

土 木 研 究 所 資 料

第 470 号

**BERECHNUNG DER TORSION
DES STAHLBETONKASTENTRÄGER**

—— 鉄筋コンクリート箱げたの振りの計算 ——

昭和 44 年 5 月

建設省土木研究所コンクリート研究室

はじめに

薄肉閉じ断面を有する箱げたは、T型ばり等にくらべ大きな捩れ剛性を有することは知られている。これは一定間隔に配された横補剛材により（鋼箱げた）、または断面自身の横曲げ剛度（鉄筋コンクリート箱げた）により達せられる。捩れを解析する計算理論としては、棒理論と曲げ振り理論（拘束振り）とがあり、普通橋梁構造には曲げ振り理論が用いられる。しかしこれは2次の剪断による変形を無視している。最近この2次の剪断変形を考慮した曲げ振り理論が研究されており（例えばW.Z.Wlassow, Benscotter）、これを考慮すると短形断面の箱げたについての計算では6階の微分方程式に、変形角の決定方程式は4階の微分方程式になるので、計算がかなり2次の剪断変形を無視したものにくらべ複雑となる。が、2次の剪断変形を考慮した場合にはかなり大きな反り応力が生ずることも計算で示されている。

鉄筋コンクリート箱げたでは、曲げ振り理論による計算は鋼箱げたにおけるようにはなされておらないが多い。しかし最近のように鉄筋コンクリート箱げた（P C箱げたをも含めて）はかなりスレンダーな箱断面を採用し、剪断変形が生じやすい断面となつてゐる折りから、かなりの大きな剪断応力を受ける断面もあるので（例えば連続げた中間支点上の上フランジのつけ根部断面）、2次の剪断変形を考慮しないまでも曲げ振り理論による箱げたの振り計算を行つて応力チェックを行う方が望ましい。振りの計算はいろいろな方法があるが、どちらかと云うと理論的解説の方が多くて、実際の数値計算は、誰れでもが理解出来る程、簡単でないのが実状であるので、以下に数値計算の便を考慮して、2次の剪断変形を無視した場合について理論とその数値計算（電子計算機による）の例を示して曲げ捩れ理論を理解していただこうと考える。曲げ捩れ理論を習熟しておくこと又は円環の曲げ捩れ座屈理論等の理解も容易となりきわめて有効と考える。

コンクリート研究室

佐々木 隆 士 4 3 . 1 0 . 5

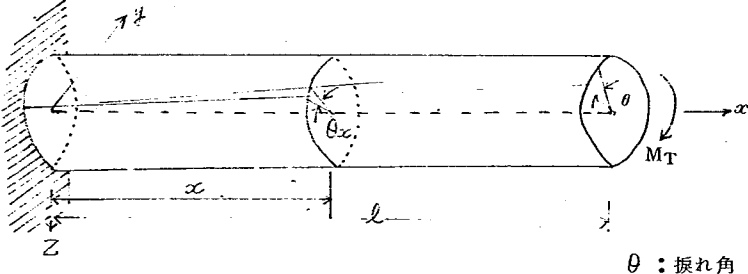
目 次

1	振りの基本概念-----	1
1. 1	純振り-----	1
1. 2	曲げ振り（拘束振り）-----	4
1. 2. 1	一 殺-----	4
1. 2. 2	反りの中心、剪断中心-----	8
2	微分方程式の解-----	17
3	変断面げたの拘束振りについての微分方程式の解-----	21
3. 2.	弾性格点荷重の計算-----	23
3. 3.	微分方程式の数値計算-----	25
3. 3. 1	片持梁-----	25
3. 3. 2	両端固定梁-----	28
3. 3. 3	中央にヒンジを有する両端固定ばり-----	30
3. 3. 4	一端固定、他端支承ばり-----	30
3. 3.	$\frac{d^2\theta}{dx^2}$ 、 $\frac{d^2Q}{dx^2}$ 、 $\frac{d^2g}{dx^2}$ の計算-----	31
3. 4	まとめ-----	31
4.	閉断面薄肉ばりの剪断変形を考慮した振り-----	32
5.	数値計算例-----	42
6.	振れに関する参考文献-----	51
7.	附 録-----	54

1. 振りの基本概念

1.1 純振り

一般にけたまたは棒に振りモーメント M_T が働くとき、断面は軸方向の単位長につき $d\theta/dx$ なる角変化が生じ



θ : 振れ角

図-1

$$G \cdot I_t \cdot d\theta/dx = M_T \quad \text{----- (1)}$$

が成り立つ

ここに I_t : 振り断面モーメント

G : 剪断弾性係数

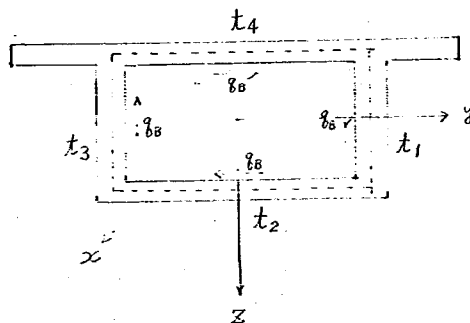
軸方向 (x 方向) に直角な断面では剪断応力のために断面に直角方向の変位が生ずる。これを反りと云い。この反りが自由であるけたでは、軸方向応力 σ_x が生じない。これを純振りと呼んでいる。

I_t は一般に開断面の場合 Saint-Venant の理論により断面を数個の矩形に区分して短辺を $t_1, t_2, \dots$ 、長辺を $b_1, b_2, \dots$ とすると

$$I_t = \sum \gamma_i t_i^3 b_i \quad \text{----- (2)}$$

γ_i は b/t の値によって変化する常数で、Timoshenko により

$$\gamma_i = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1.41}{n^2} \cdot \frac{b}{t} \sum_{i=3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cdot \tanh \frac{n\pi b}{2t} \right) \quad \text{----- (3)}$$



点線で囲まれた面積 = A

図-2

一方閉断面の場合は、その連続性のため箱の部分に2次剪断流 q_B が生ずる。箱部分の任意の一点の捩れ角 θ が、箱断面を一周して同じ点で一致するためには

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t}$$

(1) 式より $M_T / (d\theta/dx) = GIt$, ゆえに

$$It_B = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4A^2}{C} \quad (4)$$

ここに $A = b \cdot h$

$$C = \oint \frac{ds}{t} = \frac{h}{t_1} + \frac{h}{t_3} + \frac{b}{t_2} + \frac{b}{t_4} \quad (5)$$

結局捩り断面二次モーメントは

$$It = It_s + It_B \quad (6)$$

ここに I_{tS} : Saint-Venant 捩り断面二次モーメント

I_{tB} : Bredte 捩り断面二次モーメント

剪断応力 τ は

$$\tau = \tau_S + \tau_B \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_S &= \frac{M_T}{I_{tS}} \cdot t_i \eta_i \\ \tau_B &= \frac{q_B}{t_i} \\ q_B &= \frac{M_T}{I_{tS}} \cdot \frac{2A}{C} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

2室箱げた場合には(図-3)

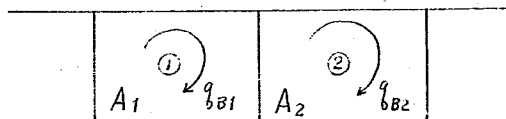


図-3

各箱を一循する剪断流は断面変形が存在しないとすると、箱(1)(2)とも同一の回転角を生じなければならないので、次の連立方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} q_{B1} \int_{(1)} \frac{dS_1}{t} - q_{B2} \int_{(1)(2)} \frac{dS_1}{t} &= q \frac{1g}{dx} \int_{(1)} dS_1 = 2q \frac{dg}{dx} \cdot A_1 \\ q_{B2} \int_{(2)} \frac{dS_2}{t} - q_{B1} \int_{(1)(2)} \frac{dS_2}{t} &= q \frac{1g}{dx} \int_{(2)} dS_2 = 2q \frac{dg}{dx} \cdot A_2 \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

これを解いて、 $q_{B1} = \alpha_1 A_1^2 2q \frac{dg}{dx}$, $q_{B2} = \alpha_2 A_2^2 2q \frac{dg}{dx}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} I_{tB} &= 4 (\alpha_1 A_1^2 + \alpha_2 A_2^2) \\ I_t &= I_{ts} = I_{tB} \\ q_{B1} &= \frac{Mt}{I_t} \cdot 2\alpha_1 A_1 \\ q_{B2} &= \frac{Mt}{I_t} \cdot 2\alpha_2 A_2 \\ \sigma_{ti} &= \frac{b_i}{t_i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

1.2 曲げ振り（拘束振り）

1.2.1 一般

一般にけたの場合、スパン方向変形は拘束されるので、つまり反りが拘束されるので、軸方向応力が生ずる。このような振りを拘束振り（Wolbbehinderte Torsion）と云う。この拘束によつて生ずる反力はスパン方向に無関係に

$$u(s) = \frac{d\theta}{dx} \cdot \varphi(s) \quad \text{-----} \quad (11)$$

ここに $\varphi(s)$: 反り関数

一般に弾性力学におけるひずみと変位との関係から

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{-----} \quad (12)$$

今 s を断面を構成する版の中心線に沿つて右廻りの曲線座標とすると (11)

と (12) 式より

$$\sigma_x(s) = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = E \cdot \frac{d\theta}{dx^2} \varphi(s) \quad \text{-----} \quad (13)$$

の軸応力が生ずることになる。

これに共つて二次剪断流が生じ、今図-4のような薄肉断面を考えれば

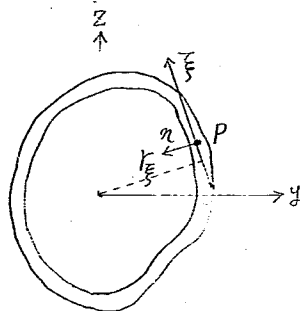


図-4

$$\sigma_\eta - \tau_{x\eta} - \tau_{\eta x} - \tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi} = 0$$

ξ は任意点 P における接線方向、 η はこれに直角方向にとり、微小要素を取り出し均合を考えると

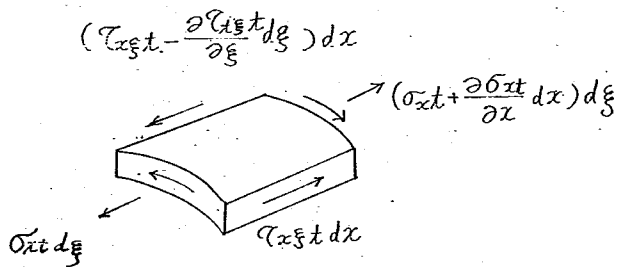


図-5

$$\frac{\partial \sigma_x t}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x\xi} \cdot t}{\partial \xi} = 0 \quad \text{----- (14)}$$

なる関係が導かれるから、今自由端より \$s\$ をとるものとするとき剪断流は

$$\begin{aligned} \bar{q}_s &= \tau_s \cdot t = - \int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot t \cdot ds + \bar{q}_x \\ &= -E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \int_0^s q_s(s) \cdot t \cdot ds + \bar{q}_x = \bar{q}_x + \bar{q}_0 \quad \text{----- (15)} \end{aligned}$$

ここに

$$\bar{q}_0 = -E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \cdot \int_0^s q_s(s) \cdot t \cdot ds \quad \text{----- (16)}$$

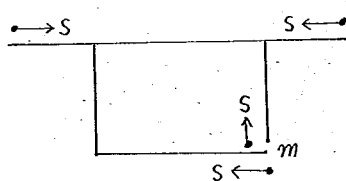


図-6

箱の部分は自由端がないので、 $\bar{q}_0$ を計算する場合、図-6の様に任意の一点 (m) で箱を切断する必要がある。ところがBredteの振りに相当する剪断力に対する剪断変位のみで箱の中での剪断変位は閉じねばならぬので

$$\oint \frac{\tau_s}{q} \cdot ds = \frac{1}{q} \oint \frac{\bar{q}_s}{t} \cdot ds = \frac{1}{q} \left[\oint \frac{\bar{q}_0}{t} ds + \oint \frac{\bar{q}_x}{t} ds \right] = 0$$

$$\bar{q}_x = - \frac{\oint \frac{\bar{q}_0}{t} \cdot ds}{\oint \frac{1}{t} \cdot ds} = - \frac{1}{C} \sum \frac{\bar{Q}_{oi}}{t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

また (16) 式を用いると二次剪断流 $\bar{q}_x$ が求まり

$$\bar{q}_x = E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \cdot \frac{1}{C} \oint \frac{1}{t} \left\{ \int_0^s \zeta(s) t \cdot ds \right\} ds \quad \dots\dots\dots (18)$$

結局剪断流としては

$$\bar{q}_i = \bar{q}_0 + \bar{q}_x \quad \dots\dots\dots (19)$$

これによる各点の剪断応力は

$$\tau_i = \bar{q}_i / t_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

1.2.2 反りの中心、剪断中心

振れモーメント M_T に伴つて断面が、 θ だけ回転すると y 、 z 、方向の変位は

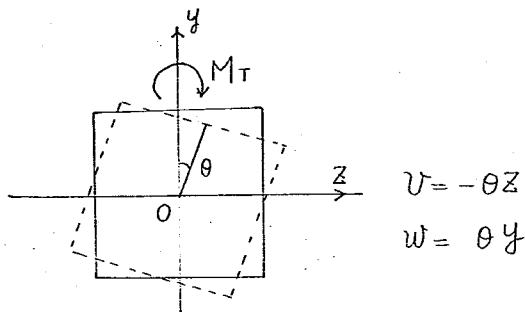


図-7

弾性応力-ひずみ関係より、

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{d\theta}{dx} \cdot z$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{d\theta}{dx} \cdot z$$

一方

$$dy = d\bar{y} \cos(\gamma, \bar{y}) - d\eta \sin(\gamma, \bar{y})$$

$$dz = d\bar{z} \sin(\gamma, \bar{y}) + d\eta \cos(\gamma, \bar{y})$$

座標変換することにより、次の関係が得られる。

$$\delta_{x\xi} = \delta_{xy} \cos(\gamma, \xi) + \delta_{zx} \sin(\gamma, \xi)$$

$$\delta_{x\eta} = -\delta_{xy} \sin(\gamma, \xi) + \delta_{zx} \cos(\gamma, \xi)$$

故に x 方向変位は

$$\begin{aligned} u &= u_A + \int_A^\xi \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz \right) \\ &= u_A + \int_A^\xi \left\{ \delta_{xy} \cos(\gamma, \xi) + \delta_{zx} \sin(\gamma, \xi) + \frac{d\theta}{dx} (z \cos(\gamma, \xi) \right. \\ &\quad \left. - y \sin(\gamma, \xi)) \right\} d\xi \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

閉断面であるから積分を一周すれば左辺は u_A になる故に

$$\frac{\theta}{\tau} \oint \frac{d\xi}{\tau} = 2 \frac{d\theta}{dx} \cdot A \quad \dots\dots\dots (22)$$

