	6.00	5.92	5.72	5.36	4.92
6	5.40	5.20	4.80	4.00	3.40
7	3.92	3.60	2.60	1.00	0.70
8	3.08	2.60	1.52	− 0.40	− 0.80
9	2.00	1.52	0.08	− 2.12	− 2.80
10	1.00	0.40	− 1.08	− 3.36	− 3.96
11	0.40	− 0.20	− 1.48	− 3.52	− 4.00
12	0.56	0.20	− 0.88	− 2.48	− 2.88
13	− 2.72	− 1.12	− 2.00	− 3.40	− 3.72
14	− 0.60	− 0.80	− 1.52	− 2.36	− 2.40
15	0.80	0.64	0.48	0.20	0.20

表-11　オリフィス2型圧力分布実験値

測点	EL. 116.00	EL. 117.00	EL. 121.00	EL. 124.00	EL. 125.00
1	6.16	6.12	5.92	5.68	5.52
2	4.92	4.68	3.88	2.88	2.60
3	3.40	3.08	1.92	0.32	−0.08
4	2.32	1.88	0.52	−1.00	−1.88
5	1.60	1.28	0.12	−2.04	−2.48
6	0.68	0.32	−1.04	−2.96	−3.48
7	0.52	0.16	−1.00	−2.56	−3.00
8	−0.16	−0.48	−1.40	−2.68	−3.04
9	−0.48	−0.72	−1.36	−2.20	−2.40
10	1.00	0.80	0.60	0.40	−0.32

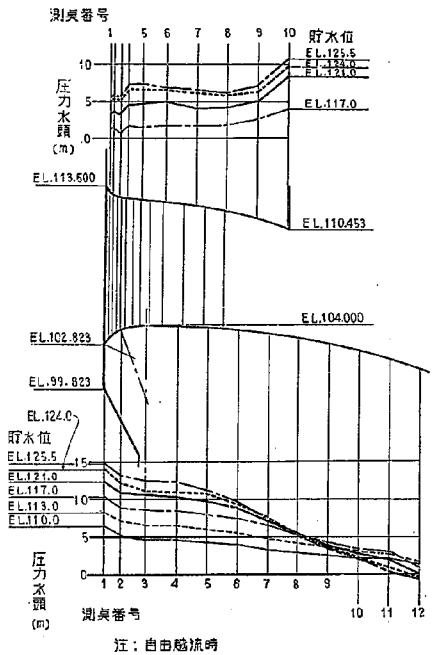


図-17 (1)　オリフィス３型圧力分布図

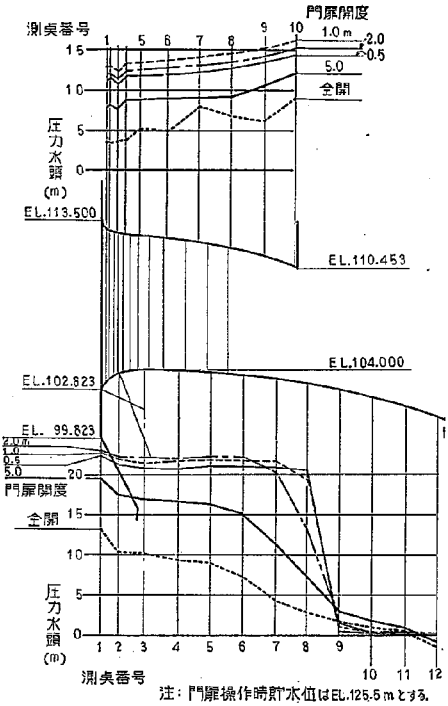


図-17 (2)　オリフィス３型圧力分布図

表-12　オリフィス３型圧力分布実験値

測点番号	自由越流時 貯水位 (m) EL. 117.00	(m) EL. 121.00	(m) EL. 124.00	(m) EL. 122.50	門扉操作時 貯水位は全べて EL. 125.50m とする 0.5m	1.0m	2.0m	5.0m	全開
1	1.30	3.55	5.42	5.68	11.16	12.84	11.96	7.84	3.60
2	1.44	3.64	5.36	5.80	11.36	13.04	11.60	7.96	3.60
3	0.80	3.40	5.20	5.76	10.60	12.32	11.32	7.60	3.80
4	1.96	4.64	6.68	7.28	11.88	13.56	12.36	8.84	5.20
5	1.96	4.76	6.72	7.44	11.84	13.52	12.56	9.04	5.40
6	1.96	5.04	6.76	7.04	11.96	13.88	12.80	9.04	4.76
7	1.88	4.40	6.16	6.64	12.40	14.16	13.16	9.12	7.96
8	1.96	4.16	5.88	6.28	12.92	14.68	13.64	9.56	7.00
9	2.60	5.00	6.00	6.96	13.60	15.32	14.44	10.80	6.40
10	4.08	8.32	9.50	10.52	14.52	16.32	15.44	12.76	9.12

表-12（つづき）

測点番号	自由越流時 貯水位 EL. (m) 110.00	EL. (m) 113.00	EL. (m) 117.00	EL. (m) 121.00	EL. (m) 124.00	EL. (m) 125.50	門扉操作時 貯水位は全べて 125.50m とする 0.5m	1.0m	2.0m	5.0m	全開
1	6.52	8.24	10.44	12.40	14.00	14.80	22.28	22.84	22.80	19.60	13.20
2	5.28	7.12	8.96	10.80	12.20	13.12	21.28	21.92	22.30	17.16	10.40
3	4.80	6.60	8.72	10.60	11.12	12.40	20.92	21.60	22.20	17.00	10.32
4	4.68	6.52	8.52	10.44	11.00	12.36	20.96	21.68	22.00	16.80	9.40
5	4.40	6.08	8.08	9.80	10.88	11.20	21.12	21.80	22.36	16.48	9.00
6	4.00	5.60	7.40	8.68	9.40	9.68	21.28	21.92	22.32	15.12	7.40
7	3.44	4.92	6.40	7.08	7.40	7.40	21.28	21.76	20.40	11.68	4.52
8	2.96	4.16	5.20	5.28	5.20	5.20	20.96	19.68	13.00	7.40	2.92
9	2.52	3.52	4.12	3.80	3.48	3.40	0.84	1.12	1.60	4.00	1.80
10	2.20	3.08	3.28	2.80	2.16	2.08	0.28	0.20	0.40	1.96	1.08
11	2.24	3.00	2.88	2.12	1.00	0.32	0.20	0.32	0.52	1.00	0.72
12	1.32	1.80	1.28	0.20	− 0.72	− 0.72	0.12	0.00	0.48	− 0.88	− 1.24

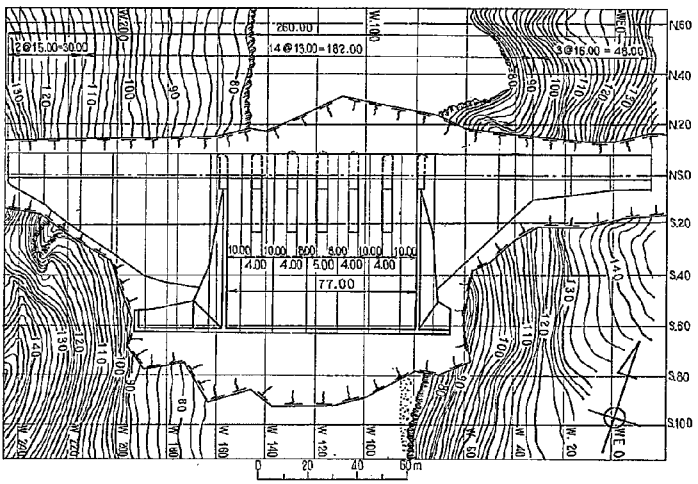


図-18 (1)　2 孤余水吐平面

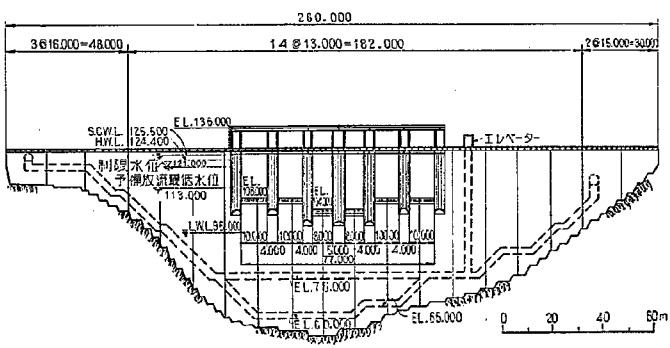


図-18 (2)　上　流　面

75mより2m増加して77mになった。ただし純越流幅は56mで1型と同じである。

そのほか橋梁幅員が8.8mから9.6mに増幅したことにより，図-19のように変更になった。細部では，橋台部の上流端部すなわち非越流部との取付け部分の形状が悪かったために，越流水脈が剥離して，橋台側面に沿わないで，流況は不安定で，それが減勢池内の流況に影響をおよぼしていたので，図-19中に示すように改めて，越流水脈の安定と，減勢池内流況の向上を計った。

中央越流部すなわちオリフィス部は，抽出実験の結果，3型を最終案とし全体模型にとり入れた。側部越流部すなわち越流頂標高108m部分の形状は，当初案のままで支障がないので，そのまま最終案とした。

水叩形状については，実験の結果を種々検討の結果，半径15mのローラーバケット型水叩とし，バケットインバートの標高を60mに置き，リップ角を40°にすることにより，計画洪水流量以下の放流については，自然下流水位で完全に巻込み跳水を起し，計画洪水流量以上異常洪水流量においても，流況は，相当に悪化することは予想されるが，一応飛散せずに巻込み跳水を起すように計画した。

導流壁の形状は，最終案の越流水面形状を測定することにより決定することにしたほか，水叩部分の導流壁形状については，図-20に示す3案について，流況観察を行ない最終案を決定することにした。

〔9〕 最終案形状による実験結果とその考察

（1） 水位—流量関係の測定

自由越流時を門扉操作時の水位—流量関係について，実験の結果を，図-21，表-13，14に示す。

図-21によれば，異常洪水量 5,900m³/sec の放流は，可能であることを示すと同時に，貯水位113mで，1,500 m³/sec 放流出来ることを確認した。

なお一門扉当りの越流または流出量は測定しなかったが，側部については1/4オリフィスについては1/2と考えて実用上は支障ないものと考えられる。実際の操作に当っては，一門扉だけ操作するようなことは，水叩の型式上あまり好ましくないので，出来るかぎり全門均等に放流するように心掛け，小流量を放流する場合はオリフィスを使用し，減勢池堆積土砂の水叩内への巻込みがないように注意しながら操作しなければならない。

（2） 堤体面圧力分布

越流部堤体面の圧力分布について検照を行なうために，自由越流時について実験の結果，図-22，表-15に示す。さらに自由越流時よりも，負圧発生の可能性がある門扉操作時について，サーチャージ水位125.5mについて実験した結果を，図-23，表-16に示す。これ等の資料によれば，自由越流時，門扉操作時とも負圧は発生しているが，いずれも許容値（−3.0m）内であり，最も負圧発生が考えられる状態すなわち門扉操作時における門扉戸当り部付近は特に入念に測定したが，いずれも許容値内であるから心配はないであろう。

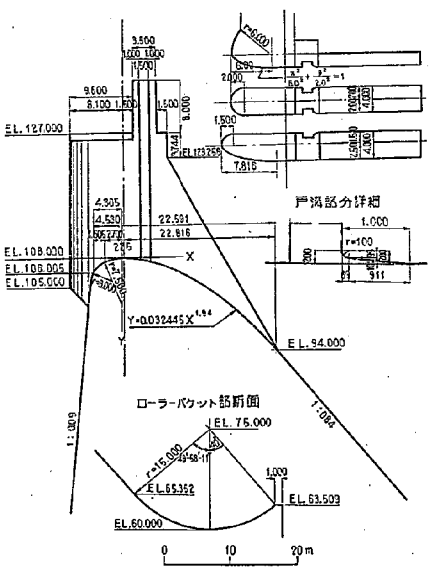


図-19 (1)　2型余水吐越流部定規図

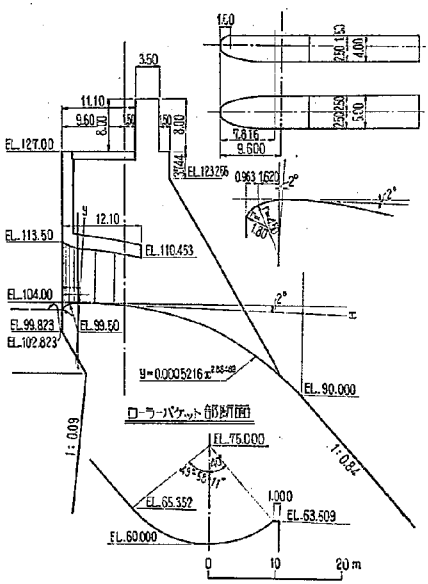


図-19 (2)　2型余水吐越流部定規図

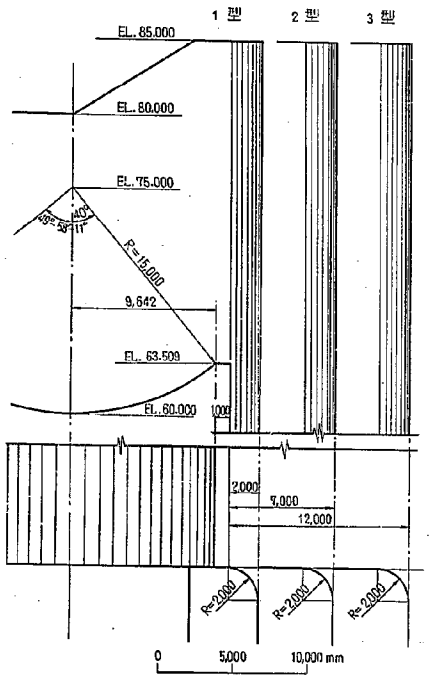


図-20 導流壁比較案

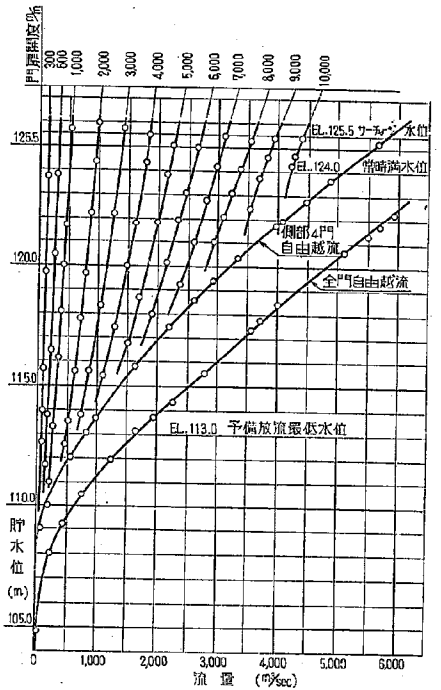


図-21 (1) 2型余水吐水位—流量曲線

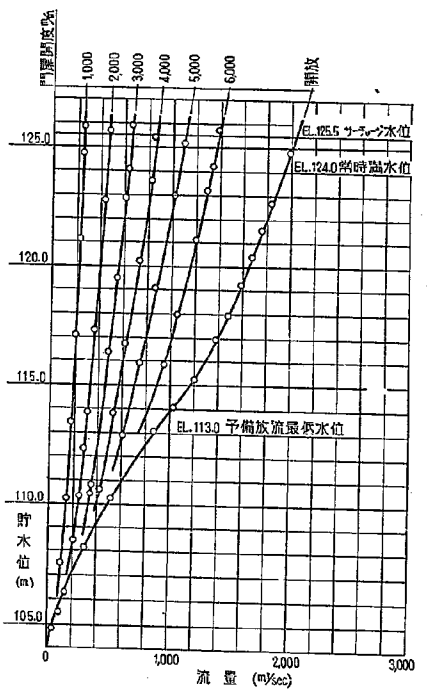


図-21 (2) 3型オリフィス部水位—流量曲線

表-13 2 型 余 水 吐 水 位 — 流 量 実 験 値 .

番号	全門自由越流		両側4門自由越流		門扉開度0.3m開放		門扉開度0.6m開放		門扉開度1.0m開放		門扉開度2.0m開放		門扉開度3.0m開放	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	104.300	43.00	109.040	55.66	112.648	70.835	111.756	139.140	111.000	204.915	112.584	460.428	113.840	733.648
2	108.012	247.92	110.040	182.15	113.940	80.954	113.800	177.087	113.364	270.184	113.564	511.024	115.600	850.020
3	109.212	435.12	112.092	561.62	115.728	93.603	116.560	234.767	116.224	344.055	115.680	609.687	118.332	1024.577
4	110.560	764.01	113.092	804.48	119.680	118.395	120.468	268.160	118.256	382.509	117.832	705.820	122.252	1239.613
5	112.000	1239.61	113.680	966.39	123.772	136.610	123.820	290.930	119.972	419.950	119.692	779.185	125.748	1396.462
6	113.116	1639.32	115.860	1624.15					121.692	451.320	122.284	866.211		
7	113.712	1947.96	117.504	2208.53					125.624	513.047	124.348	936.034		
8	114.384	2266.72	118.628	2620.90							126.040	986.630		
9	115.580	2790.39	119.400	2924.47										
10	117.400	3574.63	120.400	3339.36										
11	117.792	3713.78	121.776	3966.76										
12	118.440	4037.60	122.000	4078.07										
13	120.668	5105.18	122.828	4472.73										
14	121.376	5494.77	123.600	4867.37										
15	121.720	5707.28	125.256	5671.86										
16	122.320	5950.14												

番号	門扉開度4.0m開放		門扉開度5.0m開放		門扉開度6.0m開放		門扉開度7.0m開放		門扉開度8.0m開放		門扉開度9.0m開放		門扉開度10.0m開放	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	115.516	1,097.942	116.856	1,492.594	118.016	1,897.367	119.256	2,365.383	121.044	2,939.653	122.464	3,529.101	124.268	4,214.683
2	117.544	1,275.030	118.684	1,684.861	120.176	2,140.229	121.060	2,580.418	122.156	3,076.263	123.772	3,693.540	124.624	4,270.339
3	120.000	1,477.416	121.892	1,978.320	121.984	2,332.496	122.840	2,790.393	123.120	3,217.933	124.612	3,814.971	125.424	4,386.711
4	121.880	1,611.496	123.832	2,135.169	123.080	2,448.867	124.240	2,949.772	124.132	3,369.722	125.436	3,936.403		
5	124.352	1,777.958	125.092	2,231.303	125.000	2,631.014	125.560	3,099.031	125.320	3,526.571				
6	125.464	1,831.591												

注 貯水位 EL. m
流 量 m^3/sec

表-14　3型オリフィス部水位—流量実験値

番号	自由流出時		門扉開度1m		門扉開度2m		門扉開度3m		門扉開度4m		門扉開度5m		門扉開度6m	
	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量	貯水位	流量
1	104.800	43.00	107.492	113.336	108.416	205.421	110.420	344.055	110.632	425.010	112.880	604.627	115.856	953.743
2	105.548	108.782	110.224	146.729	110.304	248.934	110.840	350.127	113.808	533.792	115.940	743.768	118.040	1,057.466
3	106.312	158.873	113.436	177.087	112.376	286.375	116.428	485.725	116.696	614.747	119.080	862.669	121.110	1,201.665
4	108.176	303.579	117.120	205.421	113.888	310.662	119.508	543.405	120.176	728.589	123.000	1,032.167	123.200	1,292.739
5	110.304	516.084	121.100	235.779	117.352	361.258	122.856	610.193	123.596	824.722	125.160	1,103.002	124.200	1,350.924
6	113.132	870.259	124.760	260.065	122.860	445.248	124.100	633.467	125.388	855.079			125.700	1,386.342
7	114.100	1,044.816	125.920	262.400	125.680	487.749	125.940	667.873						
8	115.272	1,214.315												
9	116.960	1,386.342												
10	117.960	1,482.475												
11	119.268	1,583.668												
12	120.420	1,669.683												
13	121.596	1,757.720												
14	122.752	1,831.591												
15	124.800	1,993.500												

