



土 木 研 究 所 資 料

第 2 0 8 号

アーチダムの温度応力に関する実験的研究

昭 和 4 1 年 9 月

建 設 省 土 木 研 究 所

アーチダムの温度応力に関する実験的研究

飯 田 隆 一
矢 野 明

目 次

1 概 要	1
2 材料特性に関する測定	1
(1) 模型材料及び実験方法	1
(2) 模型縮尺と載荷温度、周期との関係	2
(3) 温度変化による弾性係数の測定	3
(4) 熱拡散係数及び線膨張係数の測定	4
3 二次元模型の温度応力実験	17
(1) 模型製作及び実験装置	17
(2) 実験結果と理論解との比較	19
4 結 論	20

1. 概 要

近年アーチダムの実測資料の解析結果によると、温度による撓みが水圧荷重によるものより大きい値を示していることが知られる様になってきた。

綾北ダムの実測解析によると年間の水位による撓みの変化量が約20mmに対して、温度による撓みの変化量は約40mmもの値を示している。

このような事実からアーチダムの温度応力は重要視されるようになった。

アーチダムの温度応力を大別してみると、

- ① コンクリート硬化熱によるもの。
- ② 外部温度変化によるもの。

に分けることができる。これらの温度を放置するとダムの安定性をそこなう原因になり何んらかの温度規制を考えねばならない。そこで①の温度規制は亀裂防止及び初期応力の低下を目的とするが、施工管理、発熱条件を考慮することにより人為的にある程度まで温度規制は可能である。

②は自然条件から受けるものであるからして温度規制はむずかしく従ってこれは設計荷重の一部として考慮しなければならない。

実測資料によると、ダム表面近くに形成されている温度勾配による温度応力や、ダム上、下流面の温度差もダムの構造作用にかなりの影響を与えていることが指摘されていることから、当研究室では既にダムの外面の温度が周期的に変化する場合の理論的な計算を行っている。

本実験では②についてのみ取り扱うことにし、周期的に温度変化を受ける二次元模型の温度応力について実験的に究明し、上記の理論解“アーチダムの温度応力に関する理論的考察”(所報第104号)について比較検討し、アーチダム設計に対する安全性の検討と合理化に役立たせんとするものである。

本報告書は昭和36年度から昭和41年度までの行政部費で行ったものである。

2. 材料特性に関する測定

(1) 模型材料及び実験方法

模型材料は最近ダムの模型実験でよく用いられている石膏でこれは等方等質で、ポアソン比、破壊強度と弾性係数比及び圧縮強度との比がコンクリートのそれとほぼ同一であることや、模型製作、歪計接着等の面からも好結果を得ている点で用いられている。

実験は材料特性試験と二次元模型の温度応力測定試験からなっている。

材料特性試験では弾性係数、熱拡散係数及線膨張係数を測定するもので特に熱膨張係数の測定に際しては不慮の原因にもとずく実験誤差が生ずるか否かを見極めるために特性の既知であるコンクリート供試体の試験と併行して行った。

特性試験の供試体はコンクリートの材料試験に用いられる $\phi 10\text{cm} \times 20\text{cm}$ のモールドを用い、本実験では特に上、下方向からの熱の伝導を考慮しないために、これを二本継ぎ足したもので図

— 1 に示す様に供試体の継ぎ目付近の表面に温度歪計を水平方向に 4 枚貼付し熱電対を継ぎ目付近の中心と中心から 4 cm 及び表面にとりつけて外気温を周期的に変化させた場合の供試体の表面歪と、温度を測定してその温度の減衰量及び位相のずれから次に述べる理論解によって熱特性を求めようとするものである。

(2) 模型縮尺と载荷温度、周期との関係

模型と実物との相似性を表示する場合に形状特性を表示する τ, ϕ , と物理的特性を表示する $t\sqrt{\frac{2\pi}{k^2\omega}}$ とに分けられる。このうち $t_m/t_p = \tau_p/\tau_m$, $\phi_m = \phi_p$ の形状特性は模型、実物と相似であるから問題はないが、 $t\sqrt{\frac{2\pi}{k^2\omega}}$ の物理特性は模型縮尺によって変化してくる。

$$t_m \sqrt{\frac{2\pi}{k_m^2 \omega_m}} = t_p \sqrt{\frac{2\pi}{k_p^2 \omega_p}}$$

$$\frac{t_m}{t_p} = \frac{k_p^2 \omega_p}{k_m^2 \omega_m}$$

ここで k_m^2 と k_p^2 が同じとすれば、 t_m/t_p が模型縮尺であるから

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\omega_m}{\omega_p} = \frac{\omega_m}{365 \times 24 \times 60}$$

$$\omega_m = \frac{365 \times 24 \times 60}{n^2} = \frac{525600}{n^2}$$

従って $n = 100$ の場合	52.56 分
$n = 200$	13.14 分

ここで

t : ダムの厚さ

r : 中心半径

k^2 : 熱拡散係数

ω : 周期

n : 模型の縮尺

ϕ : アーチ中心角

本実験では载荷装置の関係で ω_m は 22 分とした。したがって $n = 155$ である。

又実物と模型との間に次の関係が成立する。

$$\frac{\sigma_p}{A_p E_p C_p} = \frac{\sigma_m}{A_m E_m C_m}$$

$$\sigma_p = \sigma_m \left(\frac{A_p}{A_m} \right) \times \frac{E_p}{E_m} \left(\frac{C_p}{C_m} \right)$$

