

Technical Memorandum of  
The Public Works Research Institute  
Ministry of Construction

# 土 木 研 究 所 資 料

第 4 0 1 号

直交異方性弾塑性理論の岩盤力学への適用

"Application of Orthotropic Elasto-Plastic  
Theory to Rock Mechanics"

昭和 4 3 年 7 月

建 設 省 土 木 研 究 所

# 目 次

飯田 隆一

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 1. 概 説                                  | 1  |
| 2. 岩盤の力学的特性                             | 2  |
| 3. 体積変化をもつ異方性弾塑性体における塑性<br>歪増分と応力との関係   | 6  |
| 4. 体積変化をもつ直交異方性弾塑性体における<br>降伏条件         | 13 |
| 5. 異方性弾性体への有限要素法の適用                     | 23 |
| 6. 体積変化をもつ直交異方性弾塑性体における<br>剛性マトリックス (1) | 27 |
| 7. 体積変化をもつ直交異方性弾塑性体にお<br>ける剛性マトリックス (2) | 30 |
| 8. 体積変化をもつ等方性弾塑性体の解法                    | 31 |
| 9. 直交異方性軟岩の解法                           | 41 |
| 10. 直交異方性弾塑性理論の岩盤への適用                   | 42 |
| 参考文献                                    | 53 |

## 1. 概説

近年ダム等の巨大な構造物の建設が相次いで行われ、その設計技術が進歩するにつれ、これらの構造物の安定性は主として岩盤の安定性に支配されることが明らかとなり、にわかには岩盤の力学的な諸性質の測定方法とともに、岩盤の力学的取扱が注目されるに至った。岩盤の力学的性質の測定方法については数年来の研究により、或る程度の成果が得られ、設計に反映されつつあるが、岩盤の力学的な取扱については未だ定性的な取扱にすぎず、定量的な解析は弾性体としての取扱の範囲を脱していないのが現状である。

元素、岩盤には節理、キレツ等が存在し、岩盤内の力の伝わり方、変形状態等は弾性体とはかなり異っていることは、岩盤の実測資料より明らかにされており、<sup>(1)</sup> また、これらの特性を定性的に裏付ける実験的研究も行なわれている。しかし、これらの特性を考慮した力学体系は未だ確立されておらず、従って定量的な解析方法も行なわれていない。一般に岩盤内の力の伝わり方、変形状態が弾性体と異なるのは岩盤内に存在する節理面、キレツ面ですべりが生ずるためであると考えられているが、鉄等の等方性体における塑性変形は小さな結晶粒がばらばらな方向に結びつき、これらの結晶粒内ですべりにより生ずるが、結晶体がばらばらな方向を向いているために、等方性を示すと考えられていることを思い浮べるならば、岩盤のように或る程度そろった方向に節理面、キレツ面が存在する物質においては異方性弾塑性理論によりかなり近似的な取扱が可能となると考えられる。ここで注意すべきことは塑性理論では結晶体または結晶粒内のすべりを考えている。従って、塑性理論では塑性変形による体積変化は考えていない、しかし、岩盤の場合には個々の岩片内ではすべりは生ぜず、節理面、キレツ面ですべりが生ずるので、

実際には塑性体とは稍異った動きを示す筈であり、またこれらの節理面、キレツ面は引張応力により開口する筈であり、更に初期状態において開口している場合もある。このため、塑性的な変形による体積変化も考慮する必要がある。

そこで、岩盤を力学的に取扱う方法を検討するに当って体積変化をともなう異方性弾塑理論(厳密には弾塑性理論とは云えないかも知れないが)を展開し、岩片内ではすべりは生ぜず、節理面、キレツ面ですべりが生ずる点については、現段階ではかなり複雑な手続が必要となるので、今後の検討課題として、次節に論じ、岩盤を体積変化をともなう異方性弾塑性体として解析する方法を提案することにする。このため、こゝに述べる方法は岩盤の力学的取扱としては一つの近似解法であるが、少くとも従来の解法に比して一段と、岩盤の特性を生かした解法となり得ると考えられる。

このような方法は従来は理論的には可能であつても、数値的にはほとんど解を求めることが不可能であつたが、近年電子計算機の利用と共に有限要素法が提案され、これにより弾塑性理論の数値的解法がかなり容易になったので、これらの理論の有限要素法への適用方法についても論ずることにする。

## 2. 岩盤のモデルパターン

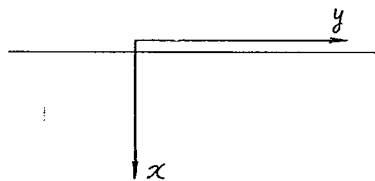
岩盤の力学的特性がその内部に存在する節理、キレツによるのであるならば、岩盤内に存在する節理、キレツの状態に応じていくつかのモデルパターンを考え、その特徴に応じた力学的な取扱を検討する必要がある。

現在までの岩盤の節理、キレツの調査によると、多くの場合、節理、キレツは三つの卓越した方向を示しており、これらは、各々

直角またはそれに近い角度で交わっている場合が多い。  
そこで岩盤に対し、次の5つのモデルパターンを考えることにする。

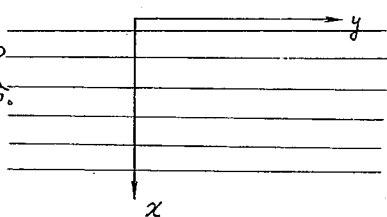
(a)  $MOD = 1$

キレツなく1体の弾性体



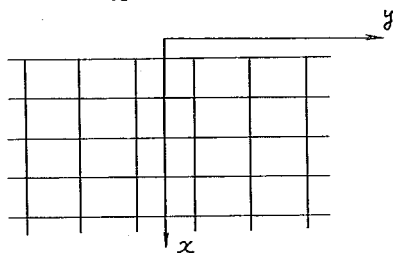
(b)  $MOD = 2$

y軸に平行なキレツのみあってこれに直交するキレツがない場合。  
尚、この場合キレツ沿には無限にすべり得るものとする。



(c)  $MOD = 3$

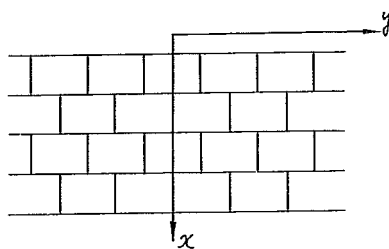
x, y軸に平行なキレツが存在して、いずれもつながっている場合。  
この場合もキレツ沿には無限にすべり得るものとする。



(d)  $MOD = 4$

y軸に平行なキレツは通っているが、x軸に平行なキレツは互違な場合。

この場合、y軸に平行なキレツは無限にすべり得るものとするが、x軸に平行なキレツは、或る程度すべれば、すべりは止まるものとする。



(e)  $Mod=5$

$x, y$  軸に平行なキレツが存在して、いづれも互違になっている場合、この場合にはいづれの方角のキレツも或る程度すべればすべりは止まるものとする。

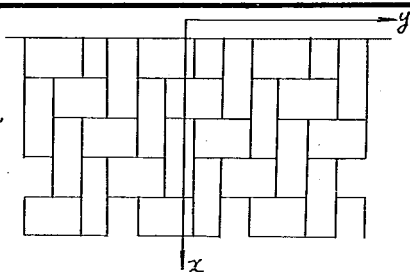


図 - 1

以上のような5つのモデルパターンを考え、これを生かした解析方法を検討する場合に、先ず、第一に考えられる方法は、図-2(a)に示すような、四角形要素から成る有限要素の構成を考え、その要素には図-2(b)に示すようなサフィックスを付し、 $\alpha_{1,z}$ なる要素は岩片を表わし、 $\alpha_{2,z}$ なる要素は、 $y$  軸に平行なキレツを表わし、 $\alpha_{3,z}$ なる要素は $x$  軸に平行なキレツを表わすものとする。 $\alpha_{1,z}$ なる要素には弾性体としての取扱を行い、 $\alpha_{2,z}, \alpha_{3,z}$ なる要素には異方性弾塑性体としての取扱いを行う方法である。

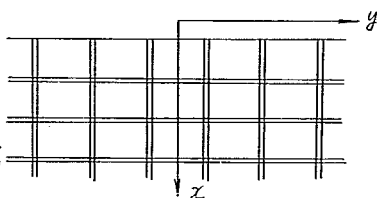


図-2(a)

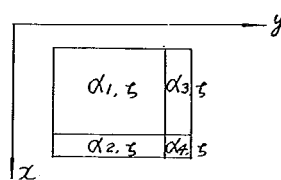


図-2(b)

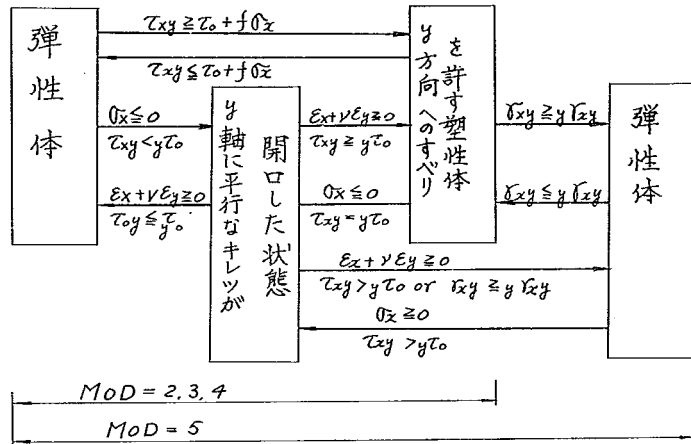
この方法においては $\alpha_{2,z}, \alpha_{3,z}$ なる要素は表-1に示すような条件で異った状態に移行していくと考えればよいだろう。

しかし、この方法は実際に有限要素法を適用するには次の点で難点がある。

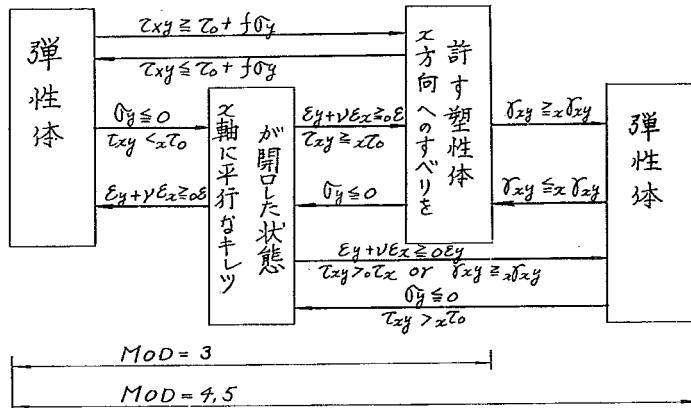
- (i) 図-2(a)に示すように要素を分割すると、力の作用点近くの応力変化の著しい所では計算精度を上げるために細かな要素をとる必要があるが、キレツを $x, y$  軸に平行にとるために、短形要素をとる必要があり、このため応力変化の少い所まで細かに要素をとることになり、節点数が多くなる。
- (ii) 更に図-2(b)に示すように一つの要素を岩片を表わすものと $x$  軸、 $y$  軸に平行なキレツを表わすものとに分割するために節点数が著しく増加する。

表 - 1

(a)  $\alpha_{2,5}$  なる要素



(b)  $\alpha_{3,5}$  なる要素



(iii) その上、 $\alpha_{2,5}$ ,  $\alpha_{3,5}$ なる要素は弾塑性体として取扱うために、繰返し計算が必要となる。

以上のため、計算所要時間が、弾性体の場合に比して、100倍以上になる可能性がある、その他

(iv)  $\alpha_{2,5}$ ,  $\alpha_{3,5}$ なる要素は偏平な形にするために数値が他の要素と著しく異り、逆マトリックスを解く上で誤差が生じ易い。

(v) すべりを $\alpha_{2,5}$ ,  $\alpha_{3,5}$ なる要素に集めるために或る程度のすべりでも歪としては著しく大きくなり、微小変形論の適用が問題になり易く、これを回避するためには繰返し計算の回数が増加する。

以上のような欠点を有するために以上述べた方法は岩盤の力学的性質を表わす上では優れているが、現段階では計算時間を著しく要する反面、計算精度は思わしくない結果が得られる可能性が強く、実用的に用い得る方法とは云い難い。

そこで問題をもっと巨視的に見て個々の岩片が単結晶体の個々の原子に相当すると考えるならば、岩盤を直交異方性塑性体として扱う方法が考えられて来る。

この方法は或る程度の大きさを有する岩片を原子と同等と見做すので大まかな方法ではあるが、岩盤の力学的性質が問題となるダムなどの巨大な構造物の基礎としてはこのような取扱は許され得ると考えられる。

そこで、以下、異方性弾塑性体の理論的取扱方法と有限要素法への適用方法について述べることにする。

### 3. 体積変化をともなう異方性弾塑性体における塑性歪増分と応力との関係

一般に塑性理論においては塑性変形によっては体積変化は

生じないとしている。これは単結晶体、多結晶体においては妥当なものであるが、我々が取扱う土木の分野では塑性的な変形により体積変化が生ずるとした取扱が必要となっている。例えば開口キレツを有する岩盤においては塑性的な変形によりキレツが閉じ体積変化が生ずるということは考えなければならぬし、また、ロックフィルダムにおいて沈下が生じたとき、この沈下が体積変化をともしない塑性的な変形のみで考えるよりは空隙率が変わり、体積変化も生じていると考えた方が妥当であらう。更にはロックフィルダム等では空隙率が減少すればせん断強度が増加するという事も云はれているが、これらに対しても体積変化に対応した歪硬化を考えた塑性的な取扱が可能となれば、現在より進んだ解析方法が可能とならう。

そこで体積変化をともしない異方性塑性体の理論的な取扱は可能であるか、またその場合の塑性歪増分と応力との関係はどのような形になるかについて検討を加えてみよう。

一般に塑性理論においては塑性歪の増分と応力の関係として Reuss の式、

$$d\epsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (1)$$

が用いられている。これは、

$$d\epsilon_{ii}^p = \sigma'_{ii} d\lambda = 0$$

であるから、明らかに体積変化がない場合に成立するものである。

(1) 式を変形すると

$$d\epsilon_{ij}^{p'} = d\epsilon_{ij}^p - \sigma_{ij} d\epsilon^p$$

であるが、 $d\epsilon_{ii}^p = 0$  とすれば、 $d\epsilon^p = \frac{1}{3} d\epsilon_{ii}^p = 0$  であるから

$$d\epsilon_{ij}^{p'} = d\epsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda$$

