

Technical Memorandum of
The Public Works Research Institute
Ministry of Construction

土 木 研 究 所 資 料

第 5 2 5 号

不連続体の非弾性的挙動に対する力学的解析の一試み

"A Mechanical Analysis about Nonelastic-behavior
in Discontinuous Material"

昭和44年10月

建設省土木研究所

ま え が き

本報告は、岩盤、粒状体等不連続体を連続体として取扱う場合についての現在の筆者の考えを述べたものである。

本報告は二部から成り、前の部分は報告書というよりは弾塑性理論の数学的基礎理論を解説的に述べたものであり、後者は表題の如く、不連続体を連続体として取扱う方法について述べたもので、元来別のものである。しかし後の部分を理解する上では前の部分があった方がよいと考え、一緒にまとめることにした。

前の部分は理解し易さを目的として書いたので、必ずしも歴史的な記述は正確でない。例えば Mises の降伏条件式よりも、Prandtl-Reuss の式の方が先に提案されていたような書き方をしている。これは実際には逆であるが、このように説明した方が Mises の降伏条件式の数学的な意味が理解し易いと考えて、敢てこのような書き方を試みた。

また後の部分については筆者は先に「体積変化をともなう直交異方性弾塑性理論とその適用」としてこの種の試みを発表した。しかし東京大学生産技術研究所教授山田嘉昭氏より、塑性ポテンシャルの考え方に誤りがあるとの御指摘を受け、その後筆者の質問に対し、一々御指導下さり、更に体積変化をともなう場合の異方性塑性理論についてノートをお送り下さった。筆者はこれらにもとづいて、不連続体の力学的特性を再検討し、とりまとめたものである。

歪硬化のある場合塑性ポテンシャルについて未だ十分に理解し切れない点もあり、また歪硬化関数を実験データにもとづいてどのように撰ぶかについては今後の検討課題である。

最後に理論面で細部にわたり御指導下さった東京大学生産技術研究所教授山田嘉昭氏に深く感謝すると共に、現象面において色々と御教授下さった東京大学生産技術研究所教授岡本舜三氏、東京大学教授最上武雄氏に感謝する次第である。

飯 田 隆 一
小 林 茂 敏

I 弾塑性理論の基礎理論.....	1
1. 質点の平衡と仮想仕事の原理	1
2. 応 力	5
2.1 応力の定義	5
2.2 応力の変換式と不変量	6
3. 応力の平衡	11
3.1 微小体の平衡	11
3.2 Greenの積分定理	12
3.3 Greenの積分定理による平衡方程式の誘導.....	13
4. 歪	14
4.1 歪 の 定 義	14
4.2 微小歪とその変換式	14
4.3 歪 増 分	18
4.4 有 限 歪	19
5. 弾性理論の基礎理論.....	21
5.1 仮想仕事の原理と最小仕事の原理	21
5.2 等方性弾性体の応力と歪の関係	24
5.3 異方性弾性体における応力と歪の関係.....	26
5.4 弾性理論における基本方程式	30
6. 塑性理論の基礎理論.....	32
6.1 偏差応力と偏差歪.....	32
6.2 過去における応力と歪増分の関係に対する仮定	32
6.3 塑性理論における変分原理と塑性ポテンシャル	33
6.4 降 伏 条 件	36
6.5 歪 硬 化	42

II 不連続体の解析方法	46
7. 不連続体のすべりの特徴	46
7.1 平滑な不連続面が存在した場合のこの平面にそってのすべりの特徴	46
7.2 不連続面でのすべりがCoulombの内部摩擦説に支配されるとき 歪増分および変位増分の特徴	47
7.3 不連続平面でのすべりの特徴	48
8. 不連続体の特徴	49
9. 異方性体におけるすべりによる歪増分と降伏条件	50
10. 異方性不連続体の有限要素法による解法	60
11. 岩盤の解析	63
11.1 節理が直交している場合の解析方法	63
11.2 節理が斜交している場合の解析方法	69
12. 粒状体の解析	71

I 弾塑性理論の基礎理論

1. 質点の平衡と仮想仕事の原理

質点が平衡状態にあるとき、この質点に作用する力を X, Y, Z とすると、

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

さてこの質点に任意の仮想変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ を与えたとして

(1) 式から当然

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

が成立する。これを仮想仕事の原理という。

(2) 式が任意の仮想変位に対して成立つとすると

$$\delta x \neq 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

のときも成立しなければならない。

$$\therefore X = 0$$

同様に $Y = 0, Z = 0$

となり、(2)式が任意の仮想変位に対して成立するときは(2)式と(1)式とは全く同等のものとなる。

今 X, Y, Z を x, y, z 方向の成分とする力のベクトルを $\mathbf{F}$ とし、 $\delta x, \delta y, \delta z$ を x, y, z 方向の成分とする微小変位のベクトルを $\delta \mathbf{r}$ とすると(2)式は

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。これは力 $\mathbf{F}$ が変位 $\delta \mathbf{r}$ に対してなす仕事であるから、(2)および(3)式は

質点が平衡にあるときはこれに任意の微小変位をさせたとき働く力のなす仕事の和は 0 である。

と表言される。

次に微小変位 $\delta \mathbf{r}$ に何らかの制約がある場合について考察してみよう。今 $\delta \mathbf{r}$ に垂直な力を $\mathbf{F}'$ とすると、力に垂直な変位を与えても仕事は 0 であるから

$$\mathbf{F}' \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

$$\therefore (\mathbf{F} - \mathbf{F}') \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

となる。

$\mathbf{F}'$ の x, y, z 方向の成分を X', Y', Z' とすると

$$(X - X') \delta x + (Y - Y') \delta y + (Z - Z') \delta z = 0$$

となる。

即ち(2)および(3)式は仮想の微小変位に垂直な力の成分をのぞいたものに対しても成立することになる。仮想仕事の原理は平衡方程式(1)とは異った意味を持つことになる。

1例として曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上に拘束された質点の平衡について述べてみよう。この質点は曲面上に摩擦力をなしに拘束されているとする。しかるとき拘束力はこの曲面 $f(x, y, z) = 0$ に垂直である。今この質点に作用する拘束力を含まない外力を X, Y, Z とすると

$$X \neq 0, Y \neq 0, Z \neq 0$$

であるが、この質点に許し得る仮想変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ は曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上になければならないから、拘束力のなす仮想仕事は当然 0 でなければならない。したがって前に説明したように

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

が成立しなければならない。

さて仮想変位を与えた後もこの質点は曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上になければならないから

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

が成立しなければならない。これを Taylor 展開すると

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots\dots\dots \right\} = 0$$

今 $\delta x, \delta y, \delta z$ は充分小さく 2 次以上の項は無視し得るとすると

$$f(x, y, z) = 0$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。これは $\delta x, \delta y, \delta z$ に対する制約条件である。

(4), (5)式から

$$\left(X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda \right) \delta x + \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda \right) \delta y + \left(Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda \right) \delta z = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。今

$$Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda = 0$$

なるように λ を定めると、

$$\left(X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda \right) \delta x + \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda \right) \delta y = 0$$

となる。今 $\delta y \neq 0, \delta x = 0$ なるようにすると

$$\delta z = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \delta y$$

とすれば $\delta x, \delta y, \delta z$ は (5) 式を満足するから、このような仮想変位は曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上

に拘束された質点に許し得る仮想変位となる。このような仮想変位をとると

$$Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda = 0$$

同様に $\delta x \neq 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \delta x$ なる仮想変位を与えれば

$$X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda = 0$$

即ち

$$\boxed{X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda = 0, \quad Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda = 0, \quad Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda = 0} \quad \dots\dots\dots (7)$$

を満足するような λ が存在する。この λ を Lagrange の不定常数という。

今拘束力を R としその x, y, z 成分を R_x, R_y, R_z とすると R は曲面 $f(x, y, z) = 0$ に垂直であるから、その方向余弦を l, m, n とすると

$$l = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$m = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$n = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

である。故に

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \frac{\pm \frac{\partial f}{\partial x} R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ R_y &= \frac{\pm \frac{\partial f}{\partial y} R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ R_z &= \frac{\pm \frac{\partial f}{\partial z} R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり、 $X - R_x = 0$, $Y - R_y = 0$, $Z - R_z = 0$

であるから

$$\lambda = \frac{\pm R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

となる。このように拘束力を普通の平衡方程式から求めるには X, Y, Z, R との関係を求め、それから (8) 式により R_x, R_y, R_z を求めなければならないが、(7) 式によるときは直接 X, Y, Z より拘束力を求め得るし、或は平衡を保つための X, Y, Z の比も簡単に求められる。

もう一つの例として曲線 $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ の上に摩擦なしに拘束された質点の平衡について考察してみよう。

この場合にも質点に作用する拘束力をのぞいた外力を X, Y, Z とすると

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

また仮想変位が曲線上にあるためには

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

でなければならない。故に

$$\left(X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda - \frac{\partial g}{\partial x} \mu\right) \delta x + \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda - \frac{\partial g}{\partial y} \mu\right) \delta y + \left(Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda - \frac{\partial g}{\partial z} \mu\right) \delta z = 0 \quad \dots (10)$$

が成立する、今

$$Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda - \frac{\partial g}{\partial y} \mu = 0, \quad Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda - \frac{\partial g}{\partial z} \mu = 0$$

なるように λ, μ を定め、仮想変位として

$$\delta y = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y}} \delta x$$

$$\delta z = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z}} \delta x$$

を用いるとこれは (9) 式を満足するからこの仮想変位は曲線上にそったものである。これを (7) 式に代入すると

$$X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda - \frac{\partial g}{\partial x} \mu = 0$$

即ち

$$\left. \begin{array}{l} X - \frac{\partial f}{\partial x} \lambda - \frac{\partial g}{\partial x} \mu = 0 \\ Y - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda - \frac{\partial g}{\partial y} \mu = 0 \\ Z - \frac{\partial f}{\partial z} \lambda - \frac{\partial g}{\partial z} \mu = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

が成立し、また (11) 式を満足するような λ, μ が存在することになる。

以上、質点 が拘束されている場合の平衡問題を取扱う場合に平衡方程式を用いるよりも仮想仕事の原理と Lagrange の不定乗数法を用いると極めて容易に取扱えることを示したが、上記の例では拘束条件が 1つの場合と 2つの場合について考察した。

次にこの拘束条件はいくつまで許し得るのかについて考察しよう。さて、今拘束条件の数が変分変数 $\delta x, \delta y, \delta z$ の数と同じ 3 ケ存在した場合について考察してみよう。

拘束条件を $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$ とする。

しかるとき、 $\delta x, \delta y, \delta z$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \delta y + \frac{\partial h}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned}$$

を満足していなければならない。このことは $\delta x, \delta y, \delta z$ は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