σ : 温度応力

A : 表面温度振巾

E : 弾性係数

C : 線膨張係数

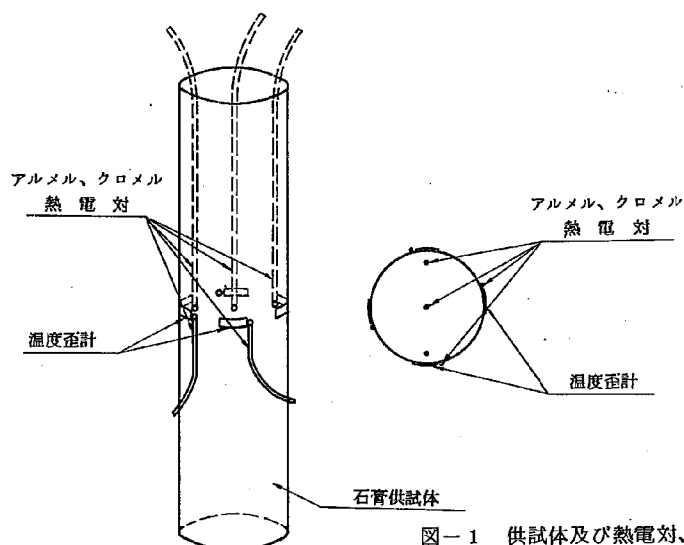


図-1 供試体及び熱電対、温度歪計取付図
($\phi = 10\text{cm}$ $h = 40\text{cm}$)

(3) 温度変化による弾性係数の測定

模型材料である石膏の弾性係数は乾湿の状態によってかなり変化することは知られている。しかし温度変化によつての弾性係数の変化することは未だ不明の様である。本実験での温度载荷は乾燥炉内の温度を変化させることによって行うものであるから弾性係数の変化する可能性も考えられる。そこで乾燥炉内を $40^{\circ}\text{C} \sim 50^{\circ}\text{C}$ 前後に保ち供試体を一昼夜そこに放置し、30% 前後の荷重を载荷し、この状態で5分後、10分後と3回の歪を同時载荷装置により測定し、その後数日間 25°C 前後の乾燥炉内に放置してから载荷測定した。結果は次表の通りである。

弾性係数 供試体 No.	温度载荷時の弾性係数	無载荷時の弾性係数
1	68800 ㏪	62700 ㏪
2	64400	60700
3	64700	61200
4	67200	60000
5	62700	60000
6	63600	62400
7	61000	54500
8	63200	62600
9	61900	63100
10	55800	59000
11	58900	53900
12	59100	58800

上表の値は載荷直後、5分後、10分後の3回の平均値である。表からもみられる様に部分的には多少差異があるが、これは測定誤差の範囲内とみなして温度が変化しても弾性係数は変らないと考えられる。従って本実験に模型材料として用いても差支えないと言う確信が得られた。

(4) 熱拡散係数及び線膨張係数の測定

温度応力を扱う場合において最も必要な材料特性は熱拡散係数及び線膨張係数である。これらは理論的には容易に計算されるが実験的には多くの技術的困難を伴うことが過去の実験結果などで報告されている。ここでは周期的な温度変化を受ける円柱の温度分布及び温度応力の解を求めこれら熱拡散係数及び線膨張係数を求めるものである。

熱伝導の微分方程式は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \text{----- (1)}$$

ここで円柱の半径： a

外気温の温度振幅： A

熱拡散係数： k^2

境界条件は

$$r=a \text{ において } T = A \sin \frac{2\pi}{\omega} t$$

今変数分離形の解を求めるために

$$T = e^{i \frac{2\pi}{\omega} t} R$$

とおくと R は r のみの関数とする。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - i \frac{2\pi}{k^2 \omega} R = 0$$

$$R = \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) + i \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right)$$

故に境界条件を満足する解は次の形で表わされる。

$$\begin{aligned} T &= A \left[e^{i \frac{2\pi}{\omega} t} \frac{\text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) + i \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right)}{\text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) + i \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right)} \right] \\ &= \frac{A}{\text{ber}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) + \text{bei}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right)} \left[\left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) + \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) \right\} \sin \frac{2\pi}{\omega} t \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) - \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot a \right) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k^2 \omega}} \cdot r \right) \right\} \cos \frac{2\pi}{\omega} t \right] \end{aligned} \text{----- (2)}$$

円の中心の温度は $\theta_{er0}=1$ $\theta_{ei0}=0$ であるから

$$[T]_{r=0} = \frac{A}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \left[\theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \sin \frac{2\pi}{w}t - \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \cos \frac{2\pi}{w}t \right] \quad (3)$$

この点の温度振巾は

$$Kt = \frac{A}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \quad (4)$$

位相のおくれは

$$\delta t = \frac{w}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)}{\theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \quad (5)$$

又 $a \neq r$ の場合 r 点での振巾を Kt とすれば

$$\begin{aligned} T &= Kt \sin \frac{2\pi}{w}(t - \delta t) \\ &= Kt \left\{ \sin \frac{2\pi}{w}t \cos \frac{2\pi}{w}\delta t - \cos \frac{2\pi}{w}t \sin \frac{2\pi}{w}\delta t \right\} \\ Kt \cos \frac{2\pi}{w}\delta t &= \frac{A}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \left\{ \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\} \\ Kt \sin \frac{2\pi}{w}\delta t &= \frac{-A}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \left\{ \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) - \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\} \end{aligned}$$

温度振巾は

$$Kt = \frac{A}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right)} \frac{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \left\{ \theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\} + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \left\{ \theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\}}{\theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \left\{ \theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\} + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \left\{ \theta_{er}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) \right\}} \quad (6)$$

