

土木研究所資料

第340号

弾塑性理論における有限要素法

昭和43年3月

建設省土木研究所

目 次

著 者 飯 田 隆 一
小 林 茂 敏

1. 弾性理論概説	1
1.1 平衡方程式	1
1.2 弾性係数	1
1.3 仮想変位の原理	5
1.4 弾性方程式の解	5
2. 弾性理論への有限要素法の適用	8
2.1 四角形要素の剛性マトリックス	8
2.2 異方性体における剛性マトリックス	15
2.3 完全剛性マトリックス	17
2.4 変位変換マトリックス	18
2.5 荷重マトリックス	21
2.6 マトリックス解法	22
2.7 応力計算	23
3. 弾塑性理論への有限要素法の適用	25
3.1 従来の研究	25
3.2 偏差能力・偏差歪	26
3.3 Yielding Condition	27
3.4 塑性理論における剛性マトリックス	30
3.5 Yielding Condition $f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\epsilon - P)$ の関数形	36

1. 弾性理論概説

1.1 平衡方程式

物体の表面に働く表面力を $P_{n,x}$, $P_{n,y}$, $P_{n,z}$ とし, 表面に立てた法線方向余弦を $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ とすると,

$$P_{n,x} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z)$$

$$P_{n,y} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z)$$

$$P_{n,z} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z)$$

にて表わされる。これから

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{n,x} dS + \iiint \rho X dx dy dz$$

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{n,y} dS + \iiint \rho Y dx dy dz$$

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{n,z} dS + \iiint \rho Z dx dy dz$$

ここで Green の積分定理を用いると,

$$\begin{aligned} \iint P_{n,x} dS &= \iint (\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z)) dS \\ &= \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\therefore \iiint \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho X \right) dx dy dz = 0$$

これから次の運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

1.2 弾性係数

一般化された Hooke の法則によると, 6 つの応力成分は 6 つの歪成分に比例する。

これをマトリックスで示せば,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

これから歪エネルギーを作ると

$$W = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint [c_{11} \epsilon_x^2 + c_{22} \epsilon_y^2 + c_{33} \epsilon_z^2 + c_{44} \gamma_{xy}^2 + c_{55} \gamma_{yz}^2 + c_{66} \gamma_{zx}^2 + (c_{12} + c_{21}) \epsilon_x \epsilon_y + (c_{23} + c_{32}) \epsilon_y \epsilon_z + (c_{13} + c_{31}) \epsilon_x \epsilon_z + (c_{14} + c_{41}) \epsilon_x \gamma_{xy} + (c_{15} + c_{51}) \epsilon_x \gamma_{yz} + (c_{16} + c_{61}) \epsilon_x \gamma_{zx} + (c_{24} + c_{42}) \epsilon_y \gamma_{xy} + (c_{25} + c_{52}) \epsilon_y \gamma_{yz} + (c_{26} + c_{62}) \epsilon_y \gamma_{zx} + (c_{34} + c_{43}) \epsilon_z \gamma_{xy} + (c_{35} + c_{53}) \epsilon_z \gamma_{yz} + (c_{36} + c_{63}) \epsilon_z \gamma_{zx} + (c_{45} + c_{54}) \gamma_{xy} \gamma_{yz} + (c_{46} + c_{64}) \gamma_{xy} \gamma_{zx} + (c_{56} + c_{65}) \gamma_{yz} \gamma_{zx}] dx dy dz \quad (3)$$

さて、 δt 時間の運動エネルギーの変化を δT 、内部エネルギーの変化を δW とし、外部仕事を δW_1 、熱の供給を δQ とすると、

$$\iiint (\delta T + \delta W) dx dy dz = \delta W_1 + \delta Q \quad (4)$$

さて

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \iint (p_{n,x} \delta u + p_{n,y} \delta v + p_{n,z} \delta w) dS + \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \\ &= \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} \delta u) + \rho X \delta u + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz} \delta v) + \rho Y \delta v + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z \delta w) + \rho Z \delta w \right] dx dy dz \\ &= \iiint \left[\left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right\} \delta u + \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right\} \delta v + \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right\} \delta w + \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) + \tau_{xy} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) \right\} + \tau_{yz} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right\} + \tau_{xz} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right\} \right] dx dy dz \\ &= \iiint \left[\left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right\} \delta u + \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right\} \delta v + \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right\} \delta w + \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{zx} \right] dx dy dz \end{aligned}$$

これに(1)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \iiint \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{zx} \right] dx dy dz \\ &= \iiint \rho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta t dx dy dz \\ &\quad + \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \delta t dx dy dz \\ &\quad + \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iiint \rho \delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \\
&\quad + \iiint \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right] dx dy dz \\
&= \iiint \delta T dx dy dz \\
&\quad + \iiint \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right] dx dy dz
\end{aligned}$$

この結果を(4)式に代入すると

$$\iiint \delta V dx dy dz = \delta Q + \iiint \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right] dx dy dz \quad (5)$$

断熱変化(エネルギーの変化がない)のとき

$$\delta V = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}$$

となり、この右辺は完全微分形でなければならない。

この内部エネルギーは歪エネルギーと同一のものであるから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} & \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} & \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} & \tau_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

さて(3)式から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} &= c_{11} \varepsilon_x + \frac{(c_{12} + c_{21})}{2} \varepsilon_y + \frac{(c_{13} + c_{31})}{2} \varepsilon_z + \frac{(c_{14} + c_{41})}{2} \gamma_{xy} + \frac{(c_{15} + c_{51})}{2} \gamma_{yz} \\
&\quad + \frac{(c_{16} + c_{61})}{2} \gamma_{zx}
\end{aligned}$$

エネルギーの変化がない場合に(6)式を満足するためには

$$c_{11} = c_{11} \quad (7)$$

即ち、(2)式に示すマトリックスは対称マトリックスにならなければならない。塑性変形等エネルギーの変化がある場合には(7)式を満足しなくてもよい。

さて(2)式の一般化された *Hook* の法則では弾性係数は $6 \times 6 = 36$ ケで、一般に弾性体では、エネルギーの変形はないとするので(7)式が成立し、(2)式の対角線要素 $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{66}$ は変りないが他のものは半分になるので弾性係数の数は $(36 - 6) \times \frac{1}{2} + 6 = 21$ ケとなる。

直交異方性体の場合には x 軸、 y 軸、 z 軸の周りに 180° 回転しても、歪エネルギーは同じ形で表わされる筈であるから

$$\begin{aligned}
c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} &= 0 \\
c_{45} = c_{46} = c_{56} &= 0
\end{aligned}$$

となり、弾性係数は $21 - 12 = 9$ ケとなる、即ち(2)式は

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

更に等方性体の場合には

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23}$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12})$$

となり二つの弾性係数のみがのこる。

$$\text{今 } c_{12} = \lambda \quad c_{44} = \mu \text{ とすれば}$$

$$c_{11} = \lambda + 2\mu$$

となり

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

さて二つの弾性係数を λ, μ でなく E, ν で表わせば、

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \sigma_x(1 + \nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$E\epsilon_y = \sigma_y(1 + \nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$E\epsilon_z = \sigma_z(1 + \nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$G\gamma_{xy} = \tau_{xy}, G\gamma_{yz} = \tau_{yz}, G\gamma_{zx} = \tau_{zx}$$

$$E(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \{ (1 + \nu) - 3\nu \} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1 + \nu} + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = 2G \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

$$\therefore \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

(10) 式を E, ν で書き直すと

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

次に二次元の場合を取扱う

平面歪の場合には、 $\epsilon_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ であるから

(12) 式から

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

平面応力の場合には、 $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ であるから

$$\nu \epsilon_x + \nu \epsilon_y + (1 - \nu) \epsilon_z = 0,$$

$$\epsilon_z = \frac{-\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \epsilon_x + \nu \epsilon_y - \frac{\nu^2}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \right]$$

$$= \frac{2G}{(1 - 2\nu)(1 - \nu)} \left[\{ (1 - \nu)^2 - \nu^2 \} \epsilon_x + (\nu + \nu^2 - \nu^2) \epsilon_y \right] = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

1.3 仮想変位の原理

仮想変位の原理については前項で示したが、有限要素法にはしばしば用いられるもので、もう一度述べることにする。

今ポテンシャルエネルギー Π とすると断熱温度変化の場合

$$\Pi + W_1 = \iiint (\nu + T) dx dy dz$$

これを変位について変分すると

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iiint (\delta \nu + \delta T) dx dy dz - \delta W_1 \\ \iiint \delta \nu dx dy dz &= \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \\ \iiint \delta T dx dy dz &= \frac{1}{2} \iiint \rho \delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

$$\delta W_1 = \iint (p_{n1x} \delta u + p_{n1y} \delta v + p_{n1z} \delta w) dS + \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz$$

として表わされるから(1)式が成立するものとして(4)式から(5)式への誘導を逆行に行なえば $\delta Q = 0$ とすると

$$\delta \Pi = 0 \dots\dots\dots (15)$$

即ち(1)式が成立するときはポテンシャルエネルギーは最小となる。これが最小仕事の原理である。

これを言いかえれば仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ を与えたとき、(1)式が成立するときは内部エネルギーの変化は外部仕事に等しい。これを仮想変位の原理という。

以上から最小仕事の原理も仮想仕事の原理も(1)式の運動方程式をおきかえたものである。

1.4 弾性方程式の解

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \rho Z$$

は運動方程式であるが、未知数 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w$ の9ヶに対して方程式は3ヶで方程式の数不足している。

そこで更に他の条件式が必要となる。

(10)式から

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\epsilon_x + \lambda(\epsilon_y + \epsilon_z) = 2\mu\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2\mu\epsilon_y + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2\mu\epsilon_z + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

また $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

これが所謂適合条件式で(1)式と(17)式とから解が求められる。

(1)式を更に u, v, w の方程式に書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \rho X \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \rho Y \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ とする。(18)式では未知数は u, v, w 方程式も3

つであるから直接解くことが可能である。

(18)式を観察するに、流体力学では応力は速度勾配に比例するから u, v, w を x, y, z 方向の流速と考えると、 e は体積膨脹と考えられる。

従って慣性項は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{Du}{Dt} \text{ となり}$$

$$(\lambda + \mu)e \rightarrow p, \quad \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \mu$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \mu \Delta u \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \mu \Delta v \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \mu \Delta w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となり Navier Stokes の式となる。