でない限り $\delta x, \delta y, \delta z$ は 0 となり仮想仕事の原理そのものが成り立たなくなる。即ち

変分原理と、Lagrange の不定乗数法とを組合せて用いるためには、拘束条件の数は変分変数の数より少くなければならない。

この変分原理と Lagrange の不定乗数法は塑性理論を理解する上で極めて重要であるから充分理解されたい。

2. 応 力

2.1 応力の定義

前節では質点の平衡について述べて来た。次に連続体内の平衡について論ずるに先立って

内力の定義について述べる。質点の場合には平衡で充分であったが、連続体内の平衡の場合には単位面積当りの力について論ずる必要がありこれを応力と名づける。

今 $x = \text{const}$ の面に単位面積当り x 方向に働く力を σ_x

$y = \text{const}$	"	y 方向	"	σ_y
$z = \text{const}$	"	z 方向	"	σ_z
$x = \text{const}$	"	y 方向	"	τ_{xy}
$x = \text{const}$	"	z 方向	"	τ_{xz}
$y = \text{const}$	"	x 方向	"	τ_{yx}
$y = \text{const}$	"	z 方向	"	τ_{yz}
$z = \text{const}$	"	x 方向	"	τ_{zx}
$z = \text{const}$	"	y 方向	"	τ_{zy}

とする。今辺が x, y, z 軸に平行で辺長が dx, dy, dz なる長方体を考える (図-1)

$$DA = CB = HE = GF = dx$$

$$AB = DC = EF = HG = dy$$

$$AE = BF = CG = DH = dz$$

□ ABCD で A 点の周りの回転の平衡をとると

BC には x 方向に τ_{yx}

DC には y 方向に $-\tau_{xy}$

AB には x 方向に σ_x

DC には x 方向に $-\sigma_x$

AD には y 方向に $-\sigma_y$

BC には y 方向に σ_y

が作用するから A 点の周りの回転は

$$\begin{aligned} & \tau_{yx} dx dy - \tau_{xy} dy dx - \sigma_x dy \cdot \frac{1}{2} dy + \sigma_x dy \cdot \frac{1}{2} dy - \sigma_y dx \cdot \frac{1}{2} dx \\ & + \sigma_y dx \cdot \frac{1}{2} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

同様に $\tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$

即ち応力としては $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ の 6 を考えればよくこのうち $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を直応力, $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ をせん断応力と名付ける。

2.2 応力の変換式と不変量

図-2 に示すように x, y, z 座標の他に直交直線座標 α, β, r をとったとする。この各々の方向余弦を

	x	y	z
α	$\cos(x, \alpha)$	$\cos(y, \alpha)$	$\cos(z, \alpha)$
β	$\cos(x, \beta)$	$\cos(y, \beta)$	$\cos(z, \beta)$
r	$\cos(x, r)$	$\cos(y, r)$	$\cos(z, r)$

とする。

今 α 軸に直交する平面を ABC とし、 x 軸、 y 軸、 z 軸との交点を夫々 A, B, C とする。

$\triangle ABC$ の面積を S

$\triangle OBC$ " S_x

$\triangle OAC$ " S_y

$\triangle OAB$ " S_z

とする。立体幾何より

$$\left. \begin{aligned} S_x &= S \cos(x, \alpha) \\ S_y &= S \cos(y, \alpha) \\ S_z &= S \cos(z, \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

今応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ が存在していて面 ABC の単位面積当りに x, Y, Z 方向に働く力を p_{ax}, p_{ay}, p_{az} とする。

この p_{ax}, p_{ay}, p_{az} は α と、 x, y, z とが一致または直交していないので応力とは異なり surface traction と呼ばれる。

さて三角錐 $OABC$ の平衡について考察すると

$\triangle OAB$ には x 方向に応力 τ_{zx} が働き

$\triangle OBC$ には " σ_x "

$\triangle OAC$ には " τ_{xy} が働く

$$\therefore \sigma_x \cdot S_x + \tau_{xy} \cdot S_y + \tau_{xz} \cdot S_z = S \cdot p_{ax}$$

(12) 式より

$$\left. \begin{aligned} p_{ax} &= \sigma_x \cos(\alpha, x) + \tau_{xy} \cos(\alpha, y) + \tau_{xz} \cos(\alpha, z) \\ \text{同様に } p_{ay} &= \tau_{xy} \cos(\alpha, x) + \sigma_y \cos(\alpha, y) + \tau_{yz} \cos(\alpha, z) \\ p_{az} &= \tau_{xz} \cos(\alpha, x) + \tau_{yz} \cos(\alpha, y) + \sigma_z \cos(\alpha, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

一方 $\triangle ABC$ には応力 $\sigma_a, \tau_{a\beta}, \tau_{a\gamma}$ が存在し、これらのなす角は

	p_{ax}	p_{ay}	p_{az}
σ_a	$\cos(x, \alpha)$	$\cos(y, \alpha)$	$\cos(z, \alpha)$
$\tau_{a\beta}$	$\cos(x, \beta)$	$\cos(y, \beta)$	$\cos(z, \beta)$
$\tau_{a\gamma}$	$\cos(x, \gamma)$	$\cos(y, \gamma)$	$\cos(z, \gamma)$

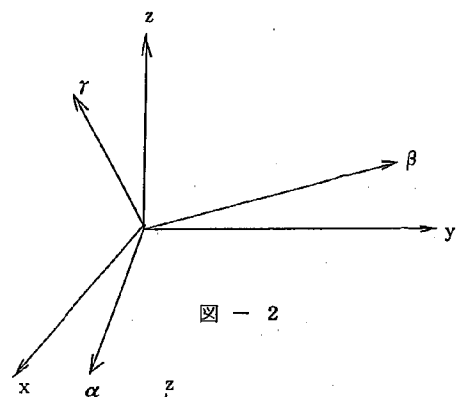


図 - 2

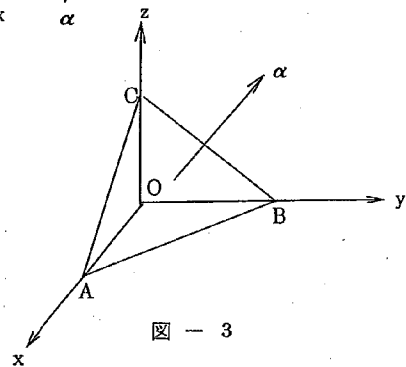


図 - 3

であるから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_{\alpha x} \cos(x, \alpha) + p_{\alpha y} \cos(y, \alpha) + p_{\alpha z} \cos(z, \alpha) \\ \tau_{\alpha\beta} &= p_{\alpha x} \cos(x, \beta) + p_{\alpha y} \cos(y, \beta) + p_{\alpha z} \cos(z, \beta) \\ \tau_{\alpha\gamma} &= p_{\alpha x} \cos(x, \gamma) + p_{\alpha y} \cos(y, \gamma) + p_{\alpha z} \cos(z, \gamma) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

これに (13) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2(x, \alpha) + \sigma_y \cos^2(y, \alpha) + \sigma_z \cos^2(z, \alpha) \\ &\quad + 2 \tau_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + 2 \tau_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\ &\quad + 2 \tau_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \\ \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + \sigma_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) + \sigma_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} + \tau_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) \\ &\quad + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} + \tau_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \} \end{aligned}$$

が得られる。これらをまとめて

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2(x, \alpha) + \sigma_y \cos^2(y, \alpha) + \sigma_z \cos^2(z, \alpha) + 2 \tau_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) \\ &\quad + 2 \tau_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) + 2 \tau_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \\ \sigma_\beta &= \sigma_x \cos^2(x, \beta) + \sigma_y \cos^2(y, \beta) + \sigma_z \cos^2(z, \beta) + 2 \tau_{yz} \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) \\ &\quad + 2 \tau_{zx} \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) + 2 \tau_{xy} \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) \\ \sigma_\gamma &= \sigma_x \cos^2(x, \gamma) + \sigma_y \cos^2(y, \gamma) + \sigma_z \cos^2(z, \gamma) + 2 \tau_{yz} \cos(y, \gamma) \cos(z, \gamma) \\ &\quad + 2 \tau_{zx} \cos(z, \gamma) \cos(x, \gamma) + 2 \tau_{xy} \cos(x, \gamma) \cos(y, \gamma) \\ \tau_{\beta\gamma} &= \sigma_x \cos(x, \beta) \cos(x, \gamma) + \sigma_y \cos(y, \beta) \cos(y, \gamma) + \sigma_z \cos(z, \beta) \cos(z, \gamma) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \beta) \cos(z, \gamma) + \cos(y, \gamma) \cos(z, \beta) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \beta) \cos(x, \gamma) + \cos(z, \gamma) \cos(x, \beta) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \beta) \cos(y, \gamma) + \cos(x, \gamma) \cos(y, \beta) \} \\ \tau_{\gamma\alpha} &= \sigma_x \cos(x, \gamma) \cos(x, \alpha) + \sigma_y \cos(y, \gamma) \cos(y, \alpha) + \sigma_z \cos(z, \gamma) \cos(z, \alpha) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \gamma) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \alpha) \cos(z, \gamma) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \gamma) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \alpha) \cos(x, \gamma) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \gamma) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \alpha) \cos(y, \gamma) \} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + \sigma_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) + \sigma_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \} \end{aligned}$$

今 α, β, γ が三つの主応力の方向と一致していたとする。

しかるとき

$$\tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\alpha} = \tau_{\alpha\beta} = 0$$

(14) 式から

$$\begin{aligned} & \sigma_a \cos(\alpha, x) + \tau_{a\beta} \cos(\beta, x) + \tau_{a\gamma} \cos(\gamma, x) \\ &= p_{ax} \{ \cos^2(\alpha, x) + \cos^2(\beta, x) + \cos^2(\gamma, x) \} \\ &+ p_{ay} \{ \cos(\alpha, x) \cos(\alpha, y) + \cos(\beta, x) \cos(\beta, y) + \cos(\gamma, x) \cos(\gamma, y) \} \\ &+ p_{az} \{ \cos(\alpha, x) \cos(\alpha, z) + \cos(\beta, x) \cos(\beta, z) + \cos(\gamma, x) \cos(\gamma, z) \} \\ &= p_{ax} + p_{ay} \cos(x, y) + p_{az} \cos(x, z) \end{aligned}$$

x と y , x と z とは直交しているから $\cos(x, y) = \cos(x, z) = 0$

$$\tau_{a\beta} = \tau_{a\gamma} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \sigma_a \cos(\alpha, x) &= p_{ax} = \sigma_x \cos(x, \alpha) + \tau_{xy} \cos(y, \alpha) + \tau_{xz} \cos(z, \alpha) \\ \sigma_a \cos(\alpha, y) &= p_{ay} = \tau_{xy} \cos(x, \alpha) + \sigma_y \cos(y, \alpha) + \tau_{yz} \cos(z, \alpha) \\ \sigma_a \cos(\alpha, z) &= p_{az} = \tau_{xz} \cos(x, \alpha) + \tau_{yz} \cos(y, \alpha) + \sigma_z \cos(z, \alpha) \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_a) \cos(x, \alpha) + \tau_{xy} \cos(y, \alpha) + \tau_{xz} \cos(z, \alpha) &= 0 \\ \tau_{xy} \cos(x, \alpha) + (\sigma_y - \sigma_a) \cos(y, \alpha) + \tau_{yz} \cos(z, \alpha) &= 0 \\ \tau_{xz} \cos(x, \alpha) + \tau_{yz} \cos(y, \alpha) + (\sigma_z - \sigma_a) \cos(z, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