そこで

$$d\epsilon_{ij}^{p'} = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (2)$$

とすると、 $d\epsilon_{ii}^{p'} = 0$  であるから (2) 式は体積変化がある場合

にも成立するとしても矛盾しない。この仮定は弾性歪については

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G} \quad (3)$$

が成立しているし、体積変化がないとした場合には(1)式と同一なものになるから妥当なものであると考えられる。

さて異方性体の塑性理論を考えるに当って、異方性体の弾性理論においては、一般化した Hook の法則として、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

としている。<sup>(2)</sup> これを参考にして (2) 式を更に一般化して、

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_x^{b'} \\ d\varepsilon_y^{b'} \\ d\varepsilon_z^{b'} \\ d\varepsilon_{yz}^p \\ d\varepsilon_{zx}^p \\ d\varepsilon_{xy}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} d\lambda \quad (5)$$

として表わすことにする。また異方性弾性体の場合には体積変化は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^e &= (C_{11} + C_{21} + C_{31}) \sigma_z + (C_{12} + C_{22} + C_{32}) \sigma_y + (C_{13} + C_{23} + C_{33}) \sigma_x \\ &\quad + (C_{14} + C_{24} + C_{34}) \tau_{yz} + (C_{15} + C_{25} + C_{35}) \tau_{zx} + (C_{16} + C_{26} + C_{36}) \tau_{xy} \end{aligned}$$

にて表わされるから、

$$d\epsilon_{ii}^p = (a_1 \sigma'_x + a_2 \sigma'_y + a_3 \sigma'_z + a_4 \tau'_{yz} + a_5 \tau'_{zx} + a_6 \tau'_{xy}) d\lambda \quad (6)$$

とする。

$$d\epsilon_{ii}^p = (a_1 \sigma'_x + a_2 \sigma'_y + a_3 \sigma'_z + a_4 \tau'_{yz} + a_5 \tau'_{zx} + a_6 \tau'_{xy}) d\lambda \\ + (a_1 + a_2 + a_3) \sigma' d\lambda$$

となるから

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\epsilon_z^p \\ d\epsilon_{yz}^p \\ d\epsilon_{zx}^p \\ d\epsilon_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \frac{1}{3}a_1 & a_{12} + \frac{1}{3}a_2 & a_{13} + \frac{1}{3}a_3 & a_{14} + \frac{1}{3}a_4 & a_{15} + \frac{1}{3}a_5 & a_{16} + \frac{1}{3}a_6 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ a_{21} + \frac{1}{3}a_1 & a_{22} + \frac{1}{3}a_2 & a_{23} + \frac{1}{3}a_3 & a_{24} + \frac{1}{3}a_4 & a_{25} + \frac{1}{3}a_5 & a_{26} + \frac{1}{3}a_6 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ a_{31} + \frac{1}{3}a_1 & a_{32} + \frac{1}{3}a_2 & a_{33} + \frac{1}{3}a_3 & a_{34} + \frac{1}{3}a_4 & a_{35} + \frac{1}{3}a_5 & a_{36} + \frac{1}{3}a_6 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda \quad (7)$$

さて  $d\mathcal{E}_{ii}^p = 0$  であるから

$$(a_{11} + a_{21} + a_{31}) \delta x' + (a_{12} + a_{22} + a_{32}) \delta y' + (a_{13} + a_{23} + a_{33}) \delta z' \\ + (a_{14} + a_{24} + a_{34}) \tau_{yz} + (a_{15} + a_{25} + a_{35}) \tau_{zx} + (a_{16} + a_{26} + a_{36}) \tau_{xy} = 0$$

こゝで

$$\delta x' + \delta y' + \delta z' = 0$$

なることを考慮するならば

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_{21} + a_{31} &= a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} \\ a_{14} + a_{24} + a_{34} &= a_{15} + a_{25} + a_{35} = a_{16} + a_{26} + a_{36} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(7)式から塑性歪エネルギーの変化を求めると

$$\begin{aligned} dW^p &= \delta_{ij} d\mathcal{E}_{ij}^p = (\delta_{ij} + \delta_{ij}^p) d\mathcal{E}_{ij}^p \\ &= [(a_{11} + \frac{1}{3}a_1) \delta x'^2 + (a_{22} + \frac{1}{3}a_2) \delta y'^2 + (a_{33} + \frac{1}{3}a_3) \delta z'^2 + 2a_{44} \tau_{yz}^2 + 2a_{55} \tau_{zx}^2 + 2a_{66} \tau_{xy}^2 \\ &\quad + (a_{12} + a_{21} + \frac{a_1 + a_2}{3}) \delta x' \delta y' + (a_{23} + a_{32} + \frac{a_2 + a_3}{3}) \delta y' \delta z' + (a_{31} + a_{13} + \frac{a_3 + a_1}{3}) \delta z' \delta x' \\ &\quad + (a_{14} + 2a_{41} + \frac{a_4}{3}) \delta x' \tau_{yz} + (a_{15} + 2a_{51} + \frac{a_5}{3}) \delta x' \tau_{zx} + (a_{16} + 2a_{61} + \frac{a_6}{3}) \delta x' \tau_{xy} \\ &\quad + (a_{24} + 2a_{42} + \frac{a_4}{3}) \delta y' \tau_{yz} + (a_{25} + 2a_{52} + \frac{a_5}{3}) \delta y' \tau_{zx} + (a_{26} + 2a_{62} + \frac{a_6}{3}) \delta y' \tau_{xy} \\ &\quad + (a_{34} + 2a_{43} + \frac{a_4}{3}) \delta z' \tau_{yz} + (a_{35} + 2a_{53} + \frac{a_5}{3}) \delta z' \tau_{zx} + (a_{36} + 2a_{63} + \frac{a_6}{3}) \delta z' \tau_{xy} \\ &\quad + 2(a_{45} + a_{54}) \tau_{yz} \tau_{zx} + 2(a_{46} + a_{64}) \tau_{yz} \tau_{xy} + 2(a_{56} + a_{65}) \tau_{zx} \tau_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \delta (\delta x' + \delta y' + \delta z') + \delta \{ (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_1) \delta x' + (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_2) \delta y' \\ &\quad + (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_3) \delta z' + (a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_4) \tau_{yz} + (a_{15} + a_{25} + a_{35} + a_5) \tau_{zx} \\ &\quad + (a_{16} + a_{26} + a_{36} + a_6) \tau_{xy} + (a_1 + a_2 + a_3) \delta \} ] d\lambda \\ &= [ (a_{11} \delta x'^2 + a_{22} \delta y'^2 + a_{33} \delta z'^2 + 2a_{44} \tau_{yz}^2 + 2a_{55} \tau_{zx}^2 + 2a_{66} \tau_{xy}^2 \\ &\quad + (a_{12} + a_{21}) \delta x' \delta y' + (a_{23} + a_{32}) \delta y' \delta z' + (a_{31} + a_{13}) \delta z' \delta x' \\ &\quad + (a_{14} + 2a_{41}) \delta x' \tau_{yz} + (a_{15} + 2a_{51}) \delta x' \tau_{zx} + (a_{16} + 2a_{61}) \delta x' \tau_{xy} \\ &\quad + (a_{24} + 2a_{42}) \delta y' \tau_{yz} + (a_{25} + 2a_{52}) \delta y' \tau_{zx} + (a_{26} + 2a_{62}) \delta y' \tau_{xy} \\ &\quad + (a_{34} + 2a_{43}) \delta z' \tau_{yz} + (a_{35} + 2a_{53}) \delta z' \tau_{zx} + (a_{36} + 2a_{63}) \delta z' \tau_{xy} \\ &\quad + 2(a_{45} + a_{54}) \tau_{yz} \tau_{zx} + 2(a_{46} + a_{64}) \tau_{yz} \tau_{xy} + 2(a_{56} + a_{65}) \tau_{zx} \tau_{xy} \\ &\quad + \delta (a_1 \delta x' + a_2 \delta y' + a_3 \delta z' + a_4 \tau_{yz} + a_5 \tau_{zx} + a_6 \tau_{xy}) ] d\lambda \quad (9) \end{aligned}$$

が得られる。

Love は 弾性体の場合には断熱変化(エネルギーの変化がない)ときは歪エネルギーの変化は完全微分形でなければならぬとして

(4) 式において

$$C_{rs} = C_{sr}$$

としている。<sup>(2)</sup> しかし塑性変形の場合にはエネルギーの変化があるので、これと同様の方法により (5) 式の対称性を引き出すことは出来ない。

(9) 式において Hencky の解釈に従うならば

$$\begin{aligned} dW_s^p = & [a_{11}\bar{\epsilon}_x'^2 + a_{22}\bar{\epsilon}_y'^2 + a_{33}\bar{\epsilon}_z'^2 + 2a_{44}\bar{\epsilon}_y\bar{\epsilon}_z + 2a_{55}\bar{\epsilon}_z\bar{\epsilon}_x + 2a_{66}\bar{\epsilon}_x\bar{\epsilon}_y \\ & + (a_{12}+a_{21})\bar{\epsilon}_x'\bar{\epsilon}_y' + (a_{23}+a_{32})\bar{\epsilon}_y'\bar{\epsilon}_z' + (a_{31}+a_{13})\bar{\epsilon}_z'\bar{\epsilon}_x' \\ & + (a_{14}+2a_{41})\bar{\epsilon}_x'\bar{\epsilon}_{yz} + (a_{15}+2a_{51})\bar{\epsilon}_x'\bar{\epsilon}_{zx} + (a_{16}+2a_{61})\bar{\epsilon}_x'\bar{\epsilon}_{xy} \\ & + (a_{24}+2a_{42})\bar{\epsilon}_y'\bar{\epsilon}_{yz} + (a_{25}+2a_{52})\bar{\epsilon}_y'\bar{\epsilon}_{zx} + (a_{26}+2a_{62})\bar{\epsilon}_y'\bar{\epsilon}_{xy} \\ & + (a_{34}+2a_{43})\bar{\epsilon}_z'\bar{\epsilon}_{yz} + (a_{35}+2a_{53})\bar{\epsilon}_z'\bar{\epsilon}_{zx} + (a_{36}+2a_{63})\bar{\epsilon}_z'\bar{\epsilon}_{xy} \\ & + 2(a_{45}+a_{54})\bar{\epsilon}_{yz}\bar{\epsilon}_{zx} + 2(a_{56}+a_{65})\bar{\epsilon}_{zx}\bar{\epsilon}_{xy} + 2(a_{64}+a_{46})\bar{\epsilon}_{xy}\bar{\epsilon}_{yz}]d\lambda \quad (10) \end{aligned}$$

はせん断歪エネルギーに相当し

$$dW_s^p = \bar{\sigma}(a_1\bar{\epsilon}_x + a_3\bar{\epsilon}_y + a_3\bar{\epsilon}_z + a_4\bar{\epsilon}_{yz} + a_5\bar{\epsilon}_{zx} + a_6\bar{\epsilon}_{xy})d\lambda \quad (11)$$

は体積変化歪エネルギーに相当する。

さて次に直交異方性体について考察する。直交異方性体の場合には  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸の周りに  $180^\circ$  回転しても塑性歪エネルギーの値は変えない筈であるから,  $\bar{\epsilon}_{yz}$ ,  $\bar{\epsilon}_{zx}$ ,  $\bar{\epsilon}_{xy}$  の各々を一次の形で含む項の係数はすべて 0 とならなければならない。即ち、

$$\begin{aligned} a_{14} + 2a_{41} &= 0 & a_{15} + 2a_{51} &= 0 & a_{16} + 2a_{61} &= 0 & a_4 &= 0 \\ a_{24} + 2a_{42} &= 0 & a_{25} + 2a_{52} &= 0 & a_{26} + 2a_{62} &= 0 & a_5 &= 0 \\ a_{34} + 2a_{43} &= 0 & a_{35} + 2a_{53} &= 0 & a_{36} + 2a_{63} &= 0 & a_6 &= 0 \\ a_{45} + a_{54} &= 0 & a_{56} + a_{65} &= 0 & a_{64} + a_{46} &= 0 \end{aligned}$$

しかし物理的に考えて  $a_{rs}$  と  $a_{sr}$  との符号が異なることは考え難いので

$$\begin{aligned} a_{14} &= a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{41} = a_{42} = a_{43} \\ &= a_{45} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{56} = a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{64} \\ &= a_{65} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} d\mathcal{E}_x^p \\ d\mathcal{E}_y^p \\ d\mathcal{E}_z^p \\ d\mathcal{E}_{yz}^p \\ d\mathcal{E}_{zx}^p \\ d\mathcal{E}_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \frac{1}{3}a_1 & a_{12} + \frac{1}{3}a_2 & a_{13} + \frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ a_{21} + \frac{1}{3}a_1 & a_{22} + \frac{1}{3}a_2 & a_{23} + \frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ a_{31} + \frac{1}{3}a_1 & a_{32} + \frac{1}{3}a_2 & a_{33} + \frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x' \\ \bar{\sigma}_y' \\ \bar{\sigma}_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} d\lambda \quad (12)$$

となり、この場合の塑性歪エネルギーの変化を求めると

$$\begin{aligned} dW^p = & [a_{11}\bar{\sigma}_x'^2 + a_{22}\bar{\sigma}_y'^2 + a_{33}\bar{\sigma}_z'^2 + 2a_{44}\tau_{yz}^2 + 2a_{55}\tau_{zx}^2 + 2a_{66}\tau_{xy}^2 \\ & + (a_{12} + a_{21})\bar{\sigma}_x'\bar{\sigma}_y' + (a_{23} + a_{32})\bar{\sigma}_y'\bar{\sigma}_z' + (a_{31} + a_{13})\bar{\sigma}_z'\bar{\sigma}_x' \\ & + \bar{\sigma}(a_1\bar{\sigma}_x + a_2\bar{\sigma}_y + a_3\bar{\sigma}_z)] d\lambda \end{aligned} \quad (13)$$

最後に等方性体について考察する。等方性体の場合には塑性歪エネルギーの変化は不変量で表わされなければならない。この場合 (13) 式は応力の二次式であるから

$$dW^p = \left\{ \frac{A}{3}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)^2 + B\{\bar{\sigma}_x'^2 + \bar{\sigma}_y'^2 + \bar{\sigma}_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2\} \right\} d\lambda \quad (14)$$

と表わされるとすると

$$a_1 = a_2 = a_3 = A$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = B$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{13} = a_{31} = 0$$