さて(18)式において第一式を x で微分し、第二、第三を夫々 y, z で微分して加えると

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \mu \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\lambda + \mu) \Delta e \\ &\quad + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ \therefore \rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \Delta e + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

静力学の場合には(20)式の左辺は 0 となる。

故に

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

のとき (即ち、容積力 = 0, または重力の場合は)

$$\Delta e = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu)e$$

$$\therefore \Delta(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\therefore \mu \Delta^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta e) + \rho \Delta X = 0$$

$\Delta X = 0, \Delta Y = 0, \Delta Z = 0$ のとき $\Delta e = 0$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u &= \Delta^2 v = \Delta^2 w = 0 \\ \therefore \Delta^2 \sigma_x &= \Delta^2 \sigma_y = \Delta^2 \sigma_z = \Delta^2 \tau_{xz} = \Delta^2 \tau_{yz} = \Delta^2 \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

即ち変位, 歪, 応力はいずれも陪調関数である。直歪の和 (e), 直応力の和 ($\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$) は調関数である。弾性理論における解はいずれも(21)~(23)式の性質を利用した解であった。

(i) (23)式の性質を利用した解法

(a) 理論解

ϕ を陪調関数としたとき $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ を調関数とすると一般に

$$\phi = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 + R^2\phi_4 \quad (R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

これを用いて, $\phi_0 \sim \phi_4$ を求める。(Airy 関数 Neuber の解その他)

(b) 平板との相似による実験

図式は外荷重がないときの平板の面外曲げの式と同一である。この性質を利用して実験的に解析する。(Boulder Dam)

(c) (b)に述べた性質を利用して平板を格子構造で解析して応力を求める。(Boulder Dam)

(d) 直接陪調和関数の数値計算を行なう。

(e) 陪調和関数を階差方程式により数値計算を行なう。

(ii) 図式の性質を利用したもの

(a) 光弾性実験

光弾性実験では主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_2$) と主応力の方向 θ が求められる。これから主応力の ($\sigma_1 + \sigma_2$) が求められれば応力がわかるので

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

の性質を用い調和関数の数値積分を行ない解析する。

以上従来行なわれて来た解法はいずれも図式～図式の性質に着目したものであった。このため弾性体でも部分的に弾性係数が異なる場合等は取扱が困難であり、又弾塑性体への拡張も困難であった。これに反し、有限要素法は理論解における微小体の平衡を有限要素の平衡に置換え、数值的に解析するので部分的に弾性係数を変える場合は勿論弾塑性体についても解析が可能となった。

2. 弾性理論えの有限要素法の適用

2.1 四角形要素の剛性マトリックス

弾性理論に有限要素法を適用するにあたって最も理解し易いのは、四角形要素に直線分布する応力のパターンを考えたときであるから、この場合について剛性マトリックスを求めた後に三角形要素にふれることにする。

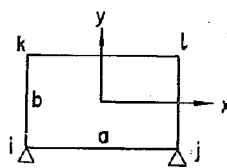


図 - 1

図-1に示すように x, y 方向に辺長が夫々 a, b なる有限要素を考える。また各頂点に i, j, k, l なる名を付ける。 i 点は x, y 方向に変位が固定され、 j 点は y 方向に変位が固定されていると考える。

するとこの要素には U_i, U_j, V_i, U_l, V_l の5つの変位が許されることになる。即ちこの要素は5つの自由度を持つ。

次に図-2に示すような5つの応力のパターンを考える。ここで応力のパターンを5ヶとったのは、後で連立方程式を解く上で変位の自由度とパターンの数とが一致していな

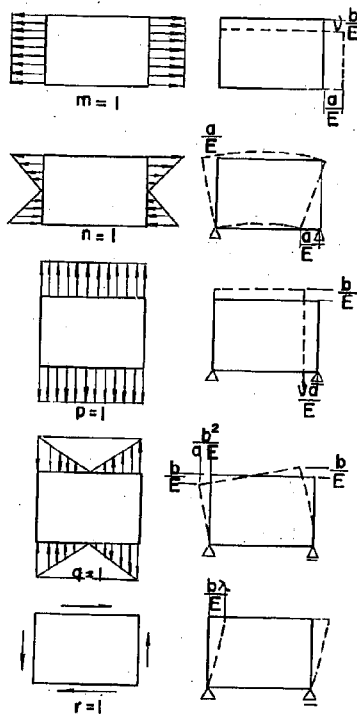


図 - 2

ければならないからである。

$$\sigma_x = m + \frac{2y}{b} n$$

$$\sigma_y = p + \frac{2x}{a} q$$

$$\tau_{xy} = r$$

$$E\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} E = \sigma_x - \nu \sigma_y = m + \frac{2y}{b} n - \nu p - \frac{2\nu x}{a} q$$

$$E\epsilon_y = E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x = -\nu m - \frac{2\nu y}{b} n + p + \frac{2x}{a} q$$

$$E\tau_{xy} = E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \lambda r$$

②4, ②5式をマトリックスの形で書き表わすと,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & -\nu & -\frac{2\nu x}{a} & 0 \\ -\nu & -\frac{2\nu y}{b} & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

また

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{但し } \lambda = 2(1+\nu)$$

いま

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\sigma] \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\epsilon] \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B]$$

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = [C] \quad \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} = [\alpha]$$

とあけは

$$[\sigma] = [B] [\alpha] \dots\dots\dots (2)$$

$$[\varepsilon] = [C] [\sigma] \dots\dots\dots (2)$$

$$[\varepsilon] = [C] [B] [\alpha] \dots\dots\dots (2)$$

$$[C][B] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & -\nu & -\frac{2\nu x}{a} & 0 \\ -\nu & -\frac{2\nu y}{b} & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{さて(5)式で, } x = -\frac{a}{2} \quad y = -\frac{b}{2} \text{ にて } u = 0, v = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \quad y = -\frac{b}{2} \text{ にて } v = 0$$

の条件で解くと

$$Eu = (x + \frac{a}{2})m + \frac{1}{2b}(4xy - ab)n - \nu(x + \frac{a}{2})p \\ + \frac{\nu(a^2 - 4x^2) - (2y + b)^2}{4a}q + (2y + b)\frac{\lambda r}{2}$$

$$Ev = -\frac{\nu}{2}(2y + b)m - \frac{(4x^2 - a^2) + \nu(4y^2 - b^2)}{4b}n \\ + (y + \frac{b}{2})p + \frac{x}{a}(2y + b)q$$

となり, これから各節点の変位を求めると

$$EU_i = am - an - \nu ap$$

$$EU_i = -an - \frac{b^2}{a}q + b\lambda r$$

$$EV_i = -\nu bm + bp - bq$$

$$EU_i = am - \nu ap - \frac{b^2}{a}q + b\lambda r$$

$$EV_i = -\nu bm + bp + bq$$

これをマトリックスの形で表わすと

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_i \\ V_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} a & -a & -\nu a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -\frac{b^2}{a} & b\lambda \\ -\nu b & 0 & b & -b & 0 \\ a & 0 & -\nu a & -\frac{b^2}{a} & b\lambda \\ -\nu b & 0 & b & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

いま

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} a & -a & -\nu a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -\frac{b^2}{a} & b\lambda \\ -\nu b & 0 & b & -b & 0 \\ a & 0 & -\nu a & -\frac{b^2}{a} & b\lambda \\ -\nu b & 0 & b & b & 0 \end{bmatrix} = [A] \quad \begin{bmatrix} U_i \\ U_i \\ V_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix} = [V]$$

とおくと

$$[V] = [A][\alpha] \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。これから

$$[\alpha] = [A^{-1}][V] \quad \dots\dots\dots (3')$$

ここに $[A^{-1}]$ は $[A]$ の逆マトリックスとする。

$$[A^{-1}] = \frac{E}{2ab(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b & -b & \nu a & b & a\nu \\ -b(1-\nu^2) & -b(1-\nu^2) & 0 & b(1-\nu^2) & 0 \\ \nu b & -\nu b & a & \nu b & a \\ 0 & 0 & -a(1-\nu^2) & 0 & a(1-\nu^2) \\ -\frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & -\frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

次に各節点に働く力と応力パターン $[\alpha]$ との関係を求めてみる。

いま各節点に働く力のうち、 i 点の x, y 方向、 j 点の y 方向の力は変位が固定されていて、他の力により平衡関係から求められるので、これをのぞいた力を

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{x,i} \\ S_{x,j} \\ S_{y,i} \\ S_{y,j} \end{bmatrix}$$

とする。 $[S]$ と $[\alpha]$ との関係は平衡関係であり、平衡関係を表現し直したものととして前述したように仮想仕事の原理があるので、ここに仮想仕事の原理を適用することにする。

いま仮想変位を $[\bar{v}]$ とすると、外部のなした仕事は $[\bar{v}]$ と $[S]$ との積で表わされる。

マトリックスの積は

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pp} \end{bmatrix}$$

$$c_{i,j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

として計算され、 $[a]$ の列の数と $[b]$ の行数が等しくなければ積は出来ない。 $[S]$ は (1,5) の行列であり $[\bar{v}]$ も (1,5) の行列である。そこで $[\bar{v}]$ と $[S]$ との積を求めるためにはいくつかのマトリックスの行と列を入れかえなければならない。