主応力 σ_a が存在するためには $\cos(x, \alpha), \cos(y, \alpha), \cos(z, \alpha)$ が 0 以外の値を有しなければならない。

故に

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_a & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_a & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_a \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

の 3 つの根が 3 つの主応力となる。即ち

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_a)(\sigma_y - \sigma_a)(\sigma_z - \sigma_a) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x - \sigma_a)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_a)\tau_{xz}^2 \\ & \quad - (\sigma_z - \sigma_a)\tau_{xy}^2 = 0 \\ & \sigma_a^3 - \sigma_a^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_a(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) - \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_a(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \\ & \quad + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} = 0 \\ & \sigma_a^3 - \sigma_a^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_a(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2) \\ & \quad - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$

さて、この主応力の値は座標軸を廻転しても変わらないからこの方程式の σ_a^2 , σ_a および
 常数項は変化しない筈である。即ち

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= -\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_y + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

は座標軸にかゝらず一定値を示す。これを不変量という。

また塑性理論では応力の代りに

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

を用い、 σ'_x , σ'_y , σ'_z を偏差応力というが

$$\sigma = \frac{1}{3} J_1,$$

で不変量であるから

$$\begin{aligned} J'_1 &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0 \\ J'_2 &= -\sigma'_y \sigma'_z - \sigma'_z \sigma'_x - \sigma'_x \sigma'_y + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_z - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_y + 2\sigma(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 3\sigma^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_y + \frac{2}{3} J_1^3 - \frac{1}{3} J_1^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= J_2 + \frac{1}{3} J_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J'_3 &= \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z + 2\tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma'_x \tau_{yz}^2 - \sigma'_y \tau_{zx}^2 - \sigma'_z \tau_{xy}^2 \\ &= (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \\ &\quad + \sigma(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - \sigma^3 \\ &\quad + 2\tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + \sigma(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \\ &= J_3 + \frac{1}{9} J_1^3 - \frac{1}{27} J_1^3 + \frac{1}{3} J_1 \cdot J_2 \\ &= J_3 + \frac{1}{3} J_1 \cdot J_2 + \frac{2}{27} J_1^3 \end{aligned}$$

となり J'_1 , J'_2 , J'_3 も不変量となる

$$\begin{aligned} (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^3 &= 0 \\ &= \sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z + 2(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) \\ \therefore -\sigma'_x \sigma'_y - \sigma'_y \sigma'_z - \sigma'_z \sigma'_x &= \frac{1}{2}(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z) \\ (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^3 &= 0 \\ &= \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z + 3(\sigma'^2_x \sigma'_y + \sigma'^2_y \sigma'_z + \sigma'^2_z \sigma'_x + \sigma'_x \sigma'^2_y + \sigma'_y \sigma'^2_z + \sigma'_z \sigma'^2_x) \\ &\quad + 6\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \\ &= \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z + 3(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) \\ &\quad - 3\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \\ &= \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z - 3\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \\ \therefore \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z &= \frac{1}{3}(\sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z) \end{aligned}$$

であるから

$$J_1' = \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

$$J_2' = \frac{1}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \quad \dots (19)$$

$$J_3' = \frac{1}{3} (\sigma_x'^3 + \sigma_y'^3 + \sigma_z'^3) + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x'\tau_{yz}^2 - \sigma_y'\tau_{zx}^2 - \sigma_z'\tau_{xy}^2$$

(17) 式 (19) 式にて示される不変量は等方性体の弾性論，塑性論を論ずるに当っては極めて重要な量であって，等方性体の歪エネルギー，降伏条件等は座標軸を廻転することにより変化することはあり得ないので，これらの不変量により表現されなければならない。

尙これらの不変量を求めるに当っては極めて抽象的な方法を用いたが，(15) 式より具体的に誘導する方法もある。即ち J_1 について述べると

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma &= \sigma_x \{ \cos^2(x, \alpha) + \cos^2(x, \beta) + \cos^2(x, \gamma) \} \\ &\quad + \sigma_y \{ \cos^2(y, \alpha) + \cos^2(y, \beta) + \cos^2(y, \gamma) \} + \sigma_z \{ \cos^2(z, \alpha) + \cos^2(z, \beta) + \cos^2(z, \gamma) \} \\ &\quad + 2\tau_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) + \cos(y, \gamma) \cos(z, \gamma) \} \\ &\quad + 2\tau_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) + \cos(z, \gamma) \cos(x, \gamma) \} \\ &\quad + 2\tau_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) + \cos(x, \gamma) \cos(y, \gamma) \} \\ &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + 2\tau_{yz} \cos(y, z) + 2\tau_{zx} \cos(z, x) + 2\tau_{xy} \cos(x, y) \\ &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned}$$

即ち直交する直応力の和は一定となり， J_1 は不変量であることがわかる。同様に J_2 ， J_3 についても (15) 式から不変量であることは示し得るが，誘導が複雑になるので，ここでは省略することにする。

3. 応力の平衡

3.1 微小体の平衡

連続体の一部に辺長が dx, dy, dz なる微小体を取り出し，これにより応力の平衡方程式を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \square ABFE \text{ には } x \text{ 方向に } &\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \\ \square DCGH \text{ には } x \text{ 方向に } &-\sigma_x \\ \square DAHE \text{ には } x \text{ 方向に } &-\tau_{xy} \\ \square CBFG \text{ には } x \text{ 方向に } &\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \\ \square ABCD \text{ には } x \text{ 方向に } &-\tau_{xz} \\ \square EFGH \text{ には } x \text{ 方向に } &\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

が作用する。この他に単位容積当り ρX なる容積力が働くとする， x 方向に平衡関係が成立するためには

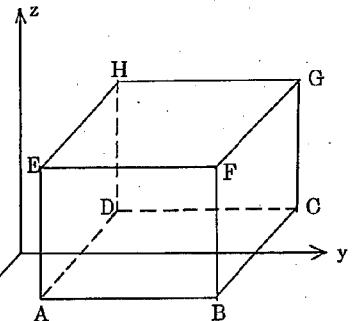


図 - 4

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{xy} dzdx \\
& + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + \rho X dxdydz = 0 \\
\therefore & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right) dxdydz = 0 \\
\therefore & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0
\end{aligned}$$

同様に y 方向 z 方向にも平衡が成立するとすれば、応力の平衡条件式として

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \\
& \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \\
& \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。この方程式は弾性体、塑性体を問わず、平衡状態にある連続体内の応力に対して常に成立する。

3.2 Green の積分定理

前項において連続体内の応力の平衡条件式を微小体の平衡から求めた。この方法の他に surface traction の表面積分に Green の定理を適用することにより求める方法がある。後者の方法は連続体の仮想仕事の原理、最小仕事の原理を誘導するに当って極めて有効であるので、Green の積分定理について説明を加えよう。

図-5 に示すように閉じた曲面 S があって曲面 S 上で x の値は異なるが y, z の値は同一である点 A, B をとる。A, B 点での曲面 S の法線を夫々 n_A, n_B とし、A, B 点を中心とし、yz 平面への投影が dy, dz となる面素を夫々 CDEF, GHIJ とする。今曲面 S 上およびこれに囲まれる部分でその座標により異なる値をとる関数 P があつたとする。

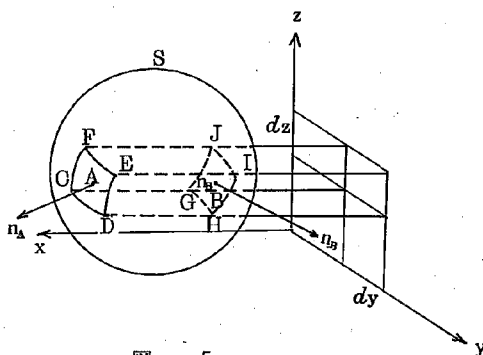


図 - 5

$$\begin{aligned}
& dS_{CDEF} \cos(x, n_A) = dydz \\
& dS_{GHIJ} \cos(x, n_B) = -dydz \\
\therefore & P_A \cos(x, n_A) dS_{CDEF} + P_B \cos(x, n_B) dS_{GHIJ} \\
& = (P_A - P_B) dydz = \left\{ \int_A^B \frac{\partial P}{\partial x} dx \right\} dydz
\end{aligned}$$

$$\therefore \iint_S P \cos(x, n) dS = \iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

となる。これを更に一般的に書き表わせば

$$\begin{aligned} & \iint_S [P \cos(x, n) + Q \cos(y, n) + R \cos(z, n)] dS \\ &= \iiint \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

これを Green の積分定理という。

3.3 Green の積分定理による平衡方程式の誘導

今連続体内に任意の閉曲面 S をとる。この曲面の法線を n とし、曲面上の surface traction を p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} , とする。このときこの閉曲面 S に囲まれた部分が平衡関係にあるときは

$$\begin{aligned} \iint_S p_{nx} dS + \iiint \rho X dx dy dz &= 0 \\ \iint_S p_{ny} dS + \iiint \rho Y dx dy dz &= 0 \\ \iint_S p_{nz} dS + \iiint \rho Z dx dy dz &= 0 \end{aligned}$$

でなければならない。さて p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} は (13) 式により与えられるから、(21) 式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \iint_S p_{nx} dS + \iiint \rho X dx dy dz \\ &= \iint_S [\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z)] dS + \iiint \rho X dx dy dz \\ &= \iiint \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right] dx dy dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \iiint \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right] dx dy dz &= 0 \\ \iiint \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right] dx dy dz &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。

連続体が平衡関係にあるときは連続体内にとった任意の閉曲面に対して上式は成り立たなければならないから体積積分の内は連続体の各部分で 0 でなければならない。

故に (20) 式と同じ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。

4. 歪

4.1 歪の定義

連続体に力が作用し、その内部に応力が生ずると、歪が発生する。工学的には変形前の線素の長さを ℓ_0 。変形後の線素の長さを ℓ とすると歪は

$$\epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad \dots\dots\dots (22)$$

として定義される。これを工学的歪或は慣用歪と名付けられている。

これに対して塑性理論においては或る状態から次の状態への歪の変化が大きく、各応力状態においての歪増分がその応力状態において定義されるときは歪増分は

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= \frac{d\ell}{\ell} \\ \epsilon &= \log \frac{\ell}{\ell_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

