

目 次

は し が き	1
1 Kötter の方程式	2
2 極道跡法	7
参 考 文 献	20

は し が き

摩擦材料に関する塑性論的取り扱いの基礎方程式は Kötter の方程式である。この方程式は、一般に体積力が存在せず、しかも境界条件の簡単な場合にのみ解くことができる。Prandtl や Meyerhof の支持力公式は、Kötter の方程式の適用によって導くことができる。

しかしながら、一般には、体積力の存在する場合や境界条件の複雑な場合には、この方程式は数値解析または図解によってしか解くことができない。

本文は、Kötter の方程式にもとづいて導かれる de Josselin de Jong 教授の図解法の原理を述べたものである。応用例については、文献^{1), 2)}を参照されたい。

本方法は、筆者がオランダのデルフト工科大学において、同教授から直接教わったものであることを附記して、感謝の意を表したい。

昭和 42 年 2 月

土木研究所基礎研究室

駒 田 敬 一

1. Kötter の方程式 ³⁾

体積力の方向を図-1に示すとおりにとれば、 x 、 y 方向について、土中応力の平衡条件式はつぎのように書かれる。

平衡条件式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma \cdot \cos \lambda \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma \cdot \sin \lambda \dots \dots (2)$$

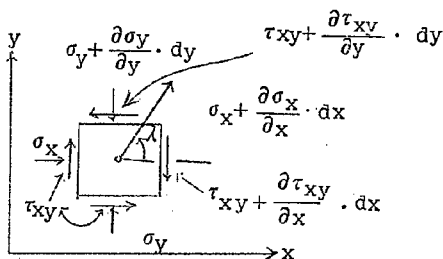


図-1 微小体における力の平衡

塑性平衡応力状態にある土中の任意の点の応力を σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} で表わすと、図-2より、つぎの関係が得られる。

$$\sigma_x = \sigma_0 [1 + \sin \phi \cos 2\psi] - c \cdot \cot \phi \quad (3)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 [1 - \sin \phi \cos 2\psi] - c \cdot \cot \phi \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_0 \sin \phi \sin 2\psi \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \sin \varphi \cdot \sin 2\psi + 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \varphi \cdot \cos 2\psi \\ & + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} [\sin \varphi \cdot \cos 2\psi] + 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \varphi \cdot \sin 2\psi = \gamma \cdot \sin \lambda \end{aligned}$$

(7)

が得られる。

S_1 と S_2 を共役なすべり面とすると、図-3および図-4から明らかのように、

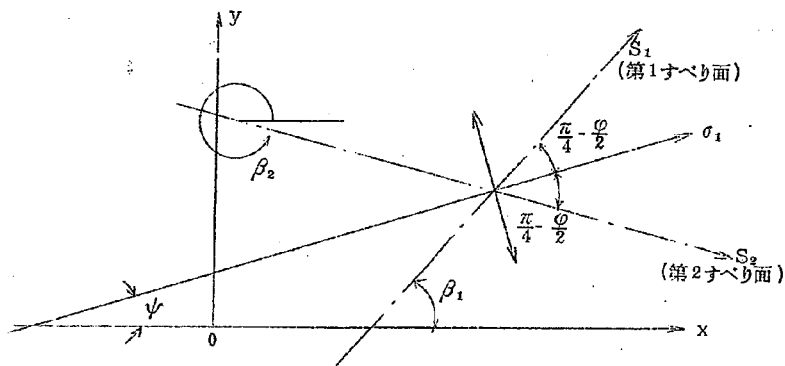


図-3 物理面

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \psi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \beta_2 &= \psi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + (2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 2\psi \\ \beta_1 - \beta_2 &= \frac{\pi}{2} - \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