いま $[\bar{v}]$ の行と列を入れかえたマトリックス (転置マトリックス) を $[\bar{v}]^T$ とすると、外部のなした仕事は

$$W_e = [\bar{v}]^T [S]$$

一方、仮想の歪を $[\bar{\epsilon}]$ とすれば内部エネルギーは

$$W_i = t \iint [\bar{\epsilon}]^T [\sigma] dx dy$$

$$= i \iint [\bar{V}]^T [A^{-1}]^T [B]^T [C] [B] [\alpha] dx dy$$

このうち x, y を含むマトリックスは $[B]^T, [B]$ のみであるから

$$W_i = i [\bar{V}]^T [A^{-1}]^T \iint [B]^T [C] [B] dx dy [\alpha]$$

仮想仕事の原理

$$W_o = W_i$$

$$[S] = i [A^{-1}]^T \iint [B]^T [C] [B] dx dy [\alpha]$$

さて

$$\iint [B]^T [C] [B] dx dy$$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2y}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2y}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & -\nu & \frac{2\nu x}{a} & 0 \\ -\nu & \frac{2\nu y}{b} & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & -\nu & \frac{2\nu x}{a} & 0 \\ \frac{2y}{b} & \frac{4y^2}{b^2} & -\frac{2\nu y}{b} & \frac{4\nu xy}{ab} & 0 \\ -\nu & -\frac{2\nu y}{b} & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ \frac{2\nu x}{a} & \frac{4\nu xy}{ab} & \frac{2x}{a} & \frac{4x^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \begin{bmatrix} b & 0 & -\nu b & \frac{2\nu bx}{a} & 0 \\ 0 & \frac{b^3}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu b & 0 & b & \frac{2bx}{a} & 0 \\ \frac{2\nu bx}{a} & 0 & \frac{2bx}{a} & \frac{4bx^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda b \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{ab}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{tab}{E} [A^{-1}]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} [\alpha]$$

$$= \frac{t}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b & -b(1-\nu^2) & \nu b & 0 & -\frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} \\ -b & -b(1-\nu^2) & -\nu b & 0 & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} \\ \nu a & 0 & a & -a(1-\nu^2) & -\frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} \\ b & b(1-\nu^2) & \nu b & 0 & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} \\ a\nu & 0 & a & a(1-\nu^2) & \frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} [\alpha]$$

$$= \frac{t}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b(1-\nu^2) & -\frac{b}{3}(1-\nu^2) & 0 & 0 & -a(1-\nu^2) \\ -b(1-\nu^2) & -\frac{b}{3}(1-\nu^2) & 0 & 0 & a(1-\nu^2) \\ 0 & 0 & a(1-\nu^2) & -\frac{1}{3}a(1-\nu^2) & -b(1-\nu^2) \\ b(1-\nu^2) & \frac{b}{3}(1-\nu^2) & 0 & 0 & a(1-\nu^2) \\ 0 & 0 & a(1-\nu^2) & \frac{1}{3}a(1-\nu^2) & b(1-\nu^2) \end{bmatrix} [\alpha]$$

$$= \frac{t}{2} \begin{bmatrix} b & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & -a \\ -b & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -\frac{a}{3} & -b \\ b & \frac{b}{3} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & \frac{a}{3} & b \end{bmatrix} [\alpha]$$

これを書きかえれば

$$S_{,1} = \frac{tb}{2} m - \frac{tb}{6} n - \frac{ta}{2} r$$

$$S_{,2} = -\frac{tb}{2} m - \frac{tb}{6} n + \frac{ta}{2} r$$

$$S_{,3} = \frac{ta}{2} p - \frac{ta}{6} q - \frac{tb}{2} r$$

$$S_{,4} = -\frac{tb}{2} m + \frac{tb}{6} n + \frac{ta}{2} r$$

$$S_{,5} = \frac{ta}{2} p + \frac{ta}{6} q + \frac{tb}{2} r$$

これは直観的に求めた平衡関係と一致する。これから仮想仕事の原理は平衡方程式と同等のものであることがわかる。

さて次に〔S〕と〔V〕との関係を求めよう。

$$〔S〕 = 〔Kr〕〔V〕$$

とおく。〔Kr〕を剛性マトリクスと名付ける。

$$〔a〕 = 〔A^{-1}〕〔V〕$$

であるから

$$〔Kr〕 = \frac{Et}{4ab(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & -a \\ -b & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -\frac{a}{3} & -b \\ b & \frac{b}{3} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & \frac{a}{3} & b \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} b & -b & \nu a & b & a\nu \\ -b(1-\nu^2) & -b(1-\nu^2) & 0 & b(1-\nu^2) & 0 \\ \nu b & -\nu b & a & \nu b & a \\ 0 & 0 & -a(1-\nu^2) & 0 & a(1-\nu^2) \\ -\frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{a(1-\nu^2)}{\lambda} & \frac{b(1-\nu^2)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{Et}{8(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) + (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & \frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) - (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) \\ -\frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) - (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & \frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) + (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) \\ 1+\nu & -1-\nu \\ \frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) - (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & -\frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) + (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) \\ -1+3\nu & 1-3\nu \end{bmatrix}$$

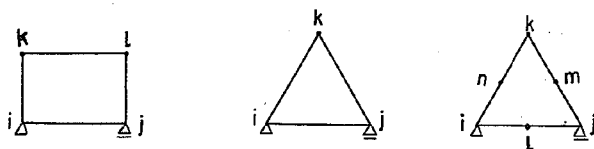
$$\left. \begin{array}{ccc}
 1 + \nu & \frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) - (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & 1 + 3\nu \\
 -1 - \nu & -\frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) + (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & 1 - 3\nu \\
 \frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\nu)\left(\frac{b}{a}\right) & -1 + 3\nu & \frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right) - (1-\nu)\left(\frac{b}{a}\right) \\
 -1 + 3\nu & \frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{b}{a}\right) + (1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right) & 1 + \nu \\
 \frac{2}{3}(2+\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right) - (1-\nu)\left(\frac{b}{a}\right) & 1 + \nu & \frac{2}{3}(4-\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\nu)\left(\frac{b}{a}\right)
 \end{array} \right\} \dots (2)$$

2.2 異方性体における剛性マトリクス

有限要素法は弾性体の解法として極めて有効な武器であり、前述したように変位および応力が陪調関数であるという性質に着目した従来の数値解法では取り扱えない問題、例えば部分的に弾性係数が異なる場合、異方性体の問題、弾塑性問題等を取扱い得る点にその特徴がある。そこで異方性体の問題、或は弾塑性体の問題に適用し得るように完全異方性体の剛性マトリクスを求めてみよう。

前節では四角形要素に応力のパターンを5つ設定して剛性マトリクスを求めた。これは説明を理解し易くするためであって、実際には有限要素は四角形でも三角形でもよく、パターンは応力でも歪でもよい。ここで注意すべき制約は要素の自由度とパターンの数は一致しなければならないということである。

言いかえれば四角形要素で節点を四角形の各頂点にとれば、節点の変位は $2 \times 4 = 8$ ケとなる。このうち一点は x , y 方向の変位を固定し、一点は y 方向の変位を固定する。従つて自由度は $8 - 3 = 5$ ケとなる。三角形要素で節点を各頂点にとれば自由度は $(2 \times 3) - 3 = 3$ ケとなり、三角形要素で節点を各頂点の他に各辺上に一点ずつ追加してとれば $(2 \times 6) - 3 = 9$ ケの自由度をもつことになる。これらの場合にパターンは自由度に等しい数だけとることになる。



異方性体の問題を扱う場合、或は三角形要素を扱う場合には変位マトリクス $[V]$ とパターンのマトリクス $[a]$ との関係を結びつけるマトリクス $[A]$ を求める場合に、パターンとして応力を選ぶよりは変位と直接関係のある歪をパターンに選ぶ方が誘導が容易である。

従つて完全異方性体の剛性マトリクスを求めるにあたって歪のパターンを選ぶことにする。尚完全異方性体の四角形要素、三角形要素の剛性マトリクスを求める際の式の

誘導は前節の誘導と重複するのでここでは省略することにする。

2.2.1 完全異方性体における四角形要素の剛性マトリックス

異方性体におけるフックの法則は二次元問題では

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} [\epsilon] \quad \dots\dots\dots (3)$$

にて表わされる。尚前章に述べたように弾性体二次元平面歪のときは(3)式、二次元平面応力のときは(4)式、直交異方性体のときは $c_{31} = c_{32} = c_{13} = c_{23} = 0$ とすればよく、弾塑性体問題のときは後に述べる(5)式、または(6)式を用いればよい。

さてパターンとしては歪をとり

$$\epsilon_x = m + \frac{2y}{b}n, \quad \epsilon_y = p + \frac{2x}{a}q, \quad r_{xy} = r$$

とする。即ち

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ r_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

このとき剛性マトリックスは

$$[Kr] = \frac{t}{4ab} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}b^2c_{11} - ab(c_{13} + c_{31}) + a^2c_{33} & -\frac{2}{3}b^2c_{11} + ab(c_{13} + c_{31}) - a^2c_{33} & \\ -\frac{2}{3}b^2c_{11} + ab(c_{13} + c_{31}) - a^2c_{33} & \frac{4}{3}b^2c_{11} - ab(c_{13} + c_{31}) + a^2c_{33} & \\ abc_{21} - a^2c_{23} - b^2c_{31} + ab c_{33} & -abc_{21} + a^2c_{23} + b^2c_{31} - ab c_{33} & \\ \frac{2}{3}b^2c_{11} - ab(c_{13} - c_{31}) - a^2c_{33} & -\frac{4}{3}b^2c_{11} + ab(c_{13} - c_{31}) + a^2c_{33} & \\ abc_{21} - a^2c_{23} + b^2c_{31} - ab c_{33} & -abc_{21} + a^2c_{23} - b^2c_{31} + ab c_{33} & \\ abc_{12} - b^2c_{13} - a^2c_{32} + ab c_{33} & \frac{2}{3}b^2c_{11} + ab(c_{13} - c_{31}) - a^2c_{33} & abc_{12} + b^2c_{13} - a^2c_{32} - ab c_{33} \\ -abc_{12} + b^2c_{13} + a^2c_{32} - ab c_{33} & -\frac{4}{3}b^2c_{11} - ab(c_{13} - c_{31}) + a^2c_{33} & -abc_{12} - b^2c_{13} + a^2c_{32} + ab c_{33} \\ \frac{4}{3}a^2c_{22} - ab(c_{23} + c_{32}) + b^2c_{33} & abc_{21} + a^2c_{23} - b^2c_{31} - ab c_{33} & \frac{2}{3}a^2c_{22} + ab(c_{23} - c_{32}) - b^2c_{33} \\ abc_{12} - b^2c_{13} + a^2c_{32} - ab c_{33} & \frac{3}{4}b^2c_{11} + ab(c_{13} + c_{31}) + a^2c_{33} & abc_{12} + b^2c_{13} + a^2c_{32} + ab c_{33} \\ \frac{2}{3}a^2c_{22} - ab(c_{23} - c_{32}) - b^2c_{33} & abc_{21} + a^2c_{23} + b^2c_{31} + ab c_{33} & \frac{4}{3}a^2c_{22} + ab(c_{23} + c_{32}) + b^2c_{33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

2.2.2 完全異方性体における三角形要素の剛性マトリックス

三角形要素の頂点の座標をそれぞれ (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) とする。

いま

$$\begin{aligned} a_j &= x_j - x_i & b_j &= y_j - y_i \\ a_i &= x_i - x_i & b_i &= y_i - y_i \end{aligned}$$