注　貯水位　EL. m

　　流　量　m³/sec

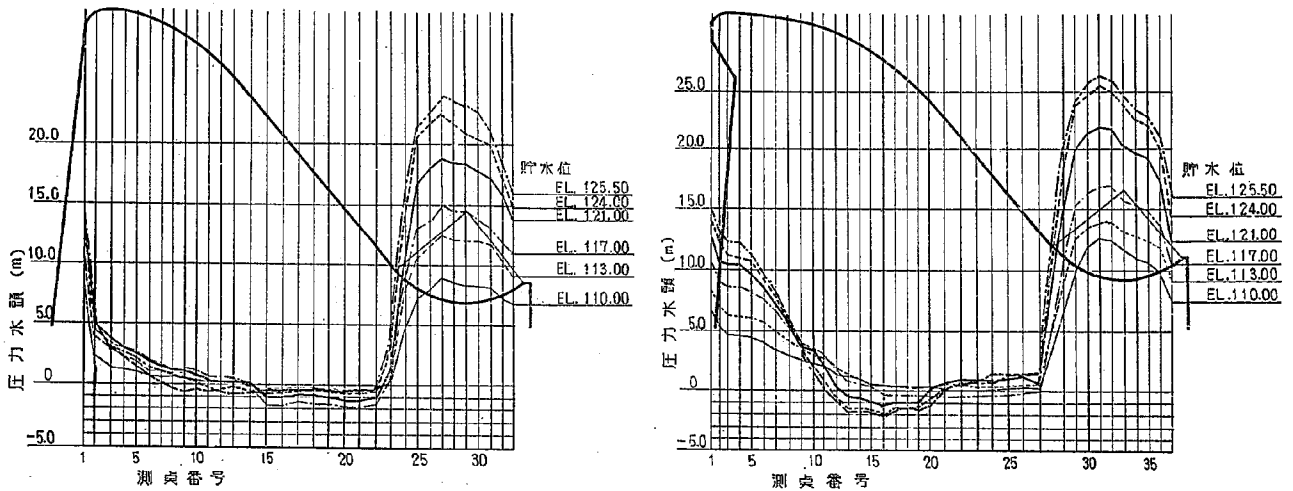


図-22　2型越流部自由越流時圧力分布図

（3） 導流壁の形状寸法について

導流壁の形状寸法を決定する資料を得る目的で，最終案模型の越流水脈水面形を測定した結果を図-24，表-17に示す。

導流壁の形状は，この越流水脈が越水しないような形状であればよいのであるが，実物の場合は，空気連行により越流水脈の形状が変ることが考えられるので，それらの余裕を見込んで形状寸法を決めるようにする。

また水叩下流部分の導流壁の長さについては，図-20に示される3案について，流況観察を行なつた結果を水面流線の形で，図-25に示す。1型は，右岸導流壁側部よりローラーバケット内に流込みが目立ち，流況も安定しないほか砂礫，流木等をローラーバケット内に巻込む恐れが多分にあり，あまり良好とは判定出来ない流況を示した。ローラーバケット内の流況が最も安定し，導流壁側部よりの流込みが少ないものは，3型すなわちローラーバケット下流端より導流壁を10m延長した場合であるが，工事費の増加はまぬかれないから，ローラーバケット内の流況も，導流壁側部からの流込み等も，割合に良好な，2型を最終案として推奨する次第であるが，現場の都合により若干の変更は，流況に大差ないので支障ないと考えられる。

（4） 減勢池内の流速分布水面形状と流況について

2型導流壁を設置した最終案模型の減勢効果をたしかめる目的で，種々の流量について，流速分布と水面形状を測定した結果を，図-26に示す。

これらの資料を検討すると，ローラーバケット型水叩の特徴を明らかに示し，表面渦と底面渦によりエネルギーは相当に減勢させていることがわかる。しかし流量が多くなり，下流水位の不足が目立つような状態すなわち，4,000m³/sec 以上の流量になると，河床の流速も相当に速く，河床の状態にもよるが城山ダムのように砂礫堆積層の深い河床では，バケットインバート下流 100m 付近から下流は，相当に洗掘されることが予想される。

表-15　2型越流部圧力分布実験値（自由越流時）

測点番号	自由越流部 貯水位 EL.(m)						門扉操作時 貯水位は全べて125.50(m)とする				
	EL.(m) 110.00	EL.(m) 113.00	EL.(m) 117.00	EL.(m) 121.00	EL.(m) 124.00	EL.(m) 125.50	0.5m	1.0m	2.0m	5.0m	10.0m
1	8.08	10.08	11.72	12.36	14.40	14.48	22.40	23.76	23.00	20.48	17.32
2	2.44	4.00	4.80	5.16	5.20	6.00	17.00	18.32	17.20	13.80	9.20
3	1.60	2.92	3.60	3.68	3.40	3.20	16.52	17.60	15.84	11.24	5.60
4	1.28	2.60	3.12	3.04	2.80	2.60	15.80	15.36	12.00	8.00	5.20
5	1.00	2.08	2.80	2.60	2.20	2.00	0.40	1.20	2.80	4.16	3.76
6	0.80	1.06	2.12	1.80	1.20	0.92	0.32	0.20	0.00	1.12	1.84
7	0.72	1.40	1.92	1.60	1.00	0.50	0.60	0.32	−0.20	0.40	1.12
8	0.92	0.92	1.28	0.80	0.80	−0.32	0.50	0.50	−0.48	0.52	−1.00
9	0.62	1.20	1.60	1.44	0.72	−0.52	0.56	0.72	−0.50	0.50	0.64
10	0.44	0.72	1.00	0.92	0.20	−0.08	0.36	0.32	−0.36	0.08	−0.08
11	0.32	0.60	0.52	0.20	−0.36	−0.40	0.32	0.32	−0.20	0.00	−0.52
12	0.40	0.44	0.60	0.40	−0.20	−0.32	0.32	0.22	−0.20	0.00	−0.50
13	0.20	0.28	0.44	0.32	0.00	−0.80	0.20	0.22	−0.12	−0.08	−0.60
14	−0.30	−0.40	0.08	0.32	0.32	−0.50	−0.00	0.64	−0.10	−0.44	−1.00
15	−2.88	−2.48	−1.64	−1.00	−0.80	−0.88	−0.20	−2.00	−2.68	−1.50	−1.00
16	−2.88	−2.48	−1.64	−0.92	−0.60	−0.40	−0.24	−2.60	−2.40	−1.92	−1.00
17	−2.52	−2.12	−1.28	−0.68	−0.20	−0.12	−0.24	−2.60	−2.40	−2.00	−1.00
18	−2.60	−2.32	−1.64	−0.80	−0.20	−0.12	−0.24	−2.52	−2.20	−1.72	−0.92
19	−0.30	−2.50	−1.60	−1.00	−0.40	−0.10	−0.36	−2.60	−2.50	−2.00	−1.10
20	−0.18	−0.23	−1.80	−1.20	−0.60	−0.48	−0.24	−2.32	−2.04	−1.72	−1.08
21	−0.28	−0.26	−1.68	−1.20	−0.72	−0.50	−0.24	−2.40	−2.40	−2.00	−1.20
22	−0.30	−0.25	−1.80	−1.00	−0.60	−0.40	−0.32	−2.00	−2.30	−1.50	−1.00
23	0.20	0.60	0.32	0.92	2.88	3.68	−0.10	−1.00	−1.50	0.72	3.40
24	4.80	6.88	9.28	10.92	14.28	15.80	4.40	6.00	7.50	10.76	15.24
25	7.20	10.60	13.00	16.50	20.40	22.00	6.80	8.60	10.32	16.20	21.92
26	7.80	11.60	13.60	18.00	21.40	22.52	8.50	10.40	12.50	18.00	24.00
27	9.16	13.10	15.00	19.00	22.80	24.00	9.20	11.40	13.20	19.20	25.20
28	8.84	12.20	14.48	18.40	22.00	23.80	8.52	11.00	12.00	17.50	23.80
29	8.40	12.28	14.50	18.50	21.00	23.50	8.00	10.50	11.00	16.50	22.00
30	8.52	12.44	14.00	17.84	20.50	22.80	8.00	10.00	10.20	16.24	21.00
31	8.32	12.20	13.50	17.30	20.20	21.00	7.72	9.40	9.30	15.00	20.50
32	7.60	10.40	12.16	15.72	16.92	18.08	6.32	7.92	8.40	13.28	18.00
33	7.00	9.28	11.20	14.00	14.92	15.80	5.64	6.80	7.50	11.68	16.50

水面の流況は，右岸導流壁下流部にゆるい逆流渦を生じ，その一部が導流壁沿いにバケット内に流れ込み，バケット内の流況を，非対称にしている原因となっているが，全般的には，ローラーバケット型減勢機構の特徴を示し，二次跳水を起して常流となって流下している。しかし，ダム軸下流約 200m 付近の湾曲部では，流心は右岸側により，左岸側はゆるい逆流域となるため，右岸側は洗掘，左岸逆流域部分は砂礫堆積が予想されるような流況を示している。

流量別の流況は，後述の移動床実験結果でもわかるように，4,000m³/sec 以下の流量では流況も良好で，流量が増えるにしたがって，流況も悪くなる。この点について計画洪水流量 4,900m³/sec でも良好な流況を呈するように，副ダム等の下流水位せき上げ構造物を設置して，下流水位を大幅に上げるか，またはバケットの標高を大幅に下げた場合，小流量の場合すなわち 1,000m³/sec 以下の流量の時は，越流水脈は巻込みを越さずに，潜流となって高速流のまま流下する恐れも多分にあるので，洪水発生頻度の少ない大洪水に対しては，流況がある程度悪化しても飛散状態にならなければよいと考え，将来下流

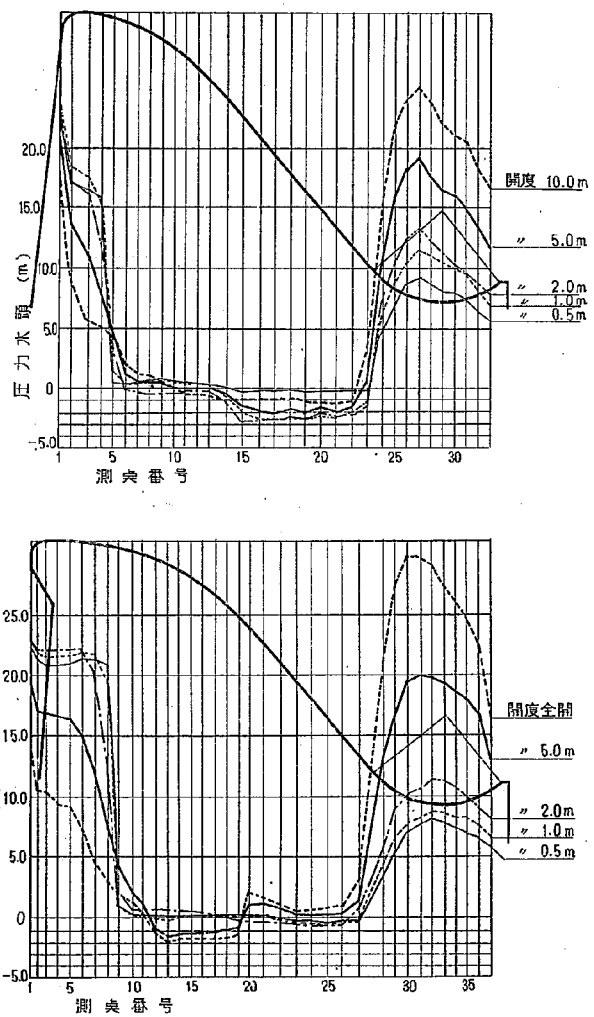


図-23　2型越流部門扉操作時圧力分布図

表-16　2型越流部圧力分布実験値（門扉操作時）

測点番号	自由越流時 貯水位 EL.(m)						門扉操作時 貯水位は全べて EL.125.5(m)とする				
	EL.(m) 110.00	EL.(m) 113.00	EL.(m) 117.00	EL.(m) 121.00	EL.(m) 124.00	EL.(m) 125.50	0.5m	1.00m	2.00m	5.00m	全開
1	6.52	8.24	10.44	12.40	14.00	14.80	22.28	22.84	22.80	19.60	13.20
2	5.28	7.12	8.96	10.80	12.20	13.12	21.28	21.92	22.30	17.16	10.40
3	4.80	6.60	8.72	10.60	11.12	12.40	20.92	21.60	22.20	17.00	10.32
4	4.68	6.52	8.52	10.44	11.00	12.36	20.96	21.68	22.00	16.80	9.40
5	4.40	6.08	8.08	9.80	10.88	11.20	21.12	21.80	22.36	16.48	9.00
6	4.00	5.60	7.40	8.68	9.40	9.68	21.28	21.92	22.32	15.12	7.40
7	3.44	4.92	6.40	7.08	7.40	7.40	21.28	21.76	20.40	11.68	4.52
8	2.96	4.16	5.20	5.28	5.20	5.20	20.96	19.68	13.00	7.40	2.92
9	2.52	3.52	4.12	3.80	3.48	3.40	0.84	1.12	1.60	4.00	1.80
10	2.20	3.08	3.28	2.80	2.16	2.08	0.28	0.20	0.40	1.96	1.08
11	2.24	3.00	2.88	2.12	1.00	0.32	0.20	0.32	0.52	1.00	0.72
12	1.32	1.80	1.28	0.20	−0.72	−0.72	0.12	0.00	0.48	−0.88	−1.24
13	1.32	1.28	0.60	−0.48	−1.52	−1.60	0.04	−0.12	0.50	−1.40	−2.00
14	1.00	0.88	0.44	−0.52	−1.28	−1.60	0.28	0.20	0.40	−1.20	−1.76
15	0.40	0.28	0.32	−1.00	−1.60	−1.80	0.16	0.00	0.40	−1.20	−1.68
16	0.40	0.20	−0.42	−1.30	−2.00	−2.00	0.24	0.20	0.20	−1.20	−1.60
17	0.32	0.16	−0.32	−1.00	−1.40	−1.40	0.24	0.20	0.16	−1.20	−1.68
18	0.20	0.08	−0.48	−1.00	−1.28	−1.40	0.16	0.12	0.00	−1.00	−1.52
19	0.20	0.28	−0.60	−1.12	−1.20	−1.28	0.08	0.00	−0.20	−0.92	−1.40
20	0.20	0.28	−0.50	0.00	−0.80	−1.20	0.04	0.00	−0.20	0.12	0.20
21	0.00	0.50	−0.50	0.60	0.50	0.00	0.20	0.00	−0.30	0.12	1.40
22	0.04	0.50	−0.50	1.04	1.00	0.84	0.00	−0.08	−0.24	0.60	0.80
23	0.04	0.44	−0.40	0.92	0.80	0.72	−0.24	−0.32	−0.48	0.08	0.56
24	0.10	0.30	−0.40	0.90	1.30	0.50	−0.20	−0.28	−0.50	0.10	0.80
25	0.20	0.20	−0.20	1.00	1.20	1.00	−0.40	−0.60	−0.44	0.10	1.12
26	0.20	0.20	−1.00	1.00	1.60	1.00	−0.04	0.08	−0.40	0.20	1.00
27	0.00	0.20	0.00	0.65	1.80	1.60	−1.00	−0.30	0.50	1.50	3.08
28	6.40	8.40	10.44	14.28	17.40	20.00	3.20	3.88	5.50	13.28	20.40
29	10.00	12.48	15.40	20.08	23.28	23.88	5.28	6.12	8.88	16.88	27.20
30	12.00	13.40	16.40	21.50	24.60	25.50	7.20	8.04	10.20	19.50	29.80
31	12.50	14.00	17.00	21.80	25.20	25.88	7.72	8.32	10.50	20.00	29.84
32	12.28	14.00	17.12	21.60	25.00	25.40	8.00	8.52	11.00	19.92	29.24
33	11.60	13.20	15.48	20.00	23.20	24.50	7.92	8.60	11.00	19.50	27.50
34	10.68	12.50	15.30	19.50	22.50	22.80	7.52	8.32	10.60	19.00	26.00
35	10.50	12.88	15.00	18.92	22.00	22.40	7.28	8.36	10.00	17.96	24.68
36	10.00	11.80	13.80	17.20	20.00	20.52	6.60	7.80	9.00	16.80	22.40
37	7.64	8.88	10.48	12.40	14.52	15.60	5.60	6.32	8.50	12.72	16.40

河床の低下等により自然下流水位が実験の範囲より低下するようなことが予想される場合は，城山ダム下流に建設予定の逆調節池，小倉ダムを有効に操作して，流況の悪化を防止するのが望ましい。

（5）　移動床による洗掘実験の結果

既に述べたように本ダムの余水吐においては，越流水のエネルギーを完全に減勢することは，事実上困難なことで減勢されずに余ったエネルギーにより，ダム下流の河床はある程度洗掘されることはやむをえないことであるが，洗掘を防止するための保護工を施工するには，多大の工費を必要とするので，主要構造物に破壊等の危険があるような，ダム直下流，導流壁基礎部付近が，洗掘堆積いずれの傾向にあるかを確める目的で，減勢池の洗掘堆積の状態を移動床実験により観察することにした。

移動床実験は，河床に存在する堆積物の移動状態を定量的に知ることは不可能であるが，どの部分が洗掘されるかあるいは堆積するかというような，定性的な傾向を知る程度で満足せざるをえない。

模型は，ローラーバケット直下流より河道縦断方向に約150mに相当する長さで，幅はローラーバケットの幅すなわち約80mに相当する範囲の河床を深さ50cmに掘りをして，この部分に10m/m通過8m/m止りの豆砂利を，標高62mで平らに敷き均したのちに，種々の流量を一定時間流して砂利の移動すなわち洗掘堆積の傾向を計ることにした。

図-27は実験結果を示すもので，実験時間は各流量とも2時間とし，移動床の移動状態を等高線をもってあらわしたものである。図中等高線0は標高62mすなわち移動床の成形高であり，負の符号は洗掘部分，正は堆積をあらわし数字は模型での洗掘堆積の量を現地に換算して

m単位で示してある。

実験の結果いずれの流量においても，ローラーバケット，導流壁直下部分は堆積の傾向にあり，洗掘の生ずる場所は流量により相違もあるが，バケットインバート下流約100m付近であることがわかり，ダムの構造物に直接影響をおよぼさないことが確認された。さらに，ローラーバケット内への砂礫の巻込みが心配されていたが，ほぼ全門均等に放流した場合はその心配はほとんどないことがわかった。

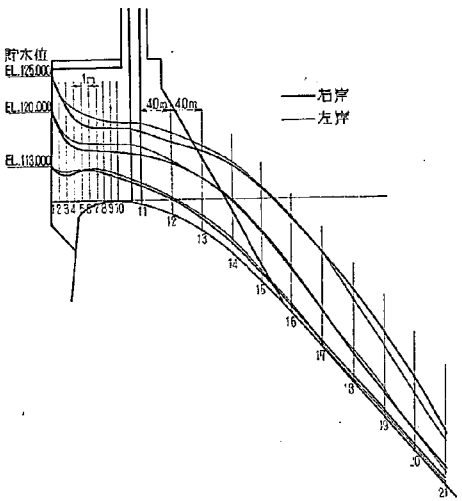


図-24　越流水脈水面形状

（6）余水吐門扉操作について

ローラーバケット型水叩をもちいた場合の，余水吐門扉操作は，やむを得ない場合を除き，全門均等に放流するのが原則で，一部の門扉を開放し，一部を閉鎖して放流するような操作をすると，バケット内へ砂礫の巻込みが考えられるのと，ローラーバケット型減勢機構本来の特徴が失なわれ，流況は悪化し，下流水位が相当にあっても，放流水は，跳水を起さずに，高速のまま水中を突きぬけて，飛散状態を呈することも考えられるから，このような極端な門扉操作は避けた方がよいが，門扉操作機構の故障によりやむを得ない場合は，減勢池の流況に注意しながら，放流するように心掛ける心要がある。

少量の放流においても，出来れば全門均等放流が望ましいが，不可能な場合は，中央部分すなわち，オリフィス部より，操作を開始し，左右同時に，なるべく対称に操作し，出来るだけ早い機会に全門均等放流出来るように操作するのが望ましく，模型における流況も良好であった。