が得られる。

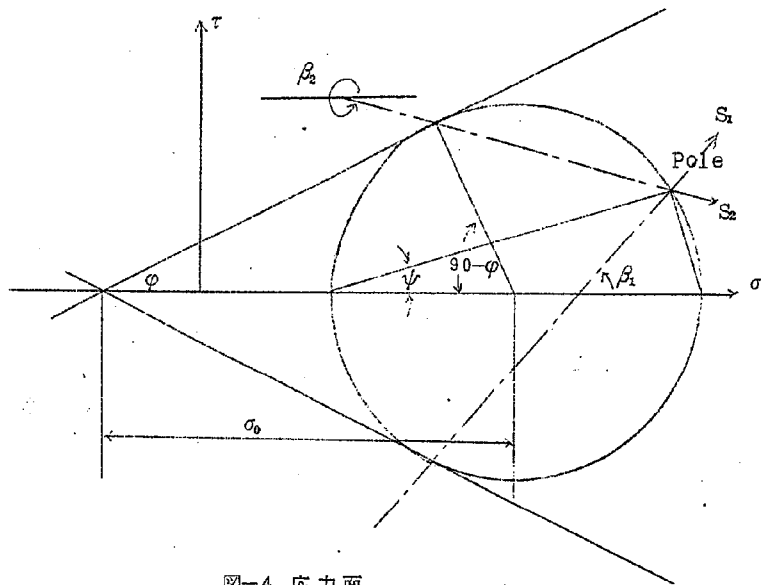


图-4 应力面

ここで、つぎの演算を行なうと、次式が得られる。

$$-\sin\beta_2 \times (6) + \cos\beta_2 \times (7)$$

$$= \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \cos\varphi \cdot \cos\beta_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \cos\varphi \cdot \sin\beta_1 + 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin\varphi \cdot \cos\beta_1 \\ + 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin\varphi \cdot \sin\beta_1 = \gamma \sin(\lambda - \beta_2) \quad (10)$$

$$+\sin\beta_1 \times (6) - \cos\beta_1 \times (7)$$

$$= \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \cos\varphi \cdot \cos\beta_2 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \cos\varphi \cdot \sin\beta_2 - 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin\varphi \cdot \cos\beta_2 \\ - 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin\varphi \cdot \sin\beta_2 = \gamma \sin(\beta_1 - \lambda) \quad (11)$$

ここで $x \cdot y$ 方向の微係数を、すべり線 S_1 および S_2 方向の微係数で表わすと図-5を参照してつぎの関係が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S_1} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial S_1} \\ = \cos\beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sin\beta_1 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S_2} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial S_2} \\ = \cos\beta_2 \frac{\partial}{\partial x} + \sin\beta_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

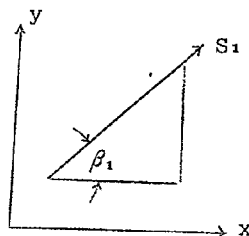


図-5

この関係を用いて(10)および(11)式を書き直すと

$$\begin{cases} \cos\varphi \frac{\partial \sigma_0}{\partial S_1} + \sin\varphi \cdot 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial S_1} = \gamma \sin(\lambda - \beta_2) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \cos\varphi \frac{\partial \sigma_0}{\partial S_2} - \sin\varphi \cdot 2\sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial S_2} = \gamma \sin(\beta_1 - \lambda) \end{cases} \quad (13)$$

が得られる。返々を $2\sigma_0 \cdot \sin\varphi$ で割ると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cot \varphi \cdot \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_1} + \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \gamma \cdot \frac{\sin(\lambda - \beta_2)}{2\sigma_0 \sin \varphi} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cot \varphi \cdot \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_2} - \frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \gamma \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \lambda)}{2\sigma_0 \sin \varphi} \end{array} \right. \quad (15)$$

となる。

ここで、 $\xi = \frac{1}{2} \cot \varphi \cdot \log \sigma_0$ とおけば、 $\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = \frac{1}{2} \cot \varphi \cdot \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_1}$ となる。

この関係を用いて (14)、(15) 式を書き直せば、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \gamma \cdot \frac{\sin(\lambda - \beta_2)}{2\sigma_0 \sin \varphi} \end{array} \right. \quad (16)$$