(22) を (21) に代入して

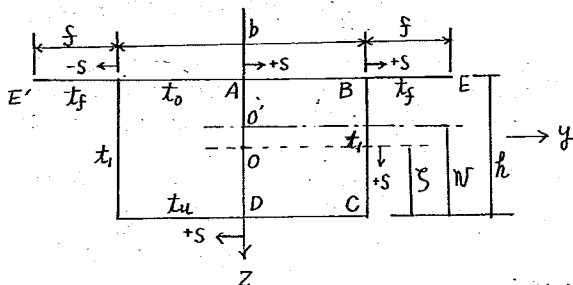
$$\begin{aligned} u &= u_A + \left[\frac{2A}{C} \int_A^\xi \frac{1}{\tau} \cdot d\xi - \int_A^\xi r_\xi d\xi \right] \frac{d\theta}{dx} \\ &= \varphi_\xi \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ゆえに反り関数 $\mathcal{G}_\xi$ は

$$\mathcal{G}_\xi = \mathcal{G}_A + \frac{2A}{C} \int_A^\xi \frac{d\xi}{t} - \int_A^\xi r_\xi d\xi \quad \dots\dots\dots (24)$$

$\xi = s$ として

$$\mathcal{G}_s(s) = \mathcal{G}_A + \frac{2A}{C} \int_A^s \frac{ds}{t} - \int_A^s r_s ds \quad \text{とすると} \dots\dots\dots (25)$$



O : 剪断中心
 σ : 反りの中心

図-8

(25) 式を $A \rightarrow B$ まで周積分すると

$$\left. \begin{aligned} A-B : \mathcal{G}_s(s) &= \frac{2A}{C} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot s - (h-s)s = (x_0 - h + s)s \\ B-C : \mathcal{G}_s(s) &= \frac{2A}{C} \cdot \frac{1}{x_1} \cdot s - \frac{b}{2} s = (x_1 - \frac{b}{2})s \end{aligned} \right\}$$

となり反り関数が求まる。一方軸方向縁応力度は

$\sigma = E d^2 \theta / dx^2 \cdot \varphi(s)$ であるから (26) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= E d^2 \theta / dx^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot (x_u - 5) \\ \sigma_o &= -E d^2 \theta / dx^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot (x_o - h + 5) \\ \sigma_f &= -E d^2 \theta / dx^2 \cdot \left\{ \frac{b}{2} (x_o - h + 5) - f \cdot (h - 5) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

故に反りの中心 W は (27) の応力の均合から求まり

$$W = \frac{\sigma_u}{\sigma_u - \sigma_o} \cdot h = \frac{(x_u - 5)}{(x_u - 5) + (x_o - h + 5)} \cdot h \dots \dots \dots (28)$$

一次剪断流 $\bar{q}_0$ の計算は、今上スラブの中央 x で箱を切断すると、

$$\bar{q}_0 = -E d^3 \theta / dx^3 \int_0^s \varphi(s) x ds \quad \text{であるから}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_3^0 &= t_o \cdot \frac{d\sigma_o}{ds} \cdot \frac{b}{4} = -t_o \cdot \frac{b^2}{8} \cdot (x_u - 5) \cdot E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \\ \bar{q}_4^0 &= t_f \cdot \frac{f}{2} \left(\frac{d\sigma_o}{ds} + \frac{d\sigma_f}{ds} \right) = t_f \cdot \frac{f}{2} \left\{ b(x_o - h + 5) - f \cdot (h - 5) \right\} \cdot E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \\ \bar{q}_2^0 &= \bar{q}_3^0 + \bar{q}_4^0 \\ \bar{q}_1^0 &= \bar{q}_2^0 + t_1 \cdot \frac{d\sigma_o}{ds} \cdot (h - W) \frac{1}{2} - \bar{q}_2^0 - t_1 \cdot \frac{h - W}{2} \cdot b(x_o - h + 5) \cdot E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1^0 &= \bar{q}_0^0 + t_1 h \left(\frac{d\bar{\sigma}_0}{ds} + \frac{d\bar{\sigma}_u}{ds} \right) \frac{1}{2} = \bar{q}_2^0 + t_1 \cdot \frac{bh}{4} \cdot (\gamma u - \gamma_0 + h - 2s) E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \\ y &= t_2 \cdot \frac{d\bar{\sigma}_u}{ds} \cdot \frac{b}{4} = t_2 \cdot \frac{b^2}{8} (\gamma u - 5) \cdot E \frac{d^3 \theta}{dx^3} \end{aligned} \right\}$$

各板に働く剪断力は

$$\left. \begin{aligned} Q_1^0 &= h \cdot \left\{ \bar{q}_2^0 + t_1 \cdot \left(\frac{d\bar{\sigma}_0}{ds} \cdot \frac{h}{3} + \frac{d\bar{\sigma}_1}{ds} \cdot \frac{b}{6} \right) \right\} \\ Q_2^0 &= b \left(\bar{q}_1^0 + y \cdot \frac{2}{3} \right) \\ Q_3^0 &= \bar{q}_3^0 \cdot \frac{b}{3} \\ Q_f^0 &= t_f \cdot s^2 \cdot \left(\frac{d\bar{\sigma}_0}{ds} + 2 \cdot \frac{d\bar{\sigma}_f}{ds} \right) \cdot \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

よつて (30) 式の $\sum Q_i = 0$ の均合いより、剪断中心 s が求まる

$$\frac{Q_2^0}{2} = q_1^0 + \frac{1}{6} t_2 \cdot \frac{d\bar{\sigma}_u}{ds} \cdot b = -s(\alpha + \beta + \gamma) - (\bar{\sigma}_0 - h)\alpha + h \cdot \beta + C \gamma u \dots (31)$$

$$\alpha = \frac{b^2 t_0}{8} + \frac{b t_f \cdot s}{2} + \frac{b \cdot h \cdot t_1}{4}$$

$$\beta = \frac{t_f \cdot s^2}{2}$$

$$\gamma = \frac{b \cdot h \cdot t_1}{4} + \frac{b^2 t_u}{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{2Q_f^0}{2} &= 2 \cdot \frac{t_f \cdot f^2}{6b} \left(\frac{d\sigma_0}{ds} + \frac{d\sigma_f}{ds} \right) = -\frac{t_f \cdot f^2}{2} (\sigma_0 - h + S) + \frac{2 \cdot t_f \cdot f^2}{3b} (h - S) \\ &= -(\sigma_0 - h) \cdot \frac{t_f \cdot f^2}{2} + \frac{2 \cdot t_f \cdot f^3 \cdot h}{3b} - S \cdot \left(\frac{t_f \cdot f^2}{2} + \frac{2 \cdot t_f \cdot f^3}{3b} \right) \dots (v) \end{aligned}$$

$$-\frac{Q_4^0}{b} = -\frac{1}{b} \bar{q}_0 \cdot \frac{b}{3} = (\sigma_0 - h) \cdot \frac{b^2 t_0}{24} + S \cdot \frac{b^2 t_0}{24} \dots (v)$$

剪断中心を

$$S = \frac{B}{A} \dots (31)$$

とおくと

(1)、(v) (ハ) より

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2 t_0}{8} + \frac{b \cdot t_f \cdot f}{2} + \frac{b \cdot h \cdot t_1}{4} + \frac{t_f \cdot f^2}{2} + \frac{b \cdot h \cdot t_1}{4} + \frac{b^2 t}{12} + \frac{t_f \cdot f^2}{2} \\ &+ \frac{2}{3} \cdot \frac{t_f \cdot f^3}{b} - \frac{b^2 t_0}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -(\sigma_0 - h) \left(\frac{b^2 t_0}{8} + \frac{b \cdot t_f \cdot f}{2} + \frac{b \cdot h \cdot t_1}{4} \right) + \frac{t_f \cdot f^2 \cdot h}{2} + \sigma_u \left(\frac{b \cdot h \cdot t_1}{4} \right. \\ &+ \left. \frac{b^2 t_u}{12} \right) = (\sigma_0 - h) \cdot \frac{t_f \cdot f^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t_f \cdot f^3 \cdot h}{b} + (\sigma_0 - h) \cdot \frac{b^2 t_u}{24} \\ &= \frac{b^2 h t_0}{12} + t_f \cdot h \left(\frac{b \cdot h}{2} + f^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2}{b} \right) + t_u \cdot \frac{b h^2}{4} - \frac{t_f \cdot f_0}{2} (b f + f^2) \\ &- t_1 \cdot (\sigma_0 - \sigma_u) \cdot \frac{b h t_1}{4} \dots (32) \end{aligned}$$

拘束振りの場合、Saint-Venant の抵抗振りモーメントを M_{pt} 、二次抵抗モーメントを M_{st} 、とすると、これとけたに働く振りモーメント M_w との間には

$$M_{pt} + M_{st} = M_w \quad \dots\dots\dots (33)$$

なる関係がある。一方

$$M_{st} = \oint_0 \bar{q}_0 r_s \cdot ds$$

であるから $\bar{q}_0 = E \cdot d^3\theta/dx^3 \cdot \int_0^s \varphi(s) \cdot t \cdot ds$ を用いて

$$M_{st} = E d^3\theta/dx^3 \left\{ - \oint_0 r_s ds \cdot \oint_0 \varphi(s) \cdot t \cdot ds + \oint_0 \varphi(s) \cdot t \cdot ds \cdot \int_0^s r_s ds \right\}$$

全断面の平均反りは存在しないので $\int_0^s \varphi(s) \cdot t \cdot ds = 0$ 、また $\oint_0 r_s ds$

は反り関数 $\varphi(s) = 0$ の点より積分すると $-\int_0^s r_s ds = \varphi(s)$

となるので

$$M_{st} = - E d^3\theta/dx^3 \oint_0 \varphi(s)^2 \cdot t \cdot ds$$

$$C_w = - E d^3\theta/dx^3 \cdot C_w \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$C_w = \oint_0 \varphi(s)^2 \cdot t \cdot ds \quad \dots\dots\dots (35)$$

この C_w を拘束振り断面モーメントと呼ぶ。

$$\begin{aligned}
C_w &= \oint q(s)^2 \cdot t \cdot ds = 2 \int_{-(h-w)}^w \left(r_l - \frac{b}{2} \right)^2 t_l s^2 ds + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} t_u \cdot (r_u - s)^2 \cdot s^2 \cdot ds \\
&\quad + \int_0^f \left\{ \frac{b}{2} (r_0 - h + s) - (h - s) \right\}^2 t_f \cdot ds + \int_f^0 \left\{ \frac{b}{2} (r_0 - h + s) + (h - s) \right\} \cdot s^2 \cdot ds \\
&= \frac{2}{3} t_l \left(r_l - \frac{b}{2} \right)^2 [w^3 + (h-w)^3] + \frac{b^3}{12} \{ t_u (r_u - s)^2 + t_0 (r_0 - h + s)^2 \} \\
&\quad + \frac{2}{3} \cdot t_f \cdot (h - s) \cdot f^3 + 2 t_f \left\{ \frac{b^2}{4} (r_0 - h + s)^2 \cdot f - \frac{b}{2} (r_0 - h + s) \cdot (h - s) \cdot f^2 \right\} \dots \dots \dots (36)
\end{aligned}$$

$M_{pt} = G I_t \frac{d\theta}{dx}$ と (34) 式とを (33) 式に代入すると

$$G I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \frac{d^3\theta}{dx^3} \cdot C_w = M_w$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned}
E C_w \frac{d^3\theta}{dx^3} - G I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} + M_w &= 0 \quad \text{または} \quad \dots \dots \dots (37) \\
\frac{d^2}{dx^2} (M_{pt}) - \lambda^2 \cdot M_{pt} + \lambda^2 \cdot M_w &= 0 \quad \dots \dots \dots (38)
\end{aligned} \right\}$$

ここに

$$\lambda = \sqrt{\frac{G I_t}{E C_w}}$$

(37)、(38) 式が拘束振りの基本微分方程式である。

次に剪断応力として、 M_{pt} による一次剪断応力 τ^0 は、純振りとして (7) 式より求めたり

$$\tau^0 = \tau_s^0 + \tau_b^0 \quad \dots \dots \dots (39)$$

拘束振りによる二次剪断応力 $\bar{\tau}$ は (20) 式より求まり結局剪断応力としては

$$\tau = \tau^0 + \bar{\tau} \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。

2 微分方程式の解

振りの計算の場合考えているけたの支承条件に対して、その境界条件の下で (37)、(38) 式を解くといふ、一般にこれらの解はすでに解かれている (例えば参考文献をみよ)。鉄筋コンクリートけたの場合、連続けたの中間支点上の断面、連続ラーメンけたの支柱上断面は一般に剛な横げた対傾向で十分補強されており、振れ角 θ の一階微分が他径間に影響しないとみなしてよく、即ち固定けたとみなしてよい場合がほとんどなので、以下に単純けたと片持梁と固定梁と一端固定他端支承梁のみについて解を示す。

微分方程式を解く場合の境界条件としては

- 1) 単純けた..... $\theta = 0, \quad d\theta/dx = 0$
- 2) 片持梁..... 自由端..... $d^2\theta/dx^2 = 0$
 固定端..... $\theta = 0, \quad d\theta/dx = 0$
- 3) 径間中央..... $\theta_{右} = \theta_{左}$

$$d\theta/dx_{右} = d\theta/dx_{左}$$

$$d^2\theta/dx^2_{右} = d^2\theta/dx^2_{左}$$

- 4) 連続けた中間支承上..... $\theta = 0$

$$d\theta/dx_{右} = d\theta/dx_{左}$$

$$d^2\theta/dx^2_{右} = d^2\theta/dx^2_{左}$$

例 1 単純げた

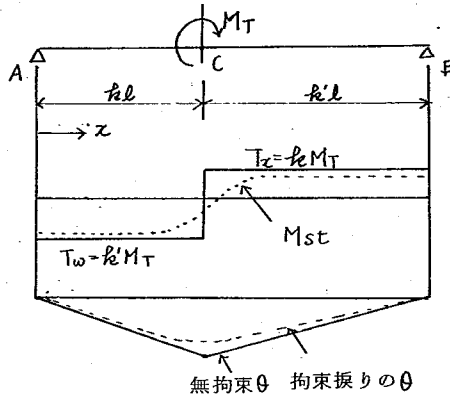


図 - 10

$$A \sim C; M_{pt} = \left[k'l - \frac{\sinh \lambda k'l}{\sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l + \sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l} \cosh \lambda x \right] \cdot M_T$$

$$GI\theta = \left[k'l - \frac{\sinh \lambda k'l}{\sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l + \sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l} \cdot \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} \right] \cdot M_T$$

$$C \sim B; M_{pt} = \left[-k'l + \frac{\sinh \lambda k'l}{\sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l + \sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l} \cosh \lambda (l-x) \right] \cdot M_T$$

$$GI\theta = \left[k'(l-x) - \frac{\sinh \lambda k'l}{\sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l + \sinh \lambda k'l \cdot \cosh \lambda k'l} \cdot \frac{\sinh \lambda (l-x)}{\lambda} \right] \cdot M_T$$