とすると (a_j, b_j) , (a_i, b_i) は i 点を座標原点としたときの j 点, k 点の x, y 座標である。

さて三角形要素のときの自由度は 3 であるから歪のパターンとして

$$\varepsilon_x = m, \quad \varepsilon_y = n, \quad \gamma_{xy} = p$$

ととる。即ち

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と剛性マトリックスは

$$[Kr] = \frac{t}{2(a_j b_i - a_i b_j)} \begin{bmatrix} c_{11} b_i^2 - (c_{13} + c_{31}) a_i b_i + c_{33} a_i^2 & -c_{11} b_j b_i + c_{13} a_i b_j + c_{31} a_j b_i - c_{33} a_j a_i & c_{21} a_j b_i - c_{23} a_j a_i - c_{31} b_j b_i + c_{33} a_i b_j \\ -c_{11} b_j b_i + c_{13} a_j b_i + c_{31} a_i b_j - c_{33} a_j a_i & c_{12} a_j b_i - c_{13} b_i b_j - c_{32} a_j a_i + c_{33} a_i b_j & \dots\dots\dots (7) \\ c_{11} b_j^2 - (c_{13} + c_{31}) a_j b_j + c_{33} a_j^2 & -c_{12} a_j b_j + c_{13} b_j^2 + c_{32} a_j^2 - c_{33} a_j b_j & \\ -c_{21} a_j b_j + c_{23} a_j^2 + c_{31} b_j^2 - c_{33} a_j b_j & c_{22} a_j^2 - (c_{23} + c_{32}) a_j b_j + c_{33} b_j^2 & \end{bmatrix}$$

となる。(6), (7) 式から明らかなように弾性係数マトリックスが対称のとき、即ちエネルギーの変化がないとき剛性マトリックスは対称となる。

2.3 完全剛性マトリックス

前節までは個々の要素について検討してきた。次に構造物全体について考察を進めることにする。

いま構造物が $A, B, C, \dots\dots\dots N$ なる有限要素に分割されたとする。各要素の節点変位を $[V_A], \dots\dots\dots [V_N]$, 節点力を $[S_A], \dots\dots\dots [S_N]$, 剛性マトリックスを $[K_{rA}], \dots\dots\dots [K_{rN}]$ とすると

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{rA} & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & K_{rB} & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & K_{rC} & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots K_{rN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \\ S_C \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

にて表わされ、これを簡単に

$$[V] = [K][S]$$

と表わすことにする。 $[K]$ を完全剛性マトックスと名付ける。

2.4 変位変換マトリックス

変位 $[V]$ は各要素の i 点の x, y 方向変位と、 j 点の y 方向変位を固定したときの各節点の変位を示している。しかし、解析を行う場合には各点の絶対変位も必要となる。いま各節点の x, y 方向の絶対変位を r_x, r_y とすると、 $[V]$ と $[r]$ との関係が必要になってくる。この関係を示すマトリックスを変位変換マトリックスと名付ける。

2.4.1 四角形要素の変位変換マトリックス

いま図-4に示すような I, J, K, L なる有限要素が組合さってあったとする。さて、四つの要素が接合する節点 q が x 方向、 y 方向に1だけ変形したとすると、各要素は左下の節点は x, y 方向に固定され、右下の節点は y 方向に固定されていると仮定しているので、図-5~6に示すように変形すると考えなければならない。

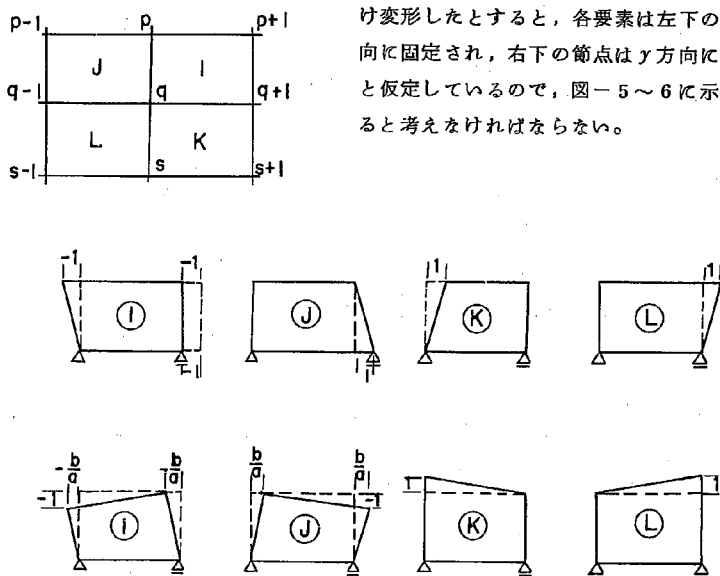


図-5~6から明らかなように q 点が x, y 方向に r_x, r_y だけ変形したとき、各要素の節点の変化は

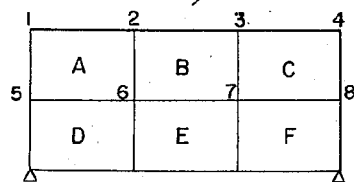
$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -b/a \\ 0 & -1 \\ -1 & -b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}_q = [a_i][r]_q$$

$$\begin{bmatrix} U_I \\ U_I \\ V_I \\ U_I \\ V_I \end{bmatrix}_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b/a \\ 0 & 0 \\ 0 & b/a \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}_q = [a_r][r]_q \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{bmatrix} U_I \\ U_I \\ V_I \\ U_I \\ V_I \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}_q = [a_x][r]_q$$

$$\begin{bmatrix} U_I \\ U_I \\ V_I \\ U_I \\ V_I \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}_q = [a_L][r]_q$$

さて、図-7に示すような構造物を考える
と、各要素の節点の相対変位〔V〕と絶対
変位との関係は



$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \\ V_E \\ V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_L & 0 & 0 & a_r & a_r & 0 & 0 \\ 0 & a_x & a_L & 0 & 0 & a_r & a_r & 0 \\ 0 & 0 & a_x & a_L & 0 & 0 & a_r & a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_x & a_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_x & a_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_x & a_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (40)$$

これを簡単に

$$[V] = [a][r]$$

と書いて〔a〕を変位変換マトリックスと名付ける。

ここに注意すべきことは 式に示した〔a_r〕,〔a_r〕,〔a_x〕,〔a_L〕は四角形要素である
限り一定の形であるが、 式の〔a〕は要素の組合せ方により、その形は変わってくることで
ある。

2.4.2 三角形要素の変位変換マトリックス

三角形要素の変位変換マトリックスは四角形の場合と同様に求められるが、四角形の場合のように直観的には求めにくいので数学的に求めてみる。

a_j について求めてみる。 x 方向の変位に対しては

変形前に i 点は $(0, 0)$ j 点は (a_j, b_j) k 点は (a_i, b_i)

変形後は i 点は $(1, 0)$ j 点は (a_j, b_j) k 点は (a_i, b_i)

i 点を x, y 方向に固定すると i 点は $(0, 0)$, j 点は (x_j, b_j) , k 点は (x_i, y_i) で

あるから

$$(a_j - 1)^2 + b_j^2 = x_j^2 + b_j^2$$

$$(a_i - 1)^2 + b_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$(a_j - a_i)^2 + (b_j - b_i)^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - b_j)^2$$

これらを連立に解くと

$$x_j - a_j = -1$$

$$x_i - a_i = -1$$

$$y_i - b_i = 0$$

y 方向の変位に対しては

変形前に i 点は $(0, 0)$ j 点は (a_j, b_j) k 点は (a_i, b_i)

変形後に i 点は $(0, 1)$ j 点は (a_j, b_j) k 点は (a_i, b_i)

i 点を x, y 方向に固定すると i 点は $(0, 0)$, j 点は (x_j, b_j) , k 点は (x_i, y_i) で

あるから

$$a_j^2 + (b_j - 1)^2 = x_j^2 + b_j^2$$

$$a_i^2 + (b_i - 1)^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$(a_j - a_i)^2 + (b_j - b_i)^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_i - b_j)^2$$

これらを連立に解き ($a, b > 1$ であるから)

$$x_j - a_j = \sqrt{a_j^2 - 2b_j + 1} - a_j \doteq -b_j/a_j$$

$$x_i - a_i \doteq -b_i/a_j$$

$$y_i - b_i \doteq \frac{a_i - a_j}{a_j}$$

となる。これから

$$[a_i] = \begin{bmatrix} -1 & -b_i/a_j \\ -1 & -b_i/a_j \\ 0 & (a_i - a_j)/a_j \end{bmatrix}$$

a_j について求めてみる。 x 方向の変位に対して

変形前に i 点は $(0, 0)$, j 点は (a_j, b_j) , k 点は (a_i, b_i)

変形後に i 点は $(0, 0)$, j 点は $(a_j + 1, b_j)$, k 点は (a_i, b_i)

j 点を y 方向に固定すると, i 点は $(0, 0)$, j 点は (x_j, b_j) , k 点は (x_i, y_i) となる。

これから

$$x_j - a_j = 1, \quad x_i - a_i = 0, \quad y_i - b_i = 0$$

y 方向の変位に対しては

変形前に i 点は $(0, 0)$ j 点は (a_j, b_j) k 点は (a_i, b_i)

変形後に i 点は $(0, 0)$ j 点は $(a_j, b_j + 1)$ k 点は (a_i, b_i)

j 点を y 方向に固定すると, i 点は $(0, 0)$, j 点は (x_j, b_j) , k 点は (x_i, y_i) となる。これから

$$a_j^2 + (b_j + 1)^2 = x_j^2 + b_j^2$$

$$a_i^2 + b_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$(a_i - a_j)^2 + (b_i + 1 - b_j)^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

これらを連立に解いて

$$x_j - a_j \div b_j / a_j$$

$$x_i - a_i \div b_i / a_j$$

$$y_i - b_i \div -a_i / a_j$$

となる。これから

$$[a_j] = \begin{bmatrix} 0 & b_j / a_j \\ 1 & b_i / a_j \\ 0 & -a_i / a_j \end{bmatrix}$$

また $[a_i]$ については直観的に明らかに

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上要約して

$$[a_j] = \begin{bmatrix} -1 & -b_j / a_j \\ -1 & -b_i / a_j \\ 0 & (a_i - a_j) / a_j \end{bmatrix}$$

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 0 & b_j / a_j \\ 1 & b_i / a_j \\ 0 & -a_i / a_j \end{bmatrix}$$