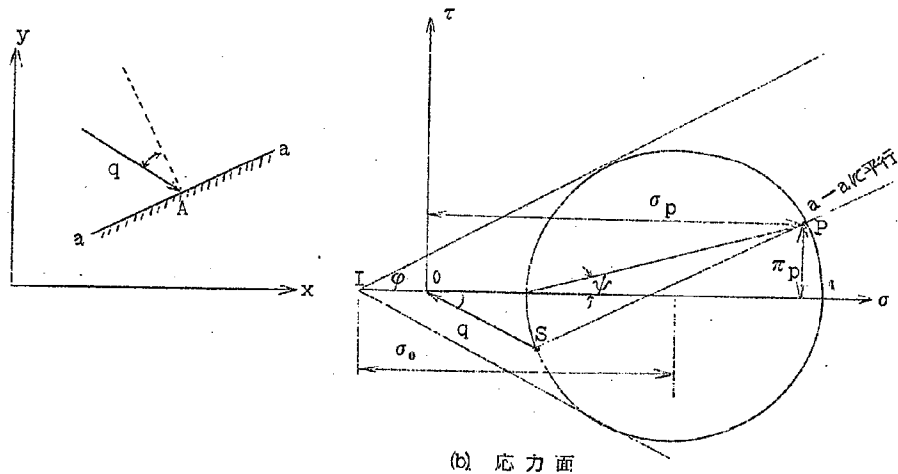
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial s_2} - \frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \gamma \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \lambda)}{2\sigma_0 \sin \varphi} \end{array} \right. \quad (17)$$

これが Kötter-Massau の方程式で、摩擦材料に関する塑性論の基礎方程式である。

2. 極追跡法³⁾

塑性平衡応力状態にある土中の応力およびすべり線の方法は極の位置がわかれば、すべて知られる。したがって、応力図上において極の位置を、物理面上におけるすべり線を追跡することによって、土中の任意の点の応力状態を求めることができるのである。

ある点 A のまわりの応力状態を与える極の座標を (σ_r, τ_r) で表わせば、図 - 6 によって次の関係式が得られる。



☒ - 6

$$\sigma_r + \cot \varphi = \sigma_0 (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \quad (18)$$

$$\tau_r = \sigma_0 \sin \varphi \sin 2\psi \quad (19)$$

これらの関係式をすべり線 S_i ($i=1, 2$) に関して偏微分を行なえば、次式を得る。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial s_i} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_i} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) - 2\sigma_0 \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial s_i} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial s_i} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_i} \sin \varphi \sin 2\psi + 2\sigma_0 \sin \varphi \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial s_i} \quad (21)$$

(20) および (21) 式を組み合わせ、 $\frac{\partial \sigma_0}{\partial s_i}$ および $\frac{\partial \psi}{\partial s_i}$ の項をそれぞれ消去法に

よって消去すると、次式を得る。

$$2\sigma_0 \sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial s_i} (\sin \varphi + \cos 2\psi) = -\sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma_r}{\partial s_i} +$$

$$(1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \tau_r}{\partial s_i} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial s_i} (\sin \varphi + \cos 2\psi) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial s_i} \cos 2\psi + \frac{\partial \tau_r}{\partial s_i} \sin 2\psi \quad (23)$$

(9) 式によれば

$$2\psi = \beta_1 + \beta_2 \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\beta_1 - \beta_2)$$

である。(22) および (23) 式を Kötter の方程式 (12) および (13) 式に記入し、

(24) 式の関係を用いて整理すると、次式を得る。

$$\sin \beta_2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial s_1} - \cos \beta_2 \frac{\partial \tau_r}{\partial s_1} = \gamma \cos \beta_1 \sin(\beta_2 - \lambda) \quad (25)$$

$$\sin \beta_1 \frac{\partial \sigma_r}{\partial s_2} - \cos \beta_1 \frac{\partial \tau_r}{\partial s_2} = \gamma \cos \beta_2 \sin(\beta_1 - \lambda) \quad (26)$$

これらの関係式から極追跡の性質が導かれる。

2.1 体積力のない場合

まず $\gamma = 0$ の場合、第 1 すべり線に沿って (25) 式を差分形で書けば

$$\sin \beta_2 (\Delta \sigma_r)_{S_1} - \cos \beta_2 (\Delta \tau_r)_{S_1} = 0$$

$$\therefore (\Delta \tau_r)_{S_1} = (\tan \beta_2) \cdot (\Delta \sigma_r)_{S_1} \quad (27)$$