例2 片持梁

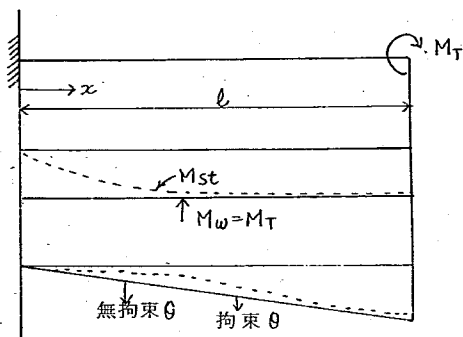


図-1.1

$$M_{pt} = \left[1 - \frac{\cosh \lambda(l-x)}{\cosh \lambda l} \right] \cdot M_T$$

$$GI_t \theta = \left[x - \frac{\sinh \lambda l - \sinh \lambda(l-x)}{\lambda \cosh \lambda l} \right] \cdot M_T$$

例3 両端固定けた

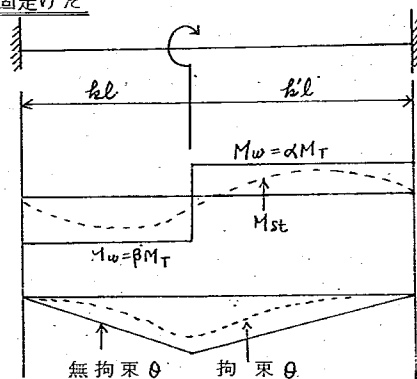


図-1.2

$$\alpha = \frac{\lambda l \sinh \lambda l - (\cosh \lambda l - 1) - (\cosh \lambda l - 1) - (\cosh \lambda l - 1)}{\lambda l \sinh \lambda l - 2(\cosh \lambda l - 1)}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$A \sim C; M_{pt} = [\beta(1 - \cosh \lambda x) - H_1 \sinh \lambda x] \cdot M_T$$

$$C \sim B; M_{pt} = [\alpha(-1 + \cosh \lambda(l-x)) + H_2 \sinh \lambda(l-x)] \cdot M_T$$

$$A \sim C; GI\theta = [\beta(x - \frac{\sinh \lambda x}{\lambda}) - \frac{H_1}{\lambda}(\cosh \lambda x - 1)] \cdot M_T$$

$$C \sim B; GI\theta = [\alpha(l-x - \frac{\sinh \lambda(l-x)}{\lambda}) - \frac{H_2}{\lambda}(\cosh \lambda(l-x) - 1)] \cdot M_T$$

$$H_1 = \frac{-\beta(\cosh \lambda l - 1) + (\cosh \lambda l - 1)}{\sinh \lambda l}$$

$$\text{例 4} \quad H_2 = \frac{-\alpha(\cosh \lambda l - 1) + (\cosh \lambda l - 1)}{\sinh \lambda l}$$

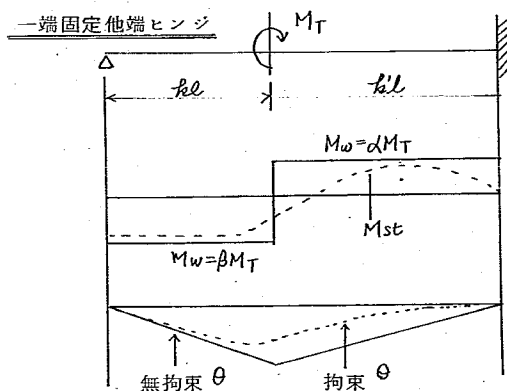


図 - 1 3

$$\alpha = \frac{\lambda k l \cosh \lambda l - \sinh \lambda k l}{\lambda l \cosh \lambda l - \sinh \lambda l}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$A \sim C; M_{\phi t} = [\beta - H_1 \cosh \lambda x] \cdot M_T$$

$$G I_t \theta = [\beta x - \frac{H_1}{\lambda} \sinh \lambda x] \cdot M_T$$

$$C \sim B; M_{\phi t} = [\alpha(-1 + \cosh \lambda(l-x) + H_2 \sinh \lambda(l-x))] \cdot M_T$$

$$\bigcirc \quad G I_t \theta = [\alpha(l-x - \frac{\sinh \lambda(l-x)}{\lambda}) - \frac{H_2}{\lambda} (\cosh \lambda(l-x) - 1)] \cdot M_T$$

$$H_1 = \frac{\cosh \lambda k l - \alpha}{\cosh \lambda l}$$

$$H_2 = \frac{\sinh \lambda k l - \alpha \sinh \lambda l}{\cosh \lambda l}$$

3 変断面だけの拘束振りについての微分方程式の解

3.1 微分方程式の仮定

一般に等断面げたでは、(37)と(38)式の微分方程式、つまり

$$E C_w \cdot d^3 \theta / dx^3 - G I_t \theta + M_w = 0 \quad \text{----- (41)}$$

が成り立つが、変断面げたにおいて、(41)式が成り立つか否かは不明であるが、断面変化が急激でないとすると、(41)式を変断面げたの基本微分方程式として用いても、近似的に成立すをとるとして解析してみる。

変断面の場合(41)式において $d\theta/dx$ が橋軸(X方向)に変化するのとは勿論であるが、 I_t 、 C_w 、 M_w も 軸方向に変化する。この変化は一般に不規則で、

簡単な式にて表すことは極めて困難故、直接微分方程式を解くことが出来ない
ので数値積分法（差分法）にて解析するとよい。

$$\left. \begin{array}{l} E \cdot \frac{d\theta}{dx} \equiv y \\ G/E \equiv \lambda \end{array} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

とおき、(41)式を変形すると

$$y'' - \frac{\lambda I_t}{C_w} y + \frac{M_w}{C_w} = 0 \dots\dots\dots (43)$$

又は

$$y'' - ay - b \dots\dots\dots (44)$$

ここに

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{\lambda I_t}{C_w} \\ b = -\frac{M_w}{C_w} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

(44)式に格点荷重を採用するに当り $w_i(y'')$, $w_i(ay)$, $w_i(b)$
を格点 i に於る y'' , ay , b , 曲線値による格点荷重とすると(44)式は

$$\Delta x \cdot w_i(y'') - \Delta x \cdot w_i(ay) = \Delta x \cdot w_i(b) \dots\dots\dots (46)$$

3.2 弾性格点荷重の計算

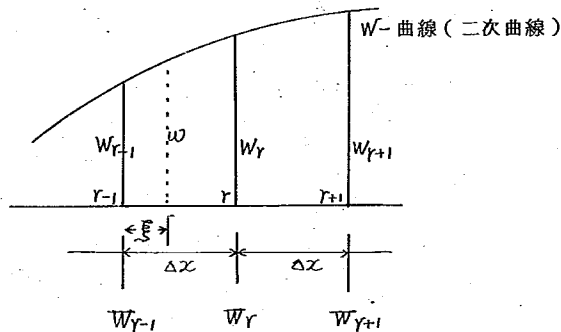


図 - 14

格点 $r-1 \sim r+1$ 間の w を

$$w = w_{r-1} + \alpha \xi + \beta \xi^2 \quad \text{----- (1)}$$

格点 r に於る弾性格点荷重を w_r とすると w_r は格点の左右の格間を単純げた
たと考えたときの弾性荷重による反力の和に等しいとすると

$$w_r = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{\Delta x} w \xi d\xi + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} w (2\Delta x - \xi) d\xi \right] \quad \text{----- (2)}$$

$$\left. \begin{aligned} w_r &= w_{r-1} + \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 \\ w_{r+1} &= w_{r-1} + 2\alpha \Delta x + 4\beta \Delta x^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

(1) を (2) に代入して

$$w_r = \frac{1}{12} (w_{r-1} + 10 w_r + w_{r+1}) \Delta x$$

これを y'' , ay , b に適用すると

$$\left. \begin{aligned} W_{n-1, n}(y) &= \frac{\Delta}{12} (3.5 y_{n-1} + 3 y_n - 0.5 y_{n+1}) \\ W_{n+1, n}(y) &= \frac{\Delta}{12} (-0.5 y_{n-1} + 3 y_n + 3.5 y_{n+1}) \end{aligned} \right\} \text{---(47)}$$

$$W_n(y) = \frac{\Delta}{12} (y_{n-1} + 10 y_n + y_{n+1}) \text{---(47)'}.$$

$$\begin{aligned} W_{n-1, n}(y'') &= W_{n, n+1}(y'') - W_{n, n-1}(y'') = W_{n+1, n}(y'') \\ &= \frac{1}{2\Delta} (y_{n-1} - 2 y_n + y_{n+1}) \text{---(48)} \end{aligned}$$

$$W_n(y'') = \frac{1}{\Delta} (y_{n-1} - 2 y_n + y_{n+1}) \text{---(48)'}$$

3.3 微分方程式の数値計算

3.3.1 片持梁

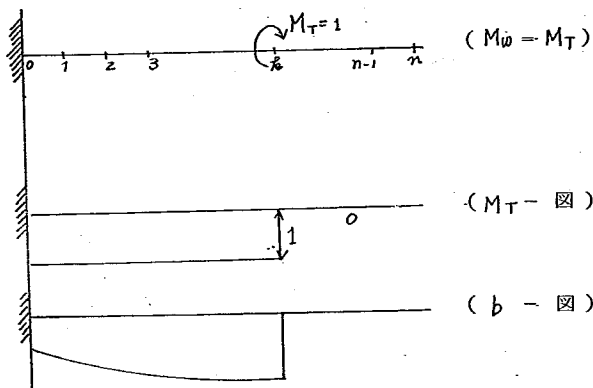


図-15

$$\begin{aligned} \text{境界条件} \cdots \cdots x=0 & \quad \theta=0 \quad d\theta/dx = y=0 \\ x=l & \quad d\theta/dx^2 = y' = 0 \end{aligned}$$

片持梁に(4.6)式を適用するとき境界条件より $y_0 = 0$ であるから $y_1 \sim y_n$ の n 々の未知量に対して、つまり $1 \sim n$ の格点について(4.6)式を立てるとよい。

i) (4.6)の左辺の計算

格点 $1 \sim (n-1)$ に対しては格点 i の左右に y, y'' が存在するから(4.7)、(4.8)式を用いて

$$\Delta x W_i(y'') = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$$

$$\Delta x W_i(ay) = \frac{\Delta x^2}{12} (a_{i-1} \cdot y_{i-1} + 10a_i y_i + a_{i+1} \cdot y_{i+1})$$

これを用いて

$$\begin{aligned}\Delta X W_i(y'') - \Delta X(a y) &= y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \\ &\quad - \frac{\Delta x^2}{12} (a_{i-1} y_{i-1} + 10a_i y_i + a_{i+1} y_{i+1}) \\ &= (\bar{a}_{i-1} - 1) y_{i-1} + (10\bar{a}_i + 2) y_i + (\bar{a}_{i+1} + 1) y_{i+1} \quad \dots (49)\end{aligned}$$

ここから

$$\bar{a}_i = a_i \frac{(\Delta x)^2}{12} \quad \dots (50)$$

格点 n に対しては $y+1$ は存在しないので (47)、(48) 式より

$$\begin{aligned}\Delta X W_i(y'') - \Delta X(a y) \\ = (-0.5\bar{a}_{n-2} - 0.5) y_{n-1} + (3\bar{a}_{n-1} - 1) y_n + (3.5\bar{a}_n + 0.5) y_{n+1} \quad \dots (51)\end{aligned}$$

ii) (46) 式の右辺 (荷重項) の計算

$M_w = 1$ が作用する点 k では $b_i = -M_t / C_w$ の値は不連続でありその点から先きでは $b = 0$ であるから

$1 \leq i \leq k-1$ に対して (47) より

$$\Delta X W_i(b) = \bar{b}_{i-1} + 10\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1} \quad \dots (52)$$

$i = k$ に対しては $W_{i,i+1}(b) = 0$ であるから (47) の (ロ) より

$$\Delta X W_i(b) = 1.5\bar{b}_{i-1} + 5\bar{b}_i - 0.5\bar{b}_{i+1} \quad \dots (53)$$

$k+1 \leq i \leq n$ では

$$\Delta X W_i(b) = 0 \quad \dots (54)$$

ここから

$$\bar{b}_i = b_i \frac{(\Delta x)^2}{12} \quad \dots (55)$$

iii) 方程式の組み立て

以上の i) と ii) の (49)、(51)、(52)、(53)、(54)

式を各格点に立てて連立方程式を解くと $d\theta/dx = y$ が求まる。例えば図
- 15 を支間 6 等分した場合には

($k=1$)

$$\begin{bmatrix} 10\bar{a}_1+2, \bar{a}_1-1, \\ \bar{a}_1-1, 10\bar{a}_2+2, \bar{a}_2-1, \\ \bar{a}_2-1, 10\bar{a}_3+2, \bar{a}_3-1, \\ \bar{a}_3-1, 10\bar{a}_4+2, \bar{a}_4-1, \\ \bar{a}_4-1, 10\bar{a}_5+2, \bar{a}_5-1, \\ -0.5\bar{a}_6-0.5, 3\bar{a}_5-1, 3.5\bar{a}_6-0.5, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5\bar{b}_0+5\bar{b}_1-0.5\bar{b}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

($k=2$)

($k=6$)

$$\text{or } \begin{bmatrix} \bar{b}_0+10\bar{b}_1+\bar{b}_2 \\ 1.5\bar{b}_1+5\bar{b}_2-0.5\bar{b}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} \bar{b}_0+10\bar{b}_1+\bar{b}_2 \\ \bar{b}_1+10\bar{b}_2+\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2+10\bar{b}_3+\bar{b}_4 \\ \bar{b}_3+10\bar{b}_4+\bar{b}_5 \\ \bar{b}_4+10\bar{b}_5+\bar{b}_6 \\ 1.5\bar{b}_4+5\bar{b}_5+0.5\bar{b}_6 \end{bmatrix}$$

(56)