となり、 $d\mathcal{E}_x^p = (B + \frac{A}{3})\bar{\sigma}_x' + \frac{A}{3}\bar{\sigma}_y' + \frac{A}{3}\bar{\sigma}_z' + A\bar{\sigma} = B\bar{\sigma}_x' + A\bar{\sigma}$  となるから

$$\begin{bmatrix} d\mathcal{E}_x^p \\ d\mathcal{E}_y^p \\ d\mathcal{E}_z^p \\ d\mathcal{E}_{yz}^p \\ d\mathcal{E}_{zx}^p \\ d\mathcal{E}_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x' \\ \bar{\sigma}_y' \\ \bar{\sigma}_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} d\lambda \quad (15)$$

となる。ここで  $B=1, A=0$  としたのが Reuss の式となる。

尚 Hill は直交異方性体の塑性歪増分と応力との関係として

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\varepsilon_z^p \\ d\varepsilon_{yz}^p \\ d\varepsilon_{zx}^p \\ d\varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H+G & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} d\lambda \quad (16)$$

なる関係を用いている。<sup>(3)</sup> これは (12) 式において  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  とし、 $a_{rs} = a_{sr}$  として (8) 式の条件を更に厳しくして

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0$$

としたものと一致する。

#### 4. 体積変化をともなう直交異方性塑性体における降伏条件

一般に等方性塑性体の降伏条件としては Mises の説として

$$J_2' = \frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2) = k^2 \quad (17)$$

が用いられている。これは金属等の延性のある単結晶体、多結晶体においては実験結果とよく一致するといわれているが、岩石等の脆い単結晶体、多結晶体においては必ずしも (17) 式は実験結果と一致するとは云い得ず Nadai は

$$\bar{\sigma} = f(\sigma) \quad \left. \vphantom{\bar{\sigma} = f(\sigma)} \right\} \quad (18)$$

或いは  $f(J_2', \sigma) = 0$

但し  $\bar{\sigma}^2 = 3J_2' = \frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = \frac{3}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2)$  とした降伏条件が適用し得るとしている。<sup>(4)</sup> またコンクリートの破壊条件についても最近の研究によれば (18) 式に従うといわれている。<sup>(5)</sup>

さて (17) 式または (18) 式にて表わされる等方性塑性体の降伏条件を拡張して異方性塑性体の降伏条件を求めるとして (17) 式および (18) 式の物理的な解釈を検

討する必要がある。これらの降伏条件に対し物理的な解釈を試みたものとして代表的なものは Nadai の正八面体応力説と Hencky のせん断歪エネルギー説である。

#### 4.1. Nadai の正八面体応力説

3つの主応力に対して同じ角をなす方向 餘弦は

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

この方向の直応力は

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \bar{\sigma}$$

この方向に直交する平面内に働く表面力は

$$p_{n1} = \sigma_1 l = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad p_{n2} = \sigma_2 m = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad p_{n3} = \sigma_3 n = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

この平面に働くせん断応力を  $\tau_{oct}$  とすると

$$\sigma_{oct}^2 + \tau_{oct}^2 = p_{n1}^2 + p_{n2}^2 + p_{n3}^2$$

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \bar{\sigma}^2 \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\bar{\sigma}^2) \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\bar{\sigma}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\bar{\sigma}^2 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^2 \} \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) \\ &= \frac{2}{3} J_2' \end{aligned}$$

即ち Nadai の解釈によれば (17) 式は

$$\tau_{oct}^2 = k^2 \quad (17a)$$

となり (18) 式は

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}) \quad (18a)$$

となる。

#### 4.2 Hencky のせん断歪エネルギー説

弾性体において

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma'_x(1+\nu) + (1-2\nu)\sigma] = \frac{1}{2G} \sigma'_x + \frac{1-2\nu}{E} \sigma\end{aligned}$$

であるから弾性歪エネルギーは

$$\begin{aligned}2W &= \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta yz + \tau_{zx} \delta zx + \tau_{xy} \delta xy \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x \sigma'_x + \sigma_y \sigma'_y + \sigma_z \sigma'_z + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2] \\ &\quad + \frac{1-2\nu}{E} \sigma (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2] + 3\frac{1-2\nu}{E} \sigma^2\end{aligned}$$

故に今体積変化による歪エネルギーを  $W_B$ , 形の変化による歪エネルギーを  $W_S$  とすると

$$W_B = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma^2$$

$W_S = \frac{1}{2G} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \right] = \frac{1}{2G} J_2'$   
となる。故に Hencky の解釈によれば (17) 式は

$$W_S = k^2 \quad (17b)$$

(18) 式は

$$f(W_S, W_B) = 0 \quad (18b)$$

として表わされることになる。

さて体積変化をともなった異方性体の降伏条件を求めるに当たって以上の二つの解釈のそれぞれ (17) 式, (18) 式の拡張を試みてみよう。

#### 4.3 Nadai の解釈を拡張した体積変化をともなう直交異方性塑性体の降伏条件

Nadai の正八面体応力説にそのまま異方性を付与することとは困難である。そこで異方性体では歪主軸と応力主軸とは一致しないことに着目して発生する塑性歪増分の正八面体歪増分により降伏条件を表わすことを試みてみよう。直交異方性塑性体においては (12) 式から

$$\begin{aligned}
d\epsilon_z^p &= [a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z + \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z)] d\lambda \\
d\epsilon_y^p &= [a_{21}\delta'_x + a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z + \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z)] d\lambda \\
d\epsilon_x^p &= [a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z + \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z)] d\lambda \\
d\epsilon_{yz}^p &= a_{44}\tau_{yz} d\lambda \quad d\epsilon_{zx}^p = a_{55}\tau_{zx} d\lambda \quad d\epsilon_{xy}^p = a_{66}\tau_{xy} d\lambda
\end{aligned}$$

にて表わされる。これらの塑性歪増分の正八面体直歪増分は

$$\begin{aligned}
d\epsilon_{oct}^p &= \frac{1}{3}(d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p) \\
&= \frac{1}{3}\{(a_{11}+a_{21}+a_{31})\delta'_x + (a_{12}+a_{22}+a_{32})\delta'_y + (a_{13}+a_{23}+a_{33})\delta'_z \\
&\quad + (a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z)\} d\lambda
\end{aligned}$$

(8) 式から  $a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=0$   
 $\delta'_x + \delta'_y + \delta'_z = 0$

であるから

$$\begin{aligned}
d\epsilon_{oct}^p &= \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z) d\lambda \\
(\frac{1}{2}d\epsilon_{oct}^p)^2 &= \frac{1}{3}\{(d\epsilon_x^p)^2 + (d\epsilon_y^p)^2 + (d\epsilon_z^p)^2 + 2(d\epsilon_{yz}^p)^2 + 2(d\epsilon_{zx}^p)^2 + 2(d\epsilon_{xy}^p)^2\} \\
&= \frac{1}{3}\{(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z)^2 + (a_{21}\delta'_x + a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z)^2 \\
&\quad + (a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z)^2 + 2a_{44}^2\tau_{yz}^2 + 2a_{55}^2\tau_{zx}^2 + 2a_{66}^2\tau_{xy}^2\} d\lambda^2
\end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z) \\
I_2 &= \frac{1}{2}\{(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z)^2 + (a_{21}\delta'_x + a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z)^2 \\
&\quad + (a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z)^2 + 2(a_{44}\tau_{yz})^2 + 2(a_{55}\tau_{zx})^2 + 2(a_{66}\tau_{xy})^2\}
\end{aligned} \quad (19)$$

とおき (17) 式を

$$I_2 = k^2$$

(18) 式を

$$f(I_1, I_2) = 0$$

(20)

と書き改めれば (20) 式は Nadai の説と体積変化をもとむ直交異方性塑性体に拡張したものとなる。

#### 4.4 Hencky の解釈を拡張した体積変化をもとむ直交異方性塑性体の降伏条件

Hencky のせん断歪エネルギー説にそのまま異方性を付与する場合には降伏条件は弾性領域における異方性に支配されることになる。しかし降伏条件は塑性領域における異方性に支配されると考える方が素直である。そこで Hencky の説を拡張して体積変化をももなう直交異方性体の降伏条件は塑性領域におけるせん断歪エネルギーの増分と体積変化歪エネルギーの増分に関係するとおきかえて求めてみよう。(13)式から

$$\begin{aligned} dW^p &= \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \\ &= [a_{11}\bar{\sigma}_x^2 + a_{22}\bar{\sigma}_y^2 + a_{33}\bar{\sigma}_z^2 + 2a_{44}\tau_{yz}^2 + 2a_{55}\tau_{zx}^2 + 2a_{66}\tau_{xy}^2 \\ &\quad + (a_{12}+a_{21})\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y' + (a_{23}+a_{32})\bar{\sigma}_y'\bar{\sigma}_z' + (a_{31}+a_{13})\bar{\sigma}_z'\bar{\sigma}_x'] d\lambda \\ &\quad + \bar{\sigma}(a_1\bar{\sigma}_x + a_2\bar{\sigma}_y + a_3\bar{\sigma}_z) d\lambda \end{aligned}$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= (a_1\bar{\sigma}_x + a_2\bar{\sigma}_y + a_3\bar{\sigma}_z) \bar{\sigma} \\ K_2 &= a_{11}\bar{\sigma}_x^2 + a_{22}\bar{\sigma}_y^2 + a_{33}\bar{\sigma}_z^2 + 2a_{44}\tau_{yz}^2 + 2a_{55}\tau_{zx}^2 + 2a_{66}\tau_{xy}^2 \\ &\quad + (a_{12}+a_{21})\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y' + (a_{23}+a_{32})\bar{\sigma}_y'\bar{\sigma}_z' + (a_{13}+a_{31})\bar{\sigma}_z'\bar{\sigma}_x' \end{aligned} \right\} (21)$$

とおけば(17)式は

$$K_2 = \bar{\sigma}^2$$

(18)式は

$$f(K_1, K_2) = 0$$

と書き改められる。

ここで注意すべきことは体積変化をももたないときは

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

となり

$$I_1 = K_1 = 0$$

となる。従って(20)式, (22)式の  $f(I_1, I_2) = 0$ ,  $f(K_1, K_2) = 0$  は  $I_2 = \bar{\sigma}^2$  又は  $K_2 = \bar{\sigma}^2$  と一致し(20)式, (22)式はいつでも(17)式の系統, 即ち延性ある単結晶体および多結晶体における Mises の降伏条件に属すると考えるべきである。

このように等方性体における降伏条件(17)式, (18)式はその物理的解釈により異方性体における降伏条件は(20)式と(22)式というように異った形で表示されて来ることになる。これに対して従来の数理論的な塑性理論においてとられて来た方法を拡張してみよう。

#### 4.5 数理論的な塑性理論での降伏条件の拡張

塑性理論においては塑性ポテンシャル  $g(\sigma_{ij})$  なる関数を考え

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \hbar \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} df, \quad d\varepsilon_y^p = \hbar \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} df, \quad d\varepsilon_z^p = \hbar \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} df \\ d\gamma_{yz}^p &= \hbar \frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}} df, \quad d\gamma_{zx}^p = \hbar \frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}} df, \quad d\gamma_{xy}^p = \hbar \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} df \end{aligned} \right\} (23)$$

としている。このような塑性ポテンシャル  $g(\sigma_{ij})$  が存在する場合には塑性歪エネルギーの増分は

$$\begin{aligned} dW^p &= \sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p + \sigma_z d\varepsilon_z^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p \\ &= \hbar \left[ \sigma_x \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} \right] df \end{aligned}$$

となる。

さて塑性歪エネルギーの増分は(13)式から明らかなように  $\sigma_{ij}$  の二次の音次関数である。従って上式から明らかなように  $g(\sigma_{ij})$  は  $\sigma_{ij}$  の二次の音次関数となる。 $g(\sigma_{ij})$  が  $\sigma_{ij}$  の二次の音次関数である場合には

$$\sigma_x \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} = 2g(\sigma_{ij})$$

$$\therefore dW^p = 2\hbar \cdot g(\sigma_{ij}) df$$

$$g(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2\hbar} \cdot \frac{dW^p}{df} = \frac{1}{2\hbar} \cdot \frac{d\lambda}{df} \{ a_{11}\sigma_x^2 + a_{22}\sigma_y^2 + a_{33}\sigma_z^2 + 2a_{44}\tau_{yz}^2$$

$$\begin{aligned} &+ 2a_{55}\tau_{zx}^2 + 2a_{66}\tau_{xy}^2 + (a_{12}+a_{21})\sigma_x'\sigma_y' + (a_{23}+a_{32})\sigma_y'\sigma_z' \\ &+ (a_{31}+a_{13})\sigma_z'\sigma_x' + \sigma'(a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z) \} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。この  $g(\sigma_{ij})$  が(23)式を満足するためには

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = A \quad (25)$$

なる関係が必要となって来る。

今降伏条件を

$$f(\sigma_{ij}) = F(\alpha W^p)$$

としたとき塑性理論においては数学的には

$$g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$$

と仮定される。Hillによれば、<sup>(6)</sup>この仮定は未だ実験的には確認されていないが、この仮定を導入すると、解の唯一性等が公式化されるので数学的にしばしば用いられている。

(24)式から

$$f(\sigma_{ij}) = g(\sigma_{ij}) \propto dW^p$$

であるから、この取扱はHenckyの説を拡張したものに(25)式の制約を加えたものとなる。

以上従来塑性理論において用いられて来た降伏条件に対する3種の説にもとずいて異方性体での降伏条件を求めてみたが、Henckyの説と塑性ポテンシャルと降伏条件と等しいとした説とは一致したが、Nadaiの説とは一致しなかった。

特に塑性ポテンシャルと降伏条件とが等しいとした説はかなり用いられており、Hillは直交異方性の塑性歪増分として(16)式で与えられた場合に(24)式に従って

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

とおいている。

#### 4.6 降伏条件

以上の点に更に考察を加えてみよう。(12)式は直交異方性体における塑性歪増分を示しているが、塑性変位が結晶内のすべりにより生ずるとして摩擦論的な立場に立つならば、(12)式に現れる $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}, a_1, a_2, a_3$ はそのすべりの動摩擦係数に関係を持ち、動摩擦係数は $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}, a_1, a_2, a_3$ により

表示し得る筈である。一方このような考えに立つならば、降伏条件における  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau_{xy}, \sigma_z, \sigma_y, \sigma_z$  の係数は結晶内のすべりの静摩擦係数と関係がある筈であり、結晶内のすべりの静摩擦係数はこれらの係数により表わされる筈である。