〔10〕結　論

種々実験の結果，最終案としては，下記の形式形状を推奨する。

越流部（越流頂 EL. 108m の部分）2型　図-18，19

オリフィス部　3型　図-16

表-17　越流水脈水面形状実験値

貯水位 / 測点	EL. 113.000		EL. 120.000		EL. 125.000	
	右岸	左岸	右岸	左岸	右岸	左岸
1	113.00	113.20	120.00	120.00	125.00	125.00
2	111.80	112.20	117.40	117.80	122.20	122.20
3	111.68	112.20	116.40	116.80	120.52	121.20
4	112.08	112.40	115.40	116.28	119.20	120.20
5	112.40	112.44	115.08	116.00	118.60	119.68
6	112.40	112.48	114.88	115.76	118.08	119.52
7	112.20	112.40	114.80	115.68	118.00	119.12
8	111.80	111.92	114.80	115.80	117.68	118.80
9	111.60	112.00	114.72	115.80	117.80	118.60
10	111.20	112.00	114.68	116.00	117.80	118.80
11	110.20	110.40	114.40	115.40	117.00	118.28
12	108.60	108.68	113.08	114.00	115.96	117.08
13	105.92	106.20	111.20	111.40	114.80	115.60
14	102.60	103.00	108.08	108.00	112.92	113.00
15	98.40	98.60	104.20	104.20	109.80	109.50
16	92.92	94.12	98.80	98.60	105.20	106.00
17	89.00	89.00	93.60	93.48	100.50	100.80
18	85.00	84.50	88.20	89.00	96.20	94.68
19	80.00	79.70	82.40	83.00	90.40	88.60
20	75.48	74.68	77.40	76.00	84.20	82.00
21	71.00	70.50	72.20	72.00	77.28	75.80

実験結果によると，予備放流最低水位113.0mにおける放流量は1,650m³/secで，計画放流量1,500m³/secより150m³/sec多いことがわかったから，越流頂およびオリフィス高を，25cm 修正すれば，貯水位113.0mで，計画放流量1,500m³/sec放流できることになる。

水叩　　3型　図-19

バケットインバートの標高をEL. 60mで実験した結果，最終案として一応満足できる流況を示したが，将来の河床低下により自然下流水位が不足すると，流況は悪化する恐れがあるので，下流に建設予定の逆調節池小倉ダムを操作して，下流水位を保つことについて検討の結果表-18に示すように下流水位のせき上げは，期待できないこ

表-18　小倉ダム背水関係検討結果

流　量 m³/sec	小倉ダム越流水位EL. m	城山ダム下流水位EL. m
3,000	74.000	78.904
	75.000	78.910
	76.000	78.949
	77.000	79.069
	78.000	79.358
4,000	74.000	80.112
	75.000	80.119
	76.000	80.116
	77.000	80.113
	78.000	80.176
	79.000	80.436
4,900	75.000	81.380
	76.000	81.397
	77.000	81.380
	78.000	81.391
	79.000	81.462
	80.000	81.414
	81.000	81.936
5,900	75.000	82.554
	76.000	82.557
	77.000	82.557
	78.000	82.559
	79.000	82.564
	80.000	82.559
	81.000	82.463

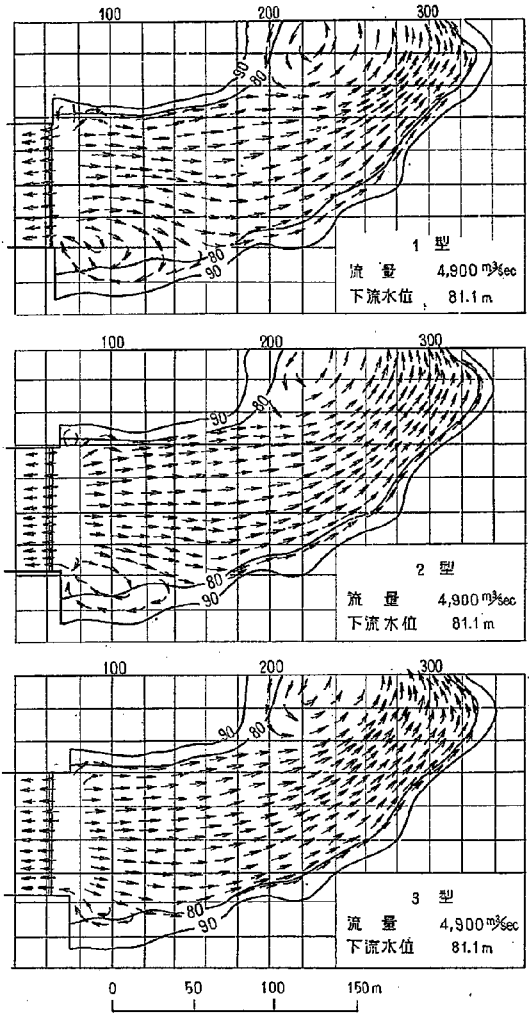


図-25　減勢池内流線図

とがわかったから，バケットインバートを，いくらかでも下げるように設計するのが望ましい。

導流壁　　2型　図-20

導流壁の形状寸法は，越流水脈水面形に関する実験結果，図-24，25，26，表-17を参考にして設計されたい。

2.　津久井ダムの洪水疎通能力に対する検討

〔1〕 実験の目的

城山ダムが完成すると，ダムによるせき上げ背水が既設の津久井ダム（図-28）に達するので，洪水時に津久井ダムは不完全越流になることが，城山ダム計画当初からわかっていたので，越流部余水吐だけで洪水を処理出来るかどうかを確かめるために，城山ダムの設計に先立ち，模型実験により流量係数を測定し，洪水疎通能力について検討を加えることにした。

〔2〕 模型および測定装置について

模型は，神奈川県企業庁が測量した縮尺1/500平面図と付属の縦断図および横断図を使用して，図-29に示される範囲を実物の1/60で模型化した。模型にとり入れた河形の範囲は，ダムの下流部はEL. 130m ダムの上流

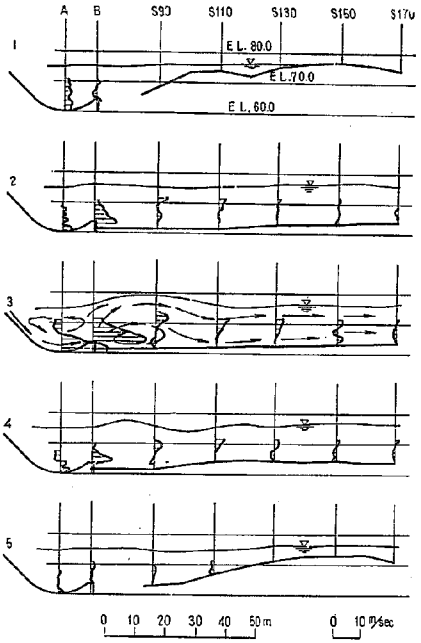


図-26 (1) 減勢池内流速分布，水面形 $Q=700m^3/sec$

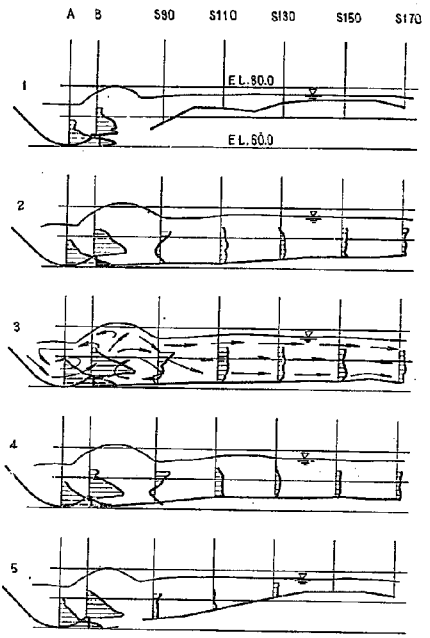


図-26 (2) 減勢池内流速分布，水面形 $Q=1,500m^3/sec$

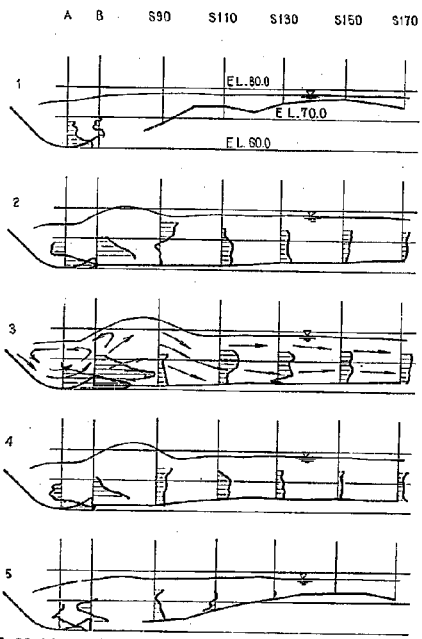


図-26 (3) 減勢池内流速分布，水面形 $Q=2,000m^3/sec$

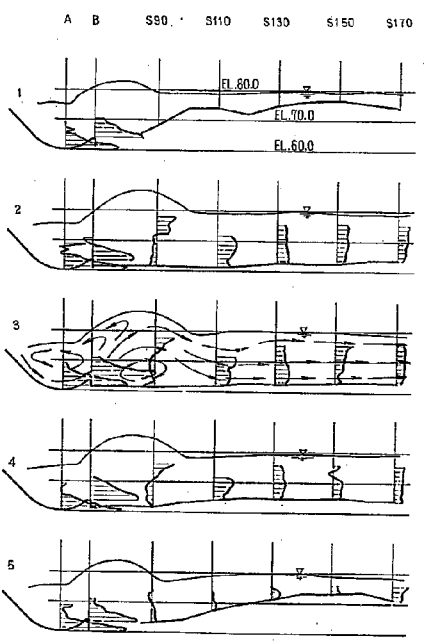


図-26 (4) 減勢池内流速分布，水面形 $Q=3,000m^3/sec$

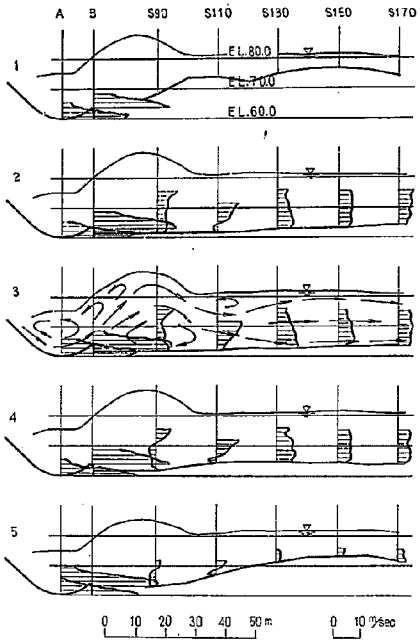


図-26 (5)　減勢池内流速分布，水面形 $Q=4,200m^3/sec$

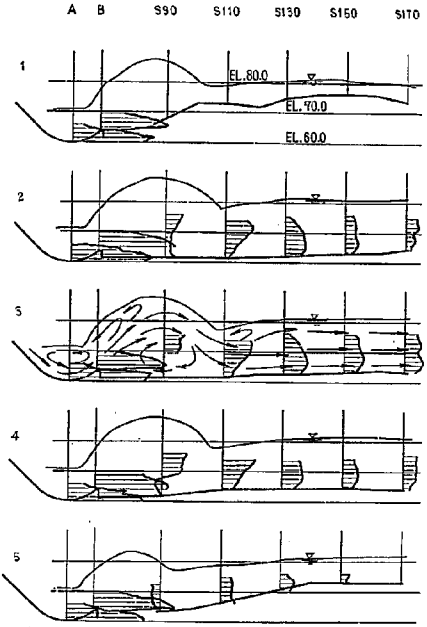


図-26 (6)　減勢池内流速分布，水面形 $Q=4,900m^3/sec$

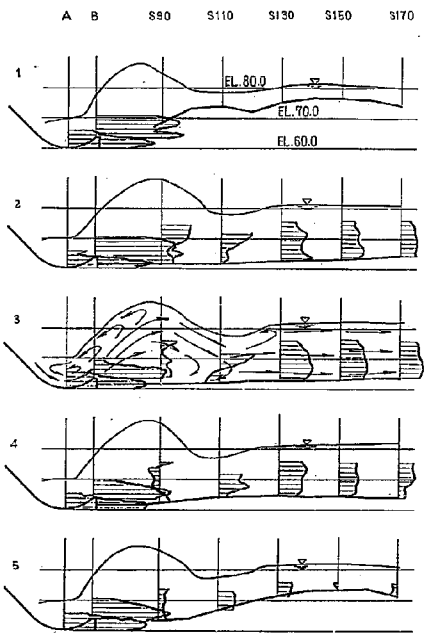
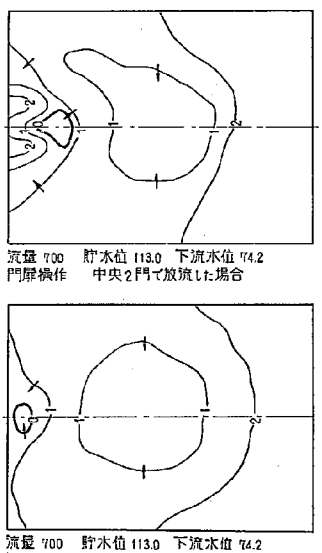


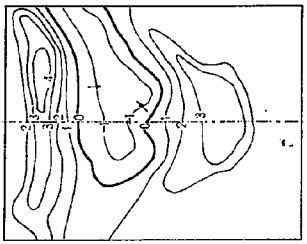
図-26 (7)　減勢池内流速分布，水面形 $Q=5,900m^3/sec$



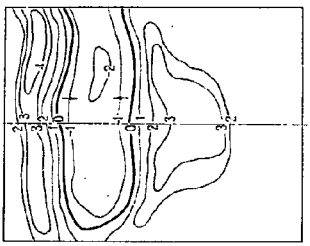
流量 700　貯水位 113.0　下流水位 74.2
門扉操作　中央2門で放流した場合

流量 700　貯水位 113.0　下流水位 74.2
門扉操作　全門扉操作で放流した場合

図-27 (1)　移動床洗掘図

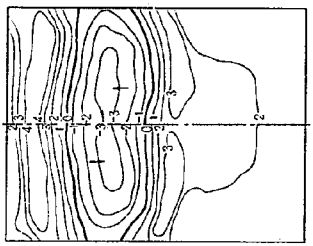


流量 1,600　貯水位 113.0　下流水位 76.8
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

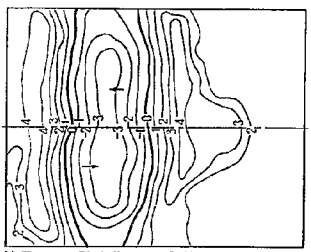


流量 1,500　貯水位 121.0　下流水位 76.6
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

図-27 (2) 移 動 床 洗 掘 図

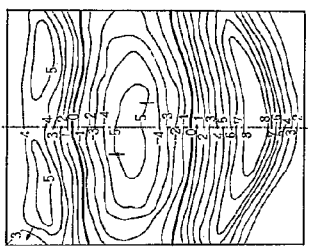


流量 2,000　貯水位 121.0　下流水位 77.8
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

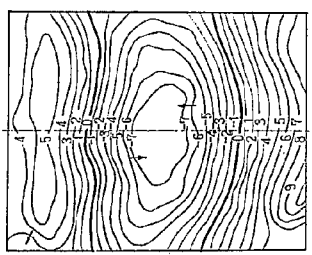


流量 2,000　貯水位 124.0　下流水位 77.8
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

図-27 (3) 移 動 床 洗 掘 図

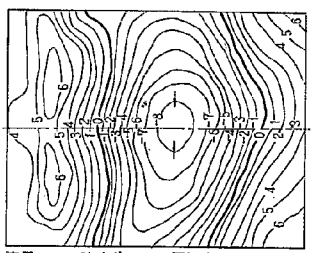


流量 3,000　貯水位 124.0　下流水位 79.2
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

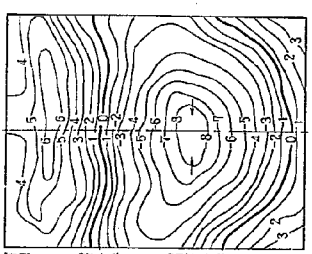


流量 4,200　貯水位 124.0　下流水位 80.4
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

図-27 (4) 移 動 床 洗 掘 図



流量 4,800　貯水位 125.5　下流水位 81.1
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合



流量 5,900　貯水位 125.5　下流水位 82.2
門扉操作　全門扉操作で均等に放流した場合

図-27 (5) 移 動 床 洗 掘 図

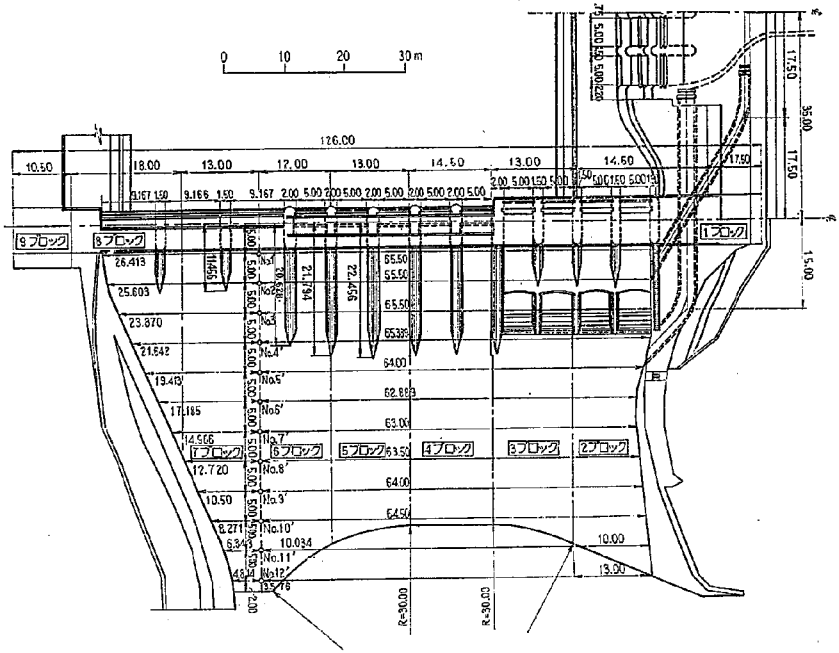


図-28 (1) 津 久 井 ダ ム 平 面

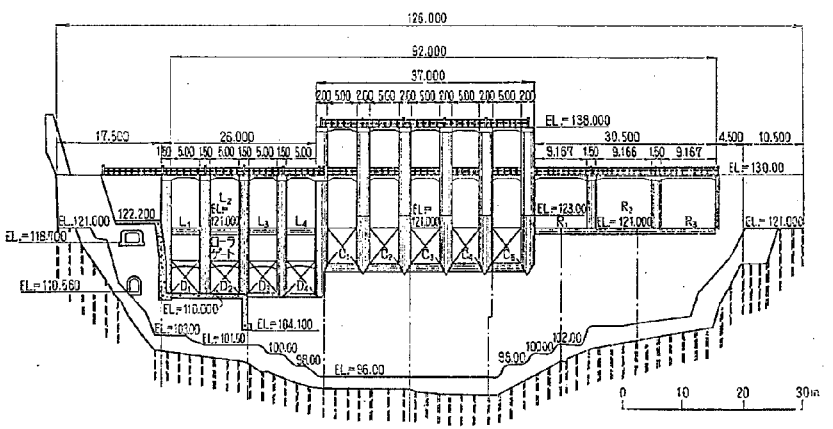


図-28 (2) 上　流　面

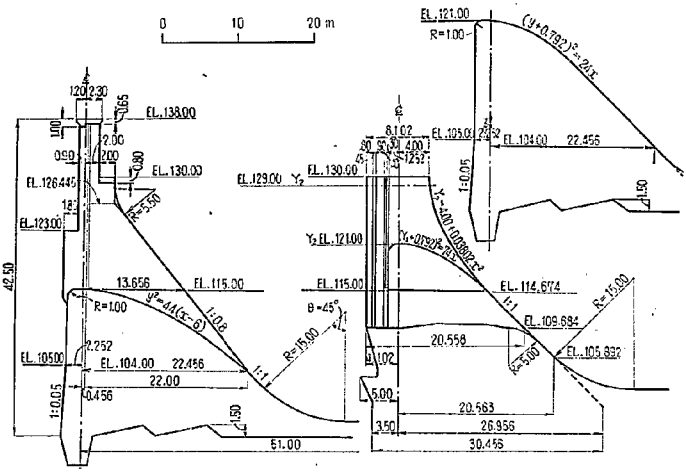
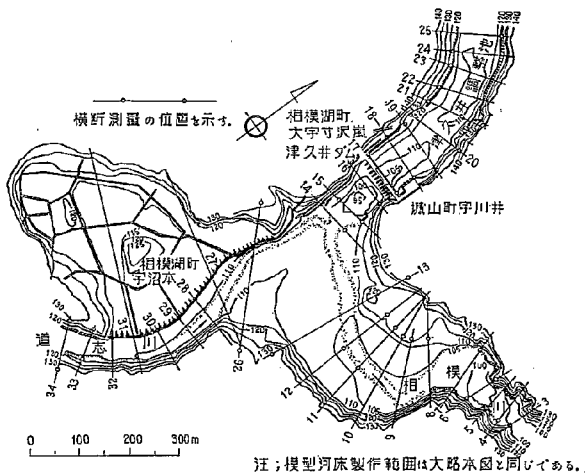