結局 (56) の行列式組を解くと $d\theta/dx = (y)$ が求まる。

3.3.2 両端固定梁

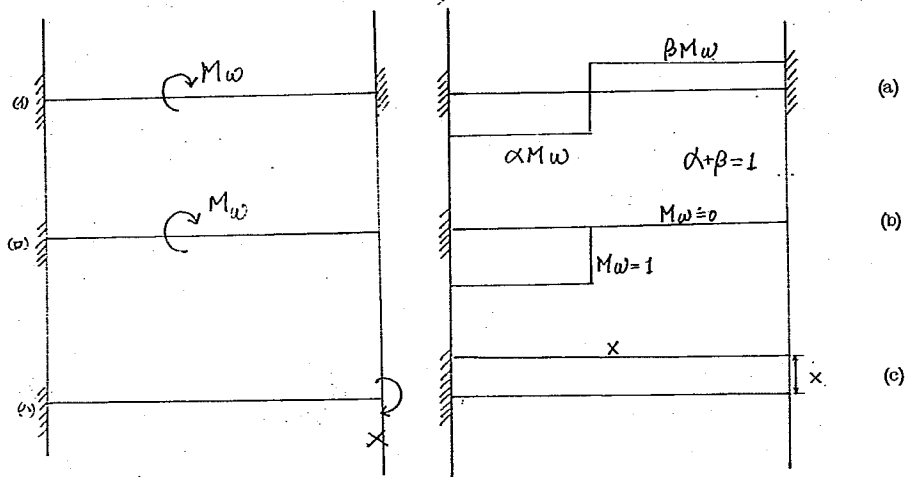


図-16

境界条件 ----- $x=0$ — $\theta=0$ $d\theta/dx=y=0$

$x=l$ — $\theta=0$ $d\theta/dx=y=0$

この場合不静定はり故、4.2.1節の場合と異り、 M_w の左右の分配率(α, β)が未知故、これを不静定量にとつて計算する必要がある。今系(a)を系(b)、(c)の如くに分けて考えると、結局片持梁の時の解法に帰する。但し行列式組を組む場合 $y_0 = y_n = 0$ の条件を入れる。

系(a)を(b)、(c)の如く考えると不静定力Xは

$$X = - \frac{\theta_{10}}{\theta_{11}} \text{ ----- (57)}$$

θ_{10} : $x = 1$ のときの右端の捩れ角

θ_{11} : (b) に $M_w = 1$ が作用するときの右端の捩れ角

結局いろいろな M_w の載荷点に対して、図-17 の様な組合わせを考え、各載荷位置に対して $y (= d\theta/dx)$ 曲線が求まると、これを全支間長に渡つて数値積分すると、 θ_{10} 、 θ_{11} が求められるので (57) の不静定量が求まり、系 (b)、(c) を (57) を考慮して重ね合わせると $y (= d\theta/dx)$ の求める値が得られる。

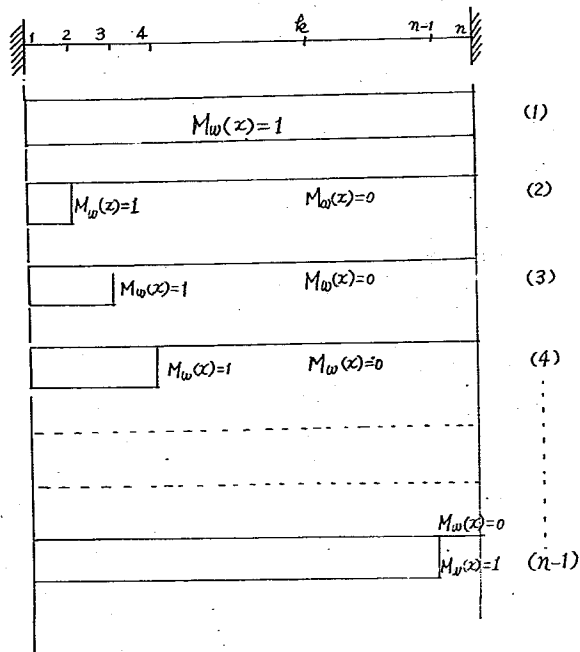


図-17

3.3.3 中央にヒンジを有する両端固定ばり

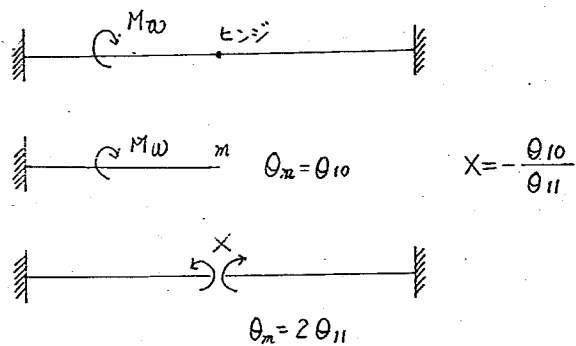


図-18

3.3.4 一端固定、他端支承ばり

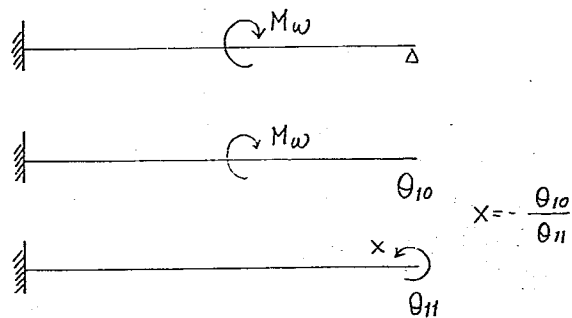


図-19

$$\text{境界条件} \cdots \cdots x=0 \quad \theta=0 \quad d\theta/dx=0$$

$$x=l \quad \theta=0 \quad d^2\theta/dx^2=0$$

3.4 $d\theta/dx$, $d^2\theta/dx^2$, $d^3\theta/dx^3$ の計算

$$\text{式(42)より} \quad (d\theta/dx)_i = y_i/E \quad \cdots \cdots (58)$$

$$\text{式(44)より} \quad y'' = ay + b$$

$$\text{これより} \quad (d^3\theta/dx^3)_i = (a_i y_i + b_i)/E \quad \cdots \cdots (61)$$

(58)、(61)より $d\theta/dx$ 、 $d^3\theta/dx^3$ は求まるが ($d^2\theta/dx^2$) は直接求まらないので、近似的に y 曲線が2次の放物線分布と仮定すると
両端以外の中間点

$$(d^2\theta/dx^2)_i = \frac{1}{2\Delta x} ((d\theta/dx)_{i+1} - (d\theta/dx)_{i-1}) \quad \cdots \cdots (62)$$

両端点

$$\left. \begin{aligned} (d^2\theta/dx^2)_0 &= \frac{1}{2\Delta x} (-3y_0 + 4y_1 + y_2) \\ (d^2\theta/dx^2)_n &= \frac{1}{2\Delta x} (y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (63)$$

より求まる。

3.5 まとめ

上述の如く数値積分法を微分方程式に適用することにより、変断面げたの解が得られるが、差分法を利用して数値計算を行うと多元連立方程式を解かねばならぬ、例えば、径間を20等分すると20元、30等分すると30元の方程式を各々20ヶ、30ヶを解いて始めて、 $d\theta/dx = y$ の影響線が求まる。振りの計算のように解法が複雑で、かつ計算量の大きいものは電子計算機の世話になるとよい。そこで前述までの諸式に対して FORTRAN 形式にて TOSBAC 3400 用に自動プログラミングを行い、極力手動計算をしないようにしてみた。(附録)

自動プログラムに計算させた事項は

1) 両端固定げた、一端固定で他端固定げた、両端固定で、中央にヒンジを有するげたの3種（いずれも変断面、勿論等断面も可）を一つのプログラムにしてある。

2) 振りの計算に必要な諸係数、剪断中心、拘束振り断面モーメント、剪断流（係数 $E\ddot{\theta}$ 、 $E\ddot{\theta}$ ）、剪断応力および軸方向応力度（係数 $E\ddot{\theta}$ 、 $E\ddot{\theta}$ ）、1) の3種のけたについての $E\ddot{\theta}$ 、 $E\ddot{\theta}$ 、 $E\ddot{\theta}$ 、の影響線等のすべてが計算されるようになっていいる。（プログラムは附録を参照のこと）

4 閉断面薄肉ばりの剪断変形を考慮した振り

剪断による2次変形を考えた振りの問題は Vlasov Benschotter によつてなされているが、いずれも解析が複雑であること、6階の微分方程式を解かねばならぬ事、等取り扱いが困難であるが、以下に V.Z. Vlasov の解析法が比較的理理解し易いと思われるので、Vlasov の考え方にに基づき6階の微分方程式になることを誘導してみる。Vlasov によるシェル理論の変分法の概要は、2つの変数の関数で1つの偏微分方程式系を満たす未知関数は、2つの関数の積の有限和として表わされ、この関数の1つは前もつて与えられた1つの変数の関数であり、もう1つの変数は求めるべき関数であり、はりから帯板要素を切り出し、これに仮想変位の原理を適用するのが基本の考えである。

i) 薄肉ばかりから図-20に示す $z = \text{Const}$ 、 $z + dz = \text{Const}$ の2断面からなる幅 dz の横方向帯板要素を取り出す、この帯板を数個の閉断面からなる平面はり系と考える。

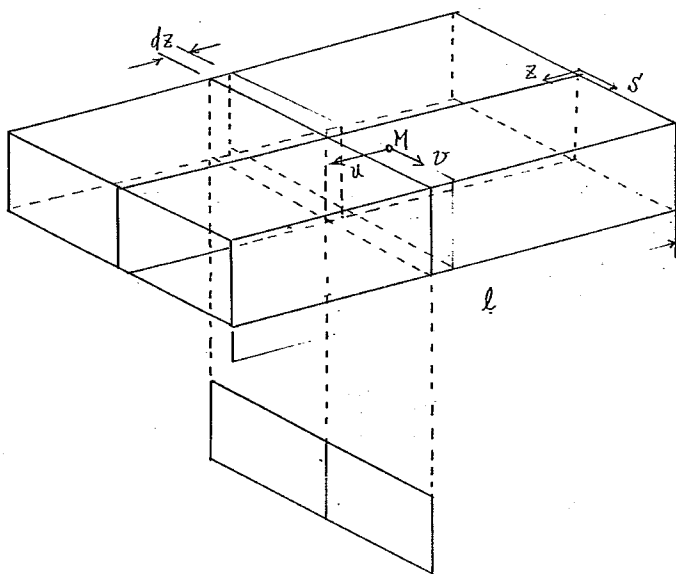


図-20

いま面上の任意点の変位 $U(z, s)$ 、 $V(z, s)$ を有限級数として表わすと

$$U(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \cdot \varphi_i(s), \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (64)$$

$$V(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \cdot \psi_k(s), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (65)$$

一方フックの法則によつて

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z, s) &= E \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ \tau(z, s) &= G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

(64)、(65)を(66)に代入して、

$$\sigma(z, s) = E \cdot \sum U'_i(z) \cdot \varphi_i(s) \quad (i=1, 2 \dots m) \dots\dots\dots (67)$$

$$\tau(z, s) = G \left[\sum U_i(z) \cdot \varphi'_i(s) + \sum V'_k(z) \cdot \psi_k(s) \right] \dots\dots\dots (68)$$

($i=1, 2 \dots m$
 $k=1, 2 \dots n$)

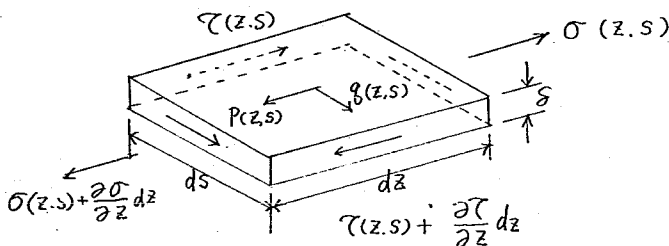


図-21

今図-21のような要素を取り出して考えると、選ばれた変位 $g_i(s)$ 、 $\psi_k(s)$ に対して $m+n$ 個の自由度をもつ帯板要素の積分形の均合い条件は仮想変位の原理を用いて

1) $Z = \text{const}$ の平面に対して直角方向での帯板要素 $dZ = 1$ の m 個の均合い条件

$$\int_A \frac{\partial \sigma}{\partial Z} \cdot g_i dA - \int_A \tau \cdot g'_i dA + \int_L p \cdot g_i ds = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots (69)$$

2) $Z = \text{const}$ の面内における帯板に対する n 個の均合い条件

$$\int_A \frac{\partial \tau}{\partial Z} \cdot \psi_k \cdot dA - \sum V_k \int \frac{M_k \cdot M_k}{EI} \cdot ds + \int_L q \cdot \psi_k \cdot ds = 0 \dots\dots (70)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

(67)、(68)を(69)、(70)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \delta \sum_i a_{ji} U_i'' - \sum_i b_{ji} U_i' - \sum_k C_{jk} V_k' + \frac{1}{G} p_j &= 0 \\ \sum_k C_{ki} U_i' + \sum_k r_{kk} V_k'' - \delta \sum_k s_{ki} \cdot V_k + \frac{1}{G} q_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (71)$$

($i, j=1, 2, \dots, m$;
 $k, l=1, 2, \dots, n$)

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_{ji} &= \int_A g_j(s) \cdot g_i(s) dA \\ b_{ji} &= \int_A g_j(s) \cdot g'_i(s) dA \\ C_{ji} &= \int_A g'_j(s) \cdot \psi_k(s) \cdot dA \end{aligned} \right\} \dots\dots (72)$$

$$C_{hi} = \int_A \psi_h(s) \cdot \psi_i'(s) \cdot dA$$

$$r_{hh} = \int_A \psi_h(s) \cdot \psi_h(s) \cdot dA$$

$$S_{hh} = \frac{1}{E} \cdot \int_L \frac{M_h(s) \cdot M_h(s)}{EI} \cdot ds$$

結局 (72) 式が求まんとする一般化された m 個の縦方向変位 $U_i(z)$ と n 個の横方向変位 $V_k(z)$ に関する $m+n$ 個の線型微分方程式系である。

ii) 断面変形を考えた薄肉箱断面ばり

図-22に示す様な2軸対称を有する箱断面を考える。

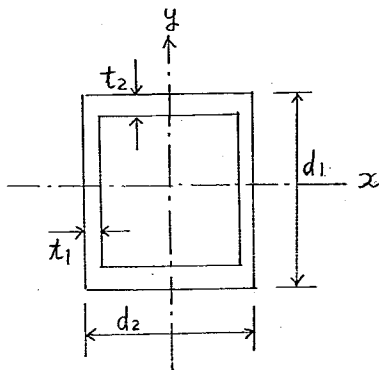


図-22

2つの断面 $z = \text{const}$ 、 $z + dz = \text{const}$ より切り出された幅 $dz = 1$ の部分を考えて、この板要素は面外で4、面内で4の自由度をもっているので板の任意の点の変位は、(64)と(65)式より

$$\left. \begin{aligned} \mu(z, s) &= U_1(z) \cdot \varphi_1(s) + U_2(z) \cdot \varphi_2(s) + U_3(z) \cdot \varphi_3(s) + U_4(z) \cdot \varphi_4(s) \\ v(z, s) &= V_1(z) \cdot \psi_1(s) + V_2(z) \cdot \psi_2(s) + V_3(z) \cdot \psi_3(s) + V_4(z) \cdot \psi_4(s) \end{aligned} \right\} \dots (73)$$