として表わされる。これを対数歪という。

一般に弾性理論においては工学的歪が塑性理論においては対数歪が用いられる。

4.2 微小歪とその変換式

先ず変位が小さく、変位 u, v, w および $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

は充分小さく、2次以上の項は無視し得る場合について述べる。

変形前にx軸に平行で長さ dx なる線素ABがあったとする。変形後Aは u だけx方向に変位し、Bは $u+du$ だけx方向に変位したとする。しかるとき

$$\ell_0 = dx$$

$$\ell = u + du + dx - u = du + dx$$

故にこの線素のうける歪 ϵ_x は

$$\epsilon_x = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{du}{dx}$$

となる。今 u はx座標によってのみ変化するとしたが、 y, z 座標の値によっても変化するとすると上式の微分式は偏微分式に書き改められ

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同様にy方向の線素、z方向の線素のうける歪は夫々

$$\epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

となる。

次にA(x, y, z), B($x + dx, y, z$), C($x, y + dy, z$)なる3つの点があり、A点は u, v, w

B点は $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial x} dy, w + \frac{\partial w}{\partial x} dz$

C 点は $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy, w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$

変位したとする

$$ABC \text{ は変形後 } \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

だけ x 軸に対して時計廻りに廻転し,

$$AC \text{ は変形後 } \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

だけ反時計廻りに廻転する。

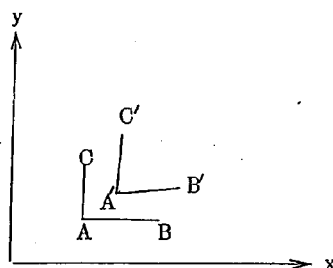


図 - 6

このため角 ABC は $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ だけ変化する。この角の変化を $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。同様に

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

これらをまとめて

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

このうち、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ を直歪, $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ をせん断歪という。

次に歪の変換式について述べる。

x, y, z 座標の他に直交直線座標 α, β, γ をとり, x, y, z 方向の変位を夫々 u, v, w , α, β, γ 方向の変位を $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ とする。しかるとき

$$u_\alpha = u \cos(x, \alpha) + v \cos(y, \alpha) + w \cos(z, \alpha)$$

$$u_\beta = u \cos(x, \beta) + v \cos(y, \beta) + w \cos(z, \beta)$$

$$u_\gamma = u \cos(x, \gamma) + v \cos(y, \gamma) + w \cos(z, \gamma)$$

$$x = \alpha \cos(x, \alpha) + \beta \cos(x, \beta) + \gamma \cos(x, \gamma)$$

$$y = \alpha \cos(y, \alpha) + \beta \cos(y, \beta) + \gamma \cos(y, \gamma)$$

$$z = \alpha \cos(z, \alpha) + \beta \cos(z, \beta) + \gamma \cos(z, \gamma)$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \cos(x, \alpha), \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = \cos(x, \beta), \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma} = \cos(x, \gamma)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \cos(y, \alpha), \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = \cos(y, \beta), \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \cos(y, \gamma)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \cos(z, \alpha), \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \cos(z, \beta), \quad \frac{\partial z}{\partial \gamma} = \cos(z, \gamma)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(z, \alpha) \right] \cos(x, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(z, \alpha) \right] \cos(y, \alpha) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(z, \alpha) \right] \cos(z, \alpha) \\
& = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, \alpha) \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\
& = \epsilon_x \cos^2(x, \alpha) + \epsilon_y \cos^2(y, \alpha) + \epsilon_z \cos^2(z, \alpha) \\
& + \gamma_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \gamma_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) + \gamma_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \\
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} = \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \beta} \\
& = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \beta) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(y, \beta) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(z, \beta) \right] \cos(x, \alpha) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(x, \beta) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y, \beta) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(z, \beta) \right] \cos(y, \alpha) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(x, \beta) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(y, \beta) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(z, \beta) \right] \cos(z, \alpha) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(z, \alpha) \right] \cos(x, \beta) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(z, \alpha) \right] \cos(y, \beta) \\
& + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(z, \alpha) \right] \cos(z, \beta) \\
& = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \} \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\
& = 2 \epsilon_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + 2 \epsilon_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) + 2 \epsilon_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\
& + \gamma_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\
& + \gamma_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\
& + \gamma_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \}
\end{aligned}$$

以下同様にして各歪成分の変換則が求められこれらをまとめて

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha &= \epsilon_x \cos^2(x, \alpha) + \epsilon_y \cos^2(y, \alpha) + \epsilon_z \cos^2(z, \alpha) \\
& + \gamma_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \gamma_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) + \gamma_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \\
\epsilon_\beta &= \epsilon_x \cos^2(x, \beta) + \epsilon_y \cos^2(y, \beta) + \epsilon_z \cos^2(z, \beta) + \gamma_{yz} \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) \\
& + \gamma_{zx} \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) + \gamma_{xy} \cos(x, \beta) \cos(y, \beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \varepsilon_x \cos^2(x, r) + \varepsilon_y \cos^2(y, r) + \varepsilon_z \cos^2(z, r) + \gamma_{yz} \cos(y, r) \cos(z, r) \\
&\quad + \gamma_{zx} \cos(z, r) \cos(x, r) + \gamma_{xy} \cos(x, r) \cos(y, r) \\
\gamma_{\beta r} &= 2 \varepsilon_x \cos(x, \beta) \cos(x, r) + 2 \varepsilon_y \cos(y, \beta) \cos(y, r) + 2 \varepsilon_z \cos(z, \beta) \cos(z, r) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, \beta) \cos(z, r) + \cos(y, r) \cos(z, \beta) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, \beta) \cos(x, r) + \cos(z, r) \cos(x, \beta) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, \beta) \cos(y, r) + \cos(x, r) \cos(y, \beta) \} \\
\gamma_{ra} &= 2 \varepsilon_x \cos(x, r) \cos(x, \alpha) + 2 \varepsilon_y \cos(y, r) \cos(y, \alpha) + 2 \varepsilon_z \cos(z, r) \cos(z, \alpha) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, r) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \alpha) \cos(z, r) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, r) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \alpha) \cos(x, r) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, r) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \alpha) \cos(y, r) \} \\
\gamma_{a\beta} &= 2 \varepsilon_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + 2 \varepsilon_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) + 2 \varepsilon_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \}
\end{aligned}$$

(25)

が得られる。応力の場合と同じく α, β, r が3つの主歪の方向と一致していたとする。しかるとき

$$\begin{aligned}
\gamma_{\beta r} &= \gamma_{ra} = \gamma_{a\beta} = 0 \\
\varepsilon_a \cos(x, \alpha) &= \varepsilon_a \cos(x, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{a\beta} \cos(x, \beta) + \frac{1}{2} \gamma_{ar} \cos(x, r) \\
&= \frac{\partial u_a}{\partial \alpha} \cos(x, \alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_a}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \right) \cos(x, \beta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_a}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right) \cos(x, r) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ u_a \cos(x, \alpha) + u_\beta \cos(x, \beta) + u_r \cos(x, r) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u_a}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_a}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u_a}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_a}{\partial x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(z, \alpha) + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(y, \alpha) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(z, \alpha) \right] \\
&= \varepsilon_x \cos(x, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos(y, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cos(z, \alpha) \\
\therefore (\varepsilon_x - \varepsilon_a) \cos(x, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos(y, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cos(z, \alpha) &= 0 \\
\frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos(x, \alpha) + (\varepsilon_y - \varepsilon_a) \cos(y, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cos(z, \alpha) &= 0 \\
\frac{1}{2} \gamma_{xz} \cos(x, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cos(y, \alpha) + (\varepsilon_z - \varepsilon_a) \cos(z, \alpha) &= 0
\end{aligned}$$

が成立し、主歪 ε_a が存在するためには $\cos(x, \alpha), \cos(y, \alpha), \cos(z, \alpha)$ が0以外の値を有しなけ

ればならない。故に

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_a & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_a & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_a \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

の3つの根が主歪となる。

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_x - \varepsilon_a)(\varepsilon_y - \varepsilon_a)(\varepsilon_z - \varepsilon_a) + \frac{1}{4} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy} - \frac{1}{4} (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_a) \gamma_{yz}^2 \\ & - \frac{1}{4} (\varepsilon_y - \varepsilon_a) \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} (\varepsilon_z - \varepsilon_a) \gamma_{xy}^2 = 0 \\ & \varepsilon_a^3 - \varepsilon_a^2 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \sigma_a (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2) \\ & - \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy} = 0 \end{aligned}$$

これから応力の場合と同様に

$$\begin{aligned} & \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ & - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 \\ & \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

は不変量である。

4.3 歪増分

一般に塑性材料では塑性領域に入ると弾性領域に比して大きな歪の増加が生ずる。この歪の増加により応力の再配分が生じ、応力分布が変化するので、またそれにより新たな歪が生ずる。

このように塑性領域では塑性歪により応力分布の変化が生じそれによりまた異った形の塑性歪が生ずるという過程をとるため、最終的な歪と最終的な応力とは直接的な関係はなく、歪および応力が変化していく経過によって異った対応関係を示す。むしろその変化していく過程での応力と歪の増分との間に直接的な関係が存在している。

したがって、塑性理論では歪の代りに歪増分が取扱われ、歪はその各々の過程での歪増分の積分として取扱われる。

歪増分は

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} du, \quad d\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} dv, \quad d\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} dw \\ d\gamma_{yz} &= 2 d\varepsilon_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} dw + \frac{\partial}{\partial z} dv \\ d\gamma_{zx} &= 2 d\varepsilon_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} du + \frac{\partial}{\partial x} dw \\ d\gamma_{xy} &= 2 d\varepsilon_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} dv + \frac{\partial}{\partial y} du \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

として表わされ、変換式および不変量は歪と同じ型で表わされる。

4.4 有 限 歪

前項までは変位および歪は充分小さく，2次以上の項は無視し得るとしていたが，この仮定が設けられないときについて述べてみよう。

変形前に (x, y, z) にあった点が，変形後に $x+u$ ， $y+v$ ， $z+w$ に移動したとする。また変形前に (x, y, z) にあった線素 ds が変形後に ds_1 になったとする。いま変形前のこの線素の方向余弦を ℓ, m, n とし，変形後の方向余弦を ℓ_1, m_1, n_1 とすると

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{dx}{ds}, \quad m = \frac{dy}{ds}, \quad n = \frac{dz}{ds} \\ \ell_1 &= \frac{d(x+u)}{ds_1}, \quad m_1 = \frac{d(y+v)}{ds_1}, \quad n_1 = \frac{d(z+w)}{ds_1} \\ \ell_1 &= \frac{d(x+u)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x+u) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}(x+u) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial z}(x+u) \frac{dz}{ds} \right\} \\ &= \frac{ds}{ds_1} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right\}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{ds}{ds_1} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \ell + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right\} \\ n_1 &= \frac{ds}{ds_1} \cdot \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \ell + \frac{\partial w}{\partial y} m + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) n \right\} \\ \ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ &= \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \ell^2 + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} m^2 \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} n^2 + 2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \ell m \\ &\quad + 2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial y} \right\} m n \\ &\quad + 2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \right\} n \ell \end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ \epsilon_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right\}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 &= (1 + 2\epsilon_{xx}) \ell^2 + (1 + 2\epsilon_{yy}) m^2 + (1 + 2\epsilon_{zz}) n^2 + 2mn\epsilon_{yz} \\ &\quad + 2n\ell\epsilon_{zx} + 2\ell m\epsilon_{xy} \dots\dots\dots (29)\end{aligned}$$