さて *Nadai* の説を拡張した降伏条件 (20) 式によるときは  $\sigma'_x$  ---- の係数は  $a_{11}, a_{12}$  ---- と同じ冪となり、従って結晶内のすべりの静摩擦係数は  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}, a_1, a_2, a_3$  にて表わされることになる。一方 *Hencky* の説を拡張した降伏条件 (22) 式または塑性ポテンシャルと降伏条件と等しいと考える解釈においては  $\sigma'_x$  ---- の係数は  $\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}} \dots \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}$  となり、結晶内のすべりの静摩擦係数は  $\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}} \dots \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}$  により表わされることになる。このように考えると *Nadai* の説を拡張した降伏条件 (20) 式によるときは、結晶内のすべりの動摩擦係数と静摩擦係数とは一次的な関係があるが、*Hencky* の説を拡張した降伏条件や塑性ポテンシャルと降伏条件と等しいと考える降伏条件では動摩擦係数と静摩擦係数の自乗とが一次的な関係があることになる。このように考えると摩擦論的な立場からは *Nadai* の説を拡張した降伏条件の方が妥当性を持っているようである。

事実 *Nadai* の説は正八面体のせん断応力と直応力の関係から求めているから、摩擦説に近い解釈に立っており、*Hencky* の説塑性ポテンシャルによる説はエネルギーに着目した考え方と云える。

しかし、一般の塑性体において *Tresca* のせん断応力説に対して *Mises* の説が提案され、多くの実験結果が *Mises* の説の妥当性を示していることと、*Mohr* の説に対し、中間主応力が降伏条件に影響を与えるという実験結果が提出

されたことは、前述したような塑性現象を摩擦論により解釈することが否定されつゝあるとも云い得る。

事実、現在の塑性理論はエネルギーに着目した考え方で体系化されている。

このように単結晶体や多結晶体における塑性現象がエネルギーに着目した方がより妥当性を持つことから考えて、軟岩など固結した材料の塑性的な変形を取扱うときはエネルギーに着目した降伏条件を用いた方がよいが、岩盤、スラリアタム等の個々の粒子間が摩擦により結びつけられているものは摩擦説にもとずいた降伏条件を用いた方がよいと考えられる。

そこで以下の検討においては(20)式の降伏条件と(22)式の降伏条件について解法を求めることにする。

こゝで注意すべきことは体積変化がない場合には  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  となり  $I_1 = K_1 = 0$  となり、(20)、(22)式は夫々  $I_2$ 、 $K_2$  のみの関数となり実質的には(17)式と同一のものとなる。しかし Nadai や伊東氏が指摘しているように脆性ある材料、例えば岩石、コンクリート等では(18)式に示すような降伏条件を示すので(19)、(21)式を拡張して Nadai の説を拡張した降伏条件に従うときは

$$\begin{aligned} I_1 &= b_1 \bar{\sigma}_x + b_2 \bar{\sigma}_y + b_3 \bar{\sigma}_z \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left\{ (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) \bar{\sigma}_x'^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \bar{\sigma}_y'^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2) \bar{\sigma}_z'^2 \right. \\ &\quad + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) \bar{\sigma}_x' \bar{\sigma}_y' + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}) \bar{\sigma}_y' \bar{\sigma}_z' \\ &\quad \left. + 2(a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}) \bar{\sigma}_y' \bar{\sigma}_x' + 2a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + 2a_{55}^2 \tau_{zx}^2 + 2a_{66}^2 \tau_{xy}^2 \right\} \quad (26) \\ f(I_1, I_2) &= 0 \end{aligned}$$

Hencky の説を拡張した降伏条件に従うときは

$$\begin{aligned} K_1 &= \sigma(b_1 \bar{\sigma}_x + b_2 \bar{\sigma}_y + b_3 \bar{\sigma}_z) \\ K_2 &= \frac{1}{2} \left\{ a_{11} \bar{\sigma}_x'^2 + a_{22} \bar{\sigma}_y'^2 + a_{33} \bar{\sigma}_z'^2 + 2a_{44} \tau_{yz}^2 + 2a_{55} \tau_{zx}^2 + 2a_{66} \tau_{xy}^2 \right. \\ &\quad \left. + (a_{12} + a_{21}) \bar{\sigma}_x' \bar{\sigma}_y' + (a_{23} + a_{32}) \bar{\sigma}_y' \bar{\sigma}_z' + (a_{31} + a_{13}) \bar{\sigma}_z' \bar{\sigma}_x' \right\} \quad (27) \\ f(K_1, K_2) &= 0 \end{aligned}$$

なる降伏条件が与えられるとする。こゝに  $b_1, b_2, b_3$  は  $a_1, a_2, a_3$

と無関係にとり得るものとし、等方性であれば  $b_1=b_2=b_3$  とする。

次に歪硬化関数について考察しよう。

歪硬化には一般に塑性エネルギーの関数として表わされるとする方法と等値塑性歪の関数として表わされるとする方法とが用いられている。

即ち前者は

$$f(\sigma_{ij}) = F(\int dW^P)$$

とし、後者は

$$f(\sigma_{ij}) = H(\alpha \bar{\epsilon}^P) \\ (\alpha \bar{\epsilon}^P)^2 = \frac{2}{3} \{ \alpha \epsilon_{ij}^P \cdot \alpha \epsilon_{ij}^P \}$$

とする方法である。等方性体では

$$F' = \bar{\sigma} H'$$

なる関係があり、いずれを用いるも同じ結果が得られる。

しかし、異方性体においては降伏条件における Nadai の説と Hencky の説との差のように差が現れる。

この二つの考え方に対しては前の考察からも明らかなように、摩擦説にもとずく降伏条件を考えると歪硬化を等値塑性歪の関数として考え、エネルギーに着目した降伏条件を考えると、歪硬化を塑性歪エネルギーの関数として考えるのが妥当性のある考え方である。

ここで注意すべきことは体積変化を許さないときは等値塑性歪および塑性歪エネルギーは形の変化によるものであったが、体積変化を許すときは体積変化による塑性歪履歴および塑性歪エネルギーと形の変化による等値塑性歪及び塑性歪エネルギーに分けて考えた方がよい。これは我々の取扱う木粉質軟岩、ロックフルダム等では明らかに体積変化により歪硬化を生じている場合が多いからである。そこで

$$(\alpha \bar{\epsilon}_s^P)^2 = \frac{2}{3} \{ \alpha \epsilon_{ij}^P \cdot \alpha \epsilon_{ij}^P \} \\ (\alpha \bar{\epsilon}_b^P)^2 = 9 \{ \alpha \epsilon^P \}^2$$

$$\begin{aligned} \text{或は } dW_S^P = & (a_{11}\delta x^2 + a_{22}\delta y^2 + a_{33}\delta z^2 + 2a_{44}\tau_{yz}^2 + 2a_{55}\tau_{zx}^2 + 2a_{66}\tau_{xy}^2 \\ & + (a_{12}+a_{21})\delta x'\delta y' + (a_{23}+a_{32})\delta y'\delta z' + (a_{31}+a_{13})\delta z'\delta x')d\lambda \\ dW_B^P = & \sigma(a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z)d\lambda \end{aligned}$$

とし

$$\left. \begin{aligned} f(I_1, I_2, F_1(\int d\bar{E}_S^P), F_2(\int d\bar{E}_S^P)) &= 0 \\ \text{又は } f(K_1, K_2, F_1(\int dW_B^P), F_2(\int dW_B^P)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とすれば、これが歪硬化を考えたときの降伏条件となる。

## 5. 異方性弾性体への有限要素法の適用

後述するように、塑性理論を有限要素法に適用する場合に異方性弾性体の有限要素法による解法を知っておく必要がある。そこでこれについて以下簡単に述べることにする。

一般に有限要素法は

- (i) 各要素の剛性マトリックスを求める。( $[K]$ )
  - (ii) 各要素の変位変換マトリックスを求める。( $[a]$ )
  - (iii) 剛性マトリックスと変位変換マトリックスとから剛性集積マトリックスを求める。( $[a]^T[K][a]$ )
  - (iv) 剛性集積マトリックスの逆マトリックスを求め、各節点の変位を求める。
  - (v) 各節点の変位から各要素の歪と相対変位を求める。
  - (vi) 各要素の相対変位各要素の応力を求める。
- の6段階の手続から成っている。このうち(i)と(vi)以外は一般の等方性体の場合と全く同一の手続で行い得るので(i)と(vi)についてのみ述べることにする。

### 5.1. 剛性マトリックス

先づ剛性マトリックスについて述べる。またここでは二次元問題についてのみ述べることにする。

- (i) 異方性弾性体における四角形要素の剛性マトリックス

異方性弾性体における Hook の法則は二次元問題では

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$

さてパターンとしては歪をとり

$$\varepsilon_x = m + \frac{2y}{b}n \quad \varepsilon_y = p + \frac{2x}{a}q \quad \tau_{xy} = r$$

とする。即ち

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 & 2y/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

このとき剛性マトリックスは

$$[K_r] = \frac{t}{4ab} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}b^2C_{11} - ab(C_{13} + C_{31}) + a^2C_{33} & -\frac{2}{3}b^2C_{11} + ab(C_{13} + C_{31}) - a^2C_{33} & \frac{2}{3}b^2C_{11} + ab(C_{13} + C_{31}) - a^2C_{33} & \frac{4}{3}b^2C_{11} - ab(C_{13} + C_{31}) + a^2C_{33} & abC_{21} - a^2C_{23} - b^2C_{31} + abC_{33} & -abC_{21} + a^2C_{23} + b^2C_{31} - abC_{33} \\ -\frac{2}{3}b^2C_{11} + ab(C_{13} + C_{31}) - a^2C_{33} & \frac{4}{3}b^2C_{11} - ab(C_{13} + C_{31}) + a^2C_{33} & -abC_{21} + a^2C_{23} + b^2C_{31} - abC_{33} & -\frac{2}{3}b^2C_{11} + ab(C_{13} + C_{31}) - a^2C_{33} & abC_{21} - a^2C_{23} - b^2C_{31} + abC_{33} & -abC_{21} + a^2C_{23} + b^2C_{31} - abC_{33} \\ abC_{21} - a^2C_{23} - b^2C_{31} + abC_{33} & -abC_{21} + a^2C_{23} + b^2C_{31} - abC_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} - ab(C_{23} + C_{32}) + b^2C_{33} & abC_{21} + a^2C_{23} - b^2C_{31} - abC_{33} & \frac{2}{3}a^2C_{22} + abC_{23} - abC_{32} - b^2C_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} - ab(C_{23} + C_{32}) + b^2C_{33} \\ \frac{2}{3}b^2C_{11} - ab(C_{13} - C_{31}) - a^2C_{33} & -\frac{4}{3}b^2C_{11} + ab(C_{13} - C_{31}) + a^2C_{33} & abC_{21} + a^2C_{23} - b^2C_{31} - abC_{33} & \frac{4}{3}b^2C_{11} - ab(C_{13} + C_{31}) + a^2C_{33} & abC_{21} + a^2C_{23} - b^2C_{31} - abC_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} + abC_{23} - abC_{32} - b^2C_{33} \\ abC_{21} - a^2C_{23} + b^2C_{31} - abC_{33} & -abC_{21} + a^2C_{23} - b^2C_{31} + abC_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} + abC_{23} - abC_{32} - b^2C_{33} & abC_{21} + a^2C_{23} - b^2C_{31} - abC_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} + abC_{23} - abC_{32} - b^2C_{33} & \frac{4}{3}a^2C_{22} + ab(C_{23} + C_{32}) + b^2C_{33} \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。

(ii) 異方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックス。

三角形要素の頂点の座標を  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$  とする。

今

$$a_j = x_j - x_i \quad b_j = y_j - y_i$$

$$a_k = x_k - x_i \quad b_k = y_k - y_i$$

とする。三角形要素のときの自由度は 3 であるからパターンとして

$$\varepsilon_x = m \quad \varepsilon_y = n \quad \gamma_{xy} = p$$

とする。即ち

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$$

このとき剛性マトリックスは

$$[K_r] = \frac{t}{2(a_j b_k - a_k b_j)} \begin{bmatrix} C_{11} b_k^2 - (C_{13} + C_{31}) a_k b_k + C_{33} a_k^2 & -C_{11} b_j b_k + C_{13} a_k b_j + C_{31} a_j b_k - C_{33} a_j a_k & C_{21} a_j b_k - C_{23} a_j a_k - C_{31} b_j b_k + C_{33} a_k b_j \\ -C_{11} b_j b_k + C_{13} a_j b_k + C_{31} a_k b_j - C_{33} a_j a_k & C_{11} b_j^2 - (C_{13} + C_{31}) a_j b_j + C_{33} a_j^2 & -C_{12} a_j b_j + C_{13} b_j^2 + C_{32} a_j^2 - C_{33} a_j b_j \\ C_{21} a_j b_k - C_{23} a_j a_k - C_{31} b_j b_k + C_{33} a_k b_j & -C_{12} a_j b_j + C_{13} b_j^2 + C_{32} a_j^2 - C_{33} a_j b_j & C_{22} a_j^2 - (C_{23} + C_{32}) a_j b_j + C_{33} b_j^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。

## 5.2 応力計算

次に各節点の相対変位から応力を求める計算について述べる。

### (i) 四角形要素の場合

今各節点の相対変位  $\{v\}$  とすれば応力  $\{\sigma\}$  は

$$\{\sigma\} = [Ge] \{v\}$$

$$[Ge] = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} (b-2y)C_{11} - aC_{13} & -(b+2y)C_{11} + aC_{13} & (a-2x)C_{12} - bC_{13} \\ (b-2y)C_{21} - aC_{23} & -(b+2y)C_{21} + aC_{23} & (a-2x)C_{22} - bC_{23} \\ (b-2y)C_{31} - aC_{33} & -(b+2y)C_{31} + aC_{33} & (a-2x)C_{32} - bC_{33} \\ (b+2y)C_{11} + aC_{13} & (a+2x)C_{12} + bC_{13} & \\ (b+2y)C_{21} + aC_{23} & (a+2x)C_{22} + bC_{23} & \\ (b+2y)C_{31} + aC_{33} & (a+2x)C_{32} + bC_{33} & \end{bmatrix} \quad (32)$$