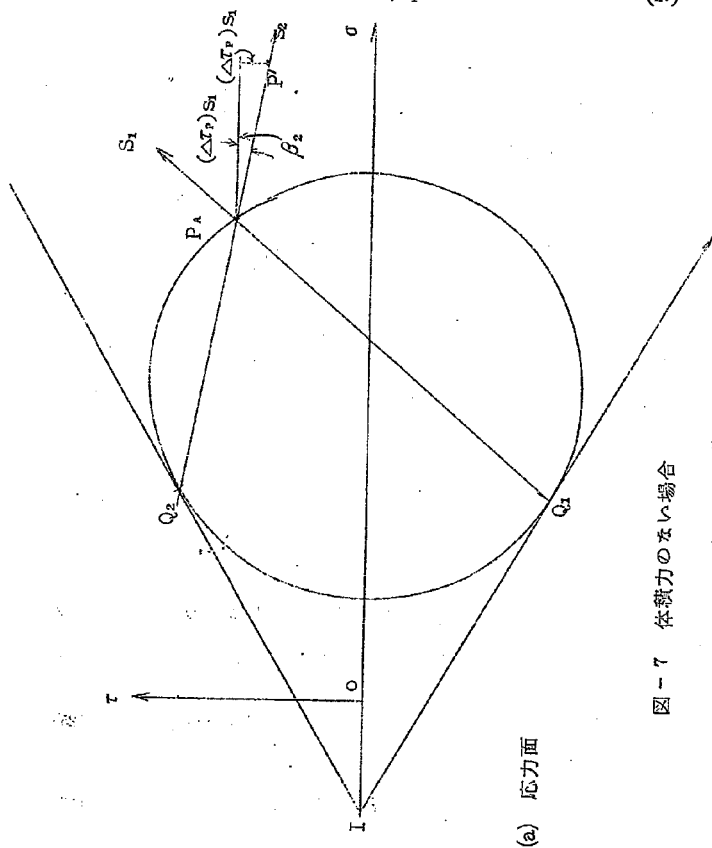
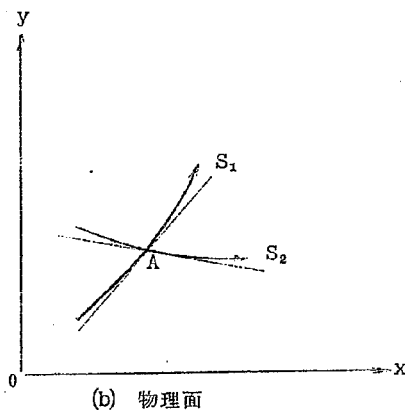


図-7 体積力のない場合



すなわち (27) 式は、図-7 に示すように、物理面上の点 A の近傍における第 1 すべり線 s_1 上の応力状態を与える極 P は、応力面上において P_A を通る共役な第 2 すべり線上にあることを示している。

第 2 すべり線に関しても同様のことがいえるから、結局次の法則を得る。

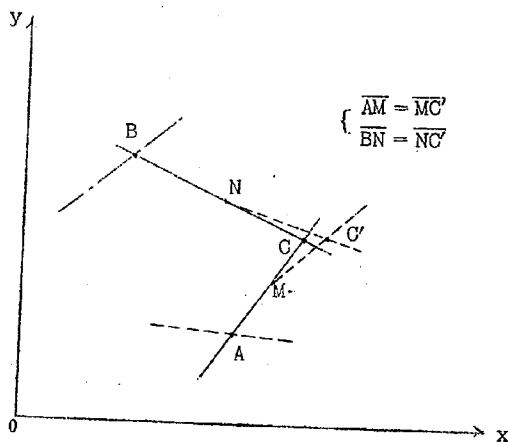
すなわち、

土の自重がない場合、物理面上の近傍の 2 点 A、B を通るすべり線が点に C において交わるとき、この点の応力状態を表わす極 P_c は、応力面上において、2 点 A、B のそれぞれの極 P_A 、 P_B を通る、すべり線 AC および BC にそれぞれ共役なすべり線の交点で示される (図-8)。