今直歪を $\frac{ds_1}{ds} - 1$ と定義すると, $\ell = 1$, $m = 0$, $n = 0$ のとき (29) 式から ϵ_x が求められる。

$$\boxed{\epsilon_x = \sqrt{1+2\epsilon_{xx}} - 1 \quad \epsilon_y = \sqrt{1+2\epsilon_{yy}} - 1 \quad \epsilon_z = \sqrt{1+2\epsilon_{zz}} - 1} \dots (30)$$

次にせん断歪について考察する。図-6において

$$A' B' = \sqrt{1+2\epsilon_{xx}} dx \quad A' C' = \sqrt{1+2\epsilon_{yy}} dy$$

今 $\angle A' B' C' = \varphi_{xy}$ とすると, 余弦定理から

$$\begin{aligned} B' C'^2 &= A' B'^2 + A' C'^2 - 2 A' B' \cdot A' C' \cos \varphi_{xy} \\ &= (1+2\epsilon_{xx})(dx)^2 + (1+2\epsilon_{yy})(dy)^2 - 2 \sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})} \cos \varphi_{xy} \cdot dx \cdot dy \end{aligned}$$

一方 (29) 式において

$$BC = ds, \quad \ell = -\frac{dx}{ds}, \quad m = \frac{dy}{ds}, \quad n = 0$$

とすると

$$B' C'^2 = (1+2\epsilon_{xx})(dx)^2 + (1+2\epsilon_{yy})(dy)^2 - 2\epsilon_{xy} dx dy$$

$$\therefore \cos \varphi_{xy} = \frac{\epsilon_{xy}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})}}$$

これをせん断歪と定義すると

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\epsilon_{xy}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})}} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\epsilon_{yz}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{yy})(1+2\epsilon_{zz})}} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\epsilon_{zx}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{zz})(1+2\epsilon_{xx})}} \end{aligned}} \dots (31)$$

(30) (31) 式 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, ... は充分小さく 2 次以上の項は無視し得ると仮定すると (24) 式が得られる。

以上, 工学的歪, 対数歪, 有限歪について述べて来た。一般に弾性理論では, 全微小歪に対し, Hooke の法則が成り立つとし, 仮想仕事の原理, 最小仕事原理, 解の唯一性が証明されていることからして, 工学的歪に対して体系化されていると考えてよい。

一方塑性理論においては応力の変化過程での各段階において後述するように, 仮想仕事の原理, 最小仕事の原理が導かれ, 解の唯一性が証明されており, 更に応力と歪増分の関係も各段階の応力状態に対応して立てられ, 全歪はこれらの歪増分の積分値として求められていることから考えると対数歪に対して体系化されていると考えてよい。

また (30), (31) 式の有限歪は歪の二次の項が一次の項に比して充分小さくないとき (22) 式の定義に従って厳密に表現すればこのように表わされるということであって, 果して弾性体で

も (24) 式の形の歪が応力と一義的に関係づけられるのか (30), (31) 式の形の歪が応力と関係づけられるのか, 現在何人かの研究者により研究されていて, 未だ定説がないのが現状である。

したがってこゝでは歪の二次の項が一次の項に比して充分小さくないときは (24) 式は厳密には成立しなくなり, 再検討の必要があるときだけ指摘するに止めよう。

5. 弾性理論の基礎理論

5.1 仮想仕事の原理と最小仕事の原理

こゝで述べる仮想仕事の原理は第1節で質点における仮想仕事の原理について述べたが連続体に適用した場合にどのような形で表言されるかという点についてである。したがってここに述べる仮想仕事の原理は弾性体のみならず連続体全般に適用し得るものである。しかし, こゝでは応力と全歪とで歪エネルギーを取扱っているが, 塑性理論では応力と歪増分とが関係付けられているので, 塑性理論に適用する場合には歪を歪増分に, 歪エネルギーを歪エネルギーの増分に置換える必要がある。従ってこゝに述べる仮想仕事の原理は弾性体には無条件で適用し得るが塑性体に適用するときは少し修正が必要となる。

連続体内における平衡方程式は (20) 式から

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0\end{aligned}$$

で表わされる。これは質点の平衡における (1) 式の

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

に相当する。

これから連続体の各部において仮想仕事の原理として

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right\} \delta u + \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right\} \delta v \\ + \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right\} \delta w = 0\end{aligned}$$

が成立しなければならない。したがって連続体全体に上式を積分しても 0 とならなければならない。すなわち

$$\begin{aligned}\iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right) \delta v \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right) \delta w \right] dx dy dz = 0\end{aligned}$$

これに Green の積分定理を適用すると

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} \delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta v) \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz} \delta v) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz} \delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z \delta w) \left. \right\} \\
& + \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) - \left\{ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) \right. \\
& + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \tau_{yz} \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \tau_{yx} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \\
& \left. \left. + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right\} \right] dx dy dz \\
& = \iint \left[\left\{ \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n) \right\} \delta u \right. \\
& + \left\{ \tau_{xy} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n) \right\} \delta v \\
& + \left\{ \tau_{xz} \cos(x, n) + \tau_{yz} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n) \right\} \delta w \left. \right] dS \\
& + \iiint \rho [X \delta u + Y \delta v + Z \delta w] dx dy dz \\
& + \iiint [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz \\
& = \iint [p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w] dS + \iiint \rho [X \delta u + Y \delta v + Z \delta w] dx dy dz \\
& - \iiint [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz \\
& = 0
\end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned}
& \iint [p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w] dS + \iiint \rho [X \delta u + Y \delta v + Z \delta w] dx dy dz \\
& = \iiint [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz
\end{aligned} \tag{32}$$

さて (32) 式で

$$\iint (p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w) dS + \iiint \rho [X \delta u + Y \delta v + Z \delta w] dx dy dz$$

は外力のなす仮想仕事であり、これを $\delta_e W$ と書き

$$\iiint [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz$$

は仮想歪により生ずる歪エネルギーでこれを $\delta_e V$ と書き表わすと (32) 式は

$$\delta_e W = \delta_e V \tag{33}$$

となり

平衡状態にある連続体に仮想変位を与えたとき、仮想変位により外力のなす仕事は仮想変位に対応する仮想歪により生ずる歪エネルギーの増加に等しい。

ことになる。

このように質点の力学においては仮想仕事の原理は仮想変位により外力のなす仕事は0であったが連続体の力学では新たに仮想歪により生ずる歪エネルギーの変化が加わって来る。

これが連続体の力学の特色である。

これは熱力学第一法則で、外力のなした仕事を δW , 熱エネルギーの変化を δQ , 内部エネルギーの変化を δV , 運動のエネルギーの変化を δT , ポテンシャルエネルギーの差を $\delta \Pi$ とすると

$$\delta W + \delta Q = \delta V + \delta T + \delta \Pi \quad \dots\dots\dots (34)$$

とされているが、仮想仕事の原理はこの一つの形態で熱エネルギー、運動のエネルギー、ポテンシャルエネルギーの変化がない場合であるとも云い得る。

以上は平衡状態にある連続体に仮想の変位およびそれに対応した仮想歪を与えた場合について述べた。次に平衡状態にある連続体に仮想の応力変化を与えた場合について述べよう。

今応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ は平衡状態にあり

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) \end{aligned}$$

にて表わされるとする。さて $\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \sigma_z + \delta \sigma_z, \tau_{yz} + \delta \tau_{yz}, \tau_{zx} + \delta \tau_{zx}, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}$ も平衡条件式および境界条件を満足しているとする。

しかるとき

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{xz} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{yz} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \delta \sigma_x \cos(n, x) + \delta \tau_{xy} \cos(n, y) + \delta \tau_{xz} \cos(n, z) \\ 0 &= \delta \tau_{xy} \cos(n, x) + \delta \sigma_y \cos(n, y) + \delta \tau_{yz} \cos(n, z) \\ 0 &= \delta \tau_{xz} \cos(n, x) + \delta \tau_{yz} \cos(n, y) + \delta \sigma_z \cos(n, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

云い換えれば $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ は平衡条件式、境界条件を満足する真の応力で、 $\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \sigma_z + \delta \sigma_z, \tau_{yz} + \delta \tau_{yz}, \tau_{zx} + \delta \tau_{zx}, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}$ は真の応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$ に対し、微小値だけ異なり、平衡条件式境界条件を満足している応力とする。

このとき

$$\iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{xz} \right\} u + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{yz} \right\} v \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \sigma_z \right\} w \right] dx dy dz = 0$$

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x u) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{xz} u) \right\} \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy} v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y v) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz} v) \right\} \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_z w) \right\} \\ & - \left\{ \delta \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \delta \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \delta \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \\ & = \iiint \left[\left\{ \delta \sigma_x \cos(x, n) + \delta \tau_{xy} \cos(y, n) + \delta \tau_{xz} \cos(z, n) \right\} u \right. \\ & + \left\{ \delta \tau_{xy} \cos(x, n) + \delta \sigma_y \cos(y, n) + \delta \tau_{yz} \cos(z, n) \right\} v \\ & + \left\{ \delta \tau_{xz} \cos(x, n) + \delta \tau_{yz} \cos(y, n) + \delta \sigma_z \cos(z, n) \right\} w \Big] dS \\ & - \iiint \left[\delta \sigma_x \varepsilon_x + \delta \sigma_y \varepsilon_y + \delta \sigma_z \varepsilon_z + \delta \tau_{yz} \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \gamma_{zx} + \delta \tau_{xy} \gamma_{xy} \right] dx dy dz \\ & = - \iiint \left[\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} \right] dx dy dz \\ & = 0 \end{aligned}$$
$$\iiint [\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}] dx dy dz = 0 \quad \dots \dots \dots (37)$$

これを最小仕事の原理といふ、Castigliano の定理のこの原理もこの一つの形態である。

等方性弾性体においては応力と歪とは比例関係にあり，弾性常数としては弾性係数 E ，
Poisson 比 ν ，せん断弾性係数 G が用いられ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma_x \text{ のみが作用したとき} & \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, & \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \\ \sigma_y \text{ " } & \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, & \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \end{array}$$

$$\sigma_z \text{ のみが作用したとき} \quad \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_z}{E}, \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\tau_{yz} \quad " \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\tau_{zx} \quad " \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} \quad " \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

となる。以上から $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ が作用したときは歪を応力で表わすと

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{E} [\sigma_y(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [\sigma_z(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。(38) 式から