位相差は

$$\delta t = \frac{w}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) - \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right)}{\theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{er}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right) + \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}a\right) \theta_{ei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2w}}r\right)} \quad (7)$$

次に(3)式に示すような温度分布が現れたときの温度応力を求めてみる。この時の応力関数及び応力は(1)

$$F = a_0 r - \frac{m \cdot E \cdot c}{m-1} \int \frac{dr}{r} \int T dr \quad (8)$$

$$\sigma_r = 2a_0 - \frac{m \cdot E \cdot c}{m-1} \int \frac{1}{r^2} \int T dr \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = 2a_0 - \frac{m \cdot E \cdot c}{m-1} \left(T - \frac{1}{r^2} \int T dr \right) \quad (10)$$

$$\mathcal{L}r\theta = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\theta &= \frac{m+1}{m \cdot E} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \sigma^2 F + C \cdot E \cdot T \right] \\ &= \frac{m+1}{m \cdot E} \left[2a_0 \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \frac{mEC}{m-1} \frac{1}{r^2} \int T r dr \right] \\ &= \frac{2a_0}{E} \frac{(m+1)(m-2)}{m^2} + \frac{m \cdot f \cdot l}{m-1} C \frac{1}{r^2} \int T r dr \\ \therefore \mathcal{E}_\theta &= 2 \frac{(m+1)(m-2)}{m^2 E} a_0 + \frac{m+1}{m-1} C \frac{1}{r^2} \int T r dr\end{aligned}$$

さて境界条件として

$$r=0 \quad \text{にて} \quad \sigma_r = \mathcal{L}r\theta = 0$$

これから a_0 を求めると

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{mEC}{2(m-1)} \left[\frac{1}{r^2} \int T r dr \right]_{r=a} \\ &= \frac{m \cdot E \cdot C}{2(m-1)} \frac{A}{\left[\text{ber}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \text{bei}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right] \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a} \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right\} \sin \frac{2\pi}{w} t - \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \text{bei} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right\} \\ &\quad \times \cos \frac{2\pi}{w} t \Big] \\ \sigma_\theta &= \frac{m \cdot E \cdot C}{m-1} \frac{A}{\left[\text{ber}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \text{bei}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right] \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a} \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\frac{1}{a} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar w} \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\frac{1}{a} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar w} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right\} \sin \frac{2\pi}{w} t \\ &\quad - \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\frac{1}{a} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar w} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\frac{1}{a} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar w} \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right\} \cos \frac{2\pi}{w} t \Big] \dots \dots \dots (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\theta &= \frac{m+1}{m-1} C \left\{ \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left[\frac{1}{r^2} \int T r dr \right]_{r=a} + \frac{1}{r^2} \int T r dr \right\} \\ &= \frac{m+1}{m-1} \frac{A C}{\left[\text{ber}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \text{bei}^2 \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \right] \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a} \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{a} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{a} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right\} \sin \frac{2\pi}{w} t \\ &\quad - \left\{ \text{ber} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{a} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{a} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} a \right) + \frac{1}{r} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar w}} r \right) \right] \right\} \cos \frac{2\pi}{w} t \Big] \dots \dots \dots\end{aligned}$$

$$+ \operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{a} \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \frac{1}{r} \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}r\right) \right] \cos \frac{2\pi}{\omega} t \quad (12)$$

以上から $r=a$ における σ_θ および ε_θ を求めると

$$\begin{aligned} [\sigma_\theta]_{r=a} &= \frac{mEC}{m-1} \frac{A}{\operatorname{ber}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right)} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}}a \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right] - \left[\operatorname{ber}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right] \sin \frac{2\pi}{\omega} t \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}}a \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right] \cos \frac{2\pi}{\omega} t \right] \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\theta]_{r=a} &= \frac{2(1+\frac{1}{m})AC}{\left[\operatorname{ber}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \frac{2\pi}{\hbar\omega}a \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) - \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right] \sin \frac{2\pi}{\omega} t \right.} \\ &\quad \left. - \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right] \cos \frac{2\pi}{\omega} t \right] \quad (14) \end{aligned}$$

さて、自己温度補償ゲージを用いて温度歪を測定した場合歪計の膨張係数を C' とすれば

$$[\varepsilon_\theta]_{r=a} - C'[T]_{r=a} = \varepsilon_\theta \quad (15)$$

が測定されることになる。(14)式の振巾 KE は

$$KE = 2(1+\frac{1}{m})AC \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right)}{\frac{2\pi}{\hbar\omega}a \left[\operatorname{ber}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \right]}} \quad (16)$$

また位相差 $\delta\varepsilon$ は

$$\delta\varepsilon = \frac{\omega}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) + \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right)}{\operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{bei}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) - \operatorname{bei}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right) \operatorname{ber}'\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}a\right)} \quad (17)$$

とすれば

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta' &= KE \sin \frac{2\pi}{\omega} (t - \delta\varepsilon) - C'A \sin \frac{2\pi}{\omega} t \\ &= [KE \cos \frac{2\pi}{\omega} \delta\varepsilon - C'A] \sin \frac{2\pi}{\omega} t - KE \sin \frac{2\pi}{\omega} \delta\varepsilon \cos \frac{2\pi}{\omega} t \quad (18) \end{aligned}$$