実際には、このようにして求めた点 C および極 P_c は、第 1 次近似値にすぎないので、極 P_c の位置とすべり線の方がともに満足されるよう何回か修正すればよい。すなわち、図-8 に示すように、第 1 近似点である極 P_c を通り、破壊基準線に接する応力円をそがき、点 C におけるすべり線の方角を求める。

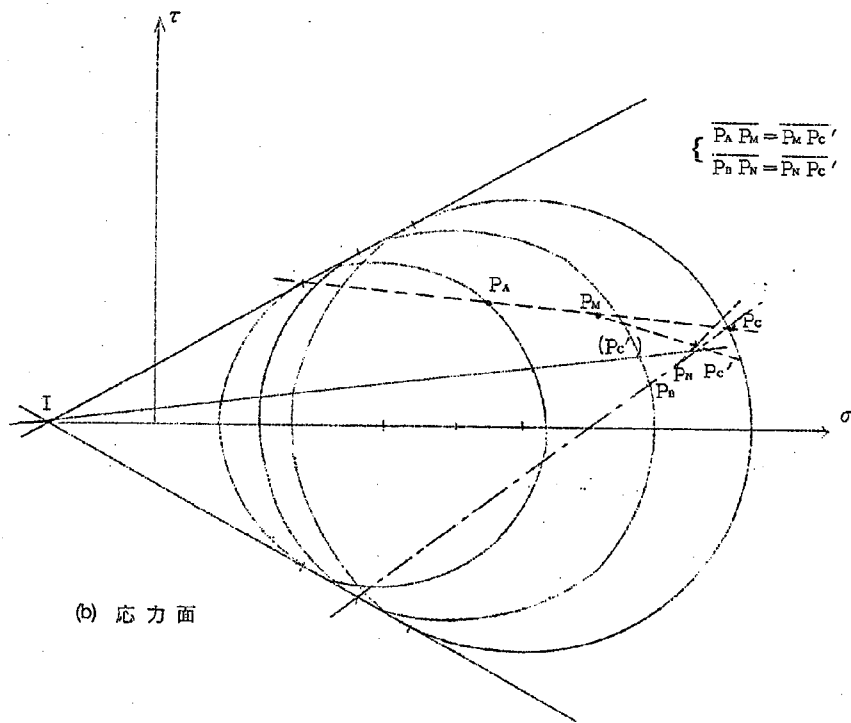
つぎに図に示すように、ほゞ $\overline{AM} = \overline{MC'}$ および $\overline{BN} = \overline{NC'}$ になるよう折線で修正し、点 C' を見出す。極の位置についても、極 P_c によって得られるすべり線（点 C' におけるすべり線の方角）を用いて、ほゞ $\overline{P_A P_N} = \overline{P_M P_{C'}}$ および $\overline{P_B P_N} = \overline{P_N P_{C'}}$ になるよう折線で修正し、極 $P_{c'}$ を求める。これが第2次近似値である。正しい点 C および極 P_c の位置は、つぎつぎに収斂するまで行なつて求めることができる。

極 P_c を用いて、すべり線の交点 C の修正点 C' を求めるために、極 P_c を通る応力円を用いることを示唆した。しかし、図-9に示すように、破壊基準線の交点 I を通る直線上にある極は、つねに平行なすべり線を与えるため、必ずしも極 P_c を通る応力円を描く必要はなく、既設の応力円を用いて、極と破壊基準線との交点を通る直線と既設の応力円との交点を代理の極に選べばよい。