図-28 (3) 越流部定規図



注；模型河床製作範囲は大略本図と同じである。

図-29 津久井ダム付近平面図

部でEL. 140mの等高線で囲まれる範囲を，軽量ブロックで側壁を作り，砂利，モルタル破片などを中詰めとして，1：4配合のモルタルで仕上げた。ダムの橋脚および左岸の越流部，排砂門部分は木造とし，右岸越流部および中央の門扉付余水吐部分はモルタルで下塗りし，セメントペーストで仕上げ塗りをしたのちに砥石でみがいて仕上げた。その他，相模川本川上流端には整流装置を，下流端にはダム下流水位を変えられるように，下流水位調節装置を設けた。

実験用水は，ダム実験施設* の高水槽から，量水槽へ導かれ，幅1mの鋭縁矩型ぜきで量水して相模川本川に流し，道志川流量は幅0.4mの鋭縁矩形ぜきで量水したのちに給水した。

〔3〕 実験計画および相似律

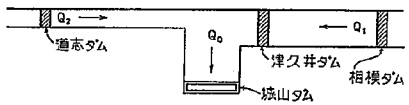
実験に必要な，洪水に関する水理資料は，表-19のとおりで，ダム下流の水位は，城山ダムの高さが確定しないのと，たとえ決っても，洪水時の背水の影響がどのようになるか，信頼できる値を知ることが出来ないので，完全越流または流出から，不完全越流または流出までの範囲にわたって実験して，ダム下流水位がどのような値になっても，流出量を推定出来るように計画し，実験を

* 土木研究所報告 89号—1

後述のように分類して行なうことにした。

表-19　相模川の水理資料

	城山 Q_0	相模 Q_1	道志 Q_2
	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec
50年確率洪水量	4,100	3,200	900
100 年確率洪水量	4,900	3,800	1,000
異常洪水量	5,880	4,560	1,200



1)　完全越流時の貯水位と流量の関係（道志川流量 $Q_2=0$ として）

i　中央越流部門扉開放　排砂門を閉鎖した場合

ii　中央越流部門扉および排砂門を開放した場合

2)　ダム下流水位と貯水位との関係

i　本川流量　$Q_1=1{,}000$, 2,000, 3,000, 4,000, 4,560m^3/sec, 道志川流量 $Q_2=0$

a　中央越流部門扉開放　排砂門を閉鎖した場合

b　中央越流部門扉および排砂門を開放した場合

ii　$Q_2\fallingdotseq 1/4\times Q_1$ と仮定した場合（排砂門閉鎖）

本川流量 Q_1	1,000	2,000	3,000	4,000	4.560m^3/sec
道志川流量 Q_2	250	500	750	1,000	1,200m^3/sec

3)　分離実験（完全越流，不完全越流または不完全流出　水中流出）

i　中央越流部だけについての貯水位と流量の関係

ii　左岸固定ぜきだけについての貯水位と流量の関係

iii　右岸固定ぜきだけについての貯水位と流量の関係

iv　排砂門だけについての貯水位と流量の関係

v　中央越流部門扉を操作した場合

vi　排砂門を開放した場合の排砂門内の圧力分布測定

以上のように分類した実験項目に実験記号を付け，表-20に示す。

なお，完全越流あるいは完全流出とは，ダム下流水位を出来るだけ低くしたときの，越流あるいは流出状態をすなわち，ダム下流水位の影響を受けない状態を指し，不完全越流あるいは不完全流出とは，ダム下流水位の影響を受ける越流または流出状態を言う。

相似律については，フルードの相似律にしたがい，模型諸量の換算率は，表-21に示す。

表-21　模型諸量の換算率

諸　元	次　元	縮　率
長さ又は水深	L	m　1：60
面　積	L^2	m^2　1：3,600
体　積	L^3	m^3　1：21,600
時　間	T	$m^{1/2}$　1：7,746
流　速	LT^{-1}	$m^{1/2}$　1：7,746
流　速	L^3T^{-1}	$m^{5/2}$　1：27,885.5
圧力強度	$ML^{-1}T^{-2}$	m　1：60
流量係数	$L^{1/2}T^{-1}$	1　1：1

〔4〕 水位測定について

不完全越流あるいは不完全流出状態において，ダム下流水位が貯水位に影響をおよぼすことは当然であるから，下流水位の測定位置については，充分な検討を要し，測定位置が具備すべき条件としては，次のようなものが考えられる。すなわち，その点の水位が越流状態に鋭敏かつ一義的に反映する位置であること，水位観設置工事に適した位置であること，維持管理に便利であることなどである。以上の諸条件をすべて満足するような場所はなかなか得がたく，結局本実験においては，図-30の No. 6 の地点にその位置を選んだ。

貯水池内の水位測定位置は，現地の水位標をそのまま使用出来るように，図-30の No. 1 の地点とした。なお No. 2, No. 3, No. 4 および No. 5 の測点は，それぞれ貯水位および下流水位測定の補助点として用いたものである。

水位測定点 No. 1 および No. 6 は，模型河床に埋設された内径 2.5cm のゴム管と連通した内径 10cm のガラス管内の水位を，水位測定器で測定し，補助点は内径 1 cm の銅管で連結した内径 5cm の目盛付ガラス管で測定した。

本文中に記される水位は，すべてNo. 1および No. 6 の測定値であり，これをそれぞれ，貯水位 H_1 下流水位 H_2 とする。なお，H_1 は接近流速水頭 $v^2/2g$ を含む値であり，単なる水面の測定値は h_0 とし，下流水位 H_2 は接近流速水頭を含まないもので，H_1 および H_2 は貯水位下流水位のほかに，ダム越流頂を基準とした水深をあらわすこともある。

表-20　実験項目・記号対称表

実験項目	(1) i	(1) ii	(2) ia	(2) ib	(2) ii	(3) i	(3) ii	(3) iii	(3) iv	(3) v	(3) vi
実験記号	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

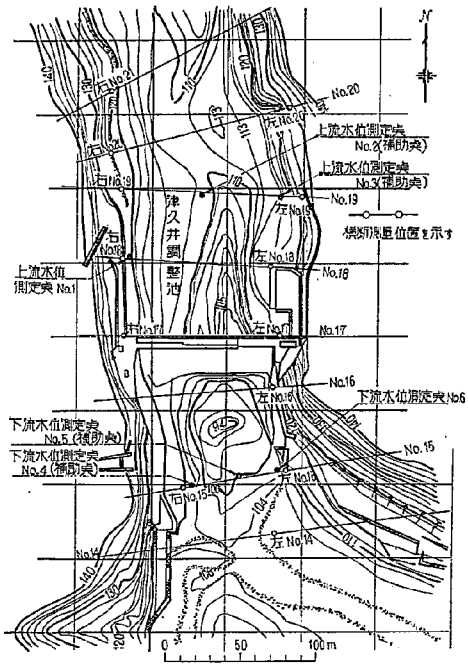


図-30　水位測定点位置図

〔5〕実験結果

実験計画で分類した実験を行なうのに先立って，相模川の異常洪水流量 4,560m³/sec，4,000m³/sec の2種の流量について，道志川の流量をそれぞれ 1,200m³/sec，1,000m³/sec を流した場合と，流さない場合について比較実験を行ない，道志川の流量が津久井ダムの越流量に影響するかどうか検討した結果，図-31のように一応実験値はわかれているものの，その差は現地の越流水位にして10cm～15cm 位で，模型では 2mm 内外である。この程度の差はダムの放流量を推定するのが目的の本実験においては，無視できるものと考えられるのと，実際に使用する場合も水位の測定にある程度以上の精度が望得ないので，以後道志川の流量は無視して実験を行なうことにした。

1)　完全越流時および不完全越流時における水位と流量の関係

実験計画のAによる実験結果は，図-32，表-22に示す。これは現況の津久井ダムの水位—流量曲線であるから，ダム下流水位の影響を受けない完全越流時のもので，接近流速水頭の加算はしてない値である。

実験記号Bによる実験結果は，図-33，表-23に示す。この場合も完全越流あるいは流出時のもので，排砂門からは，同一水位における流量差が流出するものと考えられる。

また城山ダムの背水により，不完全越流になったときの貯水位を知るために，実験記号，CとDの実験を行ない，その結果を，図-34，表-24，図-35，表-25に示す。この結果を用いれば，城山ダム地点のせき上げ高を仮定し，不等流計算により津久井ダム下流の水位を知れば，貯水位を知ることが出来るから，さらに不等流計算により，相模ダム発電所への影響を検討することが出来る。

排砂門の操作可否について，実験記号Kを部分模型により図-36に示す測定点で実験した結果を，図-37，表-26に提示するが，心配されるほどの負圧を生じていないことがわかったが，排砂門を操作するにあたって心配されることは，給気の設備がないことで，上下流の水位差は少ないとは云え，開閉操作中の門扉震動の問題，また流水遮断等の操作を考えると，非常時以外の操作は止めた方がよいと考えられる。

2)　中央越流部，左岸固定せき，右岸固定せきおよび排砂門の分離実験

中央越流部，左右岸固定せきおよび排砂門の流量係数については，それぞれの部分について別々に実験を行なった。たとえば，中央越流部の流量係数を求めるときは，ほかの部分，すなわち左右岸固定せきおよび排砂門を閉鎖して，中央越流部だけについて実験を行なった。

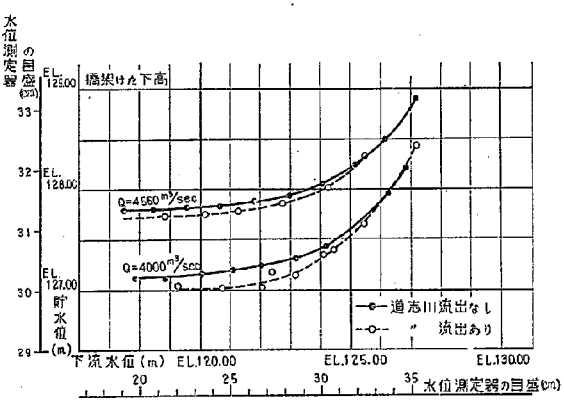


図-31　道志川流出が貯水位におよぼす影響の比較

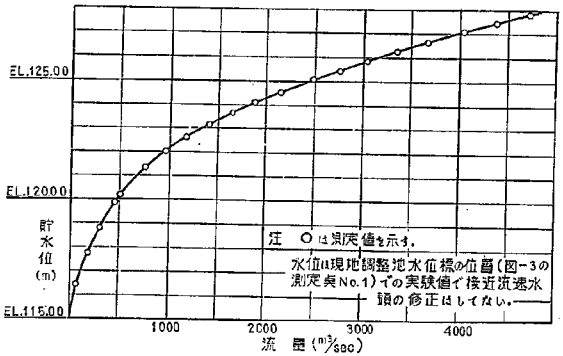


図-32　完全越流時水位流量曲線（排砂門閉止）

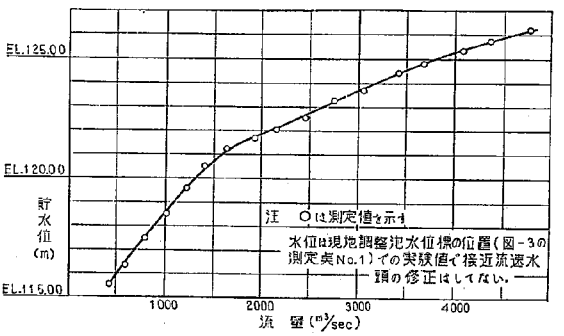


図-33　完全越流時水位一流量曲線（排砂門開放）

表-22　完全越流時の水位一流量実験値（排砂門閉止）

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水位 EL. h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水池水頭 $h_0+v^2/2g$ (m)
1	60	116.40	0.1290	0.0008	116.40
2	185	117.74	0.3162	0.0051	117.75
3	310	118.76	0.4662	0.0111	118.77
4	465	119.89	0.6078	0.0188	119.91
5	525	120.19	0.6646	0.0225	120.21
6	760	121.34	0.8492	0.0368	121.38
7	960	122.02	1.0000	0.0510	122.07
8	1,180	122.60	1.1683	0.0696	122.67
9	1,420	123.12	1.3396	0.0916	123.21
10	1,665	123.68	1.5000	0.1146	123.79
11	1,900	124.09	1.6522	0.1393	124.23
12	2,170	124.52	1.8547	0.1755	124.70
13	2,490	125.07	2.0162	0.2074	125.09
14	2,760	125.45	2.1732	0.2410	125.69
15	3,045	125.87	2.3068	0.2715	126.14
16	3,360	126.27	2.4615	0.3091	126.51
17	3,670	126.67	2.6028	0.3457	127.02
18	4,040	127.15	2.7671	0.3907	127.54
19	4,365	127.49	2.9100	0.4320	127.92
20	4,725	127.87	3.0682	0.4803	128.35

表-23　完全越流時の水位一流量実験値（排砂門開放）

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水位 EL. h_0 (m)	平均流量 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水池水頭 $h_0+v^2/2g$ (m)
1	435	115.52	1.1013	0.0619	115.58
2	600	116.37	1.2903	0.0849	116.45
3	790	117.50	1.3982	0.0997	117.60
4	1,000	118.54	1.5385	0.1208	118.66
5	1,215	119.58	1.6419	0.1375	119.72
6	1,420	120.50	1.7317	0.1530	120.65
7	1,640	121.21	1.8427	0.1732	121.38
8	1,940	121.69	2.0973	0.2244	121.91
9	2,170	122.01	2.2604	0.2607	122.27
10	2,450	122.60	2.4257	0.3002	122.90
11	2,740	123.25	2.5607	0.3346	123.58
12	3,050	123.72	2.7354	0.3818	124.10
13	3,420	124.41	2.9106	0.4322	124.84
14	3,680	124.80	3.0413	0.4719	125.27
15	4,080	125.36	3.2381	0.5350	125.90
16	4,370	125.77	3.3359	0.5678	126.34
17	4,725	126.24	3.4743	0.6159	126.86

表-24 下流水位の変化にともなう貯水位
(排砂門閉止)

番号	貯水位 EL. h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水池水頭 $h_0+v^2/2g$ (m)	流量 Q (m³/sec)	下流水位 EL. H_2 (m)
1	122.92	0.9615	0.0472	122.97	1,000	122.32
2	122.36	1.0101	0.0521	122.41	〃	121.24
3	122.22	1.0204	0.0531	122.27	〃	120.27
4	122.18	1.0331	0.0545	122.23	〃	119.23
5	122.12	1.0309	0.0542	122.17	〃	117.98
6	122.14	1.0299	0.0541	122.19	〃	116.89
7	123.40	0.9242	0.0436	123.44	〃	122.98
8	124.22	0.8621	0.0379	124.24	〃	123.94
9	125.10	0.7886	0.0317	125.13	〃	124.91
10	126.90	0.6993	0.0249	126.92	〃	126.76
11	128.59	0.6211	0.0197	128.61	〃	128.51
12	125.73	1.4886	0.1129	125.74	2,000	125.10
13	126.66	1.4204	0.1029	126.76	〃	126.14
14	125.12	1.6129	0.1327	125.25	〃	124.28
15	124.67	1.6750	0.1431	124.81	〃	123.39
16	124.45	1.7021	0.1478	124.70	〃	122.44
17	124.37	1.7094	0.1491	124.51	〃	121.40
18	124.40	7.7064	0.1485	124.55	〃	120.36
19	124.30	1.7211	0.1511	124.45	〃	118.66
20	124.58	1.6806	0.1441	124.72	〃	122.78
21	128.78	1.2346	0.0778	128.86	〃	128.39
22	127.49	1.3396	0.0916	127.58	〃	127.05
23	128.27	1.2698	0.0823	128.35	〃	127.88
24	125.86	2.2727	0.2635	126.12	3,000	117.80
25	125.86	2.2727	0.2635	126.12	〃	118.66
26	125.86	2.2727	0.2635	126.12	〃	119.95
27	125.94	2.2641	0.2615	126.20	〃	121.18
28	126.02	2.2556	0.2595	126.28	〃	122.48
29	126.11	2.2471	0.2576	126.37	〃	123.60
30	126.29	2.1929	0.2453	126.54	〃	124.53
31	126.74	2.1171	0.2286	126.97	〃	125.48
32	127.53	2.0000	0.2040	127.73	〃	126.63
33	127.62	1.9868	0.2014	127.87	〃	126.72
34	128.49	1.8634	0.1772	128.77	〃	127.70
35	127.12	2.7491	0.3856	127.51	4,000	117.02
36	127.13	2.7473	0.3851	127.52	〃	117.86
37	127.10	2.7510	0.3816	127.59	〃	118.82
38	127.16	2.7341	0.3814	127.54	〃	120.07
39	127.21	2.7248	0.3788	127.59	〃	121.10
40	127.24	2.2290	0.3782	127.62	〃	122.00
41	127.30	2.7100	0.3747	127.67	〃	123.14
42	127.42	2.6848	0.3677	127.79	〃	124.17
43	127.60	2.6525	0.3590	127.96	〃	125.31
44	127.95	2.5940	0.3433	128.29	〃	126.22
45	128.22	2.5461	0.3307	128.55	〃	126.82
46	128.86	2.4242	0.2998	129.16	〃	127.65
47	128.48	2.8500	0.4144	128.89	4,560	126.18
48	128.22	2.9044	0.4303	128.65	〃	125.18
49	128.04	2.9419	0.4415	128.48	〃	124.07
50	127.92	2.9649	0.4485	128.36	〃	122.96
51	127.88	2.9706	0.4502	128.33	〃	121.82
52	127.87	2.9765	0.4520	128.32	〃	120.61
53	127.82	2.9804	0.4532	128.27	〃	119.54
54	127.81	2.9823	0.4538	128.26	〃	118.46
55	127.80	2.9862	0.4550	128.36	〃	117.49

表-25 下流水位の変化にともなう貯水位
(排砂門開放)

番号	時水位 EL. h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水池水頭 $h_0+v^2/2g$ (m)	流量 Q (m³/sec)	下流水位 EL. H_2 (m)
1	128.67	0.6180	0.0195	128.69	1,000	128.63
2	127.49	0.6689	0.0228	127.51	〃	127.43
3	126.59	0.7174	0.0263	126.62	〃	126.50
4	125.55	0.7794	0.0310	125.58	〃	125.40
5	124.20	0.8621	0.0348	124.23	〃	124.07
6	122.89	0.9615	0.0472	122.94	〃	122.65
7	121.46	1.0989	0.0616	121.52	〃	120.90
8	120.66	1.1990	0.0733	120.73	〃	119.82
9	119.36	1.3908	0.0987	119.46	〃	117.54
10	121.74	2.1390	0.2334	121.97	2,000	116.92
11	122.40	2.0121	0.2065	122.61	〃	118.84
12	122.88	1.9399	0.1920	123.07	〃	120.38
13	123.28	1.8587	0.1763	123.46	〃	121.48
14	123.66	1.8051	0.1662	123.83	〃	122.51
15	124.58	1.6821	0.1444	124.72	〃	124.02
16	125.58	1.5516	0.1228	125.70	〃	125.16
17	125.21	1.2698	0.0822	128.29	〃	127.94
18	126.91	1.3986	0.0488	126.96	〃	126.58
19	127.46	2.0107	0.2063	127.67	3,000	126.74
20	126.13	2.2222	0.2519	126.38	〃	125.36
21	125.44	2.3622	0.2967	125.74	〃	123.72
22	125.00	2.4430	0.3045	125.30	〃	122.18
23	124.68	2.5489	0.3315	125.01	〃	120.78
24	124.24	2.5818	0.3369	124.58	〃	118.82
25	124.02	2.6339	0.3539	124.37	〃	117.00
26	128.36	1.8868	0.1816	128.54	〃	127.85
27	125.44	3.1447	0.5045	125.94	4,000	118.19
28	125.80	3.0441	0.4728	126.27	〃	120.40
29	126.05	2.9851	0.4546	126.49	〃	121.89
30	126.36	2.9112	0.4324	126.79	〃	123.15
31	126.82	2.8129	0.4037	127.22	〃	124.76
32	127.48	2.6792	0.3662	127.85	〃	126.25
33	128.54	2.4845	0.3149	128.85	〃	127.64
34	128.38	2.8697	0.4204	128.80	4,560	127.16
35	127.65	3.0139	0.4634	128.11	〃	125.74
36	127.03	3.1492	0.5099	127.54	〃	123.54
37	126.77	3.2135	0.5269	127.30	〃	122.43
38	126.56	3.2641	0.5436	127.10	〃	121.12
39	126.43	3.2972	0.5547	126.98	〃	120.09
40	126.21	3.3480	0.5719	126.78	〃	118.80
41	128.86	3.7505	0.3944	129.25	〃	127.71