$x(s)$ 、 $y(s)$ を対称軸に対する任意点の座標、 $h(s)$ を中心点から辺までの垂線として表わし、関数 $\varphi_i(s)$ 、 $\psi_i(s)$ を次のように決める。

$$\varphi_1(s) = 1, \varphi_2(s) = x(s), \varphi_3(s) = y(s), \varphi_4(s) = x(s) \cdot y(s) \dots (74)$$

$$\psi_1(s) = h(s), \psi_2(s) = x'(s), \psi_3(s) = y'(s), \psi_4(s) = x'(s)y'(s) + x(s)y'(s) \dots (75)$$

(74) (75) を幾学的に図示すると図-23 のようになる。

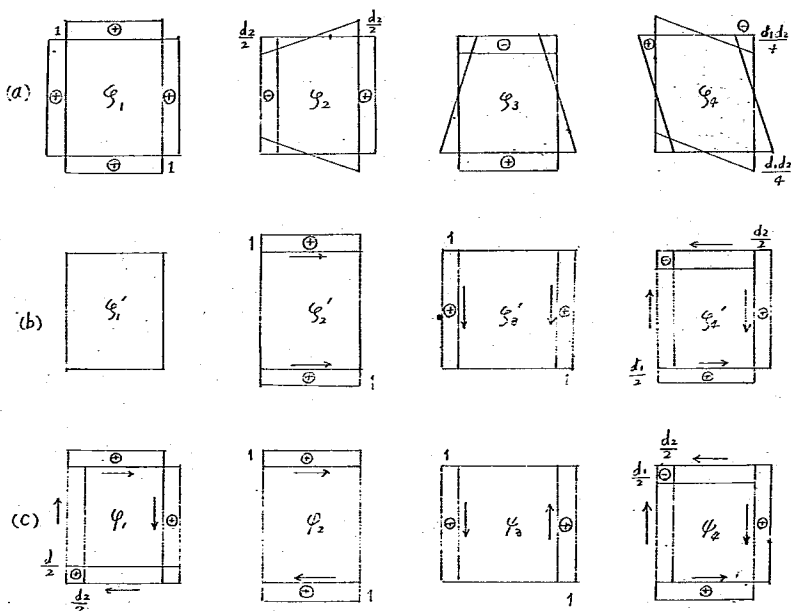


図-23

図-23より明らかなように

一般化された縦方向変位は

$U_1(z) : z = \text{const}$ の全断面の縦方向への変位

$U_2(z) : x$ 軸のまわりの回転角

$U_3(z) : y$ 軸のまわりの回転角

$U_4(z) : z = \text{const}$ の断面の反り

一般化された横方向変位は

$V_1(z) : z = \text{const}$ の断面の z 軸のまわりの回転角

$V_2(z) : z = \text{const}$ の断面の x 軸のたわみ

$V_3(z) : z = \text{const}$ の断面の y 軸のたわみ

$V_4(z) :$ はり断面の一般化された変形

を示す。

結局図-23の g_i, g'_i, ψ_i を用いて (71) を計算すると、次の基本微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E(2A_1 + ZA_2)U_1'' + p_1 &= 0 \quad \dots\dots\dots (a) \\ EI_4U_2'' - 2GA_2(U_2 + V_2') + p_2 &= 0 \quad \dots\dots (a) \\ 2GA_2(U_2' + V_2'') + g_2 &= 0 \quad \dots\dots\dots (a) \\ EI_zU_3'' - 2GA_1(U_3 + V_3') + p_3 &= 0 \quad \dots\dots (a) \\ 2GA_1(U_3' + V_3'') + g_3 &= 0 \quad \dots\dots\dots (a) \\ aU_4'' - b_1U_4 - b_2V_1' - b_1V_4' + p_4 &= 0 \quad \dots\dots (a) \\ b_2U_4' + b_1V_1'' + b_2V_4'' + g_1 &= 0 \quad \dots\dots (a) \\ b_1U_4' + b_2V_1'' + b_1V_4'' - cV_4 + g_4 &= 0 \quad \dots\dots (a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

$c \in \mathbb{K}$

$$I_x = d_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{b} + \frac{A_2}{2} \right)$$

$$I_y = d_2^2 \cdot \left(\frac{A_2}{b} + \frac{A_1}{2} \right)$$

$$a = \frac{1}{24} \cdot E \cdot d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot (A_1 + A_2)$$

$$b_1 = \frac{G}{2} \cdot (d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1)$$

$$b_2 = \frac{G}{2} \cdot (-d_1^2 A_2 + d_2^2 A_1)$$

$$c = \frac{96}{\frac{d_1}{EI_1} + \frac{d_2}{EI_2}}$$

$$P_i = \int P \cdot g_i \cdot dS$$

$$g_i = \int g \cdot \psi_k \cdot dS$$

一般化された軸方向荷重 $P_1 = P_3 = 0$ とすると

(ロ)、(ハ)は

$$EI_y \cdot V_2'''' - g_2 + \frac{EI_y}{2GA_2} g_2'' = 0 \quad (79)$$

(ニ)、(ホ)は

$$EI_x \cdot V_3'''' - g_3 + \frac{EI_x}{2GA_1} g_3'' = 0 \quad (80)$$

ここに (79) と (80) の第3項目は水平、垂直板の面内における
剪断変形によるはりのたわみの影響を示す。

はりの横方向縁での境界条件を用いると、(へ)、(ト)、(チ)式は、断面
の反りを表わす横方向変位と、捩れと、断面の変形を表わす横方向変位の状態
を決定できる。

図-23 (a)、(b) に示された一般化された座標 $\varphi_x(s)$, $\psi_i(s)$,
 $\psi_x(s)$ の図に従つて

P_x : 単位長当りの外的縦方向バイモーメント

P_y : 単位長当りの外的横方向バイモーメント

P_r : 単位長当りの外的捩りモーメント

と呼ぶと

捩りの場合には、はりの横方向帯板要素はその面外変位に対して1、面内変位
に対して2、の自由度をもつので、

$$\left. \begin{aligned} M_L &= -\int \sigma \cdot \varphi_x(s) \cdot dA \cdots \cdots \cdots (\text{縦方向バイモーメント}) \\ M_T &= \int \tau \cdot \psi_i(s) \cdot dA \cdots \cdots \cdots (\text{捩りモーメント}) \\ M_Q &= \int \tau \cdot \psi_x(s) \cdot dA \cdots \cdots \cdots (\text{横方向バイモーメント}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (81)$$

一般的に捩りに使用されている記号を用いて U 、 V を表わすと

$$U_x(z) = U(z) \cdots \cdots \cdots \text{反り}$$

$$V_i(z) = Q(z) \cdots \cdots \cdots \text{捩り角}$$

$$V_x(z) = \mathcal{L}(z) \cdots \cdots \cdots \text{断面変形}$$

これらの変位に対応する一般座標を

$\varphi_x(s) = \varphi(s)$, $\psi_i(s) = \varrho(s)$, $\psi_x(s) = \psi_x(s)$ で表わすと
(67)、(68) 式より

$$\left. \begin{aligned} \text{垂直応力: } \sigma(z \cdot s) &= E U'(z) \cdot \varphi(s) \\ \text{剪断応力: } \tau(z \cdot s) &= G \{ U(z) \cdot \varphi'(s) + Q'(z) \cdot \varrho(s) + \mathcal{L}'(z) \cdot \psi_x(s) \} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (82)$$

(82) を (81) に代入して (77) を用いて定積分を行ふと

$$\left. \begin{aligned} M_L &= -QU' \\ M_T &= b_2 U + b_1 \mathcal{F}' + b_2 \mathcal{L}' \\ M_Q &= b_1 U + b_2 \mathcal{F}' + b_1 \mathcal{L}' \end{aligned} \right\} \text{-----} (83)$$

同次形の場合 ($P_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}, \mathcal{F}'' = \mathcal{F}'' = 0$)、(83)の微分方程式は新しい記号を用いて

$$\left. \begin{aligned} QU'' - b_1 U - b_2 \mathcal{Q}' - b \mathcal{L}' &= 0 \\ b_2 U' + b_1 \mathcal{F}''' + b_2 \mathcal{L}'' &= 0 \\ b_1 U' + b_2 \mathcal{F}'' + b_1 \mathcal{L}'' - C \mathcal{L} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} (84)$$

(84)の同次微分方程式系の積分を行うと

$$\begin{aligned} & \frac{Q}{C} (b_1^2 - b_2^2) \mathcal{F}''' - a b_1 \mathcal{F}''' + (b_1^2 - b_2^2) \mathcal{F}'' \\ &= \mathcal{F}''' - 2r^2 \mathcal{F}''' + S^* \mathcal{F}'' = 0 \text{-----} (85) \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{b_1 C}{2(b_1^2 - b_2^2)} = \frac{2\phi}{\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2}} \cdot \frac{E}{G} \cdot \left(\frac{1}{d_2^2 I_1} + \frac{1}{d_1^2 I_2} \right) \\ S^* &= \frac{C}{a} = \frac{2\phi \phi}{\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2}} \cdot \frac{1}{d_1^2 d_2^2 (I_1 + I_2)} \end{aligned} \right\} \text{-----} (86)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \mathcal{F}' \\ Q &= -\frac{ab_1}{C b_2} \mathcal{F}''' + \frac{a}{b_2} \mathcal{F}'' - \frac{b_1}{b_2} \mathcal{F} \end{aligned} \right\} \text{-----} (87)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{a}{c} y^{IV}$$

とおく、 y は $\mathcal{L}$ の関数である。

よつてまた一般化された内力も、関数 $y(\mathcal{L})$ とその導関数によつて表わされ
(87) を (83) に代入して

$$M_L = -a y''$$

$$M_T = -\frac{a}{C D_2} (b_1^2 - b_2^2) y^{IV} + \frac{a b_1}{b^2} \cdot y''' - \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2} y' \quad (88)$$

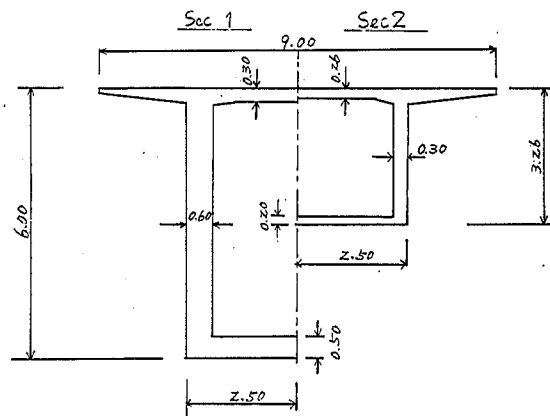
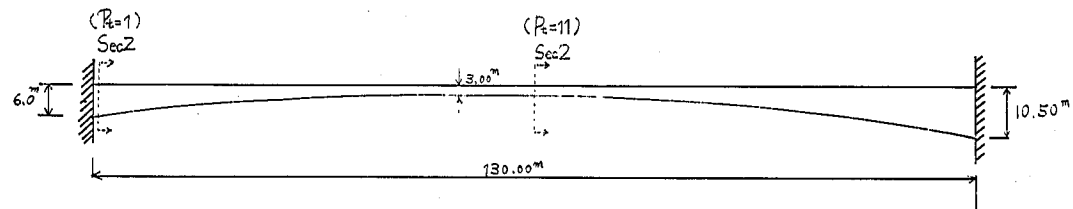
$$M_Q = a y'''$$

結局閉合箱断面薄肉ばりの変形を考えた振りの問題は、(85)式の6階の微分方程式を境界条件を考慮の下に解くといふ。

5 数値計算例

計算例はラーメン箱げた橋(技資料10-10)を例にとり、中央径間部を両端固定げたとみなして、前述までに誘導した諸式を用いて計算した(計算は付録に示すように電子計算機によつた)、計算されたもののうち、大表的な断面(固定端と中央断面のみについて示したものが、以下に示す図表である。まず Q_L , $E Q''$, $E Q'''$ の影響線をみると変断面げたとしての計算と等断面げたとしての計算には、かなりの差異があり、計算の手数が複雑であるが変断面げたとしての解析計算が必要であると思われる。一方剪断流図、あるいは表の値から、振りによる剪断力そのものの値は、剪断力によるそれより小さいが、採用せる断面が比較的部材厚が大きいこと等を考え、さらに固定端断面の上フランジのつけ根部等相当大きな値となるところもあり、十分に気をつけねばならぬことがわかる。

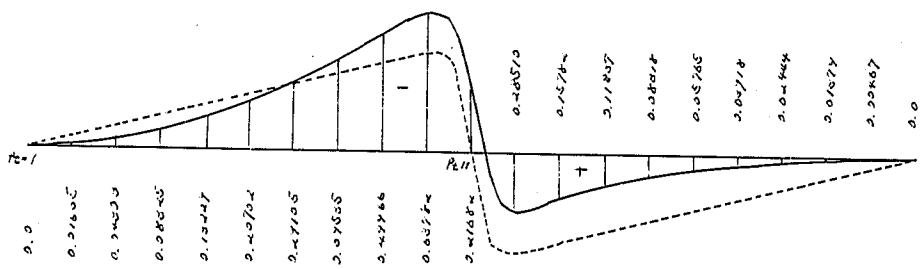
特に最近許容剪断応力を上げようという気運にあることから、このようになるとかなり部材がうすくなり、剪断応力に応じて振りによる剪断応力も今以上に多くなり、必ず設計上核算しておく必要が生ずると思われる。例からわかるように、剪断による二次変形を無視した曲げ振り理論によつても、かくの如き値数、剪断変形を考慮した場合には相当応力、変形とも大きくなることが予想される。