故に(18)式の振巾は

$$K\epsilon' = \sqrt{\left(K\epsilon \cos \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon - C'A\right)^2 + \left(K\epsilon \sin \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon\right)^2}$$

$$= \sqrt{K\epsilon^2 - 2K\epsilon C'A \cos \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon + (C'A)^2} \quad (19)$$

$$K\epsilon = C'A \cos \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon \pm \sqrt{(C'A)^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon + K\epsilon'^2} \quad (20)$$

$$\frac{K\epsilon}{A} = C' \cos \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon \pm \sqrt{-C'^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\omega} \delta\epsilon + \left(\frac{K\epsilon'}{A}\right)^2} \quad (21)$$

$\frac{K\epsilon}{A}$ が求まると(21)式から供試体の線膨張係数 C は次式で求められる。

$$C = \left(\frac{K\epsilon}{A}\right) \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{K\omega} a\right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{K\omega} a\right)}{\frac{2\pi}{K\omega} a \left[\sin^2 \left(\frac{2\pi}{K\omega} a\right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{K\omega} a\right)\right]}}} \quad (22)$$

(4) 熱拡散係数及び線膨張係数の測定

熱拡散係数の異なる供試体の中心から 4 cm の点の内部温度 Kt と外気温 A との比 Kt/A 、及びこの点の表面との内部温度位相差 δt と周期 ω との比 $\delta t/\omega$ は(6)式、(7)式より計算でき、その必要な数値及び結果は下表の如くなり、これを対数方眼紙にプロットすると図-2、図-3の様になる。

h^2	$\text{ber } a$	$\text{bei } a$	$\text{ber } r$	$\text{bei } r$	Kt/A	$\delta t/\omega$
0.010	-0385969	2013131	0684648	1024402	0601098	0123916
0.008	-1046368	2268446	0556288	1235058	0542225	0136139
0.006	-2449407	2320813	0276962	1571134	0472799	0157060
0.005	-3714032	1973077	-0006287	1808937	0429581	0171726
0.004	-5660434	0700333	-0522656	2096560	0378836	0191525
0.003	-8256217	-3598904	-1591672	23457420	0314747	0220539
0.002	-5186579	-19086869	-4226958	1721624	0230756	0269329
0.001	12171519	21934754	-8459475	-11439630	0115040	0379718
0.0005	-1774256	203484029	71844632	-25839300	0042752	0536775

($a : 0.05\text{m}$)
($r : 0.04\text{m}$)

図-2 温度振巾による方法

($a = 0.05m$
 $r = 0.04m$)