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} [a_j] \\ [a_i] \\ [a_i] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また $[a_j]$, $[a_i]$, $[a_x]$ より変位変換マトリックス $[a]$ は四角形の場合と同様に容易に求められる。

2.5 荷重マトリックス

各節点に作用する x 方向, y 方向の外力を R_{xj} , R_{yj} とする。これを

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{1,} \\ R_{1,} \\ R_{2,} \\ R_{2,} \\ \vdots \\ R_{n,} \\ R_{n,} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

の配列でマトリックス化したものを荷重マトリックスと名付ける。荷重マトリックスは節点の2倍の行を持つマトリックスである。

2.6 マトリックス解法

節点力 $[S]$ と応力のパターン $[\alpha]$ との平衡関係を求めるに当って仮想仕事の原理を用いた。このとき得られた平衡関係は一つの要素内での平衡関係であった。

さて、完全剛性マトリックス、変位変換マトリックス、荷重マトリックスが表示された後に構造物を解析するためには構造物全体の平衡関係が必要になる。そこで再び仮想仕事の原理を用いることにする。

いま仮想変位を $[\bar{r}]^T$ とし、これに対応する相対変位を $[\bar{v}]^T$ とすると

$$We = [\bar{r}]^T [R]$$

$$Wi = [\bar{v}]^T [S]$$

$[\bar{v}]^T = [\bar{r}]^T [\alpha]^T$ であり、 $We = Wi$ であるから

$$[R] = [\alpha]^T [S]$$

$[\alpha]^T$ の逆マトリックスが求められれば $[S]$ は求められ、 $[o]$ 、 $[r]$ は容易に求められるが、 $[R]$ は前述したように節点数の2倍の行をもち、 $[S]$ は要素数の5倍(四角形要素のとき)、または3倍(三角形要素のとき)の行を持つので $[\alpha]^T$ は正方形マトリックスではなく、逆マトリックスは一般には求められない。一方 $[r]$ は $[R]$ と同様に節点数の2倍の行を持つので、 $[r]$ と $[R]$ の関係式を求めれば逆マトリックスが求められる。

$$[S] = [K][V] = [K][\alpha][r]$$

$$\therefore [R] = [\alpha]^T [K][\alpha][r]$$

$$[\alpha]^T [K][\alpha] = [F]$$

とおけば

$$[R] = [F][r]$$

となり、 $[F]$ は正方形マトリックスであるから逆マトリックスが求められる。

$$\therefore [r] = [F]^{-1} [R]$$

即ち、 $[F]^{-1}$ を求めれば各節点の絶対変位が求められ、これから

$$[\bar{v}] = [\alpha][F]^{-1}[R]$$

$$[S] = [K][\alpha][F]^{-1}[R]$$

あるいはこれから応力を求めることができる。従って $[F]^{-1}$ を求めることが問題になる。

$[F]$ は前述したように行、列とも節点数の 2 倍であるから、 $[F]^{-1}$ を求めることは節点数の 2 倍の元数の連立方程式を解くことになる。従って有限要素法の計算は $[F]^{-1}$ を求めるところで大半の時間は消費される。

2.7 応力計算

2.7.1 四角形要素の場合

式により各節点の絶対変位が求められると、次に応力を求めることが必要となる。いま一つの要素で

$$[\sigma] = [G_e][V]$$

とすると

$$[G_e] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2y/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} b & -b & 0 & b & 0 \\ -b & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 & a \\ -a & a & -b & a & b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-2y & -b-2y & 0 & b+2y & 0 \\ 0 & 0 & a-2x & 0 & a+2x \\ -a & a & -b & a & b \end{bmatrix}$$

$$\therefore [G_e] = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} (b-2y)c_{11}-ac_{13} & -(b+2y)c_{11}+ac_{13} & (a-2x)c_{12}-bc_{13} & (b+2y)c_{11}+ac_{13} & (a+2x)c_{12}+bc_{13} \\ (b-2y)c_{21}-ac_{23} & -(b+2y)c_{21}+ac_{23} & (a-2x)c_{22}-bc_{23} & (b+2y)c_{21}+ac_{23} & (a+2x)c_{22}+bc_{23} \\ (b-2y)c_{31}-ac_{33} & -(b+2y)c_{31}+ac_{33} & (a-2x)c_{32}-bc_{33} & (b+2y)c_{31}+ac_{33} & (a+2x)c_{32}+bc_{33} \end{bmatrix} \dots (46)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{eA} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{eB} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & G_{eC} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G_{eN} \end{bmatrix} \dots (47)$$

とすれば

$$[\sigma] = [G][a][F]^{-1}[R] \dots (48)$$

2.7.2 三解形要素の場合

$$\begin{aligned}
 [G_e] &= \frac{1}{a_i b_i - a_j b_j} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & -b_j & 0 \\ 0 & 0 & a_j \\ -a_i & a_j & -b_j \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{a_i b_i - a_j b_j} \begin{bmatrix} b_i c_{11} - a_i c_{13} & -b_j c_{11} + a_j c_{13} & a_j c_{12} - b_j c_{13} \\ b_i c_{21} - a_i c_{23} & -b_j c_{21} + a_j c_{23} & a_j c_{22} - b_j c_{23} \\ b_i c_{31} - a_i c_{33} & -b_j c_{31} + a_j c_{33} & a_j c_{32} - b_j c_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (49)
 \end{aligned}$$

3 弾塑性理論への有限要素法の適用

3.1 従来の研究

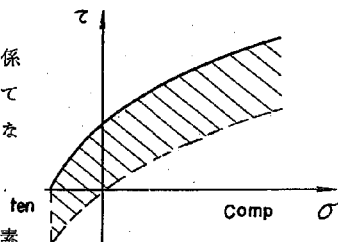
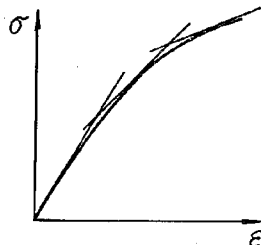
前述したように有限要素法の特徴は、従来数値解が極めて困難であった弾塑性問題に対して適用が可能である点であるので有限要素法が開発されてから日が浅いに拘らず、いくつかの研究が発表されている。これを大別すれば次の3種類になる。

(i) 弾塑性問題を弾性係数の変化で取扱う方法

即ち図-7に示すように弾塑性変形をその応力状態に応じて弾性係数が変化するとして取扱う方法である。

この種の方向はCloughも取扱っており、わが国では電力研究所の林氏の研究⁽⁴⁾がある。即ち林氏はyielding conditionとしてMohrの説をとりMohrの包絡線が放物線で表わされるとして、図-8の斜線の部分から弾性係数が小さくなり始め、包絡線に達すると弾性係数は0になるとして取扱っている。なお林氏はポアソン比も変化するとし、弾性領域では0.2であるが、図-8の斜線の部分に入るにしたがって大きくなり最終的には0.5になるとしている。

この方法は優れた方法であるが、三軸応力下において弾性係数がどのように変わっていくか、またポアソン比がそれに応じてどのように変わっていくかについては充分な理論的な裏付けがなく、その意味では過渡期的な方法といえる。



(ii) 弾塑性理論に基づく解法(1)

Misesの破壊節にもとづいて塑性理論にそのまま有限要素法を適用した研究としては生産技術研究所の山田氏の研究⁽⁵⁾がある。

この方法ではyielding conditionがMisesの説に従うとして塑性理論にもとづいて剛性マトリックスを求めており歪硬化も考慮されている。

Misesの説は後述するように金属材料においては極めてよく一致するといわれているが、コンクリートあるいは土のようなもの等には必ずしも一致するとは限らない。従つてこの方法はコンクリート、土のようなもの等に適用するのは問題がある。

(iii) 弾塑性理論にもとづく解法(2)

(ii)に述べたと同様、塑性理論から出発した研究としてはF.Reyesの研究⁽⁶⁾がある。これはyielding conditionとしてMisesの説ではなく、より一般的に

$$f(\sigma, J_2) = k \quad (5)$$

として取扱っている。これはMohrあるいはCoulombの説も含む一般的なものであるが、歪硬化が取扱われていない。さらにその誘導において間違えている点がある。即ち塑性歪増分と応力の増分の関係として

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (6)$$

なる式を用いている。しかしHill は *yielding condition* が

$$f(J'_2, J'_3) = H(\int d\bar{\epsilon}') \dots\dots\dots (52)$$

にて表わされる一般的な場合でも

$$d\epsilon'_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda \dots\dots\dots (53)$$

として取扱っており、*yielding condition* が(52)式にて表わされるときは

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J'_2} \sigma'_{ij}$$

となり

$$d\epsilon'_{ij} = d\epsilon'_x + d\epsilon'_y + d\epsilon'_z = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J'_2} (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) \right\} d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\lambda$$

から、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ が0でない限り、塑性変形による体積膨張は0とならない。これは塑性理論における基本仮定に反するもので、(51)式が間違っていると考えられる。

そこで山田氏、Reyes の研究をさらに発展させ *yielding condition* を

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\bar{\epsilon}')$$

としたときの剛性マトリックスを求めてみよう。

3.2 偏差応力・偏差歪

一般の材料は三つの主応力が等しい応力（特に圧縮応力）を受けても塑性変形および破壊は生じない。そこで塑性理論では直応力と三つの主応力の平均値との差とせん断応力が塑性変形および *yielding condition* に影響を与えると考えている。そこで

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

としたとき

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma$$

$$\tau_{xy}, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{zx}$$

なる量が導入される。これを偏差応力と名付ける。

同様に歪に対しても

$$\epsilon = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\epsilon'_x = \epsilon_x - \epsilon, \quad \epsilon'_y = \epsilon_y - \epsilon, \quad \epsilon'_z = \epsilon_z - \epsilon$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$$

なる量が導入され、これを偏差歪と名付ける。

さて *yielding condition* をこれらの偏差応力で表わす場合に、*yielding condition* は応力の主軸に無関係でなければならぬから偏差応力の不変量として

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \\ J'_2 &= \frac{1}{2} \{ \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 \} = \frac{1}{2} \{ \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J'_3 &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1'^3 + \sigma_2'^3 + \sigma_3'^3 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