にて表わされる。

(ii) 三角形要素の場合

$$\{Ge\} = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} \begin{bmatrix} b_k C'_{11} - a_k C'_{13} & -b_j C'_{11} + a_j C'_{13} & a_j C'_{12} - b_j C'_{13} \\ b_k C'_{21} - a_k C'_{23} & -b_j C'_{21} + a_j C'_{23} & a_j C'_{22} - b_j C'_{23} \\ b_k C'_{31} - a_k C'_{33} & -b_j C'_{31} + a_j C'_{33} & a_j C'_{32} - b_j C'_{33} \end{bmatrix} \quad (33)$$

となる。

6. 体積変化をもとむ直交異方性弾塑性体の剛性マトリックス (1)

——降伏条件がNadaiの説を拡張した降伏条件式に従うとき——

さて塑性歪の増分と応力の関係が(12)式で表わされ、降伏条件がNadaiの説拡張したものに従うときの剛性マトリックスを求めてみよう。

降伏条件式は(28)式から

$$f(I_1, I_2, F_1(\int d\bar{\epsilon}_s^p), F_2(\int d\bar{\epsilon}_s^p)) = 0$$

であり、塑性領域ではこの関係を満足していなければならないから、降伏条件式を微分した式を満足するような応力の増分が現れなければならない。

こゝで

$$d\bar{\epsilon}_s^p = (a_1 d\bar{\epsilon}_x + a_2 d\bar{\epsilon}_y + a_3 d\bar{\epsilon}_z) d\lambda$$

$$\begin{aligned} (d\bar{\epsilon}_s^p)^2 &= \frac{2}{3} \{ d\epsilon'_{ij} d\epsilon'_{ij} \} \\ &= \frac{2}{3} [(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z')^2 + (a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' + a_{23} d\bar{\epsilon}_z')^2 \\ &\quad + (a_{31} d\bar{\epsilon}_x' + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z')^2 + 2a_{44} \tau_{yz}^2 + 2a_{55} \tau_{zx}^2 + 2a_{66} \tau_{xy}^2] (d\lambda)^2 \\ &= \frac{4}{3} I_2 (d\lambda)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial f}{\partial I_2} dI_2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial F_1} F_1' (a_1 d\bar{\epsilon}_x + a_2 d\bar{\epsilon}_y + a_3 d\bar{\epsilon}_z) + 2 \frac{\partial f}{\partial F_2} F_2' \sqrt{\frac{I_2}{3}} \right] d\lambda = 0 \quad (34)$$

$$dI_1 = b_1 d\bar{\epsilon}_x + b_2 d\bar{\epsilon}_y + b_3 d\bar{\epsilon}_z$$

$$\begin{aligned} dI_2 &= [a_{11}(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z') + a_{21}(a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' + a_{23} d\bar{\epsilon}_z') + a_{31}(a_{31} d\bar{\epsilon}_x' \\ &\quad + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z')] d\bar{\epsilon}_x' + [a_{12}(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z') + a_{22}(a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' + a_{23} d\bar{\epsilon}_z') \\ &\quad + a_{32}(a_{31} d\bar{\epsilon}_x' + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z')] d\bar{\epsilon}_y' + [a_{13}(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z') \\ &\quad + a_{23}(a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' + a_{23} d\bar{\epsilon}_z') + a_{33}(a_{31} d\bar{\epsilon}_x' + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z')] d\bar{\epsilon}_z' \\ &\quad + 2a_{44} \tau_{yz} d\tau_{yz} + 2a_{55} \tau_{zx} d\tau_{zx} + 2a_{66} \tau_{xy} d\tau_{xy} \\ &= \frac{1}{3} \{ (2a_{11} - a_{12} - a_{13})(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z') + (2a_{21} - a_{22} - a_{23})(a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' \\ &\quad + a_{23} d\bar{\epsilon}_z') + (2a_{31} - a_{32} - a_{33})(a_{31} d\bar{\epsilon}_x' + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z') \} d\bar{\epsilon}_x \\ &\quad + \frac{1}{3} \{ (-a_{11} + 2a_{12} - a_{13})(a_{11} d\bar{\epsilon}_x' + a_{12} d\bar{\epsilon}_y' + a_{13} d\bar{\epsilon}_z') + (-a_{21} + 2a_{22} - a_{23})(a_{21} d\bar{\epsilon}_x' + a_{22} d\bar{\epsilon}_y' \\ &\quad + a_{23} d\bar{\epsilon}_z') + (-a_{31} + 2a_{32} - a_{33})(a_{31} d\bar{\epsilon}_x' + a_{32} d\bar{\epsilon}_y' + a_{33} d\bar{\epsilon}_z') \} d\bar{\epsilon}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \{ (-a_{11} - a_{12} + 2a_{13})(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z) + (-a_{21} - a_{22} + 2a_{23})(a_{21}\delta'_x + a_{22}\delta'_y \\
& + a_{23}\delta'_z) + (-a_{31} - a_{32} + 2a_{33})(a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z) \} d\delta_z \\
& + 2a_{44} \tau_{yz} d\tau_{yz} + 2a_{55} \tau_{zx} d\tau_{zx} + 2a_{66} \tau_{xy} d\tau_{xy}
\end{aligned}$$

さて

$$P_1 = b_1 \frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial I_2} \{ (2a_{11} - a_{12} - a_{13})(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z) + (2a_{21} - a_{22} - a_{23})(a_{21}\delta'_x \\
+ a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z) + (2a_{31} - a_{32} - a_{33})(a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z) \}$$

$$P_2 = b_2 \frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial I_2} \{ (-a_{11} + 2a_{12} - a_{13})(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z) + (-a_{21} + 2a_{22} - a_{23})(a_{21}\delta'_x \\
+ a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z) + (-a_{31} + 2a_{32} - a_{33})(a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z) \}$$

$$P_3 = b_3 \frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial I_2} \{ (-a_{11} - a_{12} + 2a_{13})(a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z) + (-a_{21} - a_{22} + 2a_{23})(a_{21}\delta'_x \\
+ a_{22}\delta'_y + a_{23}\delta'_z) + (-a_{31} - a_{32} + 2a_{33})(a_{31}\delta'_x + a_{32}\delta'_y + a_{33}\delta'_z) \}$$

$$P_4 = 2a_{44} \frac{\partial f}{\partial I_2} \tau_{yz}$$

$$P_5 = 2a_{55} \frac{\partial f}{\partial I_2} \tau_{zx}$$

$$P_6 = 2a_{66} \frac{\partial f}{\partial I_2} \tau_{xy}$$

とすると

$$\begin{aligned}
& P_1 d\delta_x + P_2 d\delta_y + P_3 d\delta_z + P_4 d\tau_{yz} + P_5 d\tau_{zx} + P_6 d\tau_{xy} + \left[ \frac{\partial f}{\partial F_1} F_1'(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z) \right. \\
& \left. + 2 \frac{\partial f}{\partial F_2} F_2' \sqrt{\frac{I_2}{3}} \right] d\lambda = 0
\end{aligned} \quad (36)$$

さて弾性領域では

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (37)$$

とすると

$$d\varepsilon_x^e = d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_x - \{ (a_{11}\delta'_x + a_{12}\delta'_y + a_{13}\delta'_z) + \frac{1}{3}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + a_3\delta_z) \} d\lambda \quad (38)$$

であるから (36), (37), (38) 式から

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= P_1 C'_{11} + P_2 C'_{12} + P_3 C'_{13} \\
 Q_2 &= P_1 C'_{12} + P_2 C'_{22} + P_3 C'_{23} \\
 Q_3 &= P_1 C'_{13} + P_2 C'_{23} + P_3 C'_{33} \\
 Q_4 &= 2P_4 C'_{44} \\
 Q_5 &= 2P_5 C'_{55} \\
 Q_6 &= 2P_6 C'_{66}
 \end{aligned} \right\} (39)$$

$$\begin{aligned}
 S &= Q_1 (a_{11}\delta x' + a_{12}\delta y' + a_{13}\delta z') + Q_2 (a_{21}\delta x' + a_{22}\delta y' + a_{23}\delta z') + Q_3 (a_{31}\delta x' + a_{32}\delta y' \\
 &\quad + a_{33}\delta z') + \frac{1}{3} \{ P_1 (C'_{11} + C'_{12} + C'_{13}) + P_2 (C'_{12} + C'_{22} + C'_{23}) + P_3 (C'_{13} + C'_{23} + C'_{33}) \} \\
 &\quad (a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z) + Q_4 a_{44} \tau_{yz} + Q_5 a_{55} \tau_{zx} + Q_6 a_{66} \tau_{xy} \\
 &\quad - \frac{\partial f}{\partial F_1} F_1' (a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z) - 2 \frac{\partial f}{\partial F_2} F_2' \sqrt{\frac{x_e}{3}} \quad (40)
 \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
 S d\lambda &= Q_1 d\epsilon_x + Q_2 d\epsilon_y + Q_3 d\epsilon_z + Q_4 d\epsilon_{yz} + Q_5 d\epsilon_{zx} + Q_6 d\epsilon_{xy} \\
 d\sigma_x &= C'_{11} (d\epsilon_x - d\epsilon_x^p) + C'_{12} (d\epsilon_y - d\epsilon_y^p) + C'_{13} (d\epsilon_z - d\epsilon_z^p)
 \end{aligned}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 &= C'_{11} (a_{11}\delta x' + a_{12}\delta y' + a_{13}\delta z') + C'_{12} (a_{21}\delta x' + a_{22}\delta y' + a_{23}\delta z') \\
 &\quad + C'_{13} (a_{31}\delta x' + a_{32}\delta y' + a_{33}\delta z') + \frac{1}{3} (C'_{11} + C'_{12} + C'_{13}) (a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z) \\
 R_2 &= C'_{12} (a_{11}\delta x' + a_{12}\delta y' + a_{13}\delta z') + C'_{22} (a_{21}\delta x' + a_{22}\delta y' + a_{23}\delta z') \\
 &\quad + C'_{23} (a_{31}\delta x' + a_{32}\delta y' + a_{33}\delta z') + \frac{1}{3} (C'_{12} + C'_{22} + C'_{23}) (a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z) \\
 R_3 &= C'_{13} (a_{11}\delta x' + a_{12}\delta y' + a_{13}\delta z') + C'_{23} (a_{21}\delta x' + a_{22}\delta y' + a_{23}\delta z') \\
 &\quad + C'_{33} (a_{31}\delta x' + a_{32}\delta y' + a_{33}\delta z') + \frac{1}{3} (C'_{13} + C'_{23} + C'_{33}) (a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z) \\
 R_4 &= 2 C'_{44} a_{44} \tau_{yz} \\
 R_5 &= 2 C'_{55} a_{55} \tau_{zx} \\
 R_6 &= 2 C'_{66} a_{66} \tau_{xy}
 \end{aligned} \right\} (41)$$

とあけは

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{R_1 Q_1}{S} & C_{12} - \frac{R_2 Q_2}{S} & C_{13} - \frac{R_3 Q_3}{S} & -\frac{R_1 Q_4}{2S} & -\frac{R_1 Q_5}{2S} & -\frac{R_1 Q_6}{2S} \\ C_{12} - \frac{R_2 Q_1}{S} & C_{22} - \frac{R_2 Q_2}{S} & C_{23} - \frac{R_2 Q_3}{S} & -\frac{R_2 Q_4}{2S} & -\frac{R_2 Q_5}{2S} & -\frac{R_2 Q_6}{2S} \\ C_{13} - \frac{R_3 Q_1}{S} & C_{23} - \frac{R_3 Q_2}{S} & C_{33} - \frac{R_3 Q_3}{S} & -\frac{R_3 Q_4}{2S} & -\frac{R_3 Q_5}{2S} & -\frac{R_3 Q_6}{2S} \\ -\frac{R_4 Q_1}{S} & -\frac{R_4 Q_2}{S} & -\frac{R_4 Q_3}{S} & C_{44} - \frac{R_4 Q_4}{2S} & -\frac{R_4 Q_5}{2S} & -\frac{R_4 Q_6}{2S} \\ -\frac{R_5 Q_1}{S} & -\frac{R_5 Q_2}{S} & -\frac{R_5 Q_3}{S} & -\frac{R_5 Q_4}{2S} & C_{55} - \frac{R_5 Q_5}{2S} & -\frac{R_5 Q_6}{2S} \\ -\frac{R_6 Q_1}{S} & -\frac{R_6 Q_2}{S} & -\frac{R_6 Q_3}{S} & -\frac{R_6 Q_4}{2S} & -\frac{R_6 Q_5}{2S} & C_{66} - \frac{R_6 Q_6}{2S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (42)$$

となる。(41)式を塑性領域における各応力状態において求め、これを(29)式に対応するものとして有限要素法に適用すれば計算し得る。

## 7. 体積変化をともなう直交異方性弾塑性体の剛性マトリックス(2)

— 降伏条件が Hencky の説を拡張した降伏条件式に従う場合 —

この場合には

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial K_1} dK_1 + \frac{\partial f}{\partial K_2} dK_2 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_1} F_1 \delta (a_1 d\sigma_x + a_2 d\sigma_y + a_3 d\sigma_z) + 2 \frac{\partial f}{\partial F_2} F_2 K_2 \right\} d\lambda = 0 \\ & dK_1 = (b_1 d\sigma_x + b_2 d\sigma_y + b_3 d\sigma_z) \delta + (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) d\sigma \\ & = \left\{ b_1 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} d\sigma_x + \left\{ b_2 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} d\sigma_y \\ & \quad + \left\{ b_3 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} d\sigma_z \\ & dK_2 = \frac{1}{2} \{ (a_{11} \delta x' + a_{12} \delta y' + a_{13} \delta z') + (a_{11} \delta x' + a_{21} \delta y' + a_{31} \delta z') \} d\sigma_x' \\ & \quad + \frac{1}{2} \{ (a_{12} \delta x' + a_{22} \delta y' + a_{32} \delta z') + (a_{21} \delta x' + a_{22} \delta y' + a_{23} \delta z') \} d\sigma_y' \\ & \quad + \frac{1}{2} \{ (a_{13} \delta x' + a_{23} \delta y' + a_{33} \delta z') + (a_{31} \delta x' + a_{32} \delta y' + a_{33} \delta z') \} d\sigma_z' \\ & \quad + 2a_{44} \tau_{yz} d\tau_{yz} + 2a_{55} \tau_{zx} d\tau_{zx} + 2a_{66} \tau_{xy} d\tau_{xy} \end{aligned}$$