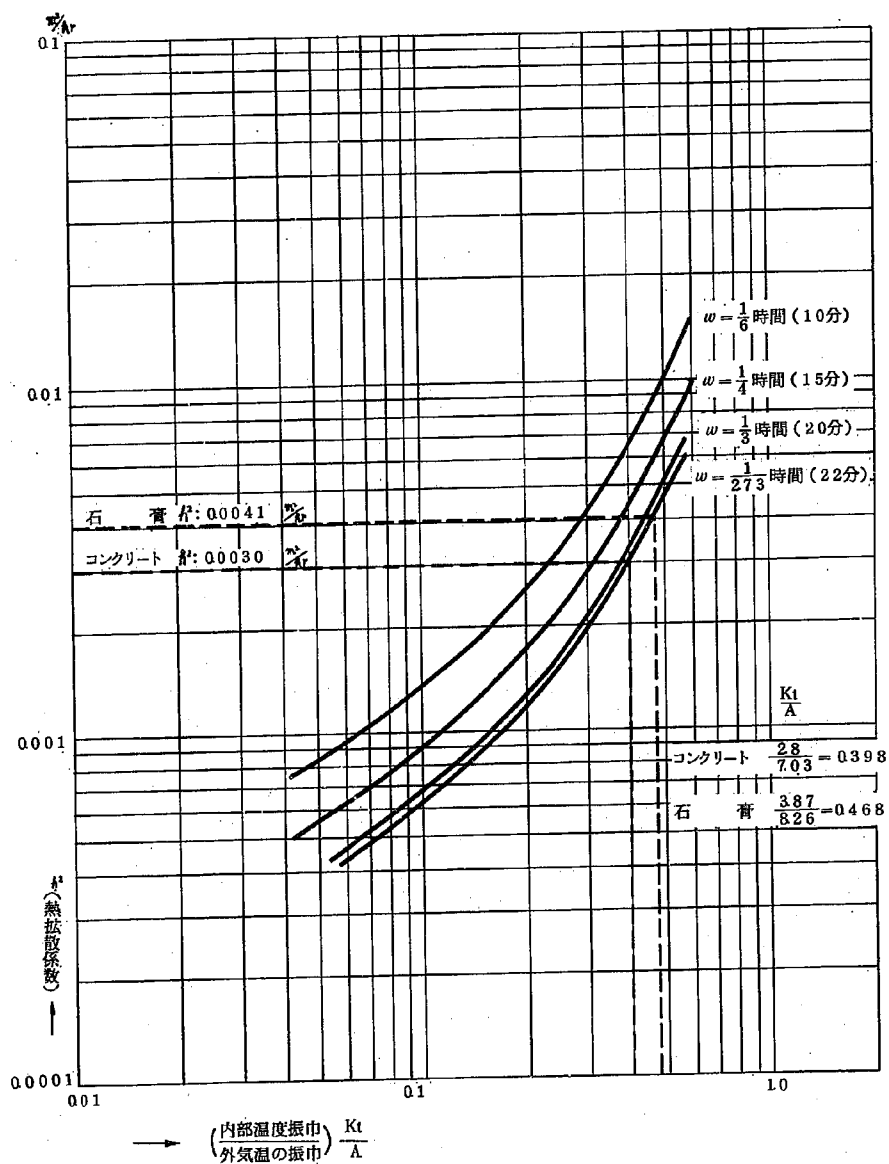
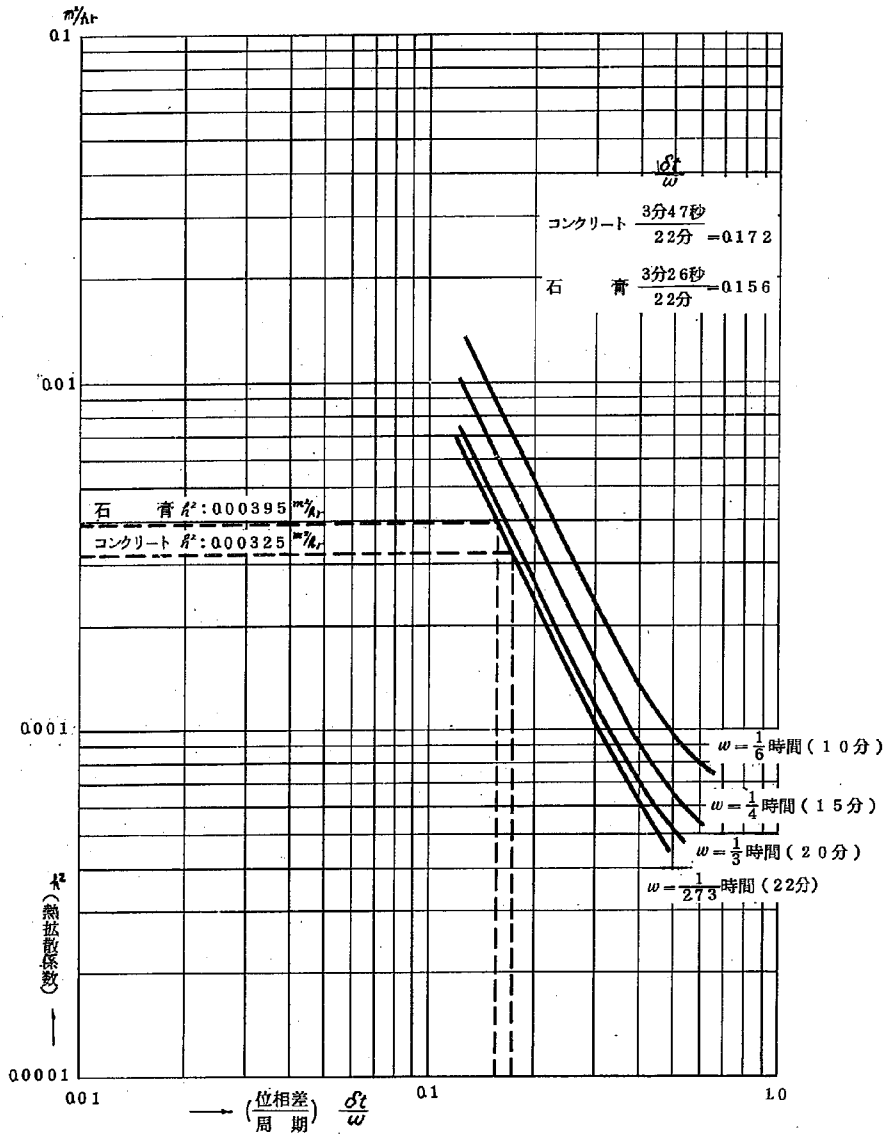


図-3 位相差による方法

$$\begin{aligned} a &= 0.05 \text{ m} \\ r &= 0.04 \text{ m} \end{aligned}$$



① 表面歪，温度，位相差の測定結果
供試体表面歪 (Kε')

材料	測定位置	1	2	3	4	計	平均
石膏	1	456μ	450μ	478μ	406μ	1,6084μ	447μ ±45μ
	2	336	293	606	636		
	3	488	365	447	491		
	4	413	304	446	248		
	5	496	283	417	239		
	6	480	660	309	205		
	7	351	505	282	882		
	8	575	822	464	205		
	9	462	572	611	395		
コンクリート	1	513	604	681	545	4763μ	596μ ±60μ
	2	612	573	670	565		

供試体表面温度 (A)

	測点	温度	計	平均
石膏	1	9.1℃	33.0℃	8.3℃
	2	7.3		
	3	7.9		
	4	8.7		
コンクリート	1	6.2℃	28.2℃	7.0℃
	2	8.3		
	3	6.7		
	4	7.0		

A : 供試体表面温度

Kε' : 供試体表面歪振巾

供試体内部温度 (Kt)

$r = 4 \text{ cm}$

	測点	1	2	3	計	平均
石膏	1	4.6℃	3.7℃	4.1℃	31.0℃	38.7℃
	2	4.1	3.4	4.1		
	3	4.3	3.4	3.9		
	4	5.0	4.8	5.0		
コンクリート	1	2.0	2.8	2.8	2.8℃	2.8℃
	2	2.6	2.7	2.6		
	3	2.8	2.9	3.1		
	4	2.6	—	3.1		

供試体温度位相差 δt

$r = 4 \text{ cm}$

	測点	表面との位相差	計	平均
コンクリート	1	3分20秒	15分07秒	3分47秒
	2	4.00		
	3	3.37		
	4	4.10		
石膏	1	3.04	13分42秒	3分26秒
	2	3.58		
	3	3.22		
	4	3.18		