なる量が導入される。

この他にも不変量としては $\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1$, $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$, $\sigma'^4_1 + \sigma'^4_2 + \sigma'^4_3$, $\sigma'^5_1 + \sigma'^5_2 + \sigma'^5_3$, ……等が考えられるが、これらはいずれも J'_2 , J'_3 にて表わされることは容易に数学的に証明される。そこで歪硬化を考えない場合の *yielding condition* としては一般的には

$$f(\sigma, J'_2, J'_3) = k \quad \text{..... (6)}$$

として表わされる。

3.3 Yielding Condition

yielding condition としての釣式の関数形を考えるに当って、従来までに用いられていくつかの説について考察してみよう。

(i) 最大せん断応力説

これは *Tresca* により提案されたもので最大せん断応力がある値に達したとき、塑性変形が生ずるとしている。この説は古くはかなり広く用いられ、*Saint Venant*, *Levy* 等はこの説にもとづいて理論を展開している。

この説は

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k$$

にて *yielding condition* を規定しているが、これを応力の主軸に無関係に表わすと

$$\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2\} \{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2\} \{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2\} = 0$$

となり、これを J'_2 , J'_3 にて表わすと

$$4J'^3_2 - 27J'^2_3 - 36k^2J'^2_2 + 96k^4J'^2_2 - 64k^6 = 0 \quad \text{..... (7)}$$

となる。このように *Tresca* の *yielding condition* は数学的にはかなり複雑な形で表わされる。

(ii) Mises の説

Tresca の説は数学的にはかなり複雑に表わされるので *Mises* は

$$J'_2 = k^2 \quad \text{..... (8)}$$

と *yielding condition* を表わしても *Tresca* の説との差はわずかで、最も差の大きいときでも 15% であるから、数学的取扱いを容易にするために *yielding condition* を釣式で表わすことを提案した。

しかし、その後の実験によると、金属材料では釣式は実験結果と極めてよく一致し *Tresca* の *yielding condition* より、はるかに一致度が高いことが明らかにになった。このため釣式の物理的意味について提案がなされた。その代表的なものが *Hencky* のせん断歪エネルギー説と *Nadai* の正八面体せん断応力説である。

(iii) Hencky のせん断歪エネルギー説

弾性体においては

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_x(1+\nu)}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{\sigma'_x(1+\nu)}{E} + \frac{1-2\nu}{E} \sigma = \frac{1}{2G} \sigma'_x + \frac{1-2\nu}{E} \sigma$$

にて表わされるから弾性歪エネルギー $\mathcal{W}$ は

$$\begin{aligned} 2\mathcal{W} &= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x \sigma'_x + \sigma_y \sigma'_y + \sigma_z \sigma'_z] + \frac{1-2\nu}{E} \sigma (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{1}{G} \{ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \} \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + \sigma (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)] + \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma^2 + \frac{1}{G} \{ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \} \\ \therefore \mathcal{W} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2} \{ \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right] + \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma^2 \end{aligned}$$

この式で第二項は体積変化による歪エネルギーで第一項は形の変化による歪エネルギーである。この第一項は $\frac{1}{2G} J_2'$ に等しいから *Mises* の *Yielding condition* は形の変化による歪エネルギー、即ちせん断歪エネルギーがある値に達したとき *yielding* が生ずると考えることができる。これが *Hencky* の説である。

(iv) *Nadai* の正八面体応力説

3つの応力に対して同じ角をなす方向の方向餘弦は

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

この方向の直応力は

$$\sigma_{...} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma$$

この方向に直交する平面内に働く表面力は

$$P_{.1} = \sigma_1 l = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad P_{.2} = \sigma_2 m = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad P_{.3} = \sigma_3 n = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

この平面に働くせん断応力を $\tau_{...}$ とすると

$$\sigma_{...}^2 + \tau_{...}^2 = P_{.1}^2 + P_{.2}^2 + P_{.3}^2$$

であるから

$$\begin{aligned} \tau_{...}^2 &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \} - \sigma^2 \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\sigma^2 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\sigma^2 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 \} \\ &= \frac{2}{3} J_2' \end{aligned}$$

即ち正八面体せん断応力 τ_{eq} がある値に達したときに *yielding* が生ずると考えることもできる。これが *Nadai* の説である。

M) コンクリート、土のようなもの等における *yielding condition*

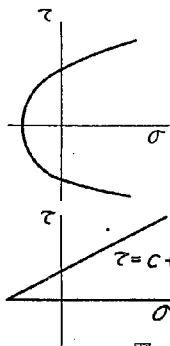


図 - 9

コンクリートおよび土のようなもの等においては慣用的には *Mohr* の説または *Coulomb* の内部摩擦説が用いられている。

Mohr の包絡線または内部摩擦説の $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \phi$ の直線が σ 軸と交わるということは、この点ではせん断応力がなくても *yielding* または破壊が生ずることを示している。

この点ではせん断応力はないから

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\therefore \sigma = \sigma_1$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$$

$$\therefore J'_2 = 0$$

従って σ の値によって *yielding* が生ずることを示しており、

Mises の説が適用し得ないことを示している。事実伊東氏はコンクリートの破壊は

$$J'_2 = f(\sigma)$$

の形で表わされるとしている。そこで

$$\bar{\sigma}^2 = 3J'_2$$

としてコンクリート、および土のようなもの等の *yielding condition* として

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = k$$

として表わされることにする。

M) 歪 硬 化

塑性歪の発生により *yielding condition* が変化する所謂歪硬化の現象は一般の材料に認められる。さらにこの歪硬化を適当に仮定することにより図-7に示すような応力歪曲線の勾配が応力状態により変化することも表現可能である。

この歪硬化については一般に

(a) 塑性仕事の関数として表わされとする方法

即ち塑性仕事は

$$dW_p = \sigma_1 d\epsilon'_1 + \sigma_2 d\epsilon'_2 + \sigma_3 d\epsilon'_3 + 2\tau_{12} d\epsilon'_{12} + 2\tau_{13} d\epsilon'_{13} + 2\tau_{23} d\epsilon'_{23}$$

として表わされるから

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = F\left(\int dW_p\right)$$

として *yielding condition* が表わされとする方法である。

(b) 塑性歪の履歴の関数として表わされとする方法

即ち塑性歪の不変量を

$$(d\bar{\epsilon}')^2 = \frac{2}{3} \{ (d\epsilon'_1)^2 + (d\epsilon'_2)^2 + (d\epsilon'_3)^2 + 2(d\epsilon'_{12})^2 + 2(d\epsilon'_{13})^2 + 2(d\epsilon'_{23})^2 \}$$

としたとき

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = \bar{H}(\int d\bar{\epsilon}')$$

として *yielding condition* を表わす方法である。

の二つの方法がある。この歪硬化に対する二つの考え方は実際には差はなく、理論的には

$$F' = \bar{\sigma} H' \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる関係がある。そこで以下の誘導では *yielding condition* を

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\bar{\epsilon}') \quad \dots\dots\dots (7)$$

ととることとする。

3.4 塑性理論における剛性マトリックス

塑性理論では $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ を簡単のために σ_{ij} と表わす。この場合 $i = j$ のときは $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を表わし、 $i \neq j$ のとき $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ を表わすものとする。同様に歪、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy} (= \frac{1}{2}\gamma_{xy}), \epsilon_{yz} (= \frac{1}{2}\gamma_{yz}), \epsilon_{zx} (= \frac{1}{2}\gamma_{zx})$ を ϵ_{ij} と表わし、 $i = j$ のとき $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ を示し、 $i \neq j$ のとき $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ を示すものとする。また、

$$\sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\epsilon_{ii} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

と示すものとし

$$\sigma_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\epsilon_{xy}^2 + 2\epsilon_{yz}^2 + 2\epsilon_{zx}^2$$

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + 2\tau_{xy}\epsilon_{xy} + 2\tau_{yz}\epsilon_{yz} + 2\tau_{zx}\epsilon_{zx}$$

とする。また δ_{ij} は $i = j$ のとき 1、 $i \neq j$ のとき 0 とする。

これらの記号を用い (8) 式を *yielding condition* として剛性マトリックスを求めてみよう。

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right\}$$

さて弾性理論において

$$\epsilon_x^* = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \sigma'_x + \frac{1-2\nu}{E} \sigma$$

$$\epsilon^* = \frac{1-2\nu}{E} \sigma$$

$$\therefore \epsilon_x^{*'} = \frac{1+\nu}{E} \sigma'_x = \frac{\sigma'_x}{2G}, \quad \epsilon_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

これを一般的に書けば

$$\epsilon_{ij}^{*'} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}'$$

$$\therefore d\epsilon''_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij}$$

さて

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon'_{ij} + d\epsilon''_{ij}$$

塑性変形による体積膨張はないから

$$d\epsilon''_{ii} = 0$$

$$d\epsilon'_{ij} = d\epsilon''_{ij} + \delta_{ij} \frac{1}{3} d\epsilon''_{ii} = d\epsilon''_{ij}$$

また

$$d\epsilon_{ii} = d\epsilon'_{ii} + d\epsilon''_{ii} = d\epsilon'_{ii}$$

$$\therefore d\epsilon'_{ij} = d\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} d\epsilon_{ii} = d\epsilon_{ij} + d\epsilon'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\epsilon'_{ii} = d\epsilon'_{ij} + d\epsilon'_{ij}$$

$$\therefore d\epsilon'_{ij} = d\epsilon'_{ij} + \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (60)$$

塑性歪の増分と偏差応力の関係として *Reuss* の式

$$\frac{d\epsilon'_{xx}}{\sigma'_{xx}} = \frac{d\epsilon'_{yy}}{\sigma'_{yy}} = \frac{d\epsilon'_{zz}}{\sigma'_{zz}} = \frac{d\epsilon'_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\epsilon'_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\epsilon'_{zx}}{\tau_{zx}} = d\lambda$$

が成り立つとする。これを簡単に書くと

$$d\epsilon'_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda \quad \dots\dots\dots (61)$$

さて

$$\bar{\sigma}^2 = 3J'_2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$(d\bar{\epsilon}')^2 = \frac{2}{3} d\epsilon'_{ij} d\epsilon'_{ij} \quad \dots\dots\dots (63)$$

であるから(62)式に(61)式を代入すると

$$(d\bar{\epsilon}')^2 = \left(\frac{2}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\lambda^2\right) = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 d\lambda^2$$

$$\therefore d\bar{\epsilon}' = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\lambda$$

yielding condition は(63)式で表わされるが塑性変形はこれを満足しながら生ずるから

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\bar{\epsilon}')$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = H' d\bar{\epsilon}' = \frac{2}{3} H' \bar{\sigma} d\lambda$$