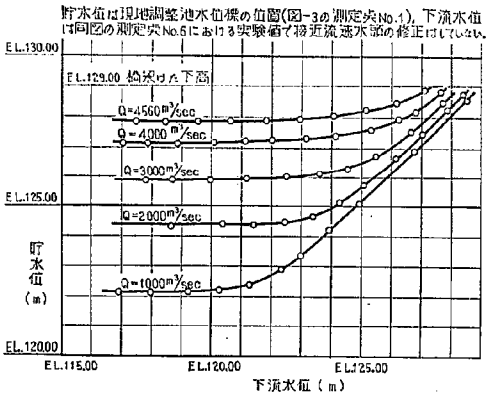


図-34 (1) 下流水位の変化にともなう貯水位の変動（排砂門閉止時）

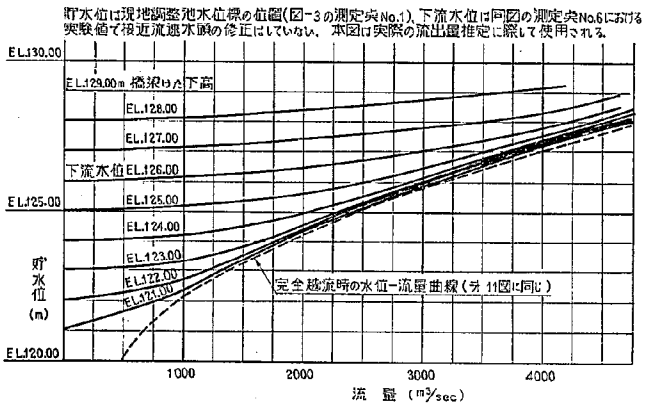


図-34 (2) 下流水位の変化にともなう水位—流量曲線（排砂門閉止）

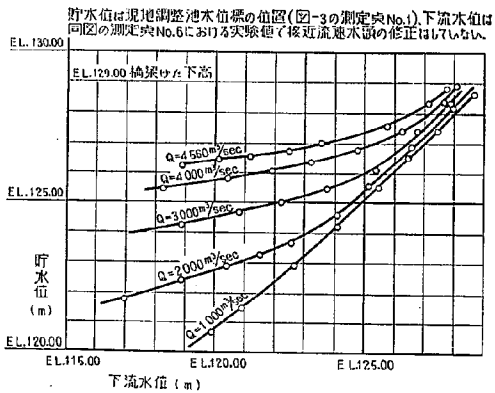


図-35 (1) 下流水位の変化にともなう貯水位の変動（排砂門開放時）

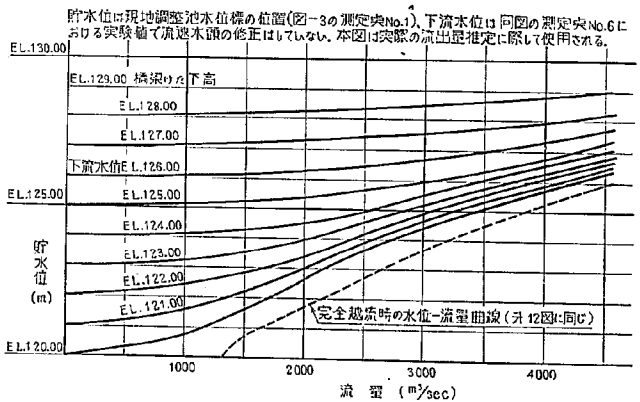


図-35 (2) 下流水位の変化にともなう水位—流量曲線（排砂門開放）

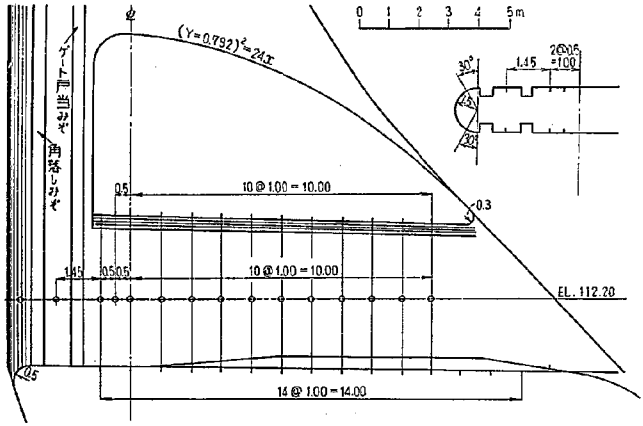


図-36 排砂門圧力測定点配置図

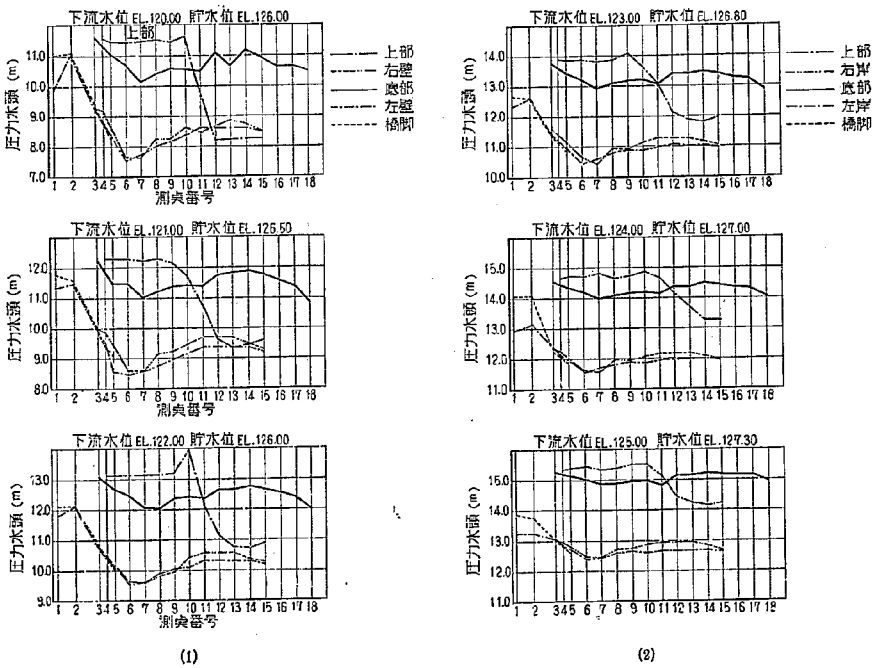


図-37 排砂門圧力分布図

表-26 排砂門圧力分布実験値

番号	貯水位 EL. 126.00			下流水位 EL. 120.00		貯水位 EL. 126.50			下流水位 EL. 121.00		貯水位 EL. 126.60			下流水位 EL. 122.00	
	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚
1				9.88	11.00				11.32	11.76				11.80	12.08
2				11.00	11.08				11.48	11.56				12.08	12.09
3		9.28	11.60	9.20	9.28		10.00	12.24	9.92	9.92		10.80	13.08	10.76	10.76
4	11.56	9.20	—	8.80	8.72	12.28	9.88	—	9.52	9.48	13.12	10.48	—	10.40	10.40
5	11.48	—	11.08	8.32	8.20	12.28	—	11.48	9.16	9.04	13.12	—	12.68	10.16	10.08
6	11.44	7.68	10.72	7.52		12.24	8.56	11.48	8.48		13.12	9.64	12.48	9.52	
7	11.48	7.64	10.12	7.68		12.20	8.56	11.00	8.56		13.12	9.60	12.08	9.60	
8	11.48	8.24	10.40	8.00		12.28	9.12	11.20	8.76		13.12	9.82	12.02	9.84	
9	11.44	8.28	10.56	8.16		12.16	9.20	11.36	8.96		13.20	9.96	12.36	10.00	
10	11.64	8.60	10.52	8.36		11.76	9.44	11.40	9.12		13.92	10.40	12.40	10.08	
11	9.84	8.48	10.48	8.60		10.80	9.68	11.36	9.32		12.20	10.56	12.32	10.28	
12	8.20	—	11.10	8.60		9.64	—	11.76	9.36		11.12	—	12.60	10.28	
13	8.24	8.88	10.64	8.60		9.36	9.68	11.80	9.32		10.76	10.56	12.64	10.28	
14	8.24	8.72	11.18	8.60		9.44	9.48	11.84	9.32		10.72	10.36	12.72	10.28	
15	8.24	8.48	10.92	8.48		9.60	9.28	11.72	9.20		10.88	10.24	12.64	10.16	
16			10.64					11.52					12.52		
17			10.64					11.36					12.36		
18			10.00					10.84					12.00		

番号	貯水位 EL. 126.80			下流水位 EL. 123.00		貯水位 EL. 127.00			下流水位 EL. 124.00		貯水位 EL. 127.30			下流水位 EL. 125.00	
	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚
1				12.32	12.68				12.92	14.08				13.24	13.88
2				12.60	12.60				13.12	14.08				13.24	13.74
3		11.58	13.72	11.40	11.40		12.32	14.52	12.32	12.28		13.00	15.24	13.04	13.00
4	13.88	11.40	—	11.16	11.12	14.64	12.20	—	12.08	12.08	15.36	12.92	—	12.84	12.80
5	13.84	—	13.40	10.96	10.84	14.72	—	14.32	11.92	11.88	15.40	—	15.12	12.72	12.60
6	13.84	10.56	13.20	10.44		14.72	11.60	14.20	11.56		15.44	12.44	15.00	12.40	
7	13.80	10.48	12.92	10.56		14.84	11.56	14.00	11.68		15.36	12.44	14.88	12.48	
8	13.88	10.92	13.08	10.80		14.68	11.96	14.08	11.80		15.40	12.72	14.88	12.60	
9	14.08	10.92	13.16	10.88		14.72	11.96	14.16	11.88		15.52	12.76	14.96	12.64	
10	13.64	11.12	13.20	10.88		14.84	12.08	14.20	11.84		15.52	12.88	14.96	12.60	
11	13.08	11.28	13.08	10.96		14.68	12.16	14.12	11.92		15.16	12.92	14.80	12.68	
12	12.12	—	13.40	11.04		14.16	—	14.36	11.96		14.48	—	15.12	12.68	
13	11.88	11.28	13.40	11.00		13.68	12.16	14.36	11.96		14.24	12.92	15.12	12.68	
14	11.80	11.16	13.48	11.00		13.28	12.04	14.48	11.96		14.16	12.80	15.20	12.68	
15	11.92	11.04	13.40	10.93		13.24	11.96	14.40	11.94		14.24	12.68	15.16	12.60	
16			13.28					14.32					15.12		
17			13.20					14.24					15.12		
18			12.88					14.00					14.96		

番号	貯水位 EL. 127.70			下流水位 EL. 126.00		貯水位 EL. 128.20			下流水位 EL. 127.00		貯水位 EL. 129.00			下流水位 EL. 128.00	
	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚	上部	右壁	底部	左壁	橋脚
1				14.00	14.40				14.88	15.16				15.96	16.16
2				14.28	14.40				15.12	15.20				16.12	16.12
3		13.52	16.04	13.80	13.92		14.88	17.08	14.80	14.80		15.80	18.04	15.72	15.76
4	16.20	13.52	—	13.72	13.80	17.20	14.76	—	14.72	14.76	18.20	15.76	—	15.64	15.68
5	16.28	—	15.96	13.60	13.64	17.28	—	17.04	14.56	14.56	18.32	—	18.00	15.60	15.56
6	16.28	13.36	15.88	13.40		17.24	14.52	17.00	14.40		18.20	15.56	17.96	15.88	
7	16.28	13.32	15.80	13.48		17.28	14.52	16.72	14.48		18.32	15.36	17.88	15.58	
8	16.32	13.36	15.88	13.56		17.32	14.72	16.96	14.60		18.32	15.60	17.96	15.64	
9	16.40	13.32	15.92	13.60		17.44	14.68	17.00	14.68		18.28	15.56	17.96	15.64	
10	16.44	13.32	15.96	13.60		17.36	14.72	17.04	14.60		18.28	15.60	18.04	15.60	
11	16.24	13.36	15.92	13.60		17.28	14.76	16.96	14.64		18.24	15.64	17.96	15.64	
12	15.80	—	16.04	13.64		16.88	—	17.12	14.68		17.88	—	18.08	15.68	
13	15.48	13.46	16.04	13.64		16.76	14.76	17.04	14.60		17.76	15.68	18.04	15.64	
14	15.40	13.44	16.12	13.64		16.72	14.72	17.12	14.68		17.76	15.68	18.16	15.65	
15	15.52	13.52	16.12	13.72		16.72	14.68	17.12	14.60		17.76	15.60	18.12	15.56	
16			16.04					17.12					18.12		
17			16.08					17.12					18.16		
18			15.96					17.08					18.08		

注：圧力水頭〔m〕

i　中央越流部の完全越流時と不完全越流時の流量係数について

実験記号Fについて，完全越流時の実験結果を図-38，表-27に示す。実験値から，式(1)により算出された流量係数は，図-39に不完全越流時は，表-28に示す。

$$C=\frac{Q}{B\cdot H_1^{3/2}} \quad \cdots\cdots(1)$$

C＝流量係数　　$H_1=h_0+v^2/2g$

Q＝流　量 m³/sec　　h_0＝越流水深m

B＝越流幅m　　$v^2/2g$＝接近流速水頭m

この流量係数を越流水深 H_1 の一次式であらわせると仮定して，最小自乗法により，C と H との関係を求めたところ式(2)を得た。

$$C=1.5577+0.0352H_1 \quad \cdots\cdots(2)$$

ii　左岸固定ぜき，右岸固定ぜきの完全越流時と不完全越流時の流量係数について

左岸固定ぜき，右岸固定ぜきについても，それぞれ別々に分離して，実験記号GとHについて実験を行なった。

左岸固定ぜき完全越流時の流量係数については，図-40，表-29，不完全越流時の水位—流量曲線と流量係数を図-41，表-30に示す。右岸固定ぜきについては，完全越流時は，図-42，表-31，不完全越流時は，図-43，表-32に示す。

これらの流量係数が，越流水深 H_1 の一次式で表わされるとして，最少自乗法により，CとHとの関係を求めたところ，左岸固定ぜきについては，式(3)，右岸固定ぜきについては，式(4)を得たが，この場合の H_1 は堤頂 EL. 121.0m を基準とした越流水深である。

$$C=1.7291+0.0479H_1 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$C=1.6972+0.0425H_1 \quad \cdots\cdots(4)$$

iii　排砂門の完全流出時と不完全流出時の水位と流量の関係

排砂門だけを開放して放流した場合に，どの程度の流量を放流出来るかを知るために，実験記号Iの実験を行なった結果，図-44，表-33，34に示す。

この場合の流量係数 m は，式(5)によるものである。

$$m=\frac{Q}{A_0\sqrt{2gH_1}} \quad \cdots\cdots(5)$$

m＝流量係数　　$H_1=h_0+v^2/2g$

Q＝流　量 m³/sec

h_0＝排砂門中心線を基準とした貯水深m

A_0＝排砂門最少断面m²

$v^2/2g$＝接近流速水頭m

表-27　中央越流部完全越流時水位—流量実験値

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$(m)	越流係数 $C=Q/BH_1^{3/2}$
1	80	1.77	0.16	0.00	1.77	1.3587
2	330	3.89	0.49	0.01	3.90	1.7142
3	660	6.01	0.76	0.03	6.04	1.7784
4	760	6.60	0.83	0.04	6.64	1.7771
5	1,060	8.09	0.93	0.04	8.13	1.8293
6	1,375	9.32	1.18	0.07	9.39	1.9117
7	1,410	9.57	1.19	0.07	9.64	1.8842
8	1,540	10.05	1.25	0.08	10.13	1.9103
9	1,730	10.75	1.32	0.09	10.84	1.9391
10	2,045	11.93	1.43	0.10	12.03	1.9604
11	2,060	12.07	1.43	0.10	12.17	1.9409
12	2,310	12.73	1.52	0.12	12.85	2.0060
13	2,645	13.49	1.65	0.14	13.63	2.1025