今(35)式の代りに

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial f}{\partial K_1} \left\{ b_1 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial K_2} \{ (4a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{13} - a_{31}) \delta x' \\ & \quad + (2a_{12} + 2a_{21} - 2a_{22} - a_{23} - a_{32}) \delta y' + (2a_{13} + 2a_{31} - a_{23} - a_{32} - 2a_{33}) \delta z' \} \\ P_2 &= \frac{\partial f}{\partial K_1} \left\{ b_2 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial K_2} \{ (-2a_{11} + 2a_{12} + 2a_{21} - a_{13} - a_{31}) \delta x' \\ & \quad + (-a_{12} - a_{21} + 4a_{22} - a_{32} - a_{23}) \delta y' + (-a_{13} - a_{31} + 2a_{23} + 2a_{32} - 2a_{33}) \delta z' \} \\ P_3 &= \frac{\partial f}{\partial K_1} \left\{ b_3 \delta + \frac{1}{3} (b_1 \delta x + b_2 \delta y + b_3 \delta z) \right\} + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial K_2} \{ (-2a_{11} - a_{12} - a_{21} + 2a_{13} + 2a_{31}) \delta x' \\ & \quad + (-a_{12} - a_{21} - 2a_{22} + 2a_{23} + 2a_{32}) \delta y' + (-a_{13} - a_{31} - a_{23} - a_{32} + 4a_{33}) \delta z' \} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} P_4 &= 2A_{44} \tau_{yz} \\ P_5 &= 2A_{55} \tau_{zx} \\ P_6 &= 2A_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (43)$$

とおきかえ更に、(40)式の代りに

$$\begin{aligned} S = & Q_1(A_{11}\bar{\tau}_x + A_{12}\bar{\tau}_y + A_{13}\bar{\tau}_z) + Q_2(A_{21}\bar{\tau}_x + A_{22}\bar{\tau}_y + A_{23}\bar{\tau}_z) + Q_3(A_{31}\bar{\tau}_x + A_{32}\bar{\tau}_y \\ & + A_{33}\bar{\tau}_z) + \frac{1}{3}[P_1(C_{11} + C_{12} + C_{13}) + P_2(C_{12} + C_{22} + C_{23}) + P_3(C_{13} + C_{23} + C_{33})] \\ & \times (A_{11}\bar{\tau}_x + A_{22}\bar{\tau}_y + A_{33}\bar{\tau}_z) + Q_4A_{44}\tau_{yz} + Q_5A_{55}\tau_{zx} + Q_6A_{66}\tau_{xy} \\ & - \frac{\partial f}{\partial F_1} F_1' \bar{\tau} (A_{11}\bar{\tau}_x + A_{22}\bar{\tau}_y + A_{33}\bar{\tau}_z) - 2 \frac{\partial f}{\partial F_2} F_2' K_2 \end{aligned} \quad (44)$$

とおきかえれば (42) 式により計算し得る。

## 8. 体積変化をともなう等方性弾塑性体の解法

我々が取扱う土の分野で体積変化をともなう等方性弾塑性理論を適用するといふと考えられるものとして、

(a) フルタイプダム

(b) 岩片自身が軟かく非弾性的な性質を示し、キレツの存在の影響の少ない軟岩

(c) 土

等であるがこのうち土については間隙水圧の影響が著しく、むしろ Biot の多孔質理論と弾塑性理論とを組合せたものにより取扱う方がよいと考えられるのでこゝでは除外することにする。

軟岩については前述したように、降伏条件としてはエネギーに着目した Hencky の説を拡張したものを用い、歪硬化については歪エネギーに着目したものを用いるのがよいと考えられる。また、固結度の低い軟岩では変形により、非可逆的な変形が生ずると考えられており、この体積変化により圧密硬化が生じていることは知られている。

またフィルタイプダムについては降伏条件としては摩擦説に着目した *Nadai* の説を拡張したものを用い、歪硬化については等値塑性歪に着目したものをを用いるのが適当であろう。この場合にも当然 塑性的な変形により明らかに体積変化は生じており歪硬化が体積変化に強く支配されていることはフィル材料の空隙率によりせん断摩擦係数が変化している実験結果<sup>(7)</sup>より明らかであるが塑性せん断歪エネルギーの変化が歪硬化にどのような影響を与えているかについては未だ明らかでない。

そこで解法としては塑性的な変形により体積変化が生じ歪硬化は体積変化と塑性せん断歪エネルギーの変化により生ずるものについて示すことにする。

### 8.1. 塑性歪増分と応力との関係

等方性体の場合に(15)式から明らかなように

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = 1$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = \bar{\epsilon}$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$$

従ってこの場合には *Nadai* の説を拡張した降伏条件と *Hencky* の説を拡張した降伏条件とは一致する。

### 8.2. 降伏条件式

一般式に降伏条件は三軸圧縮試験または一面せん断試験により粘着力  $C$  と内部摩擦角  $\phi$  とを求め

$$\tau_{\alpha\beta} = C + \bar{\sigma}_{\alpha} \tan \phi \quad (45)$$

の形で表わしている。等方性体の場合にはこれを不変量化して表わす必要がある。そこで三軸圧縮試験或いは一面せん断試験の結果を不変量化して表わすとしたらどのような式になるかについて検討してみよう。

(i) 三軸圧縮試験

三軸圧縮試験では

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

Mohr の円が包絡線に接

する点では

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \phi$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \phi$$

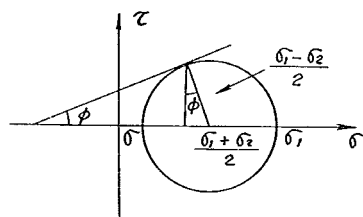


図 - 3

これを (45) 式に代入して

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cos^2 \phi = 2C \cos \phi + \{(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \phi\} \sin \phi$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2C \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi$$

$$\sigma_2 = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_1 - 2C \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{(3 - \sin \phi) \sigma_1 - 4C \cos \phi}{3(1 + \sin \phi)}$$

$$\therefore \sigma'_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\therefore \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \{ \sigma'^2_1 + \sigma'^2_2 + \sigma'^2_3 \} = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{9} \left( \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi} \right)^2$$

$$= 4 \left( \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi} \right)^2$$

$$\bar{\sigma} = 2 \frac{\sigma_1 \sin \phi + C \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

$$\therefore \sigma'_1 = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \quad \sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{1}{3} \bar{\sigma}$$

$$\sigma_1 = +\frac{2}{3} \bar{\sigma} + \bar{\sigma}$$

$$3(1 + \sin \phi) \bar{\sigma} = (3 - \sin \phi) \left( \bar{\sigma} + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \right) - 4C \cos \phi$$

$$\left( 1 - \frac{1}{3} \sin \phi \right) \bar{\sigma} - 2\bar{\sigma} \sin \phi = 2C \cos \phi$$

$$\bar{\sigma} = \frac{6}{3 - \sin \phi} (\bar{\sigma} \sin \phi + C \cos \phi) \quad (46)$$

(11) 一面せん断試験

一面せん断試験においては  $\sigma_x, \tau_{xy}$  は夫々一面せん断の垂直応力、せん断応力である。この他  $\sigma_y$  が存在する筈であるが、これは明らかに  $\tau_{xy}$  と関係がある筈である。一般に一面せん断試験においては集中応力が生じ、 $\sigma_y, \tau_{xy}$  は一様な分布をしていない。この集中応力を考慮して降伏条件を求めることは困難であるので静定化して扱うことにする。即ち  $\tau_{xy}$  はせん断断面内に一様に分布し、 $\sigma_y$  は  $\tau_{xy}$  に比例するとする。即ち、

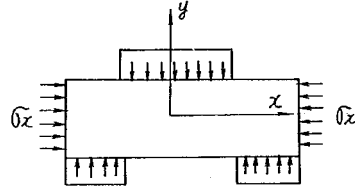


図 - 4

$$\sigma_y = \alpha \tau_{xy}$$

この  $\alpha$  は光弾性実験等により定めればよいが、簡単には次のようにして求めることも可能である。今直接せん断をかける載荷板の広さを  $B$  試験体の断面積を  $A$  とすれば外力  $P$  は

$$P = A \tau_{xy} = B \sigma_y$$

従って  $\sigma_y = \frac{A}{B} \tau_{xy}$

しかし、この  $\sigma_y$  は載荷板下で生じせん断面の反対側では  $\sigma_y = 0$  である。故にせん断面上の  $\sigma_y$  は

$$\sigma_y = \frac{A}{2B} \tau_{xy}$$

にて近似出来る。即ち、

$$\alpha \doteq \frac{A}{2B}$$

さて  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  以外は 0 と考え得るから

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_x + \alpha \tau_{xy})$$

$$\bar{\sigma}'_x = \frac{1}{3} (2\bar{\sigma}_x - \alpha \tau_{xy})$$

$$\bar{\sigma}'_y = -\frac{1}{3} (\bar{\sigma}_x - 2\alpha \tau_{xy})$$

$$\bar{\sigma}'_z = -\frac{1}{3} (\bar{\sigma}_x + \alpha \tau_{xy})$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \{ \bar{\sigma}_x'^2 + \bar{\sigma}_y'^2 + \bar{\sigma}_z'^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \}$$

$$= \bar{\sigma}_x^2 - \alpha \bar{\sigma}_x \tau_{xy} + \alpha^2 \tau_{xy}^2 + 3\tau_{xy}^2 = (\bar{\sigma}_x + \alpha \tau_{xy})^2 + 3\tau_{xy}(\tau_{xy} - \alpha \bar{\sigma}_x)$$

降伏時には

$$\tau_{xy} = C + \bar{\sigma}_x \tan \phi$$

であるから

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \{ (1 + \alpha \tan \phi) \bar{\sigma}_x + \alpha C \}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{1 + \alpha \tan \phi} (3\bar{\sigma} - \alpha C)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{1 + \alpha \tan \phi} (C + 3\bar{\sigma} \tan \phi)$$

$$\therefore \bar{\sigma}^2 = 9\bar{\sigma}^2 + \frac{3}{(1 + \alpha \tan \phi)^2} \{ 9\bar{\sigma}^2 \tan \phi (\tan \phi - \alpha) - 3\bar{\sigma} C \{ \alpha - (2 + \alpha^2) \tan \phi \} + C^2 (1 + \alpha^2) \}$$

即ち

$$\bar{\sigma}^2 - 9\bar{\sigma}^2 - \frac{3}{(1 + \alpha \tan \phi)^2} \{ 9\bar{\sigma}^2 \tan \phi (\tan \phi - \alpha) - 3\bar{\sigma} C \{ \alpha - (2 + \alpha^2) \tan \phi \} + C^2 (1 + \alpha^2) \} = 0 \quad (47)$$

以上において注目すべきことは (46), (47) 式は中間主応力が降伏条件に影響を与えるという立場に立って求めていることである。この仮定は金属、コンクリート岩片等においては妥当性を有するものとされているが、フィルタイプダム等において妥当性を有するか否かは未だ明らかでない。しかし Tresca の降伏条件が不

変量で表言するときに複雑になるので、その近似として *Mises* が  $J_2' = \sigma^2$  なる降伏条件を提案し、これによる差が最大 15% であるとしたことを考えるならば、降伏条件が中間主応力に無関係であったとしても、(46), (47) 式は  $J_2'$  を含まない表示であるため簡単な表示であり、且つその差は小さいと考えられる。

次に歪硬化について考察してみよう。一般に歪硬化の現われ方としては次の5通りが考えられる。

- (a) 歪硬化により粘着力  $C$  のみが変化する場合
- (b) 歪硬化により内部摩擦角  $\phi$  のみが変化する場合
- (c) 歪硬化により  $C$  と  $\tan \phi$  が一定の比で変化する場合
- (d) 粘着力  $C$  が塑性的な形の変化により歪硬化を生じ、内部摩擦係数  $\tan \phi$  が塑性体積変化により歪硬化を生ずる場合
- (e) 粘着力  $C$  が塑性体積変化により歪硬化を生じ、内部摩擦係数  $\tan \phi$  が塑性的な形の変化により歪硬化を生ずる場合

これらの5通りの考え方に対する降伏条件式を考える当って簡単のために

$$F(\int d\bar{\epsilon}^p) = F_1(\int d\bar{\epsilon}_s^p) + F_2(\int d\bar{\epsilon}_s^p)$$

と書くことにする。

さて(a)の場合について考察してみよう。一般に金属等の体積変化をともしない塑性変形の降伏条件としては

$$\bar{\sigma} = F_2(\int d\bar{\epsilon}_s^p)$$

なる式が用いられており、歪硬化により粘着力  $C$  のみが変化するという考え方は金属等の降伏条件を括

張したものといえる。この場合、金属の降伏条件から類推して、歪硬化は塑性せん断歪エネルギーの変化が主役を演ずるものと考えられる。この場合の降伏条件式は  $C, \phi$  が三軸圧縮試験により求められたときは

$$\bar{\sigma} = \frac{6}{3 \sec \phi - \tan \phi} [\sigma \tan \phi + F(\int d\bar{\epsilon}^p)]$$

これを  $I_1, I_2$  で表わせれば  $b_1 = b_2 = b_3 = 1/3$  とすれば

$$I_2 - \frac{12}{(3 \sec \phi - \tan \phi)^2} [I_1 \tan \phi + F(\int d\bar{\epsilon}^p)]^2 = 0 \quad (48a)$$

また  $K_1, K_2$  で表わせれば

$$K_2 - \frac{12}{(3 \sec \phi - \tan \phi)^2} [\sqrt{K_1} \tan \phi + F(\int d\bar{w}^p)]^2 = 0 \quad (48b)$$

尚、 $F(0) = C$  とするものとする。

また  $C, \phi$  が一面せん断試験により求められたとき

$$I_2 - 3I_1^2 - \frac{1}{(1 + \alpha \tan \phi)^2} \{ 9I_1^2 \tan \phi (\tan \phi - \alpha) - 3I_1 [\alpha - (2 + \alpha^2) \tan \phi] \times$$

$$F(\int d\bar{\epsilon}^p) + \{ F(\int d\bar{\epsilon}^p) \}^2 (1 + \alpha^2) \} = 0 \quad (49a)$$

$$K_2 - 3K_1 - \frac{1}{(1 + \alpha \tan \phi)^2} \{ 9K_1 \tan \phi (\tan \phi - \alpha) - 3\sqrt{K_1} [\alpha - (2 + \alpha^2) \tan \phi] \times$$

$$\times F(\int d\bar{w}^p) + \{ F(\int d\bar{w}^p) \}^2 (1 + \alpha^2) \} = 0 \quad (49b)$$