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z &= \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1+\nu) - 3\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} (1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \therefore (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= \frac{E}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \\ \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x + \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \\ &= 2G \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \end{aligned}$$

以上から応力を歪で表わすと

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= 2G \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\ \sigma_z &= 2G \left[\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

或は Poisson 比の逆数 m を用いて表わせば

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G \left[\epsilon_x + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\
 \sigma_y &= 2G \left[\epsilon_y + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\
 \sigma_z &= 2G \left[\epsilon_z + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] \\
 \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\
 \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \\
 \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

となる。

これらの関係を用いて歪エネルギーを表わすと先ず応力で表わせば

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}] \\
 &= \frac{1}{2E} [(1+\nu)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)] \\
 &= \frac{1}{4G} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2] \\
 &= \frac{1}{4G} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\
 &\quad - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2] \\
 &= \frac{1}{2G} [-(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2] \\
 &= \frac{1}{2G} [J_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} J_1^2]
 \end{aligned}$$

となり歪エネルギーは (17) 式に示した不変量で表わされることになる。また歪で表わせば

$$\begin{aligned}
 V &= G \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] \\
 &= G \left[(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 - 2(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x) + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] \\
 &= G \left[2 \left\{ -(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x) + \frac{1}{4} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m-1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 \right]
 \end{aligned}$$

となり、同じく (27) 式の不変量で表わされる。

5.3 異方性弾性体における応力と歪の関係

応力と歪とは比例するという Hooke の法則を最も一般的な形で表わすと 6 つの応力成分は 6 つの歪成分に比例することになる。即ち

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (41)$$

これから単位体積当りの歪エネルギーを作ると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \{ \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ c_{11} \epsilon_x^2 + c_{22} \epsilon_y^2 + c_{33} \epsilon_z^2 + c_{44} \gamma_{yz}^2 + c_{55} \gamma_{zx}^2 + c_{66} \gamma_{xy}^2 \\ &\quad + (c_{12} + c_{21}) \epsilon_x \epsilon_y + (c_{23} + c_{32}) \epsilon_y \epsilon_z + (c_{31} + c_{13}) \epsilon_z \epsilon_x + (c_{14} + c_{41}) \epsilon_x \gamma_{yz} \\ &\quad + (c_{15} + c_{51}) \epsilon_x \gamma_{zx} + (c_{16} + c_{61}) \epsilon_x \gamma_{xy} + (c_{24} + c_{42}) \epsilon_y \gamma_{yz} + (c_{25} + c_{52}) \epsilon_y \gamma_{zx} \\ &\quad + (c_{26} + c_{62}) \epsilon_y \gamma_{xy} + (c_{34} + c_{43}) \epsilon_z \gamma_{yz} + (c_{35} + c_{53}) \epsilon_z \gamma_{zx} + (c_{36} + c_{63}) \epsilon_z \gamma_{xy} \\ &\quad + (c_{45} + c_{54}) \gamma_{yz} \gamma_{zx} + (c_{46} + c_{64}) \gamma_{yz} \gamma_{xy} + (c_{56} + c_{65}) \gamma_{xy} \gamma_{zx} \} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

さて仮想仕事の原理の誘導に當って単位体積当りの歪エネルギーの歪による変分は

$$\delta V = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}$$

にて示されることを述べた。この式が成立するためには上式の右辺は完全微分形でなければならぬ。従って

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_z} \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

(43) 式に (42) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11} \epsilon_x + \frac{1}{2} (c_{12} + c_{21}) \epsilon_y + \frac{1}{2} (c_{13} + c_{31}) \epsilon_z + \frac{1}{2} (c_{14} + c_{41}) \gamma_{yz} \\ &\quad + \frac{1}{2} (c_{15} + c_{51}) \gamma_{zx} + \frac{1}{2} (c_{16} + c_{61}) \gamma_{xy} \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

となりこれが (41) 式と一致するためには

$$c_{rs} = c_{sr}$$

とならなければならない。すなわち異方性体の弾性常数は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (44)$$

となり、弾性常数は $(36 - 6) \times \frac{1}{2} + 6 = 21$ ケとなる。

次に直交異方性体について考察する。

今連続体に対称性があると、弾性常数の数は減少して来る。

例えば z 軸が対称軸で 180° 廻転してもその性質が変わらないときは廻転後の座標を x', y', z' ,

z', x', y', z' , 方向の変位と u', v', w' , とすると

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z$$

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w$$

$$\therefore \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} = -\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\therefore \epsilon_{x'} = \epsilon_x, \quad \epsilon_{y'} = \epsilon_y, \quad \epsilon_{z'} = \epsilon_z$$

$$\gamma_{y'z'} = -\gamma_{yz}, \quad \gamma_{z'x'} = -\gamma_{zx}, \quad \gamma_{x'y'} = \gamma_{xy}$$

したがって (42) 式において γ_{yz} , γ_{zx} を一次の形で含む項の係数は 0 でなければならない。

即ち

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{40} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{50} = 0$$

同様に x 軸, y 軸も対称軸で 180° 廻転しても性質が変わらないときは前と同様に

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0$$

が付加えられ

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

このような性質を有するものが直交異方性体と云われ、このときの弾性常数の数は 9 ケである。

工学的には直交異方性体での弾性常数は

$$E_x, \quad \nu_{xy}, \quad \nu_{xz}$$

$$E_y, \quad \nu_{yx}, \quad \nu_{yz}$$

$$E_z, \quad \nu_{zx}, \quad \nu_{zy}$$

$$G_{yz}, \quad G_{zx}, \quad G_{xy}$$

にて表わされる。従って

$$E_x \epsilon_x = \sigma_x - \nu_{xy} \sigma_y - \nu_{xz} \sigma_z$$

$$E_y \epsilon_y = -\nu_{yx} \sigma_x + \sigma_y - \nu_{yz} \sigma_z$$

$$E_z \epsilon_z = -\nu_{zx} \sigma_x - \nu_{zy} \sigma_y + \sigma_z$$

$$G_{yz} \gamma_{yz} = \tau_{yz} \quad , \quad G_{zx} \gamma_{zx} = \tau_{zx} \quad , \quad G_{xy} \gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{\begin{vmatrix} E_x \epsilon_x & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ E_y \epsilon_y & 1 & -\nu_{yz} \\ E_z \epsilon_z & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ -\nu_{yx} & 1 & -\nu_{yz} \\ -\nu_{zx} & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{E_x \epsilon_x (1 - \nu_{yz} \nu_{zy}) + E_y \epsilon_y (\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{zy}) + E_z \epsilon_z (\nu_{xy} \nu_{yz} + \nu_{xz})}{\begin{vmatrix} 1 & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ -\nu_{yx} & 1 & -\nu_{yz} \\ -\nu_{zx} & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\sigma_y = \frac{E_x \epsilon_x (\nu_{yx} + \nu_{zx} \nu_{yz}) + E_y \epsilon_y (1 - \nu_{xz} \nu_{zx}) + E_z \epsilon_z (\nu_{yz} + \nu_{yx} \nu_{xz})}{\begin{vmatrix} 1 & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ -\nu_{yx} & 1 & -\nu_{yz} \\ -\nu_{zx} & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\sigma_z = \frac{E_x \epsilon_x (\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}) + E_y \epsilon_y (\nu_{zy} + \nu_{zx} \nu_{xy}) + E_z \epsilon_z (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}{\begin{vmatrix} 1 & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ -\nu_{yx} & 1 & -\nu_{yz} \\ -\nu_{zx} & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}}$$

となる。これら ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z の係数が c_{11} , c_{12} に等しくなるためには

$$E_y (\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{zy}) = (\nu_{yx} + \nu_{zx} \nu_{yz}) E_x$$

$$E_z (\nu_{xz} + \nu_{xy} \nu_{yz}) = (\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}) E_x$$

$$E_z (\nu_{yz} + \nu_{yx} \nu_{xz}) = (\nu_{zy} + \nu_{zx} \nu_{xy}) E_y$$

でなければならない。これから

$$\boxed{E_y \nu_{xy} = E_x \nu_{yx} \quad , \quad E_x \nu_{zx} = E_z \nu_{xz} \quad , \quad E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz}} \quad \dots\dots\dots (46)$$

となり

$$\boxed{\begin{aligned} c_{11} &= E_x (1 - \nu_{yz} \nu_{zx}) \frac{1}{d} \\ c_{12} &= E_y (\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{zy}) \frac{1}{d} = E_x (\nu_{yx} + \nu_{zx} \nu_{yz}) \frac{1}{d} \\ c_{13} &= E_z (\nu_{xz} + \nu_{xy} \nu_{yz}) \frac{1}{d} = E_x (\nu_{zx} + \nu_{zy} \nu_{yx}) \frac{1}{d} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= E_y(1 - \nu_{zx} \nu_{xz}) \frac{1}{J} \\
c_{23} &= E_z(\nu_{yz} + \nu_{yx} \nu_{xz}) \frac{1}{J} = E_y(\nu_{zy} + \nu_{zx} \nu_{xy}) \frac{1}{J} \\
c_{33} &= E_z(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \frac{1}{J} \\
c_{44} &= G_{yz}, \quad c_{55} = G_{zx}, \quad c_{66} = G_{xy} \\
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -\nu_{xy} & -\nu_{xz} \\ -\nu_{yx} & 1 & -\nu_{yz} \\ -\nu_{zx} & -\nu_{zy} & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{47}$$

となる。

更に等方性体の場合には歪エネルギーが2次の不変量で表わされなければならないから

$$V = \frac{1}{2} [A \{ -(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x) + \frac{1}{4} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \} + B (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2]$$

となり、弾性常数は2ヶとなる。

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = B \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{A}{4}$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} = B - A/2$$

$$\text{今 } B = \lambda + 2\mu \quad A = 4\mu$$

とすると

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu$$

となり

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \epsilon_x + \lambda (\epsilon_y + \epsilon_z) = 2\mu \epsilon_x + \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2\mu \epsilon_y + \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2\mu \epsilon_z + \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

となり λ, μ を Lamé' の常数という。これを E, ν で表わすと

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{48}$$

5.4 弾性理論における基本方程式

連続体における平衡方程式は(20)式により示される。また等方性体においてはHookeの法則により(38)式または(40)式にて示される。

(20)式を見るに未知数としては $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ の6ヶあるに対し、平衡方程式の数は3つである。したがって(20)式に境界条件を与えても直ちに解くことは出来ない。しかし(24)式で各歪成分は3つの変位成分で表わされていることに着目すれば6つの応力成分は3つの変位成分で表わすことが可能であり、これを(20)式に代入すれば3つの変位成分を未知数とした3つの方程式が得られる。即ち

$$\sigma_x = 2G \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_y = 2G \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_z = 2G \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

これを(20)式に代入すると

$$2G \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho X = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho X = 0 \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho Y = 0 \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho Z = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (49)$$

(49) 式の第一式，第二式，第三式を夫々 x, y, z で偏微分して和をとると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{m-2}{2m-3} \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0 \quad (50)$$