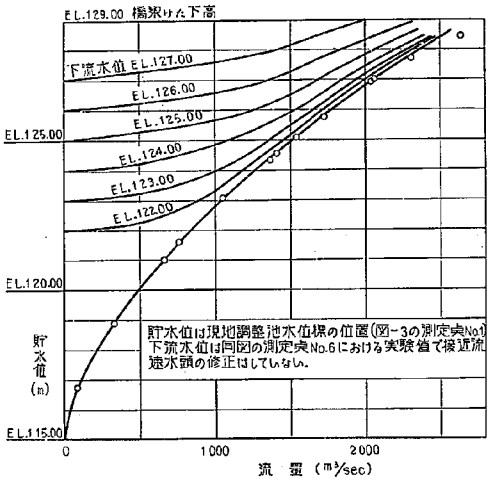


図-38 (1)　中央越流部下流水位の変化にともなう水位—流量曲線

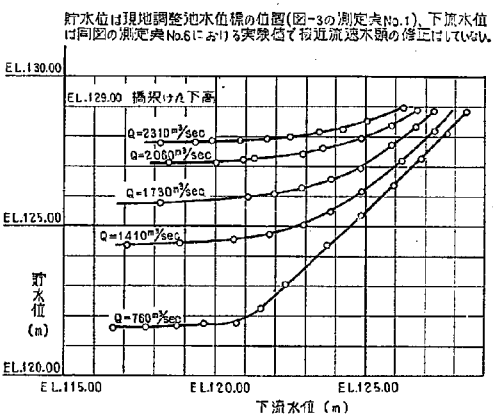


図-38 (2)　中央越流部下流水位の変化にともなう貯水位の変動

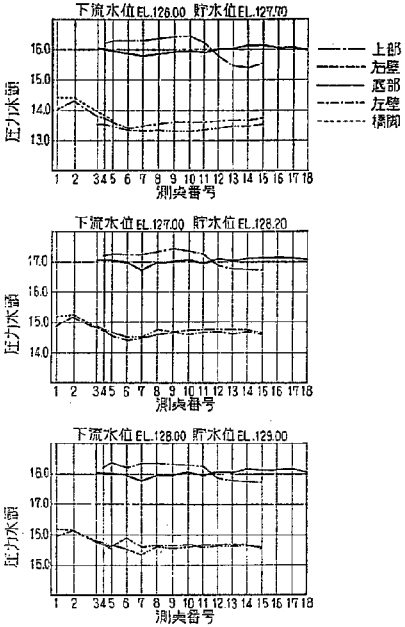


図-38 (3)　排砂門圧力分布図

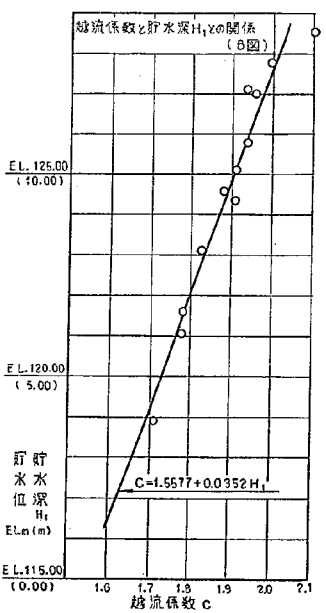


図-39　中央越流部越流係数と貯水深との関係

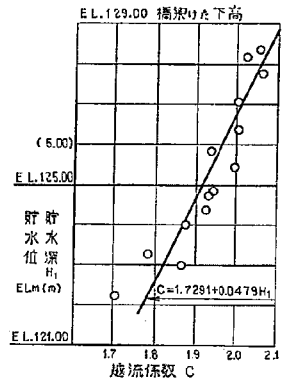


図-40　左岸固定せき越流係数と貯水深との関係

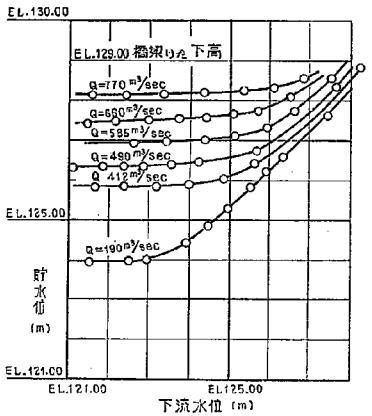


図-41 (1)　左岸固定せき下流水位の変化にともなう貯水位の変動

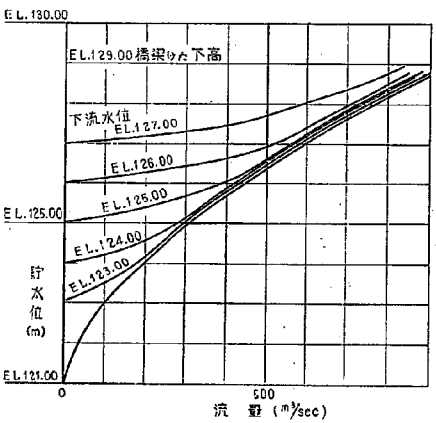


図-41 (2)　下流水位の変化にともなう水位—流量曲線

表-28 中央越流部，下流水位の変化にともなう越流係数の変化

番号	貯水深 h_0 (m)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$(m)	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2 (m)	C	C' $C'=Q/BH_1^{3/2}$	H_2/H_1	C'/C
1	12.78	0.12	12.90	2,310	3.19	2.0118	1.9944	0.247	0.991
2	12.83	0.12	12.95	〃	4.30	2.0135	1.9825	0.332	0.985
3	12.85	0.12	12.97	〃	4.87	2.0142	1.9785	0.376	0.982
4	12.85	0.12	12.97	〃	5.81	2.0142	1.9785	0.448	2.982
5	12.91	0.12	13.03	〃	6.71	2.0164	1.9736	0.515	0.979
6	12.97	0.11	13.08	〃	7.48	2.0181	1.9533	0.571	0.968
7	13.13	0.11	13.24	〃	8.44	2.0237	1.9179	0.637	0.948
8	13.28	0.11	13.39	〃	9.22	2.0290	1.8860	0.689	0.930
9	13.52	0.11	13.63	〃	10.03	2.0375	1.8364	0.736	0.901
10	13.96	0.10	14.06	〃	11.21	2.0526	1.7527	0.797	0.854
11	12.12	0.10	12.22	2,060	0.88	1.9878	1.9289	0.072	0.970
12	12.12	0.10	12.22	〃	3.45	1.9878	1.9289	0.282	0.970
13	12.15	0.10	12.25	〃	4.48	1.9889	1.9218	0.366	0.966
14	12.21	0.10	12.31	〃	5.88	1.9910	1.9077	0.478	0.958
15	12.29	0.10	12.39	〃	6.37	1.9938	1.8895	0.514	0.948
16	12.48	0.10	12.52	〃	7.82	1.9984	1.8599	0.025	0.931
17	12.61	0.09	12.70	〃	8.68	2.0047	1.8205	0.683	0.908
18	12.92	0.09	13.01	〃	9.86	2.0157	1.7558	0.758	0.971
19	13.36	0.08	13.45	〃	10.81	2.0311	1.6704	0.840	0.822
20	13.90	0.09	13.98	〃	11.70	2.0498	1.5765	0.837	0.769
21	10.79	0.09	10.88	1,730	3.17	1.9407	1.9280	0.291	0.994
22	11.99	0.09	11.08	〃	6.04	1.9477	1.8620	0.545	0.958
23	11.04	0.09	11.13	〃	6.15	1.9495	1.8634	0.553	0.956
24	11.09	0.09	11.18	〃	6.92	1.9512	1.8510	0.619	0.949
25	11.29	0.08	11.37	〃	7.87	1.9579	1.8050	0.692	0.922
26	11.55	0.08	11.63	〃	8.82	1.9671	1.7448	0.758	0.897
27	12.93	0.08	12.01	〃	9.81	1.9805	1.6624	0.817	0.839
28	12.70	0.07	12.77	〃	10.83	2.0072	1.5163	0.848	0.755
29	13.31	0.06	13.37	〃	11.64	2.0283	1.4154	0.871	0.698
30	14.41	0.05	14.46	〃	13.06	2.0667	1.2586	0.903	0.609
31	9.36	0.04	9.40	1,065	2.06	1.8886	1.4778	0.219	0.783
32	9.42	0.04	9.46	〃	3.80	1.8907	1.4641	0.402	0.774
33	9.56	0.04	9.60	〃	5.61	1.8956	1.4322	0.584	0.756
34	9.70	0.04	9.74	〃	6.83	1.9005	1.4012	0.701	0.737
35	10.01	0.04	10.05	〃	7.91	1.9115	1.3370	0.787	0.700
36	10.46	0.03	10.49	〃	8.87	1.9269	1.2538	0.846	0.651
37	11.16	0.03	11.19	〃	9.88	1.9516	1.1382	0.883	0.583
38	12.22	0.03	12.25	〃	11.12	1.9889	0.9935	0.908	0.500
39	13.22	0.02	13.24	〃	12.29	2.0237	0.8841	0.928	0.437
40	9.59	0.07	9.66	1,410	0.29	1.8977	1.8785	0.030	0.990
41	9.58	0.07	9.65	〃	0.97	1.8974	1.8816	0.100	0.992
42	9.60	0.07	9.67	〃	2.33	1.8981	1.8758	0.241	0.988
43	9.63	0.07	9.70	〃	3.84	1.8991	1.8669	0.396	0.983
44	9.68	0.07	9.75	〃	5.08	1.9009	1.8523	0.521	0.974
45	9.79	0.07	9.86	〃	6.03	1.9048	1.8200	0.612	0.956
46	9.99	0.07	10.03	〃	7.45	1.9108	1.7678	0.741	0.925
47	10.25	0.06	10.31	〃	8.03	1.9206	1.7036	0.779	0.887
48	10.68	0.06	10.74	〃	9.05	1.9357	1.6022	0.843	0.828
49	11.33	0.06	11.39	〃	9.94	1.9586	1.4672	0.873	0.749
50	12.01	0.05	12.06	〃	10.85	1.9822	1.3467	0.900	0.679
51	12.40	0.05	12.45	〃	11.43	1.9959	1.2839	0.918	0.643
52	13.19	0.04	13.23	〃	12.28	2.0234	1.1719	0.928	0.579

表-29　左岸固定ぜき完全越流時水位—流量実験値

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$ (m)	越流係数 $C=Q/BH_1^{3/2}$	番号	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$ (m)	越流係数 $C=Q/BH_1^{3/2}$
1	46	1.22	0.05	0.00	1.22	1.7067	9	412	4.82	0.31	0.01	4.83	1.9404
2	100	1.93	0.10	0.00	1.93	1.8647	10	490	5.30	0.36	0.01	5.31	2.0024
3	120	2.24	0.11	0.00	2.24	1.7899	11	585	5.96	0.41	0.01	5.97	2.0051
4	190	2.95	0.17	0.00	2.95	1.8749	12	595	6.02	0.41	0.01	6.03	2.0091
5	221	3.21	0.19	0.00	3.21	1.9214	13	660	6.40	0.44	0.01	6.41	2.0365
6	280	3.74	0.23	0.00	3.74	1.9356	14	720	6.71	0.47	0.01	6.72	2.0666
7	296	3.87	0.24	0.00	3.87	1.9440	15	770	7.11	0.49	0.01	7.12	2.0263
8	380	4.49	0.30	0.00	4.49	1.9971	16	820	7.34	0.52	0.01	7.35	2.0578

表-30　左岸固定ぜき，下流水位の変化にともなう越流係数の変化

番号	貯水深 h_0 (m)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2 (m)	C	$C'=Q/BH_1^{3/2}$	H_2/H_1	C'/C
1	6.41	0.01	6.42	660	0.42	2.0365	2.0290	0.065	0.996
2	6.47	0.01	6.48	〃	1.15	2.0394	2.0006	0.177	0.991
3	6.51	0.01	6.52	〃	2.01	2.0413	1.9820	0.308	0.971
4	6.57	0.01	6.58	〃	2.72	2.0442	1.9550	0.413	0.956
5	6.60	0.01	6.61	〃	3.35	2.0456	1.9418	0.507	0.949
6	6.63	0.01	6.64	660	4.05	2.0471	1.9285	0.610	0.942
7	6.74	0.01	6.75	〃	4.73	2.0523	1.8816	0.701	0.917
8	7.11	0.01	7.12	〃	5.49	2.0700	1.7368	0.771	0.839
9	5.30	0.01	5.31	490	0.08	1.9833	2.0024	0.015	1.010
10	5.34	0.01	5.35	〃	0.81	1.9853	1.9798	0.151	0.997
11	5.38	0.01	5.34	〃	1.36	1.9848	1.9856	0.255	1.000
12	5.50	0.01	5.39	〃	1.82	1.9872	1.9577	0.338	0.985
13	5.38	0.01	5.39	〃	2.54	1.9872	1.9577	0.471	0.985
14	5.33	0.01	5.51	〃	3.13	1.9929	1.8944	0.568	0.951
15	5.75	0.01	5.76	〃	4.66	2.0049	1.7722	0.809	0.881
16	7.36	0.01	7.36	〃	6.63	2.0815	1.2263	0.901	0.589
17	5.98	0.01	7.36	585	2.45	2.0815	1.9953	0.409	0.959
18	6.03	0.01	6.04	〃	3.33	2.0183	1.9705	0.551	0.976
19	6.12	0.01	6.13	〃	4.10	2.0226	1.9272	0.669	0.953
20	6.30	0.01	6.31	〃	4.92	2.0313	1.8452	0.780	0.908
21	6.88	0.01	6.89	〃	5.64	2.0590	1.6172	0.819	0.785
22	7.70	0.01	7.71	〃	6.53	2.0983	1.3662	0.847	0.651
23	4.84	0.01	4.85	412	0.60	1.9613	1.9325	0.124	0.985
24	4.83	0.01	4.84	〃	1.37	1.9608	1.9287	0.283	0.989
25	4.84	0.01	4.85	〃	2.21	1.9613	1.9327	0.456	0.985
26	4.90	0.01	4.91	〃	2.92	1.9642	1.8975	0.595	0.966
27	5.07	0.01	5.07	〃	3.86	1.9718	1.8045	0.761	0.915
28	5.49	0.01	5.49	〃	4.62	1.9920	1.6013	0.842	0.804
29	6.34	0.01	6.34	〃	5.53	2.0327	1.2905	0.872	0.635
30	7.06	0.01	7.06	〃	6.30	2.0672	1.0984	0.892	0.531
31	7.83	0.01	7.83	〃	7.25	2.1041	0.9403	0.926	0.447
32	7.12	0.01	7.13	770	0.57	2.0705	2.0223	0.080	0.977
33	7.16	0.01	7.17	〃	1.42	2.0724	2.0055	0.198	0.968
34	7.17	0.01	7.18	〃	2.35	2.0729	2.0011	0.327	0.965
35	7.20	0.01	7.28	〃	3.31	2.0777	1.9887	0.459	0.957
36	7.28	0.01	7.29	〃	4.34	2.0782	1.9559	0.595	0.941
37	7.34	0.01	7.35	〃	5.11	2.0811	1.9320	0.695	0.928
38	7.59	0.01	7.60	〃	5.87	3.0930	1.8377	0.772	0.878
39	2.97	0.01	2.97	〃	0.50	1.8713	1.8563	0.168	0.992
40	2.98	0.01	2.98	〃	1.56	1.8717	1.8466	0.523	0.987
41	3.02	0.01	3.02	〃	1.98	1.8737	1.8103	0.656	0.966
42	3.37	0.01	3.37	〃	2.94	1.8904	1.5353	0.872	0.812
43	3.89	0.01	3.89	〃	3.45	1.9153	1.2383	0.887	0.647
44	4.36	0.01	4.36	〃	3.92	1.9378	1.0435	0.899	0.531
45	4.84	0.01	4.84	〃	4.50	1.9608	0.8921	0.930	0.455
46	5.24	0.01	5.24	〃	4.94	1.9800	0.7920	0.943	0.400
47	5.58	0.01	5.58	〃	5.34	1.9963	0.7207	0.957	0.361
48	5.96	0.01	5.96	〃	5.74	2.0145	0.6530	0.963	0.324
49	6.65	0.01	6.65	〃	6.46	2.0474	0.5538	0.971	0.271

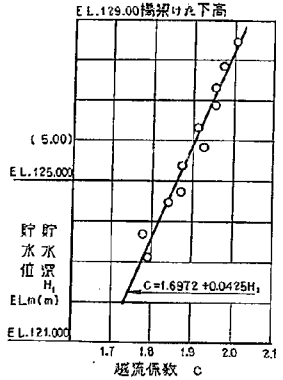


図-42　右岸固定ぜきの越流係数と貯水深との関係

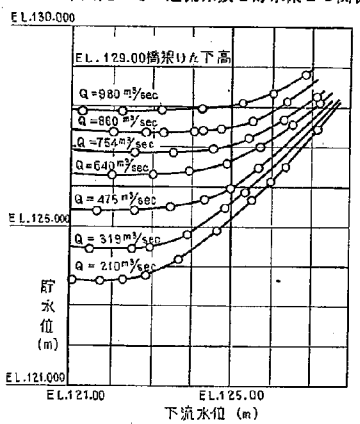


図-43 (1)　右岸固定ぜき下流水位の変化にともなう貯水位の変動

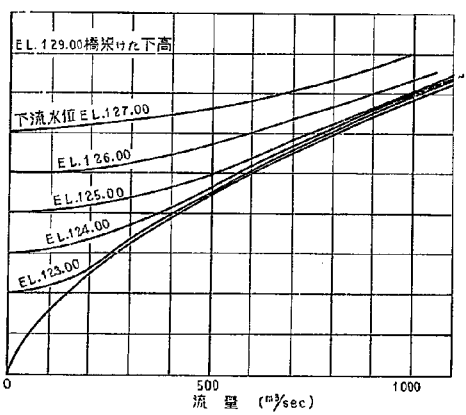


図-43 (2)　右岸固定ぜき下流水位の変化にともなう水位—流量曲線

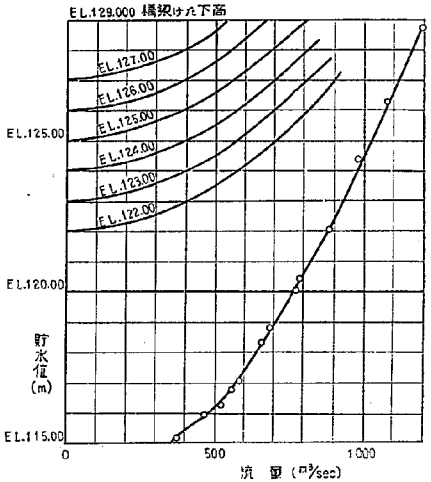


図-44 (1)　排砂門下流水位の変化にともなう水位—流量曲線

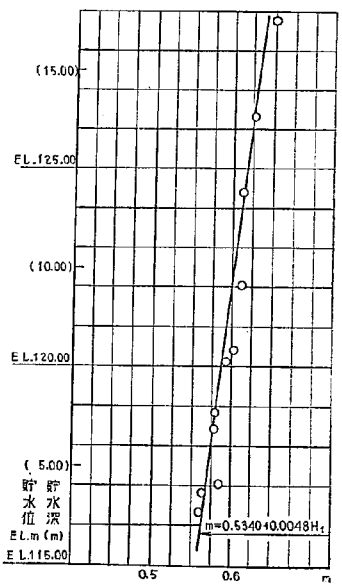


図-44 (2)　流量係数と貯水深との関係

表-31　右岸固定ぜき完全越流時水位一流量実験値

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $h_0+v^2/2g$ (m)	越流係数 $C=Q/BH_1^{3/2}$
1	150	2.10	0.14	0.00	2.10	1.7921
2	210	2.64	0.19	0.00	2.64	1.7802
3	319	3.41	0.27	0.00	3.41	1.8417
4	360	3.65	0.30	0.00	3.65	1.8771
5	475	4.38	0.37	0.01	4.39	1.8780
6	570	4.87	0.43	0.01	4.88	1.9227
7	640	5.27	0.46	0.01	5.28	1.9183
8	754	5.81	0.53	0.01	5.82	1.9528
9	860	6.33	0.58	0.02	6.35	1.9542
10	980	6.86	0.64	0.02	6.88	1.9750
11	1,125	7.40	0.71	0.03	7.43	2.0201

表-32　右岸固定ぜき，下流水位の変化にともなう越流係数の変化

番号	貯水深 h_0 (m)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2 (m)	C	C' $C'=Q/BH_1^{3/2}$	H_2/H_1	C'/C
1	6.86	0.02	6.88	980	0.25	1.9896	1.9728	0.036	0.992
2	6.89	0.02	6.91	〃	1.28	1.9908	1.9621	0.185	0.986
3	6.93	0.02	6.95	〃	2.25	1.9926	1.9449	0.324	0.976
4	6.95	0.02	6.97	〃	3.28	1.9934	1.9364	0.471	0.971
5	7.09	0.02	7.11	〃	4.28	1.9994	1.8798	0.602	0.940
6	7.37	0.02	7.39	〃	5.06	2.0113	1.7740	0.685	0.882
7	7.81	0.02	7.83	〃	5.87	2.0299	1.6265	0.750	0.801
8	6.34	0.02	6.36	〃	1.01	1.9675	1.9497	0.159	0.991
9	6.37	0.02	6.39	〃	1.87	1.9688	1.9360	0.293	0.984
10	6.39	0.02	6.41	〃	2.30	1.9696	1.9267	0.359	0.978
11	6.36	0.02	6.38	〃	3.06	1.9684	1.9409	0.480	0.986
12	6.44	0.02	6.46	〃	3.30	1.9718	1.9046	0.511	0.966
13	6.45	0.02	6.47	〃	3.76	1.9837	1.9001	0.581	0.958
14	6.67	0.02	6.67	〃	4.65	1.9815	1.8072	0.695	0.912
15	7.17	0.02	7.19	〃	5.40	2.0028	1.6217	0.751	0.810
16	5.29	0.01	5.30	〃	1.02	1.9225	1.9072	0.192	0.992
17	5.32	0.01	5.33	〃	2.04	1.9237	1.8913	0.383	0.983
18	5.36	0.01	5.37	〃	2.97	1.9254	1.8700	0.553	0.971
19	5.55	0.01	5.56	〃	3.89	1.9335	1.7753	0.700	0.918
20	6.02	0.01	6.03	〃	4.72	1.9535	1.5716	0.783	0.805
21	6.58	0.01	6.59	〃	5.56	1.9773	1.3755	0.844	0.696
22	7.13	0.01	7.14	〃	6.29	2.0007	1.2197	0.881	0.610
23	7.65	0.01	7.66	〃	7.10	2.0228	1.0979	0.927	0.543
24	7.95	0.01	7.96	〃	7.49	2.0355	1.0364	0.941	0.509
25	4.39	0.01	4.40	475	0.66	1.8842	1.8714	0.150	0.993
26	4.40	0.01	4.41	〃	1.56	1.8846	1.8652	0.354	0.990
27	4.44	0.01	4.45	〃	2.48	1.8863	1.8399	0.557	0.975
28	4.60	0.01	4.61	〃	3.33	1.8931	1.7448	0.722	0.922
29	4.93	0.01	4.94	〃	3.96	1.9072	1.5734	0.802	0.825
30	5.46	0.01	5.47	〃	4.68	1.9297	1.3503	0.856	0.700
31	5.84	0.01	5.85	754	1.64	1.9458	1.9356	0.280	0.995
32	5.85	0.01	5.86	〃	2.59	1.9462	1.9307	0.442	0.992
33	5.96	0.01	5.97	〃	3.56	1.9509	1.8776	0.597	0.962
34	6.20	0.01	5.21	〃	4.46	1.9186	1.7704	0.718	0.923
35	6.70	0.01	5.71	〃	5.30	1.9399	1.5765	0.790	0.813
36	7.27	0.01	7.28	〃	6.15	2.0066	1.3994	0.845	0.697
37	3.41	0.00	3.41	〃	0.44	1.8421	1.8604	0.129	1.010
38	3.42	0.00	3.42	〃	1.55	1.8426	1.8528	0.453	1.006
39	3.47	0.00	3.47	〃	2.00	1.8447	1.8126	0.576	0.983
40	3.74	0.00	3.74	〃	2.92	1.8562	1.6203	0.781	0.873
41	4.49	0.00	4.49	〃	3.86	1.8880	1.2316	0.861	0.652
42	4.89	0.00	4.89	〃	4.37	1.9050	1.0836	0.894	0.569
43	5.17	0.00	5.17	〃	4.99	1.9169	0.9968	0.965	0.520
44	6.43	0.00	6.48	〃	6.19	1.9726	0.7187	0.963	0.364