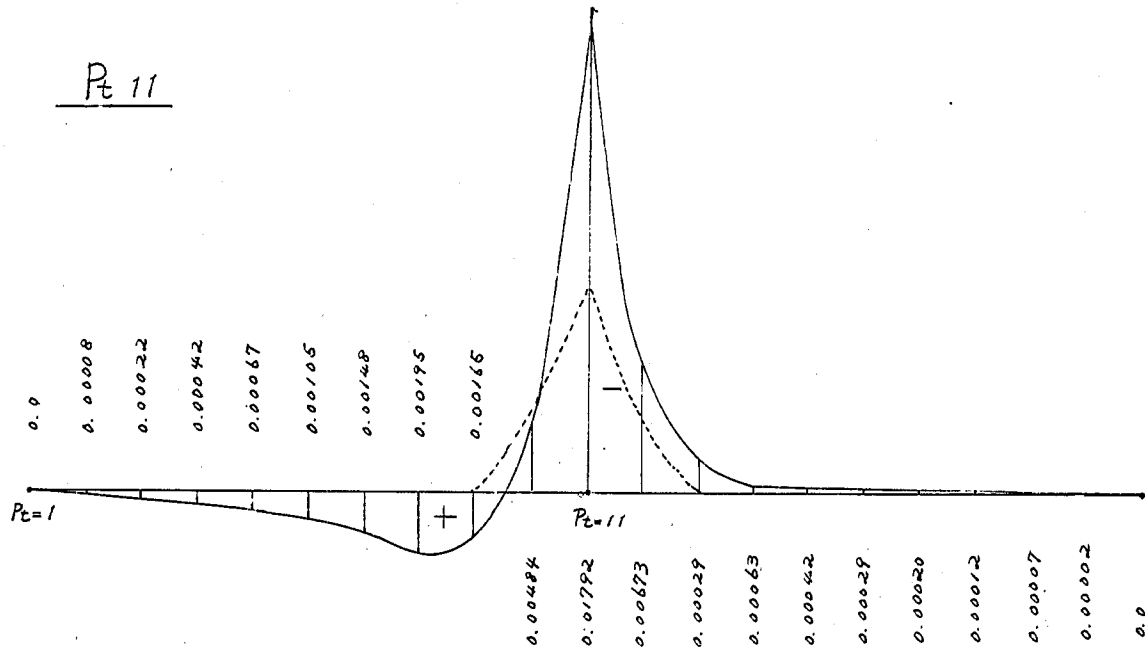
GI-9'-I.I

Pz 11

- 44 -



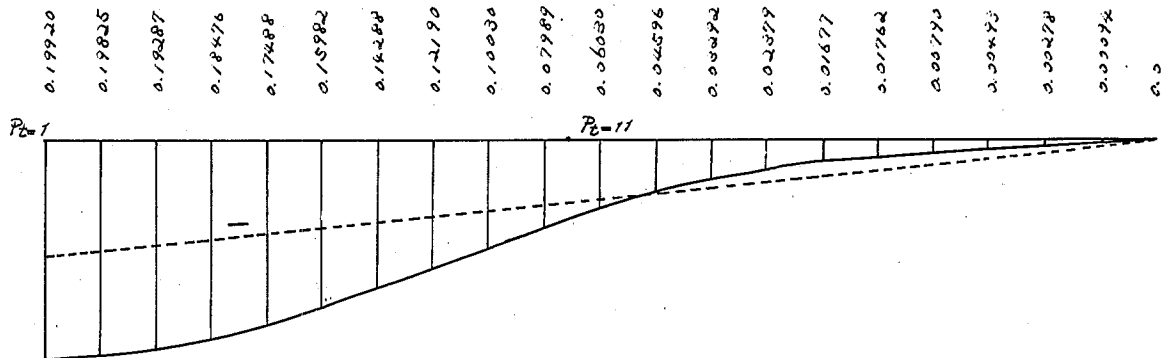
—— 変断面げたとして計算した値
 - - - 等断面げたとした場合 (平均
 I₁断面を用いた) の値



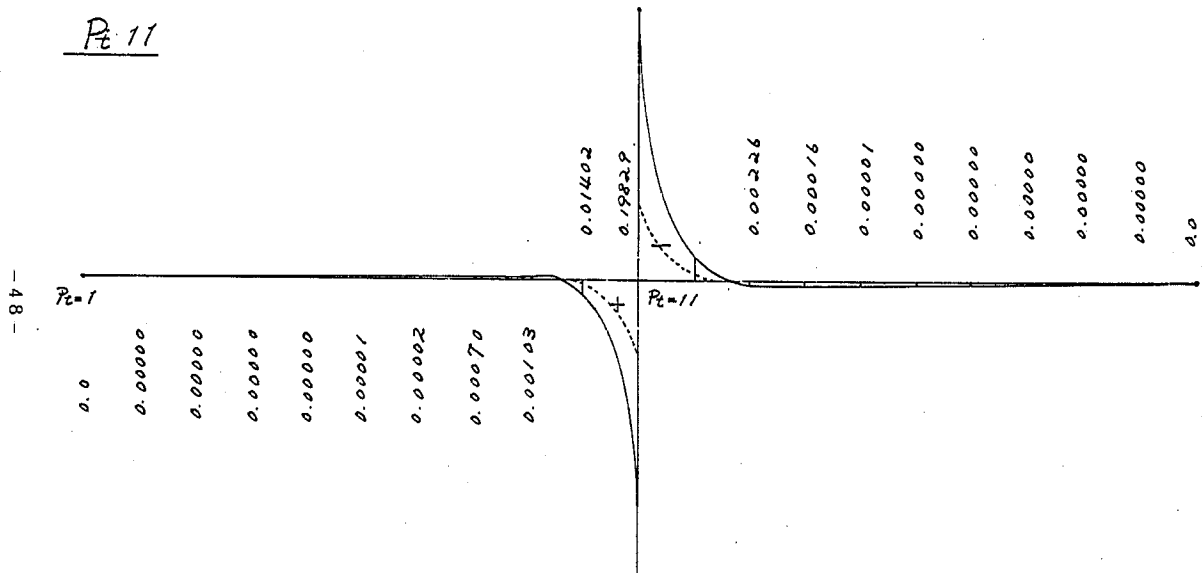
EQ^{III}-I.L

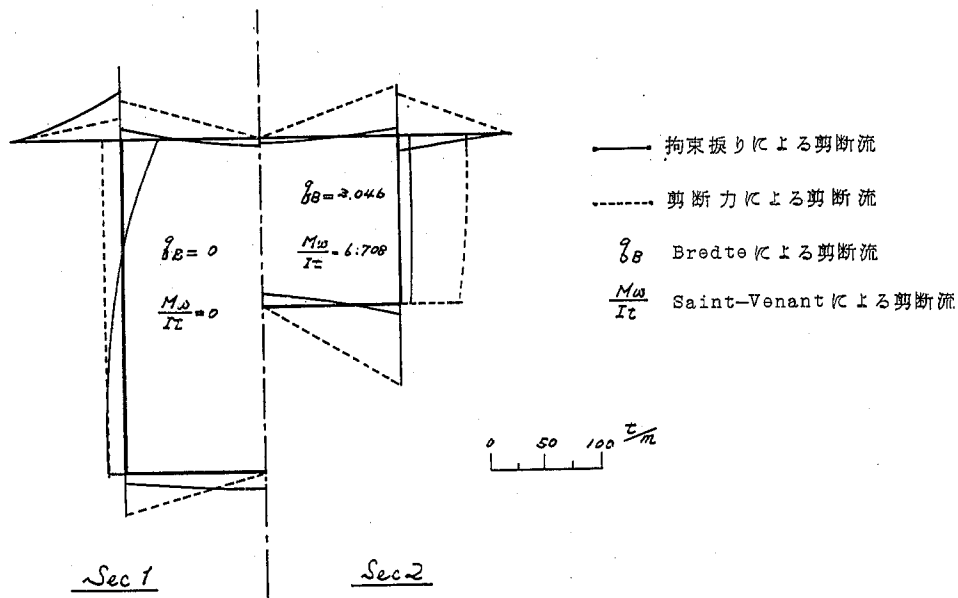
P_t 1

-47-

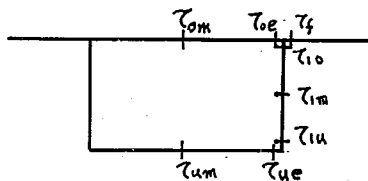


Pt 11





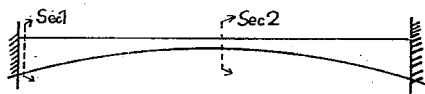
剪断流図



τ		(1) Saint-Venant	(2) Bredt	(3) 拘束振り	(4) (1)+(2)+(3)= 振りの合成	(5) 剪断による	(6) 振りと 剪断の合成
τ_{om}	sec 1	0	0	1.53	1.53		1.53
	sec 2	0.17	0.12	2.24	3.62		3.62
τ_{oe}	sec 1	0	0	0.75	0.75	13.44	14.19
	sec 2	0.16	0.10	0.60	1.85	12.53	14.38
τ_f	sec 1	0		10.70	10.70	10.61	21.31
	sec 2	0.16		0.59	0.75	6.70	6.85
τ_{io}	sec 1	0	0	4.85	4.85		
	sec 2	0.20	1.02	1.08	2.30		
τ_{im}	sec 1	0	0	3.90	3.90	16.57	20.47
	sec 2	0.20	1.02	2.79	4.01	14.29	18.29
τ_{iu}	sec 1	0	0	1.88	1.88		
	sec 2	0.20	1.02	0.50	1.72		
τ_{ue}	sec 1	0	0	2.26	2.26	17.18	19.43
	sec 2	0.13	1.55	0.76	2.43	24.26	26.69
τ_{um}	sec 1	0	0	2.64	2.64		2.64
	sec 2	0.13	1.55	2.54	4.22		4.22

sec 1 : 両端固定桁の左固定端断面

sec 2 : 両端固定桁の中央断面



6 捩れに関する参考文献

1. Bornscheuer; Systematische Darstellung des Biege und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion
Stahlbau 1952
2. Bornscheuer; Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit Wölbbehindertem Querschnitt
Stahlbau 1952
3. Lindenberger; Vergleich und Analogie betrachtung der Lösung für biegebeanspruchte und Verdrehungsbeanspruchte Stabwerke
Stahlbau 1953
4. Goschy; Der Kastenträger ohne Zwischenschäfte, Berechnung auf Torsion
Die Bauteschnik 1965. Heft 5
5. Heilig; Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform
Stahlbau 1961 Heft 11
6. Dabrowski; Zur Problem der gleichzeitiger Biegung und Torsion dünnwandiger Balken
Stahlbau 1960 Heft 4
7. Cywinski; Torsion des dünnwandiger Stabes mit veränderlichem einfach symmetrischem, offenem Querschnitt
Stahlbau 1964 Heft 10

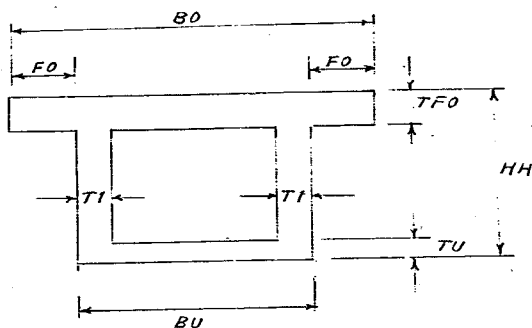
8. Heilig; Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkraft-torsion der Stäben mit offenem Profil.
Stahlbau 1961. Heft 1.
9. Lacher; Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung.
Stahlbau 1962. Heft 10, Heft 11.
10. Dabrowski; Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkraft-torsion der Kastenträger mit verformbar biegesteifem Profil.
Stahlbau 1965. Heft 11.
11. Kloppel; Erweiterung des Formänderungsgrößen-Verfahren auf die Theorie der Wölbkrafttorsion.
Stahlbau 1966. Heft 12.
13. Dabrowski; Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Träger mit offenem Profil.
Stahlbau 1964. Heft 12.
14. Dabrowski; Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträger mit nichtverformbarem Profil.
Stahlbau 1965. Heft 4.
15. Einflußlinien der Biege- und Wölbkraftmomente in gekrümmten dünnwandiger Träger
Stahlbau 1965. Heft 7.
16. Becker; Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig

gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen
dünnwandigen offenen Profilem von in Stabachse veränderlichen
Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion.
Stahlbau 1965. Heft 11.

附 録

データ読み込み上の注意

1) 断面寸法

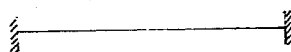


2) N, KOTEI, KHINGE

イ) N : $\triangle \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 14 \\ 15 \\ 20 \\ 21 \end{array} \quad \triangle$

図のようなスパン長を任意等分 (20等分まで) した数に1を加えた値の整数、例えば20等分のとき21、10等分のとき11

ロ) 次図のような両端固定けたの場合



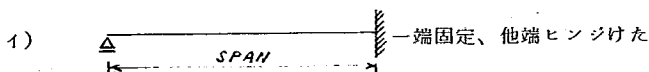
KOTEI < KHINGE となる任意の4けた以内の整数を両方に入れる。例えば KOTEI=10、KHINGE=20

ハ) 一端固定 他端ヒンジけたの場合



KOTEI > KHINGE となる任意の4けた以内の整数を両方に入れる。例えば KOTEI=200、KHINGE=50

3) ヒンジを有するけたの種類



$L22 < SPAN$ なる $L22$ の任意の整数を読み込む

例えば $SPAN = 100.0m$ のとき 150 等

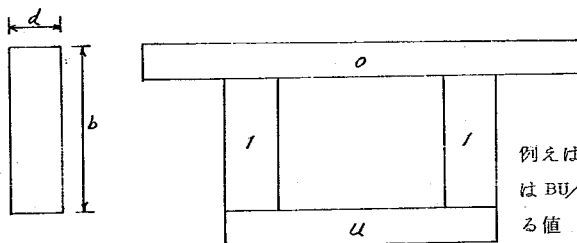


$L22 < SPAN$ なる $L22$ の任意の整数を読み込む

例えば $SPAN = 50.0m$ のとき $L22 = 30$ 等

4) GAM1, GAMQ, GAMU, YITA1, YITAO, YITAU

これらは Saint-Venant の トモーメント I_t を求めるために必要な係数で、断面を図の様に分割したときの短辺 (b) と長辺 (d) との比によって決まる係数で一般に参考書に与えられている (例えば、横道英雄著 コンクリート橋 P-86-表 8.1 をみよ)