(b)についてはフィルタイプダムのフィル材料のせん断摩擦係数は空隙率により変化するという実験結果にもとずいて立てられた考え方であるが、この場合粘着力  $C$  はいづれも極めて小さい場合について実験されているので、粘着力が歪硬化を受けないか否かははっきりしない。この場合にはせん断摩擦係数と空隙率とが関係づけられていることから考えて、歪硬化は塑性体積変化歪エネルギーの変化が主役を演ずるものと考えられる。

この場合の降伏条件式は  $C, \phi$  が三軸圧縮試験により求められているときは

$$I_2 - \frac{12}{\{3\sqrt{1+[F(d\bar{E}^p)]^2} - F(d\bar{E}^p)\}^2} \{I_1 F(d\bar{E}^p) + C\}^2 = 0 \quad (50a)$$

または

$$K_2 - \frac{12}{\{3\sqrt{1+[F(dw^p)]^2} - F(dw^p)\}^2} \{\sqrt{K_1} F(dw^p) + C\}^2 = 0 \quad (50b)$$

また  $C, \phi$  が一面せん断試験により求められているときは

$$I_2 - 3I_1^2 - \frac{1}{\{1 + \alpha F(d\bar{E}^p)\}^2} \{9I_1^2 F(d\bar{E}^p) \{F(d\bar{E}^p) - \alpha\} - 3I_1 C \{\alpha - (2 + \alpha^2) F(d\bar{E}^p)\} + C^2 (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (51a)$$

または

$$K_2 - 3K_1 - \frac{1}{\{1 + \alpha F(dw^p)\}^2} \{9K_1 F(dw^p) \{F(dw^p) - \alpha\} - 3\sqrt{K_1} C \{\alpha - (2 + \alpha^2) F(dw^p)\} + C^2 (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (51b)$$

尚  $F(0) = \tan \phi$  とするものとする。

(c) については (a) と (b) とを組合せた考え方で  $C$  と  $\tan \phi$  とが比例して変化すると考えたものである。この場合の降伏条件式は  $C, \phi$  が三軸圧縮試験により求められているときは

$$I_2 - \frac{12\{F(d\bar{E}^p)\}^2}{\{3\sqrt{1+[F(d\bar{E}^p)]^2} - F(d\bar{E}^p)\}^2} (I_1 + C')^2 = 0 \quad (52a)$$

または

$$K_2 - \frac{12\{F(dw^p)\}^2}{\{3\sqrt{1+[F(dw^p)]^2} - F(dw^p)\}^2} (\sqrt{K_1} + C')^2 = 0 \quad (52b)$$

また  $C, \phi$  が一面せん断試験により求められているときには

$$I_2 - 3I_1^2 - \frac{F(d\bar{E}^p)}{\{1 + \alpha F(d\bar{E}^p)\}^2} \{9I_1^2 \{F(d\bar{E}^p) - \alpha\} - 3I_1 C' \{\alpha - (2 + \alpha^2) F(d\bar{E}^p)\} + C'^2 F(d\bar{E}^p) (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (53a)$$

または

$$K_2 - 3K_1 - \frac{F(\int dW^P)}{\{1 + \alpha F(\int dW^P)\}^2} \{9K_1 \{F(\int dW^P) - \alpha\} - 3K_1 C' \{\alpha - (2 + \alpha^2) F(\int dW^P)\} + C'^2 F(\int dW^P) (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (53.b)$$

こゝに  $C' = C / \tan \phi$ ,  $F(\alpha) = \tan \phi$  とするものとする。

(d) はこれら 5通りの考え方の中で物理的にも数学的にも最も考え易いものである。即ち前述したように粘着力の歪硬化に対しては塑性せん断歪エネルギーの変化が主役を演じ、せん断摩擦係数の歪硬化に対しては塑性体積変化歪エネルギーの変化が主役を演ずると考えられ、更に数学的には  $J_2$  はせん断歪エネルギーに比例し、 $\sigma^2$  は塑性体積変化歪エネルギーに比例することから考えてもこの考え方は理解し易いものである。

この場合の降伏条件式は、 $C, \phi$  が三軸圧縮試験により求められたときは

$$I_2 - \frac{I_2^2}{\{3\sqrt{1 + \{F_1(\int d\bar{E}_B^P)\}^2} - F_1(\int d\bar{E}_B^P)\}^2} \{I_1 F_1(\int d\bar{E}_B^P) + F_2(\int d\bar{E}_B^P)\}^2 = 0 \quad (54.a)$$

または

$$K_2 - \frac{I_2^2}{\{3\sqrt{1 + \{F_1(\int dW_B^P)\}^2} - F_1(\int dW_B^P)\}^2} \{\sqrt{K_1} \cdot F_1(\int dW_B^P) + F_2(\int dW_B^P)\}^2 = 0 \quad (54.b)$$

また  $C, \phi$  が一面せん断試験により求められたときは

$$I_2 - 3I_1^2 - \frac{I_1}{\{1 + \alpha F_1(\int d\bar{E}_B^P)\}^2} \{9I_1^2 F_1(\int d\bar{E}_B^P) \{F_1(\int d\bar{E}_B^P) - \alpha\} - 3I_1 \{\alpha - (2 + \alpha^2) F_1(\int d\bar{E}_B^P)\} F_2(\int d\bar{E}_B^P) + \{F_2(\int d\bar{E}_B^P)\}^2 (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (55.a)$$

または

$$K_2 - 3K_1 - \frac{I_1}{\{1 + \alpha F_1(\int dW_B^P)\}^2} \{9K_1 F_1(\int dW_B^P) \{F_1(\int dW_B^P) - \alpha\} - 3\sqrt{K_1} \{\alpha - (2 + \alpha^2) F_1(\int dW_B^P)\} F_2(\int dW_B^P) + \{F_2(\int dW_B^P)\}^2 (1 + \alpha^2)\} = 0 \quad (55.b)$$

但し  $F_1(0) = \tan \phi$ ,  $F_2(0) = C$  とする。

(e) は物理的にも数学的にも考え難いので、この場合は取扱わないことにする。

このように  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  が定められ、降伏条件が与えられれば、(41) 式又は (44) 式から解が求められる。

## 9. 直交異方性軟岩の解法

こゝで取扱う軟岩は固結度が低くキレツの影響がほとんどなく、堆積状況により異方性を示すもので、新第三期の堆積岩等にみられるものである。

この場合にはエネルギーに着目した降伏条件を用いるのが妥当と思われる。

係数としては  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  の 18ヶある。

このうち  $a_1, a_2, a_3$  は夫々  $x, y, z$  方向の載荷したときの体積変化により定められる。

また  $x, y, z$  軸に着目した一軸圧縮試験により、各々の方向の降伏主応力、 $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$  の面に対する一面せん断試験より各面の  $C, \phi$  が求められれば  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$  とし、(48b) ~ (55b) を適用すれば 6ヶの条件式が与えられる。この外

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33}$$

なる条件がある。そこで  $a_{rs} = a_{st}$  とし、

更に  $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0$  とすれば未知数 9ヶに対し条件式も 9ヶとなり、全部の係数が定め得る。故に Hill が行なっているように、

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_x^P \\ d\epsilon_y^P \\ d\epsilon_z^P \\ d\epsilon_{yz}^P \\ d\epsilon_{zx}^P \\ d\epsilon_{zy}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H+G+\frac{1}{3}a_1 & -H+\frac{1}{3}a_2 & -G+\frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3) \\ -H+\frac{1}{3}a_1 & F+H+\frac{1}{3}a_2 & -F+\frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3) \\ -G+\frac{1}{3}a_1 & -F+\frac{1}{3}a_2 & F+G+\frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3) \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma \end{pmatrix} d\lambda \quad (56)$$

として、即

$$a_{11} = H+G \quad a_{12} = -H \quad a_{13} = -G \quad a_{44} = 2L$$

$$a_{21} = -H \quad a_{22} = F+H \quad a_{23} = -F \quad a_{55} = 2M$$

$$a_{31} = -G \quad a_{32} = -F \quad a_{33} = G+F \quad a_{66} = 2N$$

とし、これら  $H, G, F, L, M, N, a_1, a_2, a_3$  を定めれば計算し得る。

#### 10. 直交異方性弾塑性理論の岩盤への適用

3節より7節まで筆者は現在の塑性理論が数学的にどの程度拡張可能であるか、また拡張したものを有限要素法を用いて解析することが可能であるかについて検討を加え、その方法を述べて来た。特に降伏条件については、等方性体においては(17)、(18)式が用いられるが、これに対しNadaiの解釈とHenckyの解釈とがあり、これを直交異方性体に拡張するときは、各々異った降伏条件式を与えるが、前者は摩擦説的な立場に立ち、後者はエネルギー説的な立場に立ったものと云い得る。

現在単結晶体、多結晶体に対する塑性理論の降伏条件は、エネルギー説にもとずいて体系化されていることを考えるならば、固結した材料に対してはエネルギー説にもとずいた降伏条件により解法を検討すべきであろう。しかし、岩盤の特性は岩盤内にキレツが存在し、キレツ面沿にすべりが生ずることにより現れると考えられていることに着目するならば、このようなすべりに対する降伏条件は摩擦説により組立てた方が理解し易い。

4節にも述べたようにエネルギー説にもとずいて降伏

条件を組立てる場合には降伏条件式を体積変化塑性歪エネルギーとせん断塑性歪エネルギーとの関数として表示する必要がある。しかし、摩擦説にもとずくときは必ずしも(26)式に示したような $I_1, I_2$ の関数として表示する必要はない。一方等方性体の場合には降伏条件式は不変量により表示する必要がある。(17), (18)式はエネルギー説的な立場からの降伏条件の表示であると同時に、摩擦説の立場に立った場合でも、(17), (18)式はTresca又はCoulomb-Mohrの降伏条件にもとずくときは降伏条件式に $J_2$ が現われ数学的に極めて複雑になるに対し、近似的に簡単化したものとしての意味を持つ。しかし、異方性体の場合には降伏条件式を不変量化して表示する必要はないので、摩擦説的な立場に立つ限り(28)式の降伏条件式を用いる必要はないと考えられる。

そこで岩盤に直交異方性弾塑性理論を適用するに当って摩擦説的な立場に立ち、(28)式の降伏条件式を離れ、そのすべり方に応じて別個の降伏条件式を与え、これらを組合せて岩盤の解法を試みることにする。

さて2節に述べたように岩盤のモデルパターンとしては5種類が考えられるが、これを扱うには表-2から次の7通りの取扱いについて検討を加える必要がある。

- (i)  $y$ 方向にのみすべる場合
- (ii)  $x$ 方向にのみすべる場合
- (iii)  $x, y$ 方向にのみすべる場合

(iv)  $y$  軸に垂直な方向に開口し、この空隙がつまるか開く方向の塑性的な変形と  $x$  方向へのすべりが生ずる場合。

(v)  $x$  軸に垂直な方向に開口し、この空隙がつまるか開く方向の塑性的な変形と  $y$  方向へのすべりが生ずる場合。

(vi) (iv) の場合に更に  $x$  方向へのすべりも追加して生ずる場合。

(vii) (v) の場合に更に  $y$  方向へのすべりも追加して生ずる場合。

この各々について検討を加えることにする。

10.1 一般的な降伏条件式に対する剛性マトリックス  
前述したように異方性体で降伏条件が摩擦説にもとづく場合には降伏条件式は (28) 式の形に表言する必要はなく、より一般的な形で表言してさしつかえない。即ち

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = 0 \quad (57)$$

なる形が考えられて来る。ここで歪硬化について考察してみよう。

岩盤の場合に  $x = \text{const}$  或は  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  の面におけるすべり或はこれらの面に直交する方向の塑性的な体積変化を考える必要がある。これらの面における塑性的な変形による歪硬化は異なる筈であるから、歪硬化関数は各々の面により分けて考える必要がある。また岩盤のように三つの直交する面における塑性的な変形を摩擦論的に考える場合には偏差直応力による塑性的な変形は考えなくて

もよいから

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = 0$$

とする。

さて、先ず  $z = \text{const}$  の面における歪硬化について考えてみよう。

この面での体積変化は明らかに

$$dx \bar{E}_B^P = a_1 dx d\lambda$$

であり、この面での形の塑性的な変化による等値塑性歪の増分は

$$(dx \bar{E}_S^P)^2 = \{ (a_{55} \cdot \tau_{zx})^2 + (a_{66} \cdot \tau_{zy})^2 \} (d\lambda)^2$$

これによる歪硬化関数としては

$$\text{体積変化に対して} \quad x F_1(\int dx \bar{E}_B^P)$$

$$\text{形の変化に対して} \quad x F_2(\int dx \bar{E}_S^P)$$

が考えられて来る。これと同様な歪硬化関数は  $y = \text{const}$ 、

$z = \text{const}$  の面にも考えられて来るから、一括して書くと

$x = \text{const}$  の面において

$$\text{体積変化による歪硬化関数として } x F_1(\int dx \bar{E}_B^P)$$

$x = \text{const}$  の面において

$$\text{形の変化による歪硬化関数として } x F_2(\int dx \bar{E}_S^P)$$

$y = \text{const}$  の面における

$$\text{体積変化による歪硬化関数として } y F_1(\int dy \bar{E}_B^P)$$

$y = \text{const}$  の面における

$$\text{形の変化による歪硬化関数として } y F_2(\int dy \bar{E}_S^P)$$

$z = \text{const}$  の面における

$$\text{体積変化による歪硬化関数として } z F_1(\int dz \bar{E}_B^P)$$

$z = \text{const}$  の面における

$$\text{形の変化による歪硬化関数として } z F_2(\int dz \bar{E}_S^P)$$

(50)

但し

$$\left. \begin{aligned} d\bar{E}_B^p &= a_1 \delta x d\lambda \\ d\bar{E}_B^p &= a_2 \delta y d\lambda \\ d\bar{E}_B^p &= a_3 \delta z d\lambda \\ (d\bar{E}_S^p)^2 &= \{a_{55}^2 \tau_{zz}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2\} (d\lambda)^2 \\ (d\bar{E}_S^p)^2 &= \{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2\} (d\lambda)^2 \\ (d\bar{E}_S^p)^2 &= \{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{55}^2 \tau_{xz}^2\} (d\lambda)^2 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