線膨張係数は⑧式により計算でき、これに必要な $\frac{K\epsilon}{A}$ は次式で算出する。

$$\frac{K\epsilon}{A} = C' \cos \frac{2\pi}{W} \delta t \pm \sqrt{-C'^2 \sin^2 \frac{2\pi}{W} \delta t + \left(\frac{K\epsilon'}{A}\right)^2}$$

上式では $\frac{K\epsilon'}{A}$ を仮定しこれに対応する $\frac{K\epsilon}{A}$ を求める。

ここで $K\epsilon'$: 測定温度歪振巾

A : 供試体表面温度

C' : 測定母材の線膨張係数

$\frac{K\epsilon}{A}$: グラフから求めた値

C : 供試体の線膨張係数

$\frac{K_e}{A}$ は石膏及びコンクリートについて求めるが式に必要な諸数値は次の通りである。

石 膏

	$\frac{K_e'}{A}$	C'	δ_e	$\frac{K_e}{A}$
1	0.000001	0.000010	0.0380784	
2	0.000002	↓	↓	0.00000046446
3	0.000004			0.00000344867
4	0.000006			0.00000562647
5	0.000008			0.00000770912
6	0.000010			0.00000975749
7	0.000015			0.00001482092
8	0.000020	↓	↓	0.00001985231

コンクリート

	$\frac{K_e'}{A}$	C'	δ_e	$\frac{K_e}{A}$
1	0.000001	0.000010	0.0392800	
2	0.000002	↓	↓	0.00000033397
3	0.000004			0.00000343007
4	0.000006			0.00000561436
5	0.000008			0.00000769987
6	0.000010			0.00000974981
7	0.000015			0.00001481528
8	0.000020	↓	↓	

上表をグラフにプロットすると図-4, 図-5のようになる。

图-4 石 膏

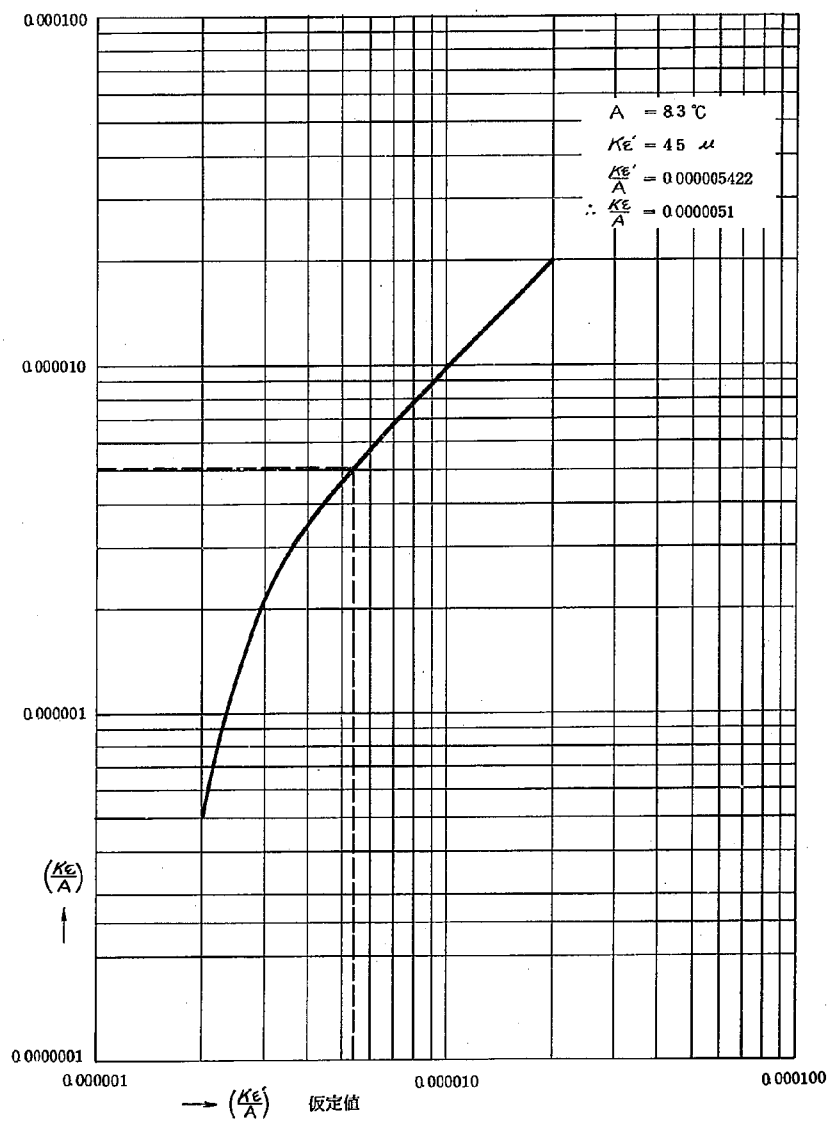
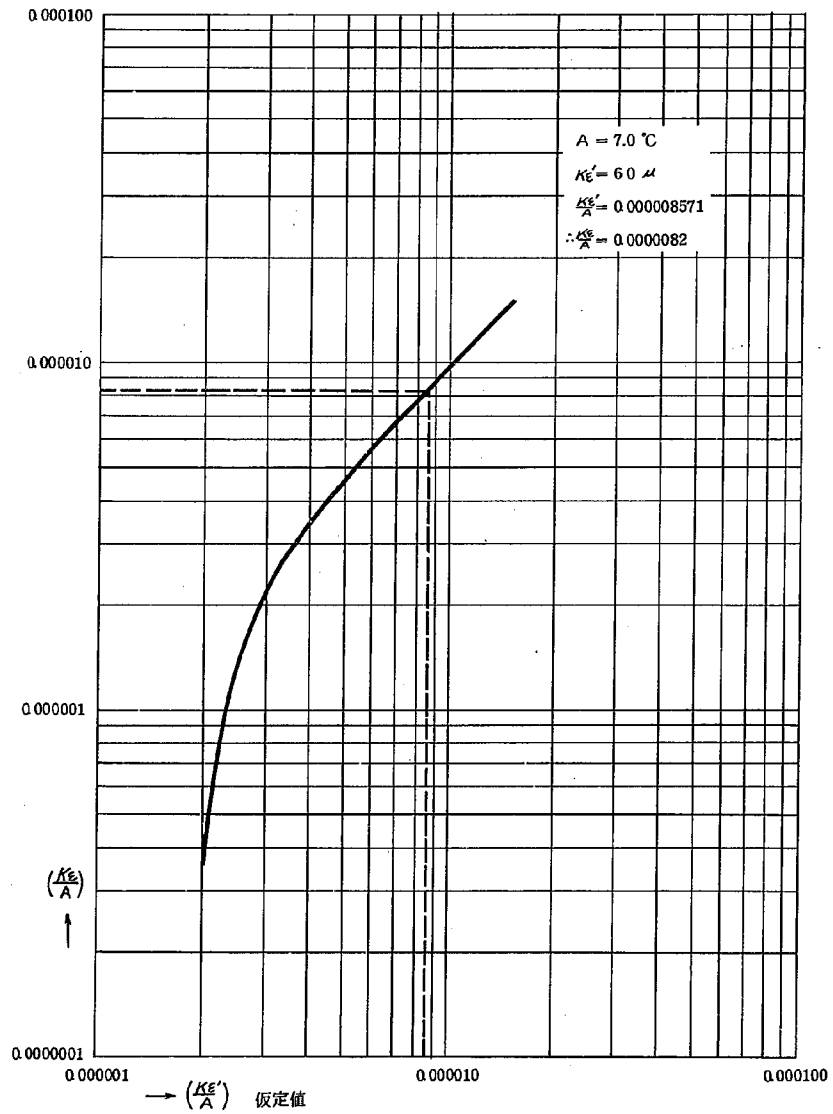