表-33 排砂門完全流出時水位—流量実験値

番号	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量係数 $m=Q/A_0\sqrt{2gH_1}$
1	520	3.78	1.1404	0.0664	3.85	0.5475
2	555	4.26	1.1145	0.0634	4.32	0.5516
3	585	4.53	1.1250	0.0646	4.59	0.5641
4	660	5.88	1.0427	0.0555	5.94	0.5594
5	685	6.30	1.0148	0.0525	6.35	0.5616
6	780	7.56	1.0894	0.0606	7.62	0.5708
7	790	7.92	0.9741	0.0484	7.97	0.5781
8	875	9.52	0.9115	0.0424	9.56	0.5846
9	980	11.87	0.8376	0.0358	11.91	0.5866
10	1080	13.79	0.7889	0.0318	13.82	0.6002
11	1195	16.26	0.7582	0.0293	16.29	0.6116

表-34 排砂門下流水位の変化にともなう流量係数の変化

番号	貯水深 h_0 (m)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2	m	m' $m'=Q/A_0\sqrt{2gH_1}$	H_2/H_1	m'/m
1	16.79	0.01	16.80	780	15.46	0.5146	0.3931	0.771	0.764
2	15.52	0.01	15.53	〃	14.31	0.6085	0.4089	0.760	0.672
3	14.30	0.02	14.32	〃	13.11	0.6027	0.4258	0.740	0.706
4	13.52	0.02	13.54	〃	12.43	0.5990	0.4379	0.736	0.731
5	12.24	0.02	12.26	〃	11.11	0.5928	0.4602	0.702	0.776
6	15.05	0.00	15.05	373	16.67	0.6062	0.1986	0.942	0.328
7	14.24	0.00	14.24	〃	15.85	0.6024	0.2042	0.938	0.339
8	13.44	0.00	13.44	〃	15.07	0.5985	0.2102	0.935	0.351
9	12.53	0.00	12.53	〃	14.12	0.5941	0.2177	0.927	0.366
10	11.39	0.01	11.40	〃	13.04	0.5887	0.2282	0.925	0.388
11	10.59	0.01	10.60	〃	12.23	0.5849	0.2367	0.918	0.405
12	9.77	0.01	9.78	〃	11.44	0.5809	0.2464	0.914	0.424
13	16.32	0.01	16.33	725	15.42	0.6124	0.3706	0.791	0.605
14	15.48	0.01	15.49	〃	14.60	0.6084	0.3805	0.781	0.625
15	14.71	0.01	14.72	〃	13.88	0.6047	0.3904	0.773	0.646
16	13.74	0.01	13.75	〃	12.93	0.6000	0.4039	0.759	0.673
17	12.81	0.02	12.83	〃	11.98	0.5956	0.4183	0.739	0.702
18	11.87	0.02	11.89	〃	11.14	0.5911	0.4343	0.727	0.735
19	15.89	0.02	15.91	875	13.69	0.6104	0.4532	0.703	0.743
20	14.89	0.02	14.91	〃	12.78	5.6056	0.4681	0.689	0.773
21	14.29	0.02	14.31	〃	12.11	0.6027	0.4779	0.672	0.793
22	13.58	0.02	13.60	〃	11.39	0.5993	0.4901	0.654	0.818
23	12.69	0.03	12.72	〃	10.59	0.5951	0.5068	0.636	0.852
24	16.31	0.01	16.32	660	16.06	0.6123	0.3375	0.831	0.551
25	15.35	0.01	15.36	〃	15.00	0.6077	0.3479	0.814	0.572
26	14.39	0.01	14.40	〃	14.10	0.6031	0.3593	0.806	0.596
27	12.92	0.01	12.93	〃	12.61	0.5961	0.3792	0.781	0.636
28	11.87	0.02	11.89	〃	11.68	0.5911	0.3954	0.772	0.669
29	10.66	0.02	10.68	〃	10.65	0.5853	0.4172	0.763	0.713
30	15.74	0.00	15.74	465	16.81	0.6096	0.2421	0.909	0.397
31	14.54	0.01	14.55	〃	15.61	0.6038	0.2518	0.901	0.417
32	13.56	0.01	13.57	〃	14.66	0.5991	0.2608	0.896	0.435
33	12.98	0.01	12.99	〃	14.11	0.5964	0.2665	0.894	0.447
34	11.89	0.01	11.90	〃	13.03	0.5911	0.2785	0.885	0.471
35	10.84	0.01	10.85	〃	12.09	0.5861	0.2916	0.884	0.498
36	9.59	0.02	9.61	〃	10.82	0.5801	0.3098	0.866	0.534

iv　中央越流部門扉を操作した場合の水位と流量の関係

大きな洪水の場合は，門扉を全開して放流しなければならないが，小流量の出水または，中洪水などの場合には，調整池の水位を満水位付近に保ちながら，余水を放流することが，利水上望ましいことで，このような場合の門扉操作をどのようにしたらよいかを知るために，門扉を等高に1mから9mまで1m毎に9種類に操作して，完全流出，不完全流出および水中流出の状態について実験した結果，完全流出については，図-45，表-35を不完全流出または水中流出時については，表-36を得た。

流量係数の算出には，完全流出，不完全流出および水中流出のいずれの場合も，式(6)を用いて算出した。

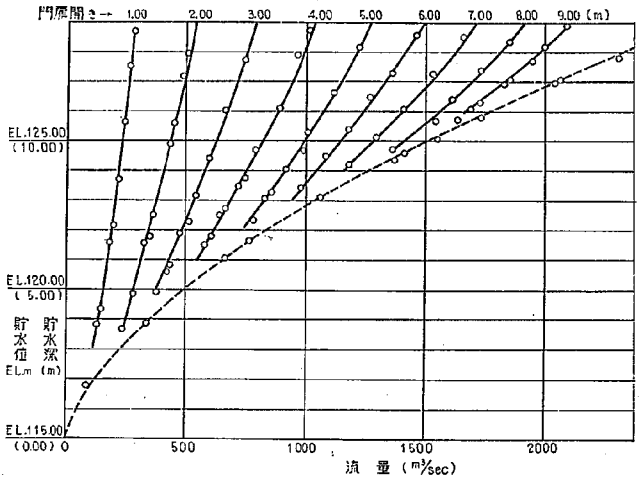


図-45　門扉等高操作時の水位—流量曲線（完全流出）

$$m=\frac{Q}{aB\sqrt{2gH_1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

m＝流量係数　　a＝門扉開きm

Q＝流　量 m³/sec　　B＝流出幅m

$H_1=h_0+v^2/2g$　　$v^2/2g$＝接近流速水頭m

h_0＝貯水深m（堤頂115.0mを基準とする）

式(6)を用いて算出された完全流出時の流量係数と貯水位の関係を，門扉開度別にプロットすると，図-46のようになる。実験値はところによりかなりちらばっているが，実線のように整理できると考えて，この実線から読みとった係数を用いて，式(6)により貯水深 H_1 と流量 Q との関係を計算すると，図-45の実線のようになり，実験値とかなりよく一致する。したがって流量係数と貯水位の関係は，図-46を使用することにする。

〔6〕　実験結果の考察と流出量の推定方法

実験結果をいろいろ検討してみると，まず第一に余水吐全体を一度に流した場合と，分離実験による流量の集計を比較してみると，橋脚による収縮，橋台による端収縮，接近流速水頭の関係から，同一貯水位でも流量は一致しないのが当然である。分離実験の結果を加え合せて作図した，図-47の水位—流量曲線と，全体を一度に流した場合の水位—流量に接近流速水頭を加算して，同図

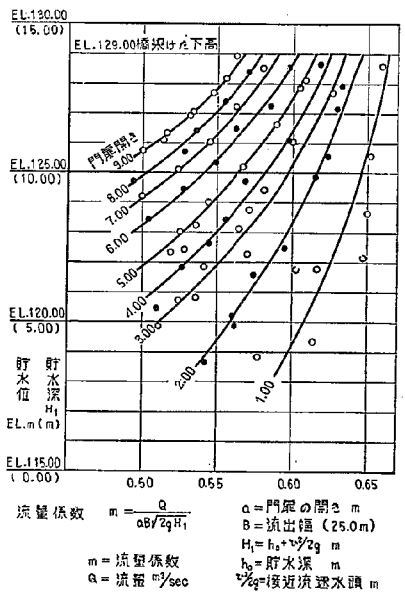


図-46　門扉等高操作時の流量係数（完全流出）

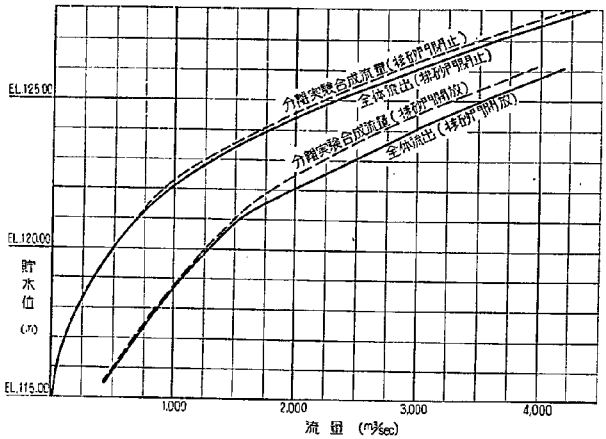


図-47　水位—流量曲線の比較

にプロットした水位—流量曲線を比較してみると，たしかに前者の流出量は，後者より少ない値となっている。たとえば，計画洪水流量 3,600m³/sec の流量で比較すると，全体を流した場合の貯水位は，EL. 127.16mであるが，分離実験の合計したものは，EL. 127.40m となり，分離実験の合計量のほうが，約0.25m高くなっている。この差がすべて端収縮の影響によるものと断定することはできないが，この差の大部分が端収縮によるものであると考えられる。いずれの場合にしても，両者の間に多少の差があるから，放流量を推定する場合，余水吐全部を自由越流させるような状態であれば，全体を一度に流した場合に，下流水位が貯水位におよぼす影響について実験した結果，図-34，35 によるべきで，小流量で中央越流部門扉操作で放流する場合，あるいは中央越流部，左岸固定ぜき，右岸固定ぜきおよび排砂門のいずれか一部を使用して放流する場合は，分離実験の結果に従わなければならない。

これらの資料を用いて，放流量を推定する場合，ダム下流水位が実験の範囲内にあれば支障ないが，範囲外になるような場合にも，本実験の結果を用いて推定することの出来るように，貯水深 H_1 と下流水深 H_2 との比 H_2/H_1 に対する完全越流時あるいは流出時の流量係数 C または m と，不完全越流時または水中流出時の流量係数 C' あるいは m' の比，C'/C あるいは m'/m を求め，中央越流部の場合は，図-48，その他，左岸固定ぜきについては，図-49，右岸固定ぜきについては，図-50，排砂門は，図-51のように整理された。

この図表の使用方法は，貯水深 H_1 と下流水深 H_2 を

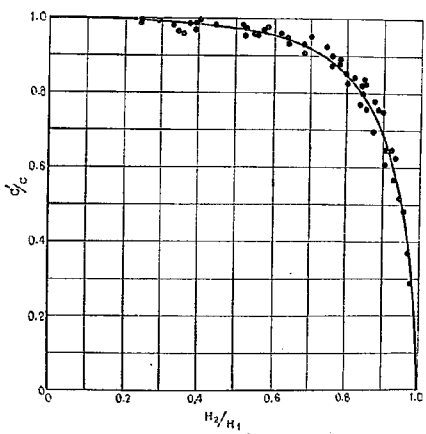


図-48 (1)　中央越流部の H_2/H_1 と C'/C との関係

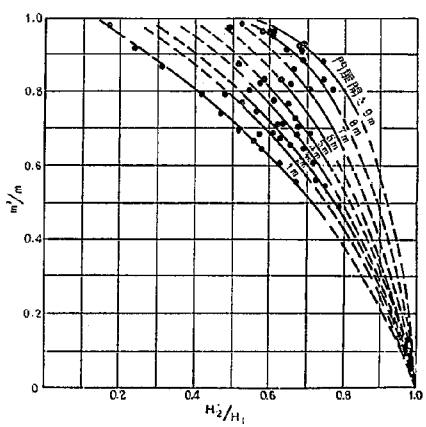


図-48 (2)　門扉等高操作時

表-35　中央越流部門扉操作時の水位—流量実験値

番号	門扉開き a (m)	流量 Q (m³/sec)	貯水深 h_0 (m)	平均流速 v (m/sec)	接近流速水頭 $v^2/2g$ (m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量係数 $m=Q/aB\sqrt{2gH_1}$
1	1.00	125	3.82	0.19	0.00	3.82	0.5779
2	〃	142	4.37	0.20	0.00	4.37	0.6137
3	〃	175	6.58	0.19	0.00	6.58	0.6164
4	〃	192	7.18	0.19	0.00	7.18	0.6474
5	〃	212	8.69	0.19	0.00	8.69	0.6498
6	〃	235	10.60	0.18	0.00	10.69	0.6522
7	〃	270	13.69	0.17	0.00	13.69	0.6593
8	2.00	230	3.66	0.35	0.01	3.67	0.5423
9	〃	275	4.88	0.36	0.01	4.89	0.6618
10	〃	283	5.18	0.36	0.01	5.19	0.5611
11	〃	325	6.55	0.35	0.01	6.56	0.5741
12	〃	348	6.78	0.37	0.01	6.79	0.6033
13	〃	360	7.49	0.36	0.01	7.50	0.5938
14	〃	428	9.89	0.35	0.01	9.90	0.6145
15	〃	448	10.58	0.35	0.01	10.59	0.6219
16	〃	485	12.15	0.33	0.01	12.16	0.6286
17	〃	503	12.93	0.33	0.01	12.94	0.6317
18	3.00	375	4.87	0.48	0.01	4.88	0.5112
19	〃	418	5.77	0.49	0.01	5.78	0.5236
20	〃	430	5.83	0.49	0.01	5.84	0.5359
21	〃	472	6.88	0.40	0.01	6.89	0.5415
22	〃	510	7.26	0.51	0.01	7.27	0.5700
23	〃	535	8.13	0.50	0.01	8.14	0.5647
24	〃	592	9.40	0.50	0.01	9.41	0.5812
25	〃	660	11.02	0.49	0.01	11.03	0.5986
26	〃	740	12.70	0.48	0.01	12.71	0.6251
27	4.00	575	6.47	0.63	0.02	6.49	0.5098
28	〃	608	6.79	0.65	0.02	6.81	0.5263
29	〃	638	7.43	0.64	0.02	7.45	0.5280
30	〃	665	7.59	0.66	0.02	7.61	0.5445
31	〃	715	8.42	0.66	0.02	8.44	0.5559
32	〃	748	8.74	0.67	0.02	8.76	0.5710
33	〃	785	9.68	0.66	0.02	9.70	0.5693
34	〃	880	11.08	0.66	0.02	11.10	0.5966
35	〃	959	12.85	0.62	0.02	12.87	0.6041
36	〃	1010	13.67	0.62	0.02	13.69	0.6168
37	5.00	778	7.31	0.79	0.03	7.34	0.5189
38	〃	825	8.02	0.79	0.03	8.05	0.5254
39	〃	850	8.21	0.79	0.03	8.24	0.5351
40	〃	905	9.00	0.79	0.03	9.03	0.5442
41	〃	980	9.67	0.82	0.03	9.70	0.5686
42	〃	1005	10.23	0.80	0.03	10.26	0.5670
43	〃	1110	11.60	0.79	0.03	11.63	0.5882
44	〃	1220	13.11	0.78	0.03	13.14	0.6082
45	6.00	971	8.42	0.90	0.04	8.46	0.5027
46	〃	1080	9.46	0.91	0.04	9.50	0.5276
47	〃	1175	10.36	0.93	0.04	10.40	0.5486
48	〃	1265	11.46	0.91	0.04	11.50	0.5617
49	〃	1360	12.26	0.92	0.04	12.30	0.5839
50	〃	1455	13.53	0.91	0.04	13.57	0.5948
51	7.00	1175	9.19	1.02	0.05	9.24	0.4990
52	〃	1290	10.09	1.02	0.05	10.15	0.5226
53	〃	1405	11.02	1.06	0.06	11.08	0.5449
54	〃	1525	12.23	1.04	0.05	12.28	0.5617
55	〃	1650	13.49	1.03	0.05	13.54	0.5788
56	8.00	1360	9.69	1.14	0.07	9.76	0.4935
57	〃	1530	10.66	1.18	0.07	10.73	0.5275
58	〃	1605	11.38	1.17	0.07	11.45	0.5357
59	〃	1730	12.37	1.16	0.07	12.44	0.5540
60	〃	1848	13.33	1.17	0.07	13.40	0.5702
61	9.00	1630	10.69	1.23	0.08	10.76	0.4986
62	〃	1683	11.06	1.25	0.07	11.13	0.5127
63	〃	1730	11.26	1.27	0.08	11.34	0.5158
64	〃	1830	11.89	1.27	0.08	11.97	0.5310
65	〃	1850	12.01	1.28	0.08	12.09	0.5341
66	〃	1945	12.67	1.28	0.08	12.75	0.5468
67	〃	2000	13.15	1.28	0.08	13.23	0.5520
68	〃	2090	13.86	1.27	0.08	13.94	0.5620