とする。これらの歪硬化を考えた場合に降伏条件は

$$f(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, xF_1(\int d\bar{E}_B^p), xF_2(\int d\bar{E}_S^p), yF_1(\int d\bar{E}_B^p), yF_2(\int d\bar{E}_S^p), zF_1(\int d\bar{E}_B^p), zF_2(\int d\bar{E}_S^p)) = 0 \quad (60)$$

と表わされる。

(60)式にて降伏条件が表わされる場合の解法を検討してみよう。塑性領域では(60)式を満足して、応力の増分は現れるから

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_x} d\bar{\sigma}_x + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_y} d\bar{\sigma}_y + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_z} d\bar{\sigma}_z + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \\ & + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x F_1} \cdot x F_1' \cdot a_1 \delta x + \frac{\partial f}{\partial y F_1} \cdot y F_1' \cdot a_2 \delta y + \frac{\partial f}{\partial z F_1} \cdot z F_1' \cdot a_3 \delta z + \frac{\partial f}{\partial x F_2} \cdot x F_2' \cdot \sqrt{a_{55}^2 \tau_{zz}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial y F_2} \cdot y F_2' \cdot \sqrt{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2} + \frac{\partial f}{\partial z F_2} \cdot z F_2' \cdot \sqrt{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{55}^2 \tau_{xz}^2} \right\} d\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_x &= C'_{11} d\bar{E}_x^e + C'_{12} d\bar{E}_y^e + C'_{13} d\bar{E}_z^e \\ &= C'_{11} d\bar{E}_x + C'_{12} d\bar{E}_y + C'_{13} d\bar{E}_z - \frac{1}{3}(C'_{11} + C'_{12} + C'_{13})(a_1 \delta x + a_2 \delta y + a_3 \delta z) d\lambda \end{aligned}$$

であるから、今

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_x} C'_{11} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_y} C'_{12} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_z} C'_{13} \\ Q_2 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_x} C'_{12} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_y} C'_{22} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_z} C'_{23} \\ Q_3 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_x} C'_{13} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_y} C'_{23} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_z} C'_{33} \\ Q_4 &= 2 \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} C'_{44} \\ Q_5 &= 2 \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} C'_{55} \\ Q_6 &= 2 \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} C'_{66} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{3} \left( \frac{\partial f}{\partial \delta x} (C_{11} + C'_{12} + C'_{13}) + \frac{\partial f}{\partial \delta y} (C'_{12} + C'_{22} + C'_{23}) + \frac{\partial f}{\partial \delta z} (C'_{13} + C'_{23} + C'_{33}) \right) (a_1 \delta x \\
& + a_2 \delta y + a_3 \delta z) + Q_4 a_{44} \tau_{yz} + Q_5 a_{55} \tau_{zx} + Q_6 a_{66} \tau_{xy} \\
& - \frac{\partial f}{\partial x F_1} \cdot x F_1' \cdot a_1 \delta x - \frac{\partial f}{\partial y F_1} \cdot y F_1' \cdot a_2 \delta y - \frac{\partial f}{\partial z F_1} \cdot z F_1' \cdot a_3 \delta z \\
& - \frac{\partial f}{\partial x F_2} \cdot x F_2' \sqrt{a_{55}^2 \tau_{zx}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2} - \frac{\partial f}{\partial y F_2} \cdot y F_2' \sqrt{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{66}^2 \tau_{xy}^2} \\
& - \frac{\partial f}{\partial z F_2} \cdot z F_2' \sqrt{a_{44}^2 \tau_{yz}^2 + a_{55}^2 \tau_{zx}^2} \quad (62)
\end{aligned}$$

とあくと

$$Q_1 d\epsilon_x + Q_2 d\epsilon_y + Q_3 d\epsilon_z + Q_4 d\epsilon_{yz} + Q_5 d\epsilon_{zx} + Q_6 d\epsilon_{xy} - S d\lambda = 0$$

$$\therefore d\lambda = \frac{1}{3} (Q_1 d\epsilon_x + Q_2 d\epsilon_y + Q_3 d\epsilon_z + Q_4 d\epsilon_{yz} + Q_5 d\epsilon_{zx} + Q_6 d\epsilon_{xy})$$

今

$$\left. \begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{35} (C_{11} + C'_{12} + C'_{13}) (a_1 \delta x + a_2 \delta y + a_3 \delta z) \\
R_2 &= \frac{1}{35} (C'_{12} + C'_{22} + C'_{23}) (a_1 \delta x + a_2 \delta y + a_3 \delta z) \\
R_3 &= \frac{1}{35} (C'_{13} + C'_{23} + C'_{33}) (a_1 \delta x + a_2 \delta y + a_3 \delta z) \\
R_4 &= \frac{2}{5} C_{44} a_{44} \tau_{yz} \\
R_5 &= \frac{2}{5} C_{55} a_{55} \tau_{zx} \\
R_6 &= \frac{2}{5} C_{66} a_{66} \tau_{xy}
\end{aligned} \right\} \quad (63)$$

とすれば

$$\begin{bmatrix} d\delta x \\ d\delta y \\ d\delta z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - R_1 Q_1 & C'_{12} - R_1 Q_2 & C'_{13} - R_1 Q_3 & -\frac{1}{2} R_1 Q_4 & -\frac{1}{2} R_1 Q_5 & -\frac{1}{2} R_1 Q_6 \\ C'_{12} - R_2 Q_1 & C'_{22} - R_2 Q_2 & C'_{23} - R_2 Q_3 & -\frac{1}{2} R_2 Q_4 & -\frac{1}{2} R_2 Q_5 & -\frac{1}{2} R_2 Q_6 \\ C'_{13} - R_3 Q_1 & C'_{23} - R_3 Q_2 & C'_{33} - R_3 Q_3 & -\frac{1}{2} R_3 Q_4 & -\frac{1}{2} R_3 Q_5 & -\frac{1}{2} R_3 Q_6 \\ -R_4 Q_1 & -R_4 Q_2 & -R_4 Q_3 & C_{44} - \frac{R_4 Q_4}{2} & -\frac{1}{2} R_4 Q_5 & -\frac{1}{2} R_4 Q_6 \\ -R_5 Q_1 & -R_5 Q_2 & -R_5 Q_3 & -\frac{1}{2} R_5 Q_4 & C_{55} - \frac{R_5 Q_5}{2} & -\frac{1}{2} R_5 Q_6 \\ -R_6 Q_1 & -R_6 Q_2 & -R_6 Q_3 & -\frac{1}{2} R_6 Q_4 & -\frac{1}{2} R_6 Q_5 & C_{66} - \frac{R_6 Q_6}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\epsilon_{yz} \\ d\epsilon_{zx} \\ d\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (64)$$

が得られる。これを(29)式に対応するものとして有限要素法に適用すれば、計算し得る。

10.2  $x = \text{const}$  の面において  $y$  方向にのみすべりを生ずる場合

この場合には

$$a_{44} = a_{55} = 0 \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad a_{66} = 1$$

$$xF_1(\int dx \bar{E}_B^P) = yF_1(\int dy \bar{E}_B^P) = yF_2(\int dy \bar{E}_S^P) = zF_1(\int dz \bar{E}_B^P)$$

$$= zF_2(\int dz \bar{E}_S^P) = 0$$

とする。降伏条件は

$$f = \tau_{xy}^2 - (\sigma_x \tan \phi_x + Cx)^2 \quad (65)$$

にて表わされる。尚歪硬化については 8 節に述べた 5 通りの考え方から

$$\left. \begin{aligned} (a) f &= \tau_{xy}^2 - [\sigma_x \tan \phi_x + xF_2(\int dx \bar{E}_S^P)]^2 & xF_2(0) &= Cx \\ (b) f &= \tau_{xy}^2 - [\sigma_x \{xF_2(\int dx \bar{E}_S^P)\} + Cx]^2 & xF_2(0) &= \tan \phi_x \\ (c) f &= \tau_{xy}^2 - (\sigma_x + C'x)^2 xF_2(\int dx \bar{E}_S^P)^2 & xF_2(0) &= \tan \phi_x \\ & & C'x &= \frac{Cx}{\tan \phi_x} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

尚 (d) は (a) と一致し (e) は (b) と一致する。

これらの降伏条件のうちいづれかをとり、 $xF_2$  を適当に仮定することにより (64) 式から解が求められる。

10.3  $y = \text{const}$  の面で  $x$  方向へのすべりのみが生ずる場合  
この場合にも  $a_{44} = a_{55} = 0$   $a_1 = a_2 = a_3 = 0$   $a_{66} = 1$  とし  
歪硬化がない場合の降伏条件は

$$f = \tau_{xy}^2 - (\sigma_y \tan \phi_y + Cy)^2 \quad (67)$$

にて表わされるが、歪硬化を考えると (66) 式は類似した 3 通りの降伏条件式を考えることが出来る。

10.4  $x = \text{const}$  の面において  $y$  方向のすべりと  $y = \text{const}$  の面において  $x$  方向のすべりとが同時に生ずる場合  
この場合にも  $a_{44} = a_{55} = 0$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $a_{66} = 1$  とし  
歪硬化がない場合の降伏条件式は

$$f = \{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x \tan \phi_x + Cx)^2\} + \{\tau_{xy}^2 - (\sigma_y \tan \phi_y + Cy)^2\}^2 \quad (68)$$

にて表わされるが、歪硬化を考えると(66)式と類似した通りの降伏条件式を考えることが出来る。

10.5  $x = \text{const}$ の面が開口し、この空隙がつまるか、開く方向の塑性的な変形と $y$ 方向へのすべりが生ずる場合

この場合には

$$a_{66} = 1, a_{11} = 1, a_{44} = a_{55} = a_{22} = a_{33} = 0$$

とする。またこの場合には $y = \text{const}$ の面には直応力もせん断応力も存在しないから降伏条件式としては

$$f = \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2 \quad (69)$$

となる。このような変形においては歪硬化は考えられないし、以後の歪硬化もこの状態に入った前と後では現象的な連続性はなくなるので、この状態に入った時点で $x F_1(\int dx \bar{E}_B^b), x F_2(\int dx \bar{E}_S^b)$ を0とし、この状態から別の状態に入った時点から $x F_1(\int dx \bar{E}_B^b), x F_2(\int dx \bar{E}_S^b)$ を考えていく必要がある。

10.6  $y = \text{const}$ の面が開口し、この空隙がつまるか開く方向の塑性的な変形と $x$ 方向へのすべりが生ずる場合

この場合には

$$a_{66} = a_{22} = 1, a_{44} = a_{55} = a_{11} = a_{33} = 0$$

とし、降伏条件式を

$$f = \tau_{xy}^2 + \sigma_y^2 \quad (70)$$

とする以外は全く前項と同じである。

10.7  $y = \text{const}$  の面に空隙があるか、開口し、この空隙が  
 つまるか、開く方向の塑性的な変形と  $x$  方向へのす  
 べりが生ずると共に  $x = \text{const}$  な面に  $y$  方向のすべ  
 りが生ずる場合

この場合には  $y = \text{const}$  の面に  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$  となり、  
 $x = \text{const}$  の面では

$$\tau_{xy} = C_y + \sigma_y \tan \phi_y$$

とならなければならない。これは理論的には  $y = \text{const}$   
 の面と  $x = \text{const}$  の面が共に開口する場合にしか起  
 り得ない。この場合には

$$a_{66} = a_{11} = a_{22} = 1 \quad a_{44} = a_{55} = a_{33} = 0$$

とし、降伏条件は

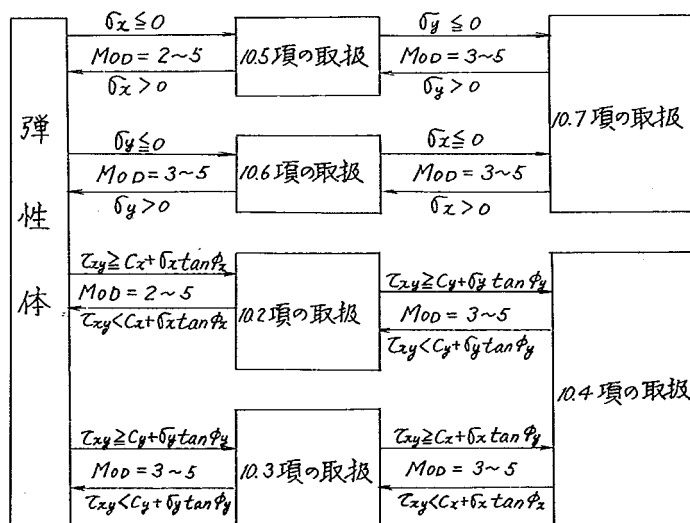
$$f = \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

となる。以外の取扱は 10.6 項と同じである。

## 10.8 各種モデルパターンに対する解法

2 節に述べた各種モデルパターンの取扱いについて図式  
 的に示せば表-2 の如くである。

表-2



尚  $Mod=4$  の場合には  $y = const$  の面のキレツは互違になっているので或る程度すべりを生ずると、すべりは生じなくなる。この場合には、この面でのすべりによる歪硬化がすべりにより急激に増加するようにすればよい。即ち

$$y F_2(\int dy \bar{E}_s^p) = a_y (\int dy \bar{E}_s^p)^n + k_y$$

として  $n$  を大きな正数にとればよい。

同様に  $Mod=5$  の場合には  $y = const$  の面のキレツも、 $x = const$  の面のキレツも互違になっているので

$$y F_2(\int dy \bar{E}_s^p) = a_y (\int dy \bar{E}_s^p)^n + k_y$$

$$x F_2(\int dx \bar{E}_s^p) = a_x (\int dx \bar{E}_s^p)^m + k_x$$

として  $n, m$  を大きな正数にとればよい。

以上の岩片自身は硬く弾性的であってキレツが直交してある場合の取扱いについて述べて来た。しかし、岩片も軟く塑性的な変形を生じ、更にキレツがある場合、或は断層等が存在する場合についても 9 節に述べた方法と併用することにより解き得ると考えられる。

### 参考文献

- (1) "岩盤力学" 土木学会 P.77
- (2) Love "Mathematical Theory of Elasticity" P.99
- (3) Hill "Plasticity" P.320
- (4) Nadai "Theory of Flow and Fracture of Solid Body" P.231
- (5) 伊東茂富 "組合せ応力におけるコンクリートの強度について"  
土木研究所報告 Vol.100 1959 Jan.
- (6) Hill "Plasticity" P.50
- (7) 吉川五生, 遠山武羅夫 "魚梁瀬ロックフィルダム"  
発電水力 No.76  
上野 勇, 楠本 明 "長野ロックフィルダム"  
発電水力 No.93.