図-5 コンクリート



② 熱拡散係数

熱拡散係数は図-2、図-3から測定された外部温度振巾Aと内部温度振巾Ktとの比 $\frac{Kt}{A}$ と、内部温度の位相差 δt と周期 ω との比 $\frac{\delta t}{\omega}$ を用いて求められる。その結果は下表の通り。

	温度振巾法	位相差法	平均
石膏	0.0041 m^2/hr	0.00395 m^2/hr	0.0040 m^2/hr
コンクリート	0.0030 m^2/hr	0.00325 m^2/hr	0.0030 m^2/hr

③ 線膨張係数

線膨張係数は測定された外部温度振巾Aと内部温度振巾 Ke' との比 $\frac{Ke'}{A}$ を用いて⑩式より求められる。但し⑩式の諸数値は下表の通り

$$\frac{Kt}{A} = 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) C \sqrt{\frac{\operatorname{ber}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right) + \operatorname{bei}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right)}{\frac{2\pi}{h^2\omega}a^2 \left[\operatorname{ber}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right) + \operatorname{bei}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right)\right]}} \quad (10)$$

$$\therefore C = \frac{Kt}{A} \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} \sqrt{\frac{1}{\frac{\operatorname{ber}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right) + \operatorname{bei}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right)}{\frac{2\pi}{h^2\omega}a^2 \left[\operatorname{ber}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right) + \operatorname{bei}'^2\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a\right)\right]}}$$

	h^2	$\sqrt{\frac{2\pi}{h^2\omega}}a = x$	$\frac{2\pi}{h^2\omega}a^2$	d'	β'	$\operatorname{ber}'x$	$\operatorname{bei}'x$	$\operatorname{ber}x$	$\operatorname{bei}x$
石膏	0.0040	32891	10710	071687	070005	-197356	065979	-074743	218162
コンクリート	0.0030	37979	14280	071483	070159	-280521	-005882	-196318	235907

	δt	$\sqrt{\quad}$	$2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \sqrt{\quad}}$	A	Ke'	$\frac{Ke'}{A}$	線膨張係数
石膏	0.03808	027574	24	151111	83°C	0.000045	0.0000051	8×10^{-6}
コンクリート	0.03928	024133	24	172655	7°C	0.000060	0.0000082	14×10^{-6}

3. 二次元模型の温度応力実験

(1) 模型製作及び実験装置

温度荷重を載荷する場合外気温と同様に周期的に温度及び時間を変動し得るような温度載荷装置を準備する。この装置は周期を0～12分まで温度は最高60℃までそれぞれ時間と温度を組合せることによって任意に周期的な温度載荷を行うことができる。

模型は石膏を用いて二次元アーチの標準形状と思われるアーチ中心角度100°、 $\frac{r}{h} = 0.1$ （厚さ4cm、中心半径 $r = 40\text{cm}$ ）高さ30cmの模型で実験誤差及び製作誤差をなくすために模型を二個作製した。又アバットの部分は移動しない様に考慮した。