(a) 物理面

図-8 極の求め方（体積力のない場合）



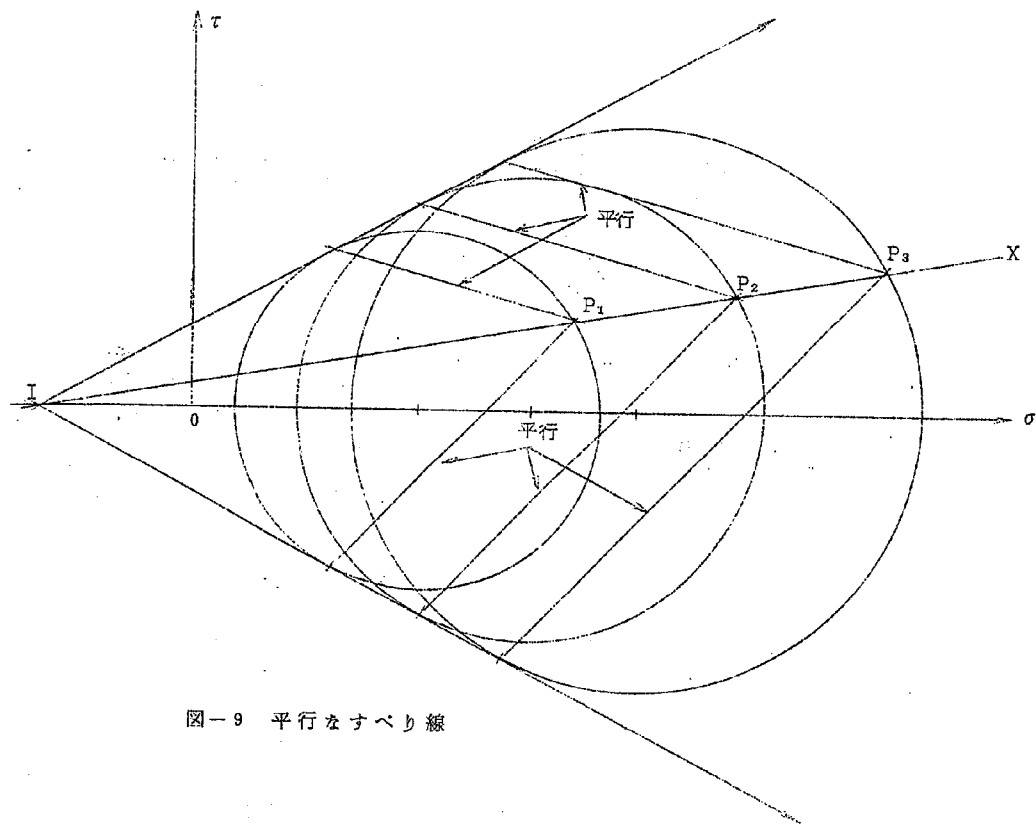


図-9 平行なすべり線

2.2 自重のある場合

$\gamma = 0$ として、第1すべり線に沿って(25)式を差分形で表わせば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sin\beta_2 (\Delta\sigma_F) S_1 - \cos\beta_2 (\Delta\tau_F) S_1 &= \gamma \cos\beta_1 \sin(\beta_2 - \lambda) \\ \therefore (\Delta\tau_F) S_1 &= (\tan\beta_2) \cdot (\Delta\sigma_F) S_1 - \frac{\gamma \cos\beta_1 \cdot \sin(\beta_2 - \lambda)}{\cos\beta_2} \quad (27) \end{aligned}$$