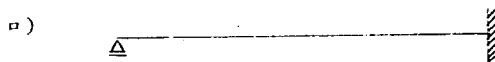


例えば GAMU, YITAU
は BU/TU の比による値

5) 結局本プログラムで求まるけたの種類は3種で、鉄筋コンクリートけたの場合、連続けたの中間支点上は十分に剛な横けたの対傾構で補強されているので振れ角が他径間に影響しない。すなわち支点上は固定端とみなし得るので、結局前述(次図)の3種につきる(注、ただし単純けたの場合は拘束振れとならず計算は比較的簡単なので略す)



$$KOTEI < KHINGE$$



$$KOTEI > KHINGE$$

$$L22 < SPAN$$



$$KOTEI > KHINGE$$

$$L22 < SPAN$$

注・イ)、ロ)、ハ)の3種を一回で計算できる。つまり計算させるデータがいくつかあつても一度で計算できる。そのとき入力データとしてのNNNにデータの個数を入れること。

```

C      TOSBAC 3400 FORTRAN      T,SASAKI      M,NEMOTO      11/1968
C      DIE BERECHNUNG VON EINFLUSSLINIEN DER WOLBBEHINDERTETOSION DES
C      STAHLBETONKASTENTRAGER(BFIDERSEITIGE GESPANNTE BALKEN UND EINIGE
C      GESPANNTE,ANDERSEITE GELENKT BALKEN MIT VERANDERLISCHEN QUERSCHNIT
C      T)
1      DIMENSION HH(21),TO(21),TU(21),T1(21),TFO(21),GAM1(21),GAMO(21),GA
1      *MU(21),YITA1 21),YITAO(21),YITAU(21),H(21),B(21),BUS(21),B1S(21),C
1      *(21),A(21),HITS(21),HITB(21),HIT(21),GMO(21),GM1(21),GMU(21),A1(21
1      *),A2(21),ZETA(21),X1(21),XO(21),XU(21),XFO(21),Y(21),R(21),CW(21),
1      *SA(21),SIGO(21),SIGU(21),SIGFO(21),SQ(7,21),Q(4,21),SQX(21),QQ(21)
1      *,TS1(21),TSO(21),TSU(21),TSOM(21),QB(21),TB1(21),TBO(21),TBU(21),T
1      *BOM(21),TOM(21),TOE(21),TUM(21),TUE(21),T1U(21),T1M(21),T1O(21),T5
1      *O(21)
2      DIMENSION K(21),SAB(21),SC(21),AA1(21,21),TT1(21,21),CC1(21,21),
2      *XX1(21,21),GX1(21),P1(21),DXX1(21,21),DDXX1(21,21),PMT1(21,21),
2      *SMT1(21,21),DDXXB1(21,21),AA2(21,21),XX2(21,21),CC2(21,21),TT2(21,
2      *21),XXRN2(21,21),GX2(21),P2(21),DXXR2(21,21),DDXX2(21,21),DDXXR2(21
2      *,21),DDXX2(21,21),DDXXB2(21),PMT2(21,21),PMTR2(21,21)
3      READ(5,554) NNN
4      554 FORMAT(I3)
5      NNND=NNN+1
6      DO 9000 MM=1,NNND
7      MND=MM-NNND
8      IF(MND) 553,9001,9001
9      553 READ(5,555) N,KOTEL,KHINGE,L22
10     READ(5,556) BO,BU,FO,SPAN
11     READ(5,557) (HH(I),TO(I),TU(I),T1(I),TFO(I),I=1,N)
12     READ(5,558) (GAM1(I),GAMO(I),GAMU(I),YITA1(I),YITAO(I),YITAU(I),I=
12     *1,N)
13     555 FORMAT(4I4)
14     556 FORMAT(4F9.4)
15     557 FORMAT(5F9.4)
16     558 FORMAT(6F9.4)
17     BOS=BO
18     DO 10 I=1,N
19     H(I)=HH(I)-(TO(I)+TU(I))/2.
20     B(I)=BU-T1(I)
21     BUS(I)=BU-2.*T1(I)
22     B1S(I)=HH(I)-TO(I)
23     C(I)=2.*H(I)/T1(I)+B(I)/TO(I)+B(I)/TU(I)
24     A(I)=B(I)*H(I)
25     HITS(I)=2.*GAM1(I)*T1(I)**3*B1S(I)+GAMU(I)*TU(I)**3*BUS(I)+GAMO(I)
25     **TO(I)**3*BOS
26     HITB(I)=4.*A(I)**2/C(I)
27     HIT(I)=HITS(I)+HITB(I)
28     GMO(I)=2.*A(I)/(C(I)*TO(I))

```

```

29 GM1(I)=2.*A(I)/(C(I)*T1(I))
30 GMU(I)=2.*A(I)/(C(I)*TU(I))
31 A1(I)=(TO(I)+TU(I))*B(I)**3/12.+T1(I)*B(I)**2*H(I)/2.+TFO(I)*(FO*B
31 *(I)*(0.5*B(I)+FO)+2.*FO**3/3.)
32 A2(I)=TO(I)*B(I)**3*H(I)/12.+T1(I)*B(I)**2*H(I)**2/4.+TFO(I)*H(I)*
32 *(FO*B(I)*(0.5*B(I)+FO)+2.*FO**3/3.)
33 A2(I)=A2(I)-TFO(I)*GMO(I)*B(I)*FO*(B(I)+FO)/2.-T1(I)*(GMO(I)-GMU(I
33 *)F*B(I)**2*H(I)/4.
34 ZETA(I)=A2(I)/A1(I)
35 X1(I)=GM1(I)-B(I)/2.
36 XO(I)=GMO(I)-H(I)+ZETA(I)
37 XU(I)=GMU(I)-ZETA(I)
38 XFO(I)=H(I)-ZETA(I)
39 Y(T)=XO(T)*B(I)/2.
40 R(I)=H(I)*XU(I)/(XO(I)+XU(I))
41 CW(I)=2.*T1(I)*X1(I)**2*(R(I)**3+(H(I)-R(I))**3)/3.+(TU(I)*XU(I)**
41 *2+TQ(I)*XO(I)**2)*B(I)**3/12.
42 CW(I)=CW(I)+2.*TFO(I)*XFO(I)**2*FO**3/3.+2.*TFO(I)*(Y(I)**2*FO-Y(I
42 *)*XFO(I)*FO**2)
43 SA(I)=0.43*HIT(I)/CW(I)
44 SIGO(I)=-XO(I)*B(I)/2.
45 SIGU(I)=-XU(I)*B(I)/2.
46 SIGFO(I)=-XO(I)*B(I)/2.+XFO(I)*FO
47 SQ(3,I)=TO(I)*B(I)*SIGO(I)/4.
48 SQ(4,I)=TFO(I)*FO*(SIGO(I)+SIGFO(I))/2.
49 SQ(2,I)=SQ(3,I)+SQ(4,I)
50 SQ(1,I)=SQ(2,I)+T1(I)*H(I)*(SIGO(I)+SIGU(I))/2.
51 SQ(5,I)=0.
52 SQ(6,I)=SQ(1,I)+TU(I)*B(I)/4.*SIGU(I)
53 SQ(7,I)=SQ(2,I)+T1(I)*SIGO(I)*(H(I)-R(I))/2.
54 Q(1,I)=H(I)*(SQ(2,I)+T1(I)*(SIGO(I)*H(I)/3.+SIGU(I)*H(I)/6.))
55 Q(2,I)=B(I)*(SQ(1,I)+TU(I)*B(I)*SIGU(I)/6.)
56 Q(3,I)=SQ(3,I)*B(I)/3.
57 Q(4,I)=TFO(I)*FO**2*(SIGO(I)+2.*SIGFO(I))/6.
58 QQ(I)=Q(2,I)+2.*Q(4,I)-Q(3,I)
59 SQX(I)=-(2.*Q(1,I)/T1(I)+Q(2,I)/TU(I)+Q(3,I)/TO(I))/C(I)
60 DO 11 J=1,7
61 11 SQ(J,I)=SQ(J,I)+SQX(I)
62 SQ(4,I)=SQ(4,I)-SQX(I)
63 TS1(I)=T1(I)*YITA1(I)/HIT(I)
64 TSO(I)=TO(I)*YITAO(I)/HIT(I)
65 TSU(I)=TU(I)*YITAU(I)/HIT(I)
66 TSOM(I)=TO(I)*YITAO(I)/HIT(I)
67 QB(I)=2.*A(I)/C(I)/HIT(I)
68 TB1(I)=QB(I)/T1(I)
69 TBO(I)=QB(I)/TO(I)
70 TBU(I)=QB(I)/TU(I)

```

```

71      TBOM(I)=QB(I)/TO(I)
72      TOM(I)=SQ(5,I)/TO(I)
73      TOE(I)=SQ(3,I)/TO(I)
74      TUM(I)=SQ(6,I)/TU(I)
75      TUE(I)=SQ(1,I)/TU(I)
76      T1U(I)=SQ(1,I)/T1(I)
77      T1M(I)=SQ(7,I)/T1(I)
78      T1O(I)=SQ(2,I)/T1(I)
79      T5O(I)=SQ(4,I)/TO(I)
80      K(I)=I
81      10 CONTINUE
82      NO=N-1
83      DX=STAN/FLOAT(NO)
84      DO 12 I=1,N
85          SAB(I)=DX**2*SA(I)/12.
86          SC(I)=DX**2/(12.*CW(I))
87      12 CONTINUE
88      IARA1=KOTEI-KHINGE
89      IF(IARA1) 13,13,14
90      13 DO 4 I=1,N
91          DO 4 J=1,N
92              AA1(I,J)=0.
93              TT1(I,J)=0.
94      4 CONTINUE
95          DO 5 I=2,NO
96              AA1(I,I-1)=SAB(I-1)-1.
97              AA1(I,I)=10.*SAB(I)+2.
98              AA1(I,I+1)=SAB(I+1)-1.
99              CC1(I,1)=SC(I-1)+10.*SC(I)+SC(I+1)
100         DO 5 J=2,NO
101             CC1(I,J)=0
102     5 CONTINUE
103         DO 6 I=2,NO
104             6 CC1(I,I)=1.5*SC(I-1)+5.*SC(I)-0.5*SC(I+1)
105             DO 15 I=3,NO
106                 K1=I-1
107                 DO 15 J=2,K1
108             15 CC1(J,I)=CC1(J,1)
109                 AA1(2,1)=0.
110                 AA1(NO,N)=0.
111                 DO 7 I=1,N
112                     DO 7 J=1,NO
113             7 XX1(I,J)=0.
114                 DO 8 I=2,NO
115                     TT1(I,I-1)=AA1(I,I-1)
116                     TT1(I,I)=AA1(I,I)-TT1(I,I-1)*TT1(I-1,I)

```

```

117      TT1(I,I+1)=AA1(I,I+1)/TT1(I,I)
118      DO 8 J=1,NO
119      XX1(I,J)=(CC1(I,J)-TT1(I,I-1)*XX1(I-1,J))/TT1(I,I)
120      8 CONTINUE
121      NB=N-2
122      DO 9 J=1,NO
123      DO 9 I=2,NB
124      M1=N-I
125      XX1(M1,J)=XX1(M1,J)-XX1(M1+1,J)*TT1(M1,M1+1)
126      9 CONTINUE
127      DO 31 J=1,NO
128      GX1(J)=XX1(2,J)*4.
129      DO 31 I=3,NB,2
130      31 GX1(J)=GX1(J)+2.*XX1(I,J)+4.*XX1(I+1,J)
131      DO 32 J=1,NO
132      32 GX1(J)=GX1(J)*DX/3.
133      P1(1)=1./CW(1)
134      P1(N)=1.
135      XX1(1,1)=0.
136      XX1(21,21)=0.
137      DO 33 J=2,NO
138      P1(J)=GX1(J)/GX1(1)
139      DO 33 I=2,NO
140      33 XX1(I,J)=XX1(I,J)-XX1(I,1)*P1(J)
141      DO 70 I=1,N
142      70 XX1(I,1)=0
143      P1(1)=0.
144      DO 34 I=1,N
145      DO 34 J=1,N
146      DXX1(I,J)=0.
147      DDXX1(I,J)=0.
148      34 CONTINUE
149      DO 77 J=1,NO
150      DXX1(1,J)=(-1.5*XX1(1,J)+2.*XX1(2,J)-0.5*XX1(3,J))/DX
151      DXX1(N,J)=(-1.5*XX1(N,J)+2.*XX1(N-1,J)-0.5*XX1(N-2,J))/DX
152      DO 77 I=2,NO
153      77 DXX1(I,J)=(0.5*XX1(I+1,J)-0.5*XX1(I-1,J))
154      DO 71 I=1,N
155      71 DXX1(I,1)=0.
156      DO 16 J=1,N
157      DO 16 I=1,N
158      IF(J-I) 17,17,18
159      17 DDXX1(I,J)=SA(I)*XX1(I,J)+P1(J)/CW(I)
160      GO TO 16
161      18 DDXX1(I,J)=SA(I)*XX1(I,J)-(1.-P1(J))/CW(I)
162      16 CONTINUE

```

```
163      DO 72 I=2,N
164      72 DDXX1(I,1)=0.
165      DO 300 J=1,N
166      DO 300 I=1,N
167      FMT1(I,J)=SA(I)*CW(I)*XX1(I,J)
168      SMT1(I,J)=CW(I)*DDXX1(I,J)
169      300 CONTINUE
170      DO 73 I=1,N
171      PMT1(I,1)=0.
172      73 SMT1(I,1)=0.
173      DO 19 J=1,N
174      DDXXB1(J,J)=-(1-P1(J))/CW(J)+SA(J)*XX1(J,J)
175      19 CONTINUE
176      DDXXB1(1)=0.
177      GO TO 5000
178      14 CONTINUE
179      DO 54 I=1,N
180      DO 54 J=1,N
181      AA2(I,J)=0.
182      XX2(I,J)=0.
183      CC2(I,J)=0.
184      TT2(I,J)=0.
185      XXRN2(I,J)=0.
186      54 CONTINUE
187      DO 55 I=2,NO
188      AA2(I,I-1)=SAB(I-1)-1.
189      AA2(I,I)=10.*SAB(I)+2.
190      AA2(I,I+1)=SAB(I+1)-1.
191      CC2(I,N)=SC(I-1)+10.*SC(I)+SC(I+1)
192      DO 55 J=1,NO
193      CC2(I,J)=0.
194      55 CONTINUE
195      DO 56 I=2,NO
196      56 CC2(I,I)=1.5*SC(I-1)+5.*SC(I)-0.5*SC(I+1)
197      DO 57 I=3,NO
198      K2=I-1
199      DO 57 J=2,K2
200      57 CC2(J,I)=CC2(J,N)
201      AA2(2,1)=0.
202      AA2(N,N-1)=SAB(N-1)-1.
203      AA2(N,N)=5.*SAB(N)+1.
204      CC2(N,N)=-0.5*SC(N-2)+3.*SC(N-1)+3.5*SC(N)
205      DO 58 I=2,NO
206      TT2(I,I-1)=AA2(I,I-1)
207      TT2(I,I)=AA2(I,I)-TT2(I,I-1)*TT2(I-1,I)
208      58 TT2(I,I+1)=AA2(I,I+1)/TT2(I,I)
```

```

209      TT2(N,N-1)=AA2(N,N-1)
210      TT2(N,N)=AA2(N,N)-TT2(N,N-1)*TT2(N-1,N)
211      DO 59 J=2,N
212      DO 59 I=2,N
213      XX2(I,J)=(CC2(I,J)-TT2(I,I-1)*XX2(I-1,J))/TT2(I,I)
214 59 CONTINUE
215      NB2=N-2
216      DO 60 J=2,N
217      DO 60 I=1,NB2
218      M2=N-1
219      XX2(M2,J)=XX2(M2,J)-XX2(M2+1,J)*TT2(M2,M2+1)
220 60 CONTINUE
221      DO 61 J=1,N
222      GX2(J)=XX2(1,J)+XX2(N,J)+4.*XX2(2,J)
223      DO 61 I=3,NB2,2
224      GX2(J)=GX2(J)+2.*XX2(I,J)+4.*XX2(I+1,J)
225      DO 62 J=1,N
226 62 GX2(J)=GX2(J)*DX/3.
227      P2(1)=1./CW(1)
228      P2(N)=1.
229      XX2(1,1)=0.
230      XXRN2(1,1)=0.
231      DO 63 J=2,N
232      L1=SPAN
233      L2=L22
234      IF(L1-L2) 64,64,65
235 64 P2(J)=GX2(J)/GX2(N)
236      GO TO 63
237 65 P2(J)=0.5*GX2(J)/GX2(N)
238 63 CONTINUE
239      P2(1)=0.
240      DO 88 J=1,N
241      DO 88 I=2,N
242      XXRN2(I,J)=XX2(I,N)*P2(J)
243 88 XX2(I,J)=XX2(I,J)-XX2(I,N)*P2(J)
244      DO 74 I=1,N
245      XX2(I,1)=0.
246 74 XXRN2(I,1)=0.
247      DO 66 J=1,N
248      DXXR2(1,J)=(-1.5*XXRN2(1,J)+2.*XXRN2(2,J)-0.5*XXRN2(3,J))/DX
249      DXXR2(N,J)=(-1.5*XXRN2(N,J)+2.*XXRN2(N-1,J)-0.5*XXRN2(N-2,J))/DX
250      DXX2(1,J)=(-1.5*XX2(1,J)+2.*XX2(2,J)-0.5*XX2(3,J))/DX
251      DXX2(N,J)=(-1.5*XX2(N,1)+2.*XX2(N-1,J)-0.5*XX2(N-2,J))/DX
252      DO 66 I=2,N
253      DXX2(I,J)=(0.5*XX2(I+1,J)-0.5*XX2(I-1,J))/DX
254 66 DXXR2(I,J)=(0.5*XXRN2(I+1,J)-0.5*XXRN2(I-1,J))/DX