(63)式を微分すると

$$\bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{3}{2\bar{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = \frac{2}{3} H' \bar{\sigma} d\lambda$$

$$\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} = \frac{\frac{2}{3} H' \bar{\sigma}^2 d\lambda - \bar{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma}{\frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}}$$

(60)式から

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij} &= \sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij} + \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} \\ &= \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\lambda + \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} \\ &= \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 d\lambda + \frac{\frac{2}{3} H' \bar{\sigma}^2 d\lambda - \bar{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma}{3G \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} \\ &= \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left(1 + \frac{H'}{3G \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}}\right) d\lambda - \frac{\bar{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}{3G \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} d\sigma \end{aligned}$$

いま

$$S = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left(1 + \frac{H'}{3G \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}}\right)$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} \bar{\sigma}$$

} (61)

とおくと

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij} &= S d\lambda - \frac{P}{2G} d\sigma \\ d\lambda &= \frac{d_{ij} d\epsilon'_{ij}}{S} + \frac{P}{2GS} d\sigma \end{aligned}$$

これを(60)式に代入して

$$d\epsilon'_{ij} = \sigma'_{ij} \left(\frac{\sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij}}{S} + \frac{P}{2GS} d\sigma \right) + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}$$

さて

$$\sigma'_{ik} d\epsilon'_{ik} = \sigma'_{ik} (d\epsilon_{ik} - \delta_{ik} d\epsilon) = \sigma'_{ik} d\epsilon_{ik} - \sigma'_{ii} d\epsilon = \sigma'_{ik} d\epsilon_{ik}$$

であり

$$d\epsilon_{ii} = d\epsilon'_{ii} + d\epsilon''_{ii} = d\epsilon'_{ii} = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma$$

$$\therefore d\sigma = \frac{E}{3(1-2\nu)} d\varepsilon_{ii} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} d\varepsilon_{ii}$$

$$d\varepsilon = \frac{1}{3} d\varepsilon_{ii}$$

であるから

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon'_{ij} + \delta_{ij} d\varepsilon \\ &= \sigma'_{ij} \left(\frac{\sigma'_{ii} d\varepsilon_{ii}}{S} + \frac{P}{2GS} \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} d\varepsilon_{ii} \right) + \frac{1}{2G} (d\sigma_{ij} - \delta_{ij} d\sigma) + \delta_{ij} d\varepsilon \\ &= \sigma'_{ij} \left(\frac{\sigma'_{ii} d\varepsilon_{ii}}{S} + \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} d\varepsilon_{ii} \right) + \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \left\{ \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} - \frac{1}{3} \right\} \delta_{ij} d\varepsilon_{ii} \\ &= \sigma'_{ij} \left(\frac{\sigma'_{ii} d\varepsilon_{ii}}{S} + \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} d\varepsilon_{ii} \right) + \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} d\varepsilon_{ii} \\ \therefore d\sigma_{ij} &= 2G \left[d\varepsilon_{ij} + \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} - \sigma'_{ij} \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \right\} d\varepsilon_{ii} - \sigma'_{ij} \frac{\sigma'_{ii} d\varepsilon_{ii}}{S} \right] \end{aligned} \quad (65)$$

これから弾性論における弾性常数マトリックス(2)式に対応するものとして

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_x - \frac{\sigma'_x{}^2}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_x - \frac{\sigma'_x \sigma'_y}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_x - \frac{\sigma'_x \sigma'_z}{S} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_y - \frac{\sigma'_y \sigma'_x}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_y - \frac{\sigma'_y{}^2}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_y - \frac{\sigma'_y \sigma'_z}{S} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_z - \frac{\sigma'_z \sigma'_x}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_z - \frac{\sigma'_z \sigma'_y}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_z - \frac{\sigma'_z{}^2}{S} \\ -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{xy} - \frac{\sigma'_x \tau_{xy}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{xy} - \frac{\sigma'_y \tau_{xy}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{xy} - \frac{\sigma'_z \tau_{xy}}{S} \\ -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{yz} - \frac{\sigma'_x \tau_{yz}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{yz} - \frac{\sigma'_y \tau_{yz}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{yz} - \frac{\sigma'_z \tau_{yz}}{S} \\ -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{zx} - \frac{\sigma'_x \tau_{zx}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{zx} - \frac{\sigma'_y \tau_{zx}}{S} & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{zx} - \frac{\sigma'_z \tau_{zx}}{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (66)$$

が得られる。式(6)からも明らかなように塑性領域においては弾性領域に比して歪の増分に対する応力の増分が小さくなっている。また式(6)では(2)式の弾性係数に対応するものが偏差応力の関数になっている。このため式(6)はその応力状態により変化することになる。

従って弾塑性問題を有限要素法により解析する場合には、始めに式(5)、または式(6)の剛性マトリックスの $c_{11}, c_{12}, \dots$ に弾性常数マトリックス(3)式または(4)式を用いて計算し、*yielding condition* 式(6)を満足する応力に達した要素に対してはその応力状態に応じて式(6)を計算し $c_{11}, c_{12}, \dots$ に(3)式または(4)式のかわりに式(6)より得られる値を用いて剛性マトリックスを計算し、以後荷重の増加につれて式(6)より得られる $c_{11}, c_{12}, \dots$ の値を変更しつつ数段階に分けて計算する必要がある。

このため弾性体の計算のときは1回の計算で応力分布が得られるが、弾塑性問題のときは一部が塑性領域に入ってから数段階にわけて計算しなければならない。

式(6)は三次元問題に対するマトリックスである。二次元問題のとき、どのようなマトリックスになるかについて考察しよう。

平面歪のときは

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_x - \frac{\sigma'^2_x}{S}, & \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_x - \frac{\sigma'_x \sigma'_y}{S} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_y - \frac{\sigma'_x \sigma'_y}{S}, & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \sigma'_y - \frac{\sigma'^2_y}{S} \\ -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{xy} - \frac{\sigma'_x \tau_{xy}}{S}, & -\frac{(1+\nu)P}{3(1-2\nu)S} \tau_{xy} - \frac{\sigma'_y \tau_{xy}}{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots (67)$$

となる。また平面応力のときは、 $d\sigma_z = d\tau_{xz} = d\tau_{yz} = 0$ であるから式(6)を

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

にて表わすと

$$D_{31} d\epsilon_x + D_{32} d\epsilon_y + D_{33} d\epsilon_z + D_{34} d\gamma_x + D_{35} d\gamma_y + D_{36} d\gamma_z = 0$$

$$D_{51} d\epsilon_x + D_{52} d\epsilon_y + D_{53} d\epsilon_z + D_{54} d\gamma_x + D_{55} d\gamma_y + D_{56} d\gamma_z = 0$$

$$D_{61} d\epsilon_x + D_{62} d\epsilon_y + D_{63} d\epsilon_z + D_{64} d\gamma_x + D_{65} d\gamma_y + D_{66} d\gamma_z = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

とすると

$$d\epsilon_x = \frac{-1}{\Delta} \left[\begin{vmatrix} D_{31} & D_{35} & D_{36} \\ D_{51} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix} d\epsilon_y + \begin{vmatrix} D_{32} & D_{35} & D_{36} \\ D_{52} & D_{55} & D_{56} \\ D_{62} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix} d\epsilon_z + \begin{vmatrix} D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix} d\gamma_x, \right]$$

$$d\gamma_x = \frac{-1}{\Delta} \left[\begin{vmatrix} D_{33} & D_{31} & D_{36} \\ D_{53} & D_{51} & D_{56} \\ D_{63} & D_{61} & D_{66} \end{vmatrix} d\epsilon_y + \begin{vmatrix} D_{33} & D_{32} & D_{36} \\ D_{53} & D_{52} & D_{56} \\ D_{63} & D_{62} & D_{66} \end{vmatrix} d\epsilon_z + \begin{vmatrix} D_{33} & D_{34} & D_{36} \\ D_{53} & D_{54} & D_{56} \\ D_{63} & D_{64} & D_{66} \end{vmatrix} d\gamma_y, \right]$$

$$d\gamma_z = \frac{-1}{\Delta} \left[\begin{vmatrix} D_{33} & D_{35} & D_{31} \\ D_{53} & D_{55} & D_{51} \\ D_{63} & D_{65} & D_{61} \end{vmatrix} d\epsilon_y + \begin{vmatrix} D_{33} & D_{35} & D_{32} \\ D_{53} & D_{55} & D_{52} \\ D_{63} & D_{65} & D_{62} \end{vmatrix} d\epsilon_z + \begin{vmatrix} D_{33} & D_{35} & D_{34} \\ D_{53} & D_{55} & D_{54} \\ D_{63} & D_{65} & D_{64} \end{vmatrix} d\gamma_y, \right]$$

となるから

$$E_{11} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{13} & D_{15} & D_{16} \\ D_{31} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{51} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{vmatrix} D_{12} & D_{13} & D_{15} & D_{16} \\ D_{32} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{52} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{62} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{13} = - \begin{vmatrix} D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{vmatrix} D_{21} & D_{23} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{51} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{22} = \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} & D_{25} & D_{26} \\ D_{32} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{52} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{62} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{23} = - \begin{vmatrix} D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix} \quad (63)$$

$$E_{31} = - \begin{vmatrix} D_{31} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{43} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{32} = - \begin{vmatrix} D_{32} & D_{33} & D_{35} & D_{36} \\ D_{42} & D_{43} & D_{45} & D_{46} \\ D_{52} & D_{53} & D_{55} & D_{56} \\ D_{62} & D_{63} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

$$E_{33} = - \begin{vmatrix} D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{vmatrix}$$

とすると

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{2G}{\Delta} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。

3.5 Yielding Condition $f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\bar{\varepsilon}')$ の関数形

実際の計算を行うに当って *yielding condition* $f(\sigma, \bar{\sigma}) = H(\int d\bar{\varepsilon}')$ の関数形を定めなければならない。この点について考察してみよう。

3.5.1 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ の関数形

前述したように金属材料では *Mises* の説が実験結果とよく一致するといわれている。従って

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}$$

とすればよい。

コンクリートおよび土のようなもの等では三軸応力下の *yielding condition* は三軸試験で求められ、試験結果を *Mohr* の円が描き、その包絡線を慣用的には

$$\tau = C + \sigma \tan \phi \quad \dots\dots\dots (7)$$

にて表わしている。三軸試験では

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

で *Mohr* の円が包絡線に接する点では

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \phi$$

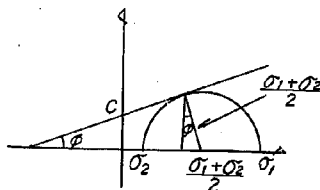


図-10

これを(7)式に代入して

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \phi = 2C + \left\{ (\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \phi \right\} \tan \phi$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2C \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi$$

$$\sigma_2 = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_1 - 2C \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$\sigma_3 = \sigma_2$ であるから