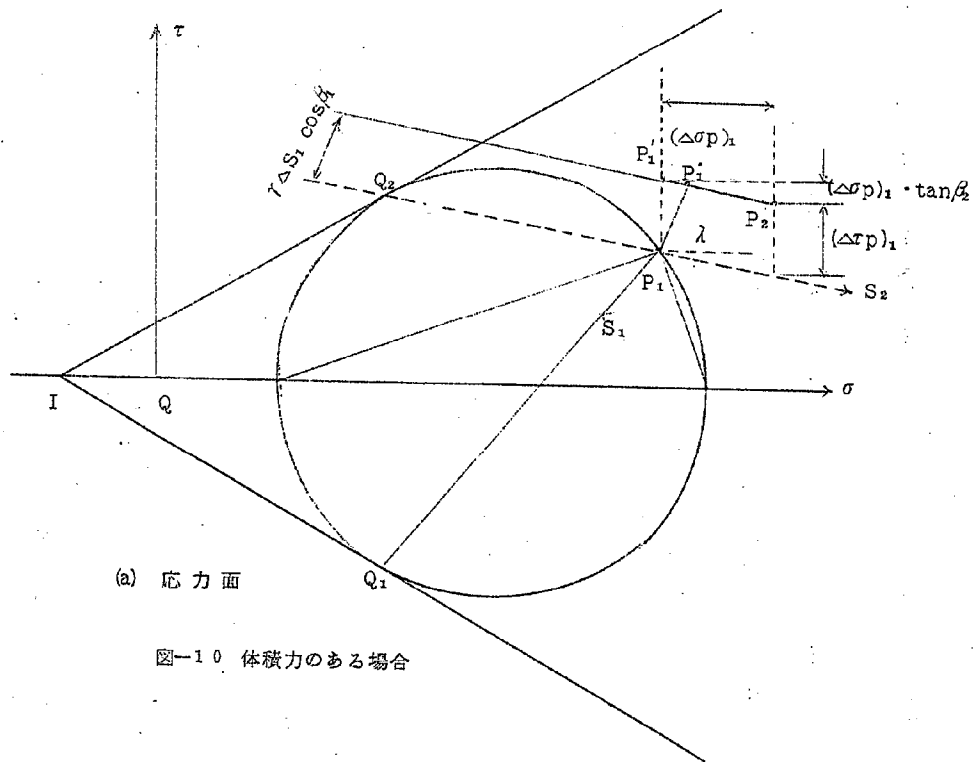
図-10(b)の物理面上の点①における応力状態を与える極が(a)の応力面上の P_1 で示されるとする。体積力の方向をX軸と反時計まわりに、 λ とすると、点①から S_1 のすべり線方向に ΔS_1 だけ距った点における応力状態を与える極の位置を求める問題を考えてみよう。

応力面上において極 P_1 から体積力の方向に $r \Delta S_1 \cos\beta_1$ だけ距った点を P_1'' とする。つぎに P_1' を通り、 S_2 に平行線を引き、これと P_1 を通る τ 軸との平行線との交点を P_1' とすれば、 $\triangle P_1 P_1' P_1''$ は図-10(c)に示す通りとなる。

$\triangle P_1 P_1' P_1''$ において、正弦定理を用いれば、

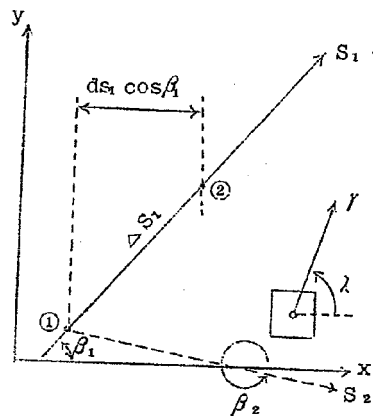
$$\begin{aligned} \frac{\overline{P_1 P_1'}}{\sin(360 + \lambda - \beta_2)} &= \frac{\overline{P_1' P_1''}}{\sin(\beta_2 - 270)} \\ \therefore \overline{P_1 P_1'} &= \overline{P_1' P_1''} \cdot \frac{\sin(360 + \lambda - \beta_2)}{\sin(\beta_2 - 270)} \\ &= -\gamma \Delta S_1 \cos\beta_1 \cdot \frac{\sin(\lambda - \beta_2)}{\cos\beta_2} \quad (28) \end{aligned}$$

(28)式の右辺は、(27)式の右辺の第2項と等しいから、結局極 P_2 の位置は、極 P_1 を通る S_2 の平行線から $\overline{P_1' P_1} = -\gamma \Delta S_1 \cos\beta_1 \frac{\sin(\lambda - \beta_2)}{\cos\beta_2}$ だけ距った点で表わされることがわかる。すなわち、図-10(a)において、 P'' を通る S_2 の平行線上にあることが知られる。