が得られる。

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (51)$$

のときは

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (52)$$

となり直交する3つの直線の和は調和関数となる。

容積力 X, Y, Z が (51) 式を満足し更に

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (X, Y, Z) = 0 \quad \dots\dots\dots (53)$$

のときは (49) 式の各式に $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ をかけることにより

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 (u, v, w) = 0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

これから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}) = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

即ち，変位 u, v, w ，歪 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ はいづれも倍調和関数である。

また

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

であるから (52) 式より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

となり、直交する3つの直応力の和は調和関数である。

また各応力成分はHookeの法則により歪成分に比例するから (55) 式より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = 0 \quad \dots\dots\dots (57)$$

となり、各応力成分はいづれも陪調和関数となる。

したがって弾性問題は容積力が (51), (53) 式を満足する限り、境界条件を満足する陪調和関数をとく問題になる。

6. 塑性理論の基礎理論

6.1 偏差応力と偏差歪

一般の材料は3つの主応力（特に圧縮応力）が等しい応力を受けても塑性変形および破壊は生じない。降伏ないし、破壊に関係するのは直応力と3つの直応力の平均値との差およびせん断応力である。

そこで塑性理論では

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \dots\dots\dots (58)$$

としたとき

$$\begin{array}{lll} \sigma'_x = \sigma_x - \sigma, & \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, & \sigma'_z = \sigma_z - \sigma \\ \tau_{yz}, & \tau_{zx}, & \tau_{xy} \end{array} \quad \dots\dots\dots (59)$$

なる量が導入され、これを偏差応力と名付ける。

同様に歪に対しても

$$\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \quad \dots\dots\dots (60)$$

として

$$\begin{array}{lll} \epsilon'_x = \epsilon_x - \epsilon, & \epsilon'_y = \epsilon_y - \epsilon, & \epsilon'_z = \epsilon_z - \epsilon \\ \gamma_{yz}, & \gamma_{zx}, & \gamma_{xy} \end{array} \quad \dots\dots\dots (61)$$

なる量が導入され、これを偏差歪と名付ける。

6.2 過去における応力と歪増分の関係に対する仮定

前述したように塑性領域においては塑性変形により応力の再配分が生ずる。このため応力が増加し歪が増加する割合が増加して来る。したがって塑性理論では歪増分と応力の関係が

Hooke の法則と対応するものとして取扱われる。

この関係について最初に提案したのが Levy (1871) である。即ち歪増分の主軸と応力主軸とが一致するとの観点から

$$\frac{d\epsilon_x}{\sigma'_x} = \frac{d\epsilon_y}{\sigma'_y} = \frac{d\epsilon_z}{\sigma'_z} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau'_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau'_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau'_{xy}}$$

この式は弾性歪増分と塑性歪増分とを含めた全歪増分に対してしているので、Reuss (1930) はこれを塑性歪増分に対してのみに上式を適用し、

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^P &= \sigma'_x d\lambda, & d\epsilon_y^P &= \sigma'_y d\lambda, & d\epsilon_z^P &= \sigma'_z d\lambda \\ d\gamma_{yz}^P &= 2\tau'_{yz} d\lambda, & d\gamma_{zx}^P &= 2\tau'_{zx} d\lambda, & d\gamma_{xy}^P &= 2\tau'_{xy} d\lambda \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (62)$$

を提案した。これを Prandtl - Reuss 式という。

その後 Taylor, Quinney 等がアルミニウム, 銅, 軟鉄で実験した所 Prandtl-Reuss の式はかなりの一致度であり, 更に Schmidt が軟鉄で実験した所実験誤差の範囲内で一致していた。

6.3 塑性理論における変分原理と塑性ポテンシャル

前節にも述べたように弾性理論においては変分原理 (仮想仕事の原理, 最小仕事の原理) は変位または歪と応力の関係において論ぜられているが塑性理論においては変位増分または歪増分と応力との関係で論ぜられている。したがって仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \right) \delta(du) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right) \delta(dv) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right) \delta(dw) \right] dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

と書き表わされ, 弾性体の場合と全く同様に部分積分を行い Green の積分定理を適用すると

$$\begin{aligned} \iint [P_{nx} \delta(du) + P_{ny} \delta(dv) + P_{nz} \delta(dw)] dS \\ + \iiint \rho [X \delta(du) + Y \delta(dv) + Z \delta(dw)] dx dy dz \\ = \iiint [\sigma_x \delta(d\epsilon_x) + \sigma_y \delta(d\epsilon_y) + \sigma_z \delta(d\epsilon_z) + \tau_{yz} \delta(d\gamma_{yz}) \\ + \tau_{zx} \delta(d\gamma_{zx}) + \tau_{xy} \delta(d\gamma_{xy})] dx dy dz \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (63)$$

が得られる。この仮想仕事の原理は平衡状態にある連続体に仮想の変位増分を与えることによって得られる。従って仮想の変位増分が弾性変位増分であっても, 塑性変位増分であっても (63) 式は成立する。

一般に弾塑性体では弾性変形と塑性変形とが同時に生じている。この場合全歪増分は弾性歪増分と塑性歪増分の和として与えられる。即ち

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^e + d\epsilon_x^P$$

.....

したがって (63) 式は

$$\begin{aligned}
& \iint [P_{nx} \delta(du) + P_{ny} \delta(dv) + P_{nz} \delta(dw)] dS \\
& + \iiint \rho [X \delta(du) + Y \delta(dv) + Z \delta(dw)] dx dy dz \\
& = \iiint [\sigma_x \delta(d\varepsilon_x^e) + \sigma_y \delta(d\varepsilon_y^e) + \sigma_z \delta(d\varepsilon_z^e) + \tau_{yz} \delta(d\gamma_{yz}^e) \\
& \quad + \tau_{zx} \delta(d\gamma_{zx}^e) + \tau_{xy} \delta(d\gamma_{xy}^e)] dx dy dz \\
& + \iiint [\sigma_x \delta(d\varepsilon_x^p) + \sigma_y \delta(d\varepsilon_y^p) + \sigma_z \delta(d\varepsilon_z^p) + \tau_{yz} \delta(d\gamma_{yz}^p) \\
& \quad + \tau_{zx} \delta(d\gamma_{zx}^p) + \tau_{xy} \delta(d\gamma_{xy}^p)] dx dy dz
\end{aligned}
\tag{64}$$

と書き改められる。すなわち

平衡状態にある弾塑性体に仮想変位増分を与えたとき，外力のなす仕事の増分は，弾性歪エネルギーの増分の変化と塑性歪エネルギーの増分の変化に等しい

ことになる。

こゝで注目すべきことは弾性変形は可逆的な変形であり，従って弾性歪エネルギーは外部に仕事をなして元にもどる能力を持っている。それに反して塑性変形は非可逆的な変形である。従って塑性歪エネルギーはそれ自身として外部に仕事をなして元にもどる能力は持っていない。このことは塑性歪エネルギーは他の運動のエネルギーや弾性歪エネルギーとは異った性質を持っている。(64) 式をエネルギーの形で書くと

$$\delta(dW) = \delta(dV^e) + \delta(dV^p) \tag{65}$$

と書けるが，これを熱力学第一法則

$$\delta W + \delta Q = \delta V + \delta T + \delta \Pi$$

と比較すれば塑性歪エネルギーは $-\delta Q$ に対応し，熱エネルギーに変換されると考えるのが妥当であろう。一般に塑性変形が生ずると熱が発生するが，これから今述べたことが容易に理解されよう。

云いかえれば塑性歪エネルギーは一般には熱エネルギーに変換されて内部に蓄積されると云い得る。

従って塑性変形が生じた場合，発生した熱が外部との間に授受が行われなときは塑性歪エネルギーの形で考慮すれば，発生した熱エネルギーは塑性歪エネルギーの形で考慮されていることになり，数学的には無視して取扱ってもさしつかえないが，発生した熱が外部に放出されるなどして外部との間に熱の授受が行われているときはこれに対する修正が必要となるろう。

次に塑性ポテンシャルについて述べよう。

弾性体の場合と同様に $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ は平衡条件および境界条件を満足する真の応力であるとし， $\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \sigma_z + \delta\sigma_z, \tau_{yz} + \delta\tau_{yz}, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$ は平衡条件および境界条件は満足するが真の応力とは微小値だけ異った応力で

あるとする。すると弾性体の場合と同様に

$$\iiint [d\epsilon_x \delta\sigma_x + d\epsilon_y \delta\sigma_y + d\epsilon_z \delta\sigma_z + d\gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + d\gamma_{zx} \delta\tau_{zx} + d\gamma_{xy} \delta\tau_{xy}] dx dy dz = 0 \quad (66)$$

弾塑性体では弾性歪増分と塑性歪増分とが同時に生ずるが弾性歪増分については (37) 式から明らかなように

$$\iiint [d\epsilon_x^e \delta\sigma_x + d\epsilon_y^e \delta\sigma_y + d\epsilon_z^e \delta\sigma_z + d\gamma_{yz}^e \delta\tau_{yz} + d\gamma_{zx}^e \delta\tau_{zx} + d\gamma_{xy}^e \delta\tau_{xy}] dx dy dz = 0$$

であるから

$$\iiint [d\epsilon_x^p \delta\sigma_x + d\epsilon_y^p \delta\sigma_y + d\epsilon_z^p \delta\sigma_z + d\gamma_{yz}^p \delta\tau_{yz} + d\gamma_{zx}^p \delta\tau_{zx} + d\gamma_{xy}^p \delta\tau_{xy}] dx dy dz = 0 \quad (67)$$

となる。

さて塑性変形が生ずる場合には応力は降伏条件式を満足しながら変化する。即ち、塑性領域では応力に対して拘束条件が存在する。この拘束条件が n ケ存在するとする。(実際には連続体では降伏条件式は 1 つ以上は存在しない。しかし不連続体を近似的に連続体として扱う場合には 2 つ以上の降伏条件を考える必要がある場合があるので数学的に許し得る範囲に拡張して取扱うことにする)

第 1 節の質点の平衡において述べたように拘束条件の数は変分変数の数より少くなければならない。この場合に変分変数は応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ の 6 ケであるから拘束条件式の数は 5 ケ以下でなければならない。今応力の拘束条件式を

$$f_\nu(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n \leq 5) \quad (68)$$

とする。 $\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \sigma_z + \delta\sigma_z, \tau_{yz} + \delta\tau_{yz}, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$ も (68) 式を満足しているとする。 $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots$ は充分小さく、2 次以上の項は無視し得るとする。しかるとき (6) 式と同様に

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} \delta\sigma_z + \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} \delta\tau_{yz} + \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} \delta\tau_{zx} + \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} \delta\tau_{xy} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n \leq 5) \quad (69)$$