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_1 (3 - \sin \phi) - 4C \cos \phi}{3 (1 + \sin \phi)}$$

$$\therefore \sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma = \frac{4}{3} \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma_2 - \sigma = -\frac{2}{3} \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \{ \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 \} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right\} \left(\frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi} \right)^2$$

$$= 4 \left(\frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi} \right)^2$$

$$\bar{\sigma} = 2 \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma = \frac{2}{3} \bar{\sigma}$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma + \frac{2}{3} \bar{\sigma}$$

$$\therefore (1 + \sin \phi) \bar{\sigma} = 2 \left\{ \left(\sigma + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \right) \sin \phi + C \cos \phi \right\}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} \sin \phi \right) \bar{\sigma} - 2 \sigma \sin \phi = 2 C \cos \phi$$

$$\bar{\sigma} - \frac{6 \sigma \sin \phi}{3 - \sin \phi} = \frac{6 C \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (71)$$

(71)式が三軸試験 ($\sigma_2 = \sigma_3$) 結果が(70)式にて表わされるとき *Yielding condition* である。

3.5.2 歪硬化 $H(\int d\bar{\epsilon}')$ の関数形

歪硬化の関数形を決めるのは一軸試験での応力-歪曲線から決めるのが簡単である。従って $H(\int d\bar{\epsilon}')$ と一軸試験での応力歪曲線との関係を検討してみよう。

(i) 金属材料の場合

金属材料の場合 *Yielding condition* は

$$\bar{\sigma} = H(\int d\bar{\epsilon}') \quad \dots\dots\dots (72)$$

にて与えられる。一軸試験のときは

$$\sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

であるから

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_x, \quad \sigma'_x = \frac{2}{3} \sigma_x, \quad \sigma'_y = -\frac{1}{3} \sigma_x, \quad \sigma'_z = -\frac{1}{3} \sigma_x$$

$$\therefore \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \left\{ \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right\} \sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

$$\therefore \bar{\sigma} = \sigma_x \quad \dots\dots\dots (73)$$

いま *Yielding* が生じ始めるときの応力を σ_1 とすると, $\sigma_x \geq \sigma_1$ のとき塑性領域に入り

$$\bar{\sigma} = \sigma_s = H(\int d\bar{\epsilon}')$$

となる。従って $H(\int d\bar{\epsilon}')$ の常数項は σ_s となる。

(a) $\sigma_s < \sigma_t$ のとき

明らかに弾性領域で $\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$, $\epsilon_t = \epsilon_s = -\frac{\nu}{E} \sigma_s$ なる応力歪曲線をかく。

(b) $\sigma_s \geq \sigma_t$ のとき

明らかに塑性領域に入る。このとき

$$d\bar{\epsilon}' = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\lambda = \frac{2}{3} \sigma_s d\lambda$$

$$d\sigma_s = H' d\bar{\epsilon}' = \frac{2}{3} H' \sigma_s d\lambda$$

$$d\lambda = \frac{3}{2H'\sigma_s} d\sigma_s$$

$$\therefore d\epsilon_{ij} = d\epsilon'_{ij} + \delta_{ij} d\epsilon = \sigma'_{ij} d\lambda + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \delta_{ij} \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_s$$

$$= \frac{3}{2H'\sigma_s} \sigma'_{ij} d\sigma_s + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \delta_{ij} \frac{1-2\nu}{3E} d\sigma_s$$

$$d\epsilon_s = \frac{d\sigma_s}{H'} + \frac{d\sigma_s}{3G} + \frac{1-2\nu}{3E} d\sigma_s = \left(\frac{1}{H'} + \frac{1}{E}\right) d\sigma_s$$

$$d\epsilon_t = -\frac{d\sigma_s}{2H'} - \frac{d\sigma_s}{6G} + \frac{1-2\nu}{3E} d\sigma_s = -\left(\frac{1}{2H'} + \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_s$$

応力歪曲線の勾配は $\frac{H'E}{E+H'}$ となる。

(1) $H(\int d\bar{\epsilon}') = \sigma_s$ のとき

$$H' = 0 \quad \text{故に} \quad d\epsilon_s = \infty \quad d\epsilon_t = d\epsilon_s = -\infty$$

となり、応力歪曲線は図-11(a)の如くなる。

(2) $H(\int d\bar{\epsilon}') = a\bar{\epsilon}' + \sigma_s$ のとき、ただし $\bar{\epsilon}' = \int d\bar{\epsilon}'$ とする。

$$H' = a$$

$$\therefore \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} = \frac{aE}{a+E}$$

となり、図-11(b)に示す応力歪曲線を示す。なお

$a = E$ のとき丁度弾性係数が $\frac{1}{2}$ になったようになる。

また、

$$\frac{d\sigma_t}{d\epsilon_t} = \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} = \frac{-1}{\frac{1}{2a} + \frac{\nu}{E}} = \frac{-2aE}{2a\nu + E}$$

となる。

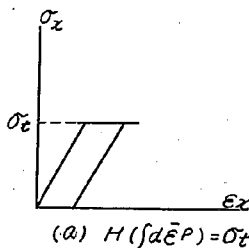


図-11

(3) $H(\int d\bar{\varepsilon}') = a(\bar{\varepsilon}')^{\frac{1}{n}} + \sigma_t$ のとき

$$H' = \frac{a}{n} (\bar{\varepsilon}')^{\frac{1-n}{n}}$$

$$\int d\bar{\varepsilon}' = \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$d\bar{\varepsilon}' = \frac{2}{3} \sigma_s d\lambda = \frac{d\sigma_s}{H'} \quad (d\sigma_s = H' d\bar{\varepsilon}')$$

であるから

$$\int \frac{d\sigma_s}{H'} = \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\frac{1}{H'} = -\frac{n}{n-1} \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{2n-1}{n-1}} \frac{\partial H'}{\partial \sigma_s}$$

$$-\frac{n-1}{n} \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{n}{n-1}} \frac{\partial H'}{\partial \sigma_s} = -(n-1) \frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\left(\frac{1}{H'}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n} \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} (\sigma_s - C)$$

$$\frac{1}{H'} = \frac{n}{a^n} (\sigma_s - C)^{n-1}$$

$\sigma_s = \sigma_t$ のとき塑性歪が初めて生ずるとすると

$$\sigma_s = \sigma_t \text{ のとき } \bar{\varepsilon}' = 0 \quad \therefore \frac{1}{H'} = 0$$

$$\frac{1}{H'} = \frac{n}{a^n} (\sigma_s - \sigma_t)^{n-1}$$

この応力歪曲線は

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\sigma_t}{E} + \int_{\sigma_t}^{\sigma_s} \left[\frac{1}{H'} + \frac{1}{E} \right] d\sigma_s = \frac{\sigma_t}{E} + \int_{\sigma_t}^{\sigma_s} \left[\frac{n}{a^n} (\sigma_s - \sigma_t)^{n-1} + \frac{1}{E} \right] d\sigma_s \\ &= \frac{\sigma_t}{E} + \left[\frac{1}{a^n} (\sigma_s - \sigma_t)^n + \frac{1}{E} \right] (\sigma_s - \sigma_t) \end{aligned}$$

となり、塑性領域では n 次曲線となる。

(ii) コンクリートおよび土のようなものの場合

この場合 *yielding condition*

$$f(\sigma, \bar{\varepsilon}) = H(\int d\bar{\varepsilon}')$$

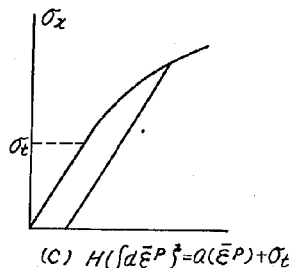
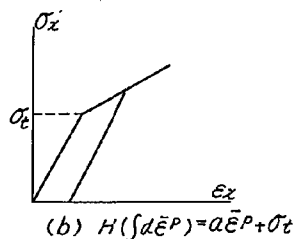


図-11

となるが、 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ が(7)式で与えられる場合、即ち

$$\bar{\sigma} - \frac{6}{3 - \sin \phi} (\sigma \sin \phi + C \cos \phi) = H (\int d\bar{\epsilon}') \quad \dots\dots\dots (74)$$

のときについて考察してみる。一軸試験のとき

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_s, \quad \bar{\sigma} = \sigma_s$$

$$\therefore \frac{3[(1 - \sin \phi) \sigma_s - 2 C \cos \phi]}{3 - \sin \phi} = H (\int d\bar{\epsilon}')$$

$$\sigma_s = \frac{2 C \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

のとき始めて *yielding* が生ずる。従って

$$\sigma_s = \frac{2 C \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

とおくと

$$\sigma_s - \sigma_t = \frac{3 - \sin \phi}{3(1 - \sin \phi)} H (\int d\bar{\epsilon}')$$

となるから(74)式を

$$\frac{3 - \sin \phi}{3(1 - \sin \phi)} \bar{\sigma} - \frac{2 \sigma \sin \phi}{1 - \sin \phi} = H (\int d\bar{\epsilon}') \quad \dots\dots\dots (75)$$

と書きかえ

$$\sigma_t = \frac{2 C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (76)$$

とすれば

$$\sigma_s = H (\int d\bar{\epsilon}')$$

となり(1)の場合とまったく同じとなる。

[参 考 文 献]

1. H.Love : "Mathematical Theory of Elasticity"
2. W.Clough: "The Finite Element Method in Plane Stress and Analysis"
Conference on electronic computation Pittsburgh Pa.Sept.1960
A.S.C.E.
3. R.W.Clough : "Stress Analysis" PP 28~32 John Wiley & Sons.
4. 林 正夫 : "非線型現象を考慮した岩盤の変型, 応力と耐荷力の解析方法"
電力技術研究所報告 66072
5. 山田嘉昭 : "弾塑性問題における剛性マトリックス" 生産研究 vol. 19 №3 (1967
年3月)
6. F.Reyes: "Elastic-plastic analysis of under ground openings by finite
element method" Proc. of the 1st cong. I.S.R.M. 1966
7. Hill : "Mathematical Theory of Plasticity"