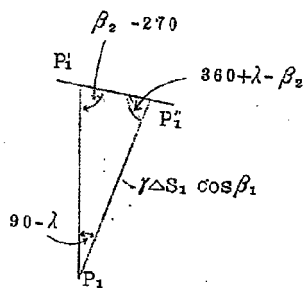


(a) 応力面

図-10 体積力のある場合



(b) 物理面

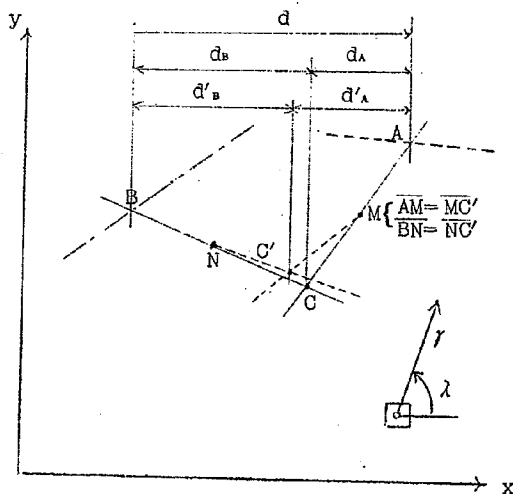


(c) 説明図

第2すべり線に関しても以上と同様の結果を得るから、結局次の法則を得る。

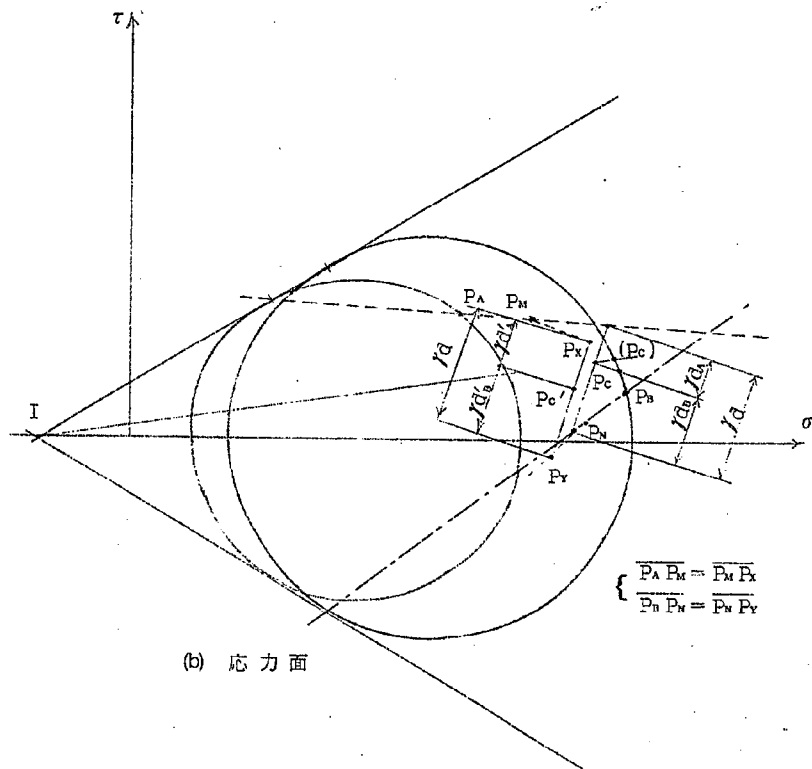
土の自重がある場合、物理面上の近傍の2点A、Bを通るすべり線が点Cにおいて交わるとき、この点の応力状態を表わす極 P_c は、応力図上において2点A、Bのそれぞれの極 P_A 、 P_B を通るすべり線ACおよびBCにそれぞれ共役なすべり線を、体積力の方向に、（ACの水平成分×土の体積体積重量）：（BCの水平成分×土の体積体積重量）の大ききで分割する点によって示される。

図-11は、自重のある場合の例を示す。極 P_c および点Cの位置は、2、3度修正して正しい位置を求める。



(a) 物理面

図-11 極の求め方（体積力のある場合）



参 考 文 献

- 1) R.F. Scott; Principle of soil Mechanics, Addison-Wesley, 1963.
- 2) 駒田敬一 ; 「塑性平衡応力状態にある土中応力の図解法」、土木技術資料、Vol.9 No.1およびNo.2、昭和42年1月号および2月号。
- 3) G. de Josselin de Jong; Statics and Kinematics in the Failable Zone of a Granular Material. Waltman-Deift (Holland), 1959.