```

```

255      DO 75 I=1,N
256      DXX2(I,1)=0.
257      75 DXXR2(I,1)=0.
258      DO 67 J=1,N
259      DO 67 I=1,N
260      DDXXR2(I,J)=SA(I)*XXR2(I,J)-P2(J)/CW(I)
261      IF(J-I) 68,68,69
262      68 DDXX2(I,J)=SA(I)*XX2(I,J)+P2(J)/CW(I)
263      GO TO 67
264      69 DDXX2(I,J)=SA(I)*XX2(I,J)-(1.-P2(J))/CW(I)
265      67 CONTINUE
266      DO 76 I=1,N
267      76 DDXXR2(I,1)=0.
268      DO 78 I=2,N
269      78 DDXX2(I,1)=0.
270      DO 25 J=1,N
271      25 DDXXB2(J)=-(1.-P2(J))/CW(J)+SA(J)*XX2(J,J)
272      DDXXB2(1)=0.
273      DDXX2(21,21)=DDXX2(21,21)
274      DO 22 J=1,N
275      DO 22 I=1,N
276      PMT2(I,J)=SA(I)*CW(I)*XX2(I,J)
277      22 CONTINUE
278      DO 79 I=1,N
279      79 PMT2(I,1)=0.0
280      DO 23 J=1,N
281      DO 23 I=1,N
282      PMTR2(I,J)=SA(I)*CW(I)*XXR2(I,J)
283      23 CONTINUE
284      DO 80 I=1,N
285      80 PMTR2(I,1)=0.
286      5000 WRITE(6,2000)
287      WRITE(6,40) (K(I),A(I),C(I),GMO(I),GMU(I),GM1(I),X1(I),XO(I),XU(I)
288      *,XFO(I),I=1,N)
289      WRITE(6,101)
290      WRITE(6,2001)
291      WRITE(6,41) (K(I),Y(I),HITS(I),HITB(I),HIT(I),R(I),ZETA(I),CW(I),S
292      *A(I),I=1,N)
293      WRITE(6,101)
294      WRITE(6,2002)
295      WRITE(6,42) (K(I),(SQ(J,I),J=1,7),I=1,N)
296      WRITE(6,101)
297      WRITE(6,2003)
298      WRITE(6,40) (K(I),SIGO(I),SIGU(I),SIGFO(I),SQX(I),(Q(J,I),J=1,4),Q
299      *Q(I),I=1,N)
300      WRITE(6,101)

```

```

298      WRITE(6,2004)
299      WRITE(6,40) (K(I),TS1(I),TSO(I),TSU(I),TSOM(I),QB(I),TB1(I),TBO(I)
209      *,TBU(I),TBOM(I),I=1,N)
300      WRITE(6,101)
301      WRITE(6,2005)
302      WRITE(6,41) (K(I),TOM(I),TOE(I),TUM(I),TUE(I),T1U(I),T1M(I),T1O(I)
302      *,T5O(I),I=1,N)
303      WRITE(6,102)
304      101 FORMAT(/)
305      102 FORMAT(/)
306      109 FORMAT(/////////)
307      40 FORMAT(I5,9E12.4)
308      41 FORMAT(I5,8E12.4)
309      42 FORMAT(I5,7E12.4)
310      2000 FORMAT(111H PUNKT      A      C      GANMA O      GANMA U      G
310      *ANMA 1      X1      XO      XU      XFO)
311      2001 FORMAT(92H PUNKT      Y      ITS      IT      R(M)
311      *      Z      CW(W**6)      A(0.43IT/CW))
312      2002 FORMAT(88H PUNKT      Q(1)      Q(2)      Q(3)      Q(4)
312      *      Q(5)      Q(6)      Q(7))
313      2003 FORMAT(112H PUNKT SIGMA O      SIGMA U      SIGMA F      QX
313      *      Q(1)      Q(2)      Q(3)      Q(4)      SUME(Q))
314      2004 FORMAT(112H PUNKT      TS1      TSO      TSU      TSOM
314      *      QB      TB1      TBO      TBU      TBOM)
315      2005 FORMAT(100H PUNKT      TOM      TOE      TUM      TUE
315      *      T1U      T1M      T1O      TFO)
316      IF(IARA1) 6000,6000,7000
317      6000 WRITE(6,2000)
318      200 FORMAT(9H MT/GIT/)
319      WRITE(6,2006)
320      WRITE(6,43) ((XX1(I,J),J=1,7),I=1,N)
321      WRITE(6,101)
322      WRITE(6,2007)
323      WRITE(6,43) ((XX1(I,J),J= 8,14),I=1,N)
324      WRITE(6,101)
325      WRITE(6,2008)
326      WRITE(6,43) ((XX1(I,J),J=15,21),I=1,N)
327      WRITE(6,102)
328      WRITE(6,201)
329      201 FORMAT(12H D(MT/GIT)/)
330      WRITE(6,2006)
331      WRITE(6,43) ((DXX1(I,J),J=1,7),I=1,N)
332      WRITE(6,101)
333      WRITE(6,2007)
334      WRITE(6,43) ((DXX1(I,J),J=8,14),I=1,N)
335      WRITE(6,101)

```

```
326      WRITE(6,43) ((XX1(I,J),J=15,21),I=1,N)
327      WRITE(6,102)
328      WRITE(6,201)
329      201 FORMAT(12H D(MT/GIT)/)
330      WRITE(6,2006)
331      WRITE(6,43) ((DXX1(I,J),J=1,7),I=1,N)
332      WRITE(6,101)
333      WRITE(6,2007)
334      WRITE(6,43) ((DXX1(I,J),J=8,14),I=1,N)
335      WRITE(6,101)
336      WRITE(6,2008)
337      WRITE(6,43) ((DXX1(I,J),J=15,21),I=1,N)
338      WRITE(6,102)
339      WRITE(6,202)
340      202 FORMAT(13H DD(MT/GIT)/)
341      WRITE(6,2006)
342      WRITE(6,43) ((DDXX1(I,J),J=1,7),I=1,N)
343      WRITE(6,101)
344      WRITE(6,2007)
345      WRITE(6,43) ((DDXX1(I,J),J=8,14),I=1,N)
346      WRITE(6,101)
347      WRITE(6,2008)
348      WRITE(6,43) ((DDXX1(I,J),J=15,21),I=1,N)
349      WRITE(6,102)
350      WRITE(6,203)
351      203 FORMAT(39H DER WERTE VOM BELASTUNGSTELLE/)
352      WRITE(6,44) (DDXXB1(J,J),J=1,N)
353      WRITE(6,102)
354      WRITE(6,204)
355      204 FORMAT(6H MPT/)
356      WRITE(6,2006)
357      WRITE(6,43) ((PMT1(I,J),J=1,7),I=1,N)
358      WRITE(6,101)
359      WRITE(6,2007)
360      WRITE(6,43) ((PMT1(I,J),J=8,14),I=1,N)
361      WRITE(6,101)
362      WRITE(6,2008)
363      WRITE(6,43) ((PMT1(I,J),J=15,21),I=1,N)
364      WRITE(6,102)
365      WRITE(6,205)
366      205 FORMAT(6H MST/)
367      WRITE(6,2006)
368      WRITE(6,43) ((SMT1(I,J),J=1,7),I=1,N)
369      WRITE(6,101)
370      WRITE(6,2007)
371      WRITE(6,43) ((SMT1(I,J),J=8,14),I=1,N)
```

```

372      WRITE(6,101)
373      WRITE(6,2008)
374      WRITE(6,43) ((SMT1(I,J),J=15,21),I=1,N)
375      WRITE(6,102)
376      WRITE(6,206)
377      206 FORMAT(31H UNBESTIMMTE TORSIONMOMENTE(X))
378      WRITE(6,44) (P1(J),J=1,N)
379      WRITE(6,109)
380      43 FORMAT(7E15.6)
381      44 FORMAT(E15.6)
382      2006 FORMAT(1000H      M(1)      M(2)      M(3)      M(4)
382      *      M(5)      M(6)      M(7))
383      2007 FORMAT(101H      M(8)      M(9)      M(10)      M(11)
383      *)      M(12)      M(13)      M(14))
384      2008 FORMAT(101H      M(15)      M(16)      M(17)      M(18)
384      *)      M(19)      M(16)      M(21))
385      GO TO 9000
386      7000 CONTINUE
387      WRITE(6,207)
388      207 FORMAT(9H MT/GIT/)
389      WRITE(6,2009)
390      WRITE(6,45) ((XX2(I,J),J=1,7),I=1,N)
391      WRITE(6,101)
392      WRITE(6,2010)
393      WRITE(6,45) ((XX2(I,J),J=8,14),I=1,N)
394      WRITE(6,101)
395      WRITE(6,2011)
396      WRITE(6,45) ((XX2(I,J),J=15,21),I=1,N)
397      WRITE(6,101)
398      WRITE(6,208)
399      208 FORMAT(12H D(MT/GIT)/)
400      WRITE(6,2009)
401      WRITE(6,45) ((DXX2(I,J),J=1,7),I=1,N)
402      WRITE(6,101)
403      WRITE(6,2010)
404      WRITE(6,45) ((DXX2(I,J),J=8,14),I=1,N)
405      WRITE(6,101)
406      WRITE(6,2011)
407      WRITE(6,45) ((DXX2(I,J),J=15,21),I=1,N)
408      WRITE(6,102)
409      WRITE(6,209)
410      209 FORMAT(13H DD(MT/GIT)/)
411      WRITE(6,2009)
412      WRITE(6,45) ((DDXX2(I,J),J=1,7),I=1,N)
413      WRITE(6,101)
414      WRITE(6,2010)

```

```
415      WRITE(6,45) ((DDXX2(I,J),J=8,14),I=1,N)
416      WRITE(6,101)
417      WRITE(6,201)
418      WRITE(6,45) ((DDXX2(I,J),J=15,21),I=1,N)
419      WRITE(6,101)
420      WRITE(6,210)
421  210 FORMAT(6H MPT/)
422      WRITE(6,2009)
423      WRITE(6,45) ((PMT2(I,J),J=1,7),I=1,N)
424      WRITE(6,101)
425      WRITE(6,2010)
426      WRITE(6,45) ((PMT2(I,J),J=8,14),I=1,N)
427      WRITE(6,101)
428      WRITE(6,2011)
429      WRITE(6,45) ((PMT2(I,J),J=15,21),I=1,N)
430      WRITE(6,102)
431      WRITE(6,211)
432  211 FORMAT(39H DER WERTE VOM BELASTUNGSTELLE/)
433      WRITE(6,46) (DDXXB2(J),P2(J),J=1,N)
434      IF(L1-L2) 81,81,82
435      32 WRITE(6,102)
436      GO TO 93
437      81 WRITE(6,109)
438      IF(L1-L2) 92,92,93
439      93 WRITE(6,212)
440  212 FORMAT(12H (MT/GIT)D/)
441      WRITE(6,2009)
442      WRITE(6,45) ((XXRN2(I,J),J=1,7),I=1,N)
443      WRITE(6,101)
444      WRITE(6,2010)
445      WRITE(6,45) ((XXRN2(I,J),J=8,14),I=1,N)
446      WRITE(6,101)
447      WRITE(6,2011)
448      WRITE(6,45) ((XXRN2(I,J),J=15,21),I=1,N)
449      WRITE(6,102)
450      WRITE(6,214)
451  213 FORMAT(13H D(MT/GIT)D/)
452      WRITE(6,2009)
453      WRITE(6,45) ((DXXR2(I,J),J=1,7),I=1,N)
454      WRITE(6,101)
455      WRITE(6,2010)
456      WRITE(6,45) ((DXXR2(I,J),J=8,14),I=1,N)
457      WRITE(6,101)
458      WRITE(6,2011)
459      WRITE(6,45) ((DXXR2(I,J),J=15,21),I=1,N)
460      WRITE(6,102)
```

```

461      WRITE(6,214)
462      214 FORMAT(14H DD(MT/GIT)D/)
463      WRITE(6,2009)
464      WRITE(6,45) ((DDXXR2(I,J),J=1,7),I=1,N)
465      WRITE(6,101)
466      WRITE(6,2010)
467      WRITE(6,45) ((DDXXR2(I,J),J=8,14),I=1,N)
468      WRITE(6,101)
469      WRITE(6,2011)
470      WRITE(6,45) ((DDXXR2(I,J),J=15,21),I=1,N)
471      WRITE(6,102)
472      WRITE(6,215)
473      215 FORMAT(7H MPTD/)
474      WRITE(6,2009)
475      WRITE(6,45) ((PMTR2(I,J),J=1,7),I=1,N)
476      WRITE(6,101)
477      WRITE(6,2010)
478      WRITE(6,45) ((PMTR2(I,J),J=8,14),I=1,N)
479      WRITE(6,101)
480      WRITE(6,2011)
481      WRITE(6,45) ((PMTR2(I,J),J=15,21),I=1,N)
482      WRITE(6,109)
483      92 CONTINUE
484      45 FORMAT(7E15.6)
485      46 FORMAT(2E15.6)
486      2009 FORMAT(100H      M(1)      M(2)      M(3)      M(4)
486      *      M(5)      M(6)      M(7))
487      2010 FORMAT(101H      M(8)      M(9)      M(10)      M(11)
487      *)      M(12)      M(13)      M(14))
488      FORMAT(101H      M(15)      M(16)      M(17)      M(18)
488      *)      M(19)      M(20)      M(21))
489      9000 CONTINUE
490      9001 STOP
500      END

```