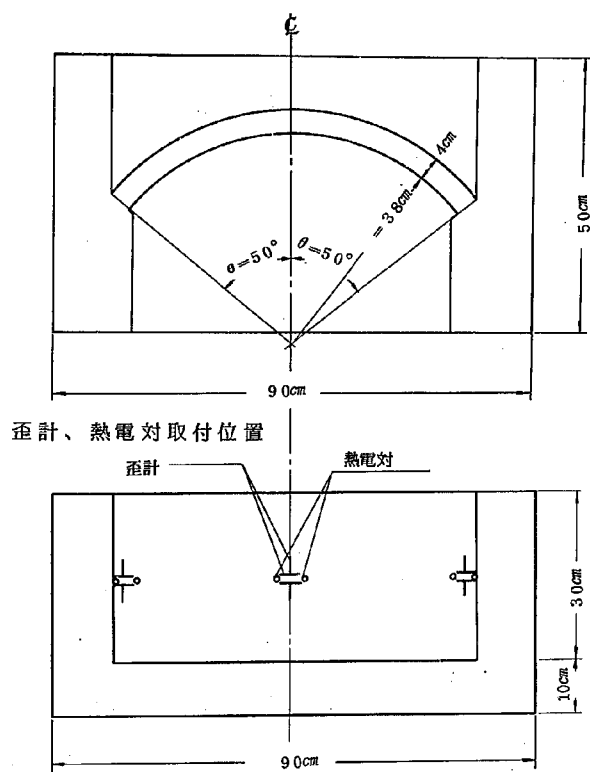
模型の温度歪及び表面温度を測定するために、ダムの上下流面のクラウン及びアバットメントにストレインゲージを水平、鉛直方向に貼付し又、同時にサーモカップルを取付ける。（図-6）を参照。

本実験での載荷温度は20℃～60℃とし、22分周期で載荷し、このときの表面歪及び表面温度を自動温度歪記録装置で測定する。

以上の方法によって得られた温度振巾は理論解によって既に求められている第1近似、第2近似、厳密解の係数にそれぞれ代入して温度応力が求められる。

尚理論解については土木研究所報告第104号（34年11月）の“アーチダムの温度応力に関する理論的考察”を参照されたい。

図-6 二次元アーチ模型



(2) 実験結果と理論解との比較

実際のダムでの外気温による温度変化はダム上流面は貯水されているためその温度変化はあまりなく、下流面のみが外気温の変化を受けて大きく変化するものであるが、本実験装置の関係からダム模型の上、下流面が同じ温度変化をすると想定した温度荷重方法をとった。図-6に示す測点での温度歪及び表面温度を測定して温度応力を求めるものである。温度歪は実験値を又温度は理論値を算出するために必要でありその算出方法については土木研究所報告第104号に掲載されているのでここでは省略する。歪測定は最初施工継目を有しない場合について行い、続いて実際のダムの様に施工継目を有する場合について測定を行った。

次に示す値は温度歪及び表面温度の測定結果でありいずれも10回測定の平均値である。

実験結果

① 施工継目を有しない場合

位置 方向 歪	アバットメント		クラウン	
	水	鉛	水	鉛
上流面歪	14 μ	9 μ	12 μ	15 μ
下流面歪	12	15	15	14
温度	5 $^{\circ}\text{C}$		6 $^{\circ}\text{C}$	

② 施工継目を有する場合

位置 方向 歪	アバットメント		クラウン	
	水	鉛	水	鉛
上流面歪	11 μ	7 μ	9 μ	12 μ
下流面歪	9	8	12	12
温度	5 $^{\circ}\text{C}$		6 $^{\circ}\text{C}$	

次にこれらの測定結果に基づいて算出したアバットメント及びクラウンの温度応力を示す。

理論値と実験値の比較

1. クラウン応力

	理 論 値	実 験 値
上流面	第1近似 -0.52 kg/cm^2	-0.49 kg/cm^2 (-0.37)
	第2近似 -0.52	
	厳密解 -1.00	
下流面	第1近似 0.56	0.58 (0.47)
	第2近似 0.56	
	厳密解 1.03	

2 アバットメント応力

	理 論 値	実 験 値
上 流 面	第1近似 0.87%	0.52 % (0.42)
	第2近似 0.87	
	厳密解 1.08	
下 流 面	第1近似 -0.84	-0.49 (-0.34)
	第2近似 -0.84	
	厳密解 -1.07	

() の値は施工継目を有する場合

4 結 論

アーチダムの温度応力に関する模型実験を行った例は国内、国外でもその例をみない。本実験では手始めに石膏供試体を用いて熱膨散係数及び線膨張係数を測定したが実験装置の不備にもかかわらず大体妥当な結果を得ることができた。その後二次元の模型実験を行った。

温度の载荷条件は装置の関係で上下流面が同じ温度変化を受ける場合のみしか行えずこの他の状態での応力の測定はできなかった。

これらの値を理論解と比較してみる場合は実験の条件と同じ厳密解と比較しなければならない。

これと比較した結果クラウン・アバットメントとも実験値が約1/2の値を示している。

本実験では施工継目を有しない場合と、有する場合の二つについて行ったがこれを設けた場合に温度応力が20%～30%程度低下している。これらの値は定量的には疑問の余地はあるが、定性的には納得される。

本実験を通じて考えられたことは実験装置が完備していなければこの種の実験は非常にむづかしいと言うことである。例えば実験結果からみても明らかな様に载荷装置の内部温度振巾を20℃にとったにもかかわらず、表面の温度は5～6℃しか変化していない。

このために充分な実験精度を得られなかった。将来この種の実験を継続し充分な精度を有する結果を得るためには、模型をオイルづけにしてこのオイルに温度変化を与えるなど模型により大きい温度変化を与える工夫が必要と考えられる。