表-36 中央越流部門扉操作時下流水位の変化にともなう流量係数の変化

番号	門扉開き a(m)	貯水深 h_0(m)	接近流速水頭 $v^2/2g$(m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2	m	m' $m'=Q/aBH_1^{3/2}$	H_2/H_1	m'/m
1	1.00	9.57	0.00	9.57	175	3.98	0.643	0.5110	0.416	0.794
2	〃	10.79	0.00	10.79	〃	5.07	0.650	0.4813	0.470	0.740
3	〃	11.97	0.00	11.97	〃	6.20	0.656	0.4570	0.518	0.696
4	〃	13.00	0.00	13.00	〃	7.28	0.660	0.4385	0.560	0.664
5	〃	13.82	0.00	13.82	〃	8.02	0.664	0.4253	0.580	0.641
6	〃	11.06	0.00	11.06	235	1.91	0.651	0.6384	0.173	0.981
7	〃	12.40	0.00	12.40	〃	2.99	0.658	0.6030	0.241	0.916
8	〃	13.75	0.00	13.75	〃	4.27	0.663	0.5726	0.311	0.863
9	〃	7.65	0.00	7.65	125	4.55	0.630	0.4083	0.595	0.648
10	〃	8.48	0.00	8.48	〃	5.30	0.636	0.3878	0.625	0.609
11	〃	9.88	0.00	9.88	〃	6.60	0.645	0.3593	0.668	0.557
12	〃	11.90	0.00	11.90	〃	8.33	0.656	0.3274	0.700	0.499
13	2.00	13.70	0.00	13.70	360	7.87	0.643	0.4393	0.574	0.683
14	〃	12.23	0.00	12.23	〃	6.47	0.633	0.4650	0.529	0.768
15	〃	10.76	0.00	10.76	〃	5.19	0.622	0.4956	0.482	0.797
16	〃	8.89	0.01	8.90	〃	3.88	0.605	0.5451	0.436	0.901
17	〃	12.42	0.00	12.42	230	10.16	0.634	0.2948	0.818	0.464
18	〃	11.46	0.00	11.46	〃	9.22	0.627	0.3069	0.805	0.484
19	〃	10.29	0.00	10.29	〃	8.07	0.618	0.3239	0.784	0.524
20	〃	9.14	0.00	9.14	〃	6.92	0.608	0.3436	0.757	0.565
21	〃	7.70	0.00	7.70	〃	5.57	0.592	0.3744	0.723	0.632
22	〃	9.59	0.00	9.59	283	6.02	0.612	0.4128	0.628	0.674
23	3.00	13.03	0.00	13.03	370	10.27	0.627	4.3087	0.788	0.492
24	〃	11.21	0.00	11.21	〃	8.39	0.610	0.3327	0.748	0.545
25	〃	9.98	0.00	9.98	〃	7.27	0.596	0.3527	0.728	0.591
26	〃	12.95	0.00	12.95	420	9.32	0.626	0.3515	0.720	0.561
27	〃	11.74	0.00	11.74	〃	8.17	0.615	0.3692	0.696	0.600
28	〃	10.43	0.01	10.44	〃	6.86	0.601	0.3915	0.657	0.651
29	〃	9.10	0.01	9.11	〃	5.69	0.585	0.4194	0.625	0.716
30	〃	13.53	0.01	13.54	500	8.58	0.631	0.4092	0.634	0.684
31	〃	12.37	0.01	12.38	〃	7.51	0.621	0.4281	0.607	0.689
32	〃	11.04	0.01	11.05	〃	6.22	0.608	0.4530	0.563	0.745
33	〃	9.41	0.01	9.42	〃	5.02	0.589	0.4906	0.533	0.832
34	4.00	13.44	0.01	13.45	665	8.95	0.620	0.4096	0.665	0.660
35	〃	12.00	0.01	12.01	〃	7.59	0.606	0.4334	0.632	0.715
36	〃	10.64	0.01	10.65	〃	6.50	0.590	0.4603	0.610	0.780
37	〃	13.53	0.01	13.54	748	8.11	0.621	0.4591	0.599	0.739
38	〃	11.93	0.01	11.94	〃	6.57	0.605	0.4890	0.550	0.808
39	〃	10.63	0.02	10.64	〃	5.46	0.590	0.5179	0.513	0.877
40	〃	8.89	0.02	8.91	〃	4.16	0.564	0.5660	0.467	1.003
41	〃	13.30	0.01	13.31	608	9.54	0.619	0.3764	0.717	0.608
42	〃	12.16	0.01	12.17	〃	8.39	0.608	0.3937	0.689	0.647
43	〃	10.96	0.01	10.97	〃	7.36	0.604	0.4146	0.671	0.686
44	〃	9.55	0.01	9.56	〃	6.13	0.575	0.4442	0.641	0.772
45	5.00	9.82	0.02	9.84	778	6.76	0.561	0.4649	0.697	0.828
46	〃	10.96	0.02	10.98	〃	7.56	0.578	0.4243	0.689	0.734
47	〃	11.97	0.02	11.99	〃	8.50	0.593	0.4062	0.709	0.685
48	〃	12.97	0.01	12.98	〃	9.40	0.605	0.3902	0.724	0.644
49	〃	10.75	0.02	10.77	850	6.93	0.575	0.4680	0.643	0.813
50	〃	11.58	0.02	11.60	〃	7.52	0.588	0.4510	0.648	0.767
51	〃	12.36	0.02	12.38	〃	8.20	0.598	0.4365	0.662	0.729
52	〃	13.01	0.02	13.03	〃	8.79	0.605	0.4257	0.675	0.703
53	〃	13.77	0.01	13.78	〃	9.32	0.612	0.4138	0.676	0.676
54	〃	11.00	0.03	11.03	〃	6.39	0.579	0.5332	0.059	0.921
55	〃	11.93	0.02	11.95	〃	6.87	0.592	0.5123	0.575	0.880
56	〃	12.70	0.02	12.72	980	7.36	0.602	0.4965	0.579	0.824
57	〃	13.63	0.02	13.65	〃	8.17	0.612	0.4793	0.599	0.783
58	6.00	11.73	0.02	11.75	971	7.86	0.572	0.4265	0.669	0.745
59	〃	12.39	0.02	12.41	〃	8.55	0.582	0.4150	0.689	0.713
60	〃	13.06	0.02	13.08	〃	9.08	0.591	0.4043	0.694	0.684

番号	門扉開き a(m)	貯水深 h_0(m)	接近流速水頭 $v^2/2g$(m)	貯水水頭 $H_1=h_0+v^2/2g$	流量 Q (m³/sec)	下流水深 H_2	m	$m'=Q/a\sqrt{3}H_1^{3/2}$	H_2/H_1	m'/m
61	6.00	9.98	0.04	10.02	1,080	6.05	0.541	0.5138	0.604	0.949
62	〃	10.58	0.04	10.62	〃	6.74	0.553	0.4992	0.635	0.902
63	〃	11.05	0.03	11.08	〃	7.39	0.570	0.4759	0.633	0.834
64	〃	12.78	0.03	12.81	〃	8.16	0.588	0.4545	0.637	0.772
65	〃	10.62	0.04	10.66	1,175	5.25	0.553	0.5419	0.492	0.979
66	〃	10.89	0.04	10.93	〃	6.20	0.558	0.5352	0.567	0.959
67	〃	11.74	0.04	11.78	〃	7.03	0.572	0.5156	0.597	0.901
68	〃	12.98	0.03	13.01	〃	7.66	0.590	0.4906	0.587	0.831
69	7.00	9.60	0.03	9.65	〃	6.18	0.513	0.4882	0.641	0.951
70	〃	10.23	0.03	10.28	〃	7.20	0.528	0.4730	0.700	0.895
71	〃	11.54	0.04	11.58	〃	8.17	0.555	0.4457	0.705	0.803
72	〃	12.82	0.03	12.85	〃	8.99	0.574	0.4231	0.699	0.737
73	〃	13.34	0.03	13.37	〃	9.49	0.582	0.4148	0.709	0.712
74	〃	10.44	0.05	10.49	1,290	6.06	0.533	0.5141	0.578	0.964
75	〃	11.08	0.05	11.13	〃	7.19	0.546	0.4991	0.646	0.914
76	〃	11.74	0.04	11.78	〃	7.78	0.558	0.4845	0.660	0.868
77	〃	12.55	0.04	12.59	〃	8.22	0.571	0.4692	0.652	0.821
78	〃	13.31	0.03	13.34	〃	8.75	0.581	0.4559	0.655	0.784
79	8.00	9.93	0.06	9.99	1,365	4.61	0.501	0.4877	0.461	0.973
80	〃	10.09	0.06	10.15	〃	5.89	0.507	0.4839	0.580	0.961
81	〃	10.66	0.06	10.72	〃	7.49	0.520	0.4701	0.698	0.673
82	〃	10.99	0.05	11.04	〃	8.33	0.528	0.4640	0.754	0.878
83	〃	11.61	0.05	11.66	〃	8.86	0.541	0.4515	0.742	0.834
84	〃	12.89	0.04	12.93	〃	9.46	0.564	0.4287	0.731	0.760
85	〃	13.45	0.04	13.49	〃	9.84	0.572	0.4197	0.729	0.733
86	〃	10.99	0.07	11.06	1,530	3.42	0.529	0.5196	0.309	0.982
87	〃	10.09	0.07	10.16	〃	5.06	0.507	0.5173	0.498	1.020
88	〃	11.16	0.07	11.23	〃	5.95	0.532	0.5156	0.529	0.969
89	〃	11.40	0.06	11.46	〃	6.98	0.537	0.5104	0.609	0.950
90	〃	11.94	0.06	12.00	〃	8.20	0.548	0.4988	0.683	0.910
91	〃	13.36	0.05	13.41	〃	9.20	0.570	0.4719	0.686	0.827
92	9.00	10.96	0.08	11.04	1,630	5.70	0.528	0.4924	0.446	0.932
93	〃	11.19	0.07	11.26	〃	6.90	0.533	0.4876	0.613	0.914
94	〃	11.62	0.07	11.69	〃	8.06	0.542	0.4786	0.689	0.883
95	〃	12.15	0.06	12.21	〃	9.27	0.552	0.4683	0.759	0.848
96	〃	12.91	0.06	12.97	〃	9.90	0.565	0.4544	0.763	0.804
97	〃	11.25	0.08	11.33	1,685	5.70	0.516	0.5025	0.503	0.973
98	〃	11.39	0.08	11.47	〃	6.90	0.520	0.4995	0.602	0.960
99	〃	11.76	0.07	11.83	〃	8.06	0.529	0.4918	0.681	0.929
100	〃	12.42	0.07	12.49	〃	9.27	0.543	0.4786	0.742	0.881
101	〃	13.45	0.06	13.51	〃	9.90	0.560	0.4604	0.733	0.822
102	〃	12.15	0.08	12.23	1,850	4.95	0.538	0.5310	0.405	0.986
103	〃	12.13	0.08	12.21	〃	6.44	0.538	0.5315	0.527	0.987
104	〃	12.46	0.08	12.54	〃	7.66	0.544	0.5245	0.611	0.964
105	〃	13.05	0.08	13.13	〃	9.05	0.554	0.5127	0.689	0.925

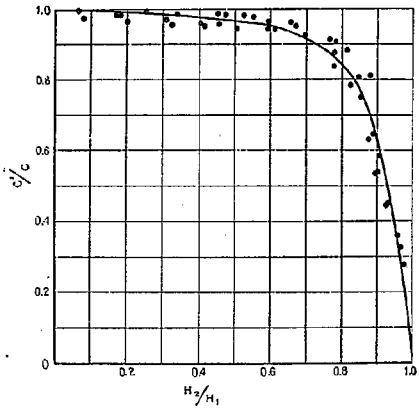


図-49　左岸固定ぜきの H_2/H_1 と C'/C の関係

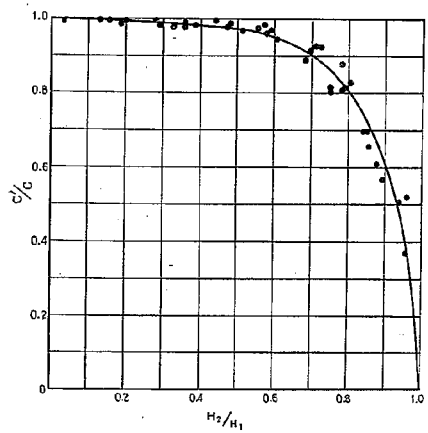


図-50　右岸固定ぜきの H_2/H_1 と C'/C の関係

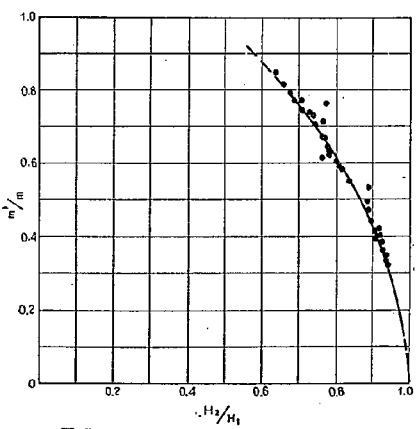


図-51　排砂門の H_2/H_1 と m'/m の関係

測定し H_2/H_1 を求め，それに対する m'/m を知ることにより，完全越流または流出時の流量に乗ずることにより，不完全越流または流出時の流量を推定しようとするものである。

この方法により放流量を推定する場合，放流量が少ない場合は，接近流速水頭を無視しても，実用上問題はないが，放流量が多くなり接近流速水頭を無視することが出来なくなる限界はどの辺にあるかを知るために，実験で求められた接近流速水頭の値を，図-52に示す。

模型は固定河床で流量は既知量であるから，その時の水位から流積を求めて，平均流速を知り算出したもので，実際の場合は，洪水中の河床変動を察知することは，実際上不可能なので，精確な接近流速水頭は求めることは不可能であるから，固定床模型実験の結果を参考にして，放流量推定の精度を上げるための参考資料として提示する。

貯水位を満水位近くに保ちながら，余水を放流することは，利水上必要であり，またこのような状態で放流する場合が多いと考えられるから，門扉半開操作した場合の放流量の推定方法について記述する。

調整池水位標の読み h_0（堤頂 EL. 115.0mを基準とする）を測定する。この場合放流量推定上相当の精度を要するときには，図-52を参考に接近流速水頭を加算するが，短時間に概略の放流量を知るためには，接近流速水頭を無視して，$h_0=H_1$ としてもよい。

次にダム下流水位の読みから，ダム下流水深 H_2（堤頂 EL. 115.0m を基準とする）を知り，H_2/H_1 を知り，図-48により，m'/m の値を求めておき，水位—流量曲線，図-45より H_1 と門扉開度に対する流量を求めて，m'/m の値を乗ずれば，ダム下流水位の影響を受けた場合のすなわち，不完全流出時の放流量が推定出来る。

自由越流の場合も，越流水深 h_0（中央越流部は EL. 115.0m，左右岸固定ぜきは EL. 121.0mを基準とする）と，接近流速水頭，ダム下流水深 H_2 を知れば，完全越流時の流量を求め，H_2/H_1 から m'/m を求め，完全越流時の流量に乗じて，不完全越流時の流量を推定することが出来る。

〔7〕結　論

洪水疎通能力については，実験の結果図-34により津久井ダムの計画洪水量 3,800m³/sec 放流のときに，下流水位が 124.0m であれば，貯水位は，127.2m で，異常洪水量4,560m³/sec 放流，下流水位が 126.0m であれば，貯水位は 128.4m であり，橋梁ゲタ下端標高 129.0 m迄 60cm の予裕があり，排砂門を操作しなくても，異常洪水量の放流は可能である。

排砂門については，非常時以外の操作はしないほうがよい。

余水吐の一部で放流する場合は，分離実験の結果を使

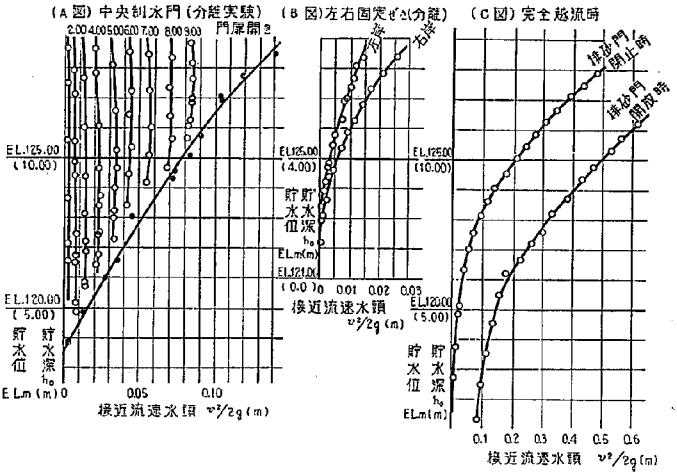


図-52　模型における貯水位と接近流速水頭の関係

用する。すなわち，放流量の推定にはその時の状態により，実験結果を使いわけ推定することが望ましい。

放流量の推定に必要な，貯水池水位標および下流水位標は，図-30 を参考に設置すること。

3. 城山，津久井両貯水池の不等流計算の結果

津久井ダムで，計画洪水流量 3,800m³/sec を放流した場合，道志川流量と，残流域流出量を合計すると，城山ダム地点での計画洪水流量は，4,900m³/sec になる。この場合の城山ダムの貯水位は EL. 125.0m 付近であるから，不等流計算により，津久井ダムの下流水位を推定することが出来る。

不等流計算は，式(7)を使用し，演算の迅速化を計るために，電子計算機により演算を行なった結果であり，城山ダム貯水池に対しては，滞砂の条件は無視し，津久井ダム貯水池は，昭和34年9月測量の横断図を用いたものであるから，滞砂による影響を考慮する場合は，貯水池内滞砂形を予想して，演算を行なえばよい訳で，ダム完成後は，滞砂形状の測量をしてそのつど補正を行なうようにすれば，相当の精度で貯水池内各断面の水位を知ることが出来る訳である。

城山ダムの越流量と越流水位を種々変えて，演算した結果を表-37 に示す。この場合津久井ダムの越流量は道志川流量を差引き，越流水位の推定には実験結果，図-34 にしたがったものである。

$$\frac{\alpha}{g}v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}=0$$

$$\frac{\alpha}{g}v_i\frac{v_i-v_{i-1}}{\triangle x_i}+\frac{H_i-H_{i-1}}{\triangle x_i}-\frac{n^2v_i^2}{R^{4/3}}=0$$

$$\frac{\alpha}{g}\cdot\frac{v_i+v_{i-1}}{2}\cdot\frac{v_i-v_{i-1}}{\triangle x_i}+\frac{H_i-H_{i-1}}{\triangle x_i}-\frac{n^2\left(\frac{v_i+v_{i-1}}{2}\right)^2}{1/2(R_i^{4/3}+R_{i-1}^{4/3})}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

Q：流　量　m³/sec

A：流水断面積　m²

H：計算に必要な出発水位　EL. m

g：重力の加速度

v：Q/A 断面における平均流速

R：径　深

$H_{i-1}\cdot v_{i-1}\cdot R_{i-1}$　：計算する断面の一つ前の断面における　$H\cdot v\cdot R$

$H_i\ v_i\ R_i$：計算する断面の　$H\cdot v\cdot R$

$\triangle x_i$：断面間の巨離　m

α：流速分布状態に関連する常数　1.1

n：粗度係数　0.04

表-37　城山および津久井貯水池不等流計算の結果

城山貯水池			津久井貯水池		
流量 m³/sec	貯水位 EL. m	津久井ダム下流水位	津久井ダム流量m³/sec	貯水位 EL. m	相模ダム下流水位
1,500	113.000	113.230			
4,200	124.000	124.260	3,200	126.500	130.676
4,200	125.500	125.714	3,200	127.050	130.760
4,900	124.000	124.355	3,800	127.200	131.521
4,900	125.500	125.793	3,800	127.600	131.584
5,900	125.500	125.927	4,500	128.400	132.551

4. 結　語

以上の実験検討の結果は，適正に操作するかぎり，満足できる流況を示すが，実際の設計施工または管理等に当っては，下記の注意事項に充分の考慮を払って慎重を期すべきで，細部形状の設計施工の良否，洪水時の操作等は，応々にして非常に重大な結果をまねく原因となることがあるので，それらについてとくに特殊な配慮を必要とする問題にとどめ，その他は，本報告および適当な参考資料を参考にして，現場技術者が適宜判断していかれるようにお願いする。

1) 余水吐部分のコンクリートは良質なコンクリートを使用し，特に念入りに施工し滑らかに仕上げること。

2) ローラーバケットおよびバケット下流部の導流壁は充分強固な基礎岩に取りつけること。

3) 施工残屑や岩屑等が，完成後のバケット内に残っていないように気をつけ，また山腹等から落ちないように保護対策をほどこすこと。

4) ダム完成後，流木等貯水池内の浮遊物は，あらかじめ取除いて，洪水時に流下してバケット等に被害をおよぼさないように注意すること。

5) 余水吐門扉操作に要する貯水池水位標の設置位置は，ダムから少なくとも60m以上上流に設置すること。

6) 余水吐門扉操作は，本報告書にしたがって注意しながら慎重に操作し，渓勢池の流況，現場の経験等も織りまぜて，操作順序を習得するようにされたい。

7) 津久井ダムの越流水位については，本報告書の資料を基に，城山ダムの貯水位との関係を知り，慎重に操作しなければならない。

本実験は，昭和34年4月より昭和36年9月迄の2年半にわたる期間をついやして実施されたものであり，実験内容および資料は，多種多様にのぼり，本報告書では，最終案の理解に必要と思われる資料のみをとりあげたが，削愛された資料その他記録類は，建設省土木研究所ダム部ダム水理研究室に保管する。

Report
of
The Public Works Research Institute
Ministry of Construction

Vol. 118, May 1964

CONTENTS

1. K. Nakamura
A Study on the Application of Information Amount Analysis for River Engineering ..... (1)

2. H. Takeshita and Y. Iwashita
Load Bearing Capacity of a Base Course (2) ..... (71)

3. Y. Mura, T. Nagata, T. Fujisaki, K. Sato, T. Tsukiji and A. Kanai
Hydraulic Model Test for the Shiroyama Dam ..... (97)