が得られる。このとき Lagrange の不定乗数法により

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(d\epsilon_x^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} d\lambda_\nu \right) \delta\sigma_x + \left(d\epsilon_y^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} d\lambda_\nu \right) \delta\sigma_y \right. \\ & \quad + \left(d\epsilon_z^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} d\lambda_\nu \right) \delta\sigma_z + \left(d\gamma_{yz}^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} d\lambda_\nu \right) \delta\tau_{yz} \\ & \quad \left. + \left(d\gamma_{zx}^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} d\lambda_\nu \right) \delta\tau_{zx} + \left(d\gamma_{xy}^p - \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} d\lambda_\nu \right) \delta\tau_{xy} \right] dx dy dz = 0 \quad (70) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_x^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} d\lambda_{\nu} \\
 d\varepsilon_y^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} d\lambda_{\nu} \\
 d\varepsilon_z^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} d\lambda_{\nu} \\
 d\gamma_{yz}^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} d\lambda_{\nu} \\
 d\gamma_{zx}^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} d\lambda_{\nu} \\
 d\gamma_{xy}^p &= \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} d\lambda_{\nu}
 \end{aligned} \tag{71}$$

なる関係が得られる。こゝで f_{ν} は塑性ポテンシャルと云われる。

前述したように連続体では降伏条件式は1つ以上存在することは考えられない。そのため現在の塑性理論は $n=1$ として体系化されている。

$n=1$ としたときの (71) 式に示す関係は Mises により 1928 年に示された。

前項において Prandtl-Reuss の式はアルミニウム、銅、軟鉄等ではかなりよく一致していると述べた。しかし他の材料においても Prandtl-Reuss の式が近似的に用い得るかは明らかではない。

弾性体では弾性変位を生ずるときに応力の変化に対して何も制約はない。従って応力と歪の関係について適当に仮定することが可能であった。しかし塑性領域では塑性変位を生ずるときには応力は降伏条件を上廻った値を持つことは出来ないし、また下廻った状態で塑性変位を生ずることも出来ない。したがって塑性変位は応力に対し、或る制約条件のもとに生ずることになり、このような応力の制約条件が存在している状態では適当に応力と歪の関係を与えることは許されない。その関係を示したものが (71) 式である。

こゝで注意すべきことは降伏が生じ始める条件を示した降伏条件式と、降伏が生じ出した後の応力に対する制約条件とが同じである（歪硬化を考え発生した塑性歪による降伏条件の変化は考えているが）と考えていることである。摩擦の場合、静摩擦係数と動摩擦係数とはかなり異っていると一般に云われている。このような差が連続体内の塑性変形にもあるとするならば歪硬化のような連続的な降伏条件の変化を考えるだけで充分であるかは問題であろう。

6.4 降伏条件

降伏が生じ始めるときの条件式としては古くから種々な説が立てられて来た。その主なものを列記すると

(i) 最大主応力説

- (II) 最大主歪説
- (III) 弾性歪エネルギー説
- (IV) Tresca の最大せん断応力説
- (V) Mises の説
- (VI) Coulomb の内部摩擦説
- (VII) Mohr の説

等があげられる。

前にも述べたように一般にほとんどの材料は静水圧荷重を受けた場合には降伏しない。したがって (I), (II), (III) の降伏条件説はこの現象に適合しない。

これに対して (IV) の Tresca の降伏条件は前述の現象に適合する上に金属材料での実験結果と比較的合うので、かなり用いられ、St. Venant, Levy (1870) 等もこの降伏条件を用いている。

この降伏条件式は $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

とすると

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = k \quad \dots\dots\dots (72)$$

の形で表わされるが、第2節にも述べたように等方性体においては降伏条件式は応力の不変量で表わされなければならないから、

$$f = [(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 - 4k^2][(\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 - 4k^2][(\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 - 4k^2] = 0$$

と書き改めこれを J'_1, J'_2, J'_3 にて表わせば

$$f = 4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 36k^2J_2'^2 + 96k^4J_2' - 64k^6 = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

という極めて複雑な形で表わされることになる。この降伏条件式を塑性ポテンシャルとして (71) 式から塑性歪増分を求めるとこれまた極めて複雑な式となり、簡単な数学的な取扱は不可能である。

Tresca の降伏条件に従う場合 1 軸引張試験での降伏応力は

$$\sigma_t = 2k$$

となり単純せん断試験での降伏応力は

$$\tau = k$$

である。

$$\text{一方} \quad J_2' = \frac{1}{2} \{ \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 \} = k^2$$

を降伏条件式とすると一軸引張試験での降伏応力は

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_1 \quad \sigma_1' = \frac{2}{3}\sigma_1 \quad \sigma_2' = \sigma_3' = -\frac{1}{3}\sigma_1$$

であるから

$$J_2' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right\} \sigma_1^2 = \frac{1}{3} \sigma_1^2$$

$$\therefore \sigma_t = \sqrt{3} k$$

となり単純せん断試験での降伏応力は

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \quad \sigma_2 = 0 \text{ として } \sigma = 0$$

$$J_2' = \frac{1}{2} \{ 2\sigma_1^2 \} = \sigma_1^2 = k^2$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_1 = k$$

となり，単純せん断試験での降伏応力は Tresca の降伏条件の場合と全く一致し，1軸引張試験の場合は

$$\frac{2k - \sqrt{3}k}{2k} = 0.15$$

で両者の差は15%程度である。しかもこの2つの降伏条件式で最も差の現れるのは1軸引張試験においてであるから，(73)式の代りに近似式として $J_2' = k^2$ を降伏条件としても最大15%程度の差しか生じない。

さらに

$$f = J_2' = k^2$$

を降伏条件式としたときは(71)式から塑性歪増分を求めると

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^p &= \frac{\partial}{\partial \sigma_x} J_2' d\lambda = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left[\frac{1}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2) \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \left[2\sigma_x' (1 - \frac{1}{3}) - \frac{2}{3} \sigma_y' - \frac{2}{3} \sigma_z' \right] = \sigma_x' d\lambda \\ d\epsilon_y^p &= \sigma_y' d\lambda \quad d\epsilon_z^p = \sigma_z' d\lambda \quad d\gamma_{yz}^p = 2\tau_{yz} d\lambda \\ d\gamma_{zx}^p &= 2\tau_{zx} d\lambda \quad d\gamma_{xy}^p = 2\tau_{xy} d\lambda \end{aligned}$$

となり Prandtl - Reuss の式とも一致する。このため数学的な取扱も極めて容易になる。

このような観点から Mises は

$$f = J_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2 \right] = k^2 \quad \dots (74)$$

なる降伏条件式を提案した。これが Mises の降伏条件である。

その後 Taylor, Quinney 等によりアルミニウム，銅，軟鋼等に対して実験が行われ，Tresca の降伏条件よりも Mises の降伏条件の方がよく実験結果と合致することが明らかとなり，Mises の降伏条件の物理的解釈が試みられるようになった。その代表的なものが Nadai の正八面体応力説と Hencky のせん断歪エネルギー説である。

先ず Nadai の正八面体応力説について述べると3つの主応力に対して同じ角をなす方向の各主応力方向に対する方向余弦は

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

この方向の直応力は

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma$$

この方向に直交する平面内に働く表面力は

$$p_{n1} = \sigma_1 \ell = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad p_{n2} = \sigma_2 m = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad p_{n3} = \sigma_3 n = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

この平面に働く最大せん断応力を τ_{oct} とすると

$$\sigma_{oct}^2 + \tau_{oct}^2 = p_{n1}^2 + p_{n2}^2 + p_{n3}^2 = \frac{1}{3} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]$$

$$\therefore \tau_{oct}^2 = \frac{1}{3} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2] - \sigma^2$$

$$= \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 + 2\sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3\sigma^2 - 3\sigma^2]$$

$$= \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2]$$

$$= \frac{1}{3} [\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2]$$

$$= \frac{2}{3} J_2'$$

となる。そこで Nadai は正八面体せん断応力が或る値に達したとき降伏が生ずると解釈した。

しかし正八面体せん断応力は最大せん断応力とも異なるので摩擦説的な説明は不可能であり、また応力に着目していることから、エネルギー説的な観点にも立っていない。要するに正八面体応力 σ_{oct} , τ_{oct} とも不変量で表示されるというだけで、完全な意味での物理的な解釈になっていない。

次に Hencky のせん断歪エネルギー説について述べる。

弾性体においては第5節の(38)式に述べたように

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right] = \frac{1}{2G} \sigma_x - \frac{3\nu}{E} \sigma = \frac{1}{2G} \sigma'_x + \frac{1-2\nu}{E} \sigma \end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

と表わされるから、弾性歪エネルギーは

$$\begin{aligned} 2V &= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x \sigma'_x + \sigma_y \sigma'_y + \sigma_z \sigma'_z + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2] \\ &\quad + \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x \sigma + \sigma_y \sigma + \sigma_z \sigma) \\ &= \frac{1}{2G} [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)] \\ &\quad + 3 \frac{1-2\nu}{E} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{G} J_2' + 3 \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma^2 \end{aligned}$$

となる。このうち第1項は偏差応力のみで表現されているので、形の変化により生ずる歪エネルギーであると見做し、第2項は静水圧応力のみにて表わされているので体積変化による

歪エネルギーであると見做し、前者をせん断歪エネルギーと名付けた。Hencky はこれからせん断歪エネルギーが或る値に達したとき降伏が生ずると、Mises の降伏条件を解釈した。この解釈は Mises の降伏条件に対する 1 つの物理的な解釈を示したものであり、このため Mises の降伏条件をせん断歪エネルギー説と呼ぶこともある。

以上金属材料は引張応力の領域でも、圧縮応力の領域でも、ほぼ同じような性質を示すので Tresca の降伏条件或は Mises の降伏条件により取扱われて来た。しかし岩石、コンクリート等の brittle な材料や土、砂のように圧縮応力に対しては強いが引張応力に対しては極めて弱い材料では圧縮領域と引張領域とは異った性質を示す降伏条件が必要である。この種の材料に対する降伏条件式として代表的なものが、(V)、(VI) に述べた Coulomb の内部摩擦説と Mohr の説である。

ここに注意すべき点はこれらの材料はいずれもはっきりとした降伏点を示さないことである。従って Coulomb の内部摩擦説も Mohr の説も降伏条件に対するものというよりも破壊に対する説として検討されこれらの材料の塑性変形を論ずるに際しては破壊に対する説を準用して用いられて来た。この点については後で論ずることにしてこれらの 2 つの説に対し簡単に説明を加えよう。

Coulomb の内部摩擦説はすべりが生ずるとき、そのすべり面のせん断応力が或る値に達したときであり、その値はその面に働く直応力に比例して増加する。即ち

$$\tau = C + \sigma \tan \phi \quad \dots\dots\dots (75)$$

とした。

Mohr の説はこれを更に一般的なものにしたもので、Mohr の円の包絡線をもって破壊を示すものとしたものである。この包絡線を直線と見做せば内部摩擦説と一致し、また材料内にキレツが存在し、その周辺での応力集中により破壊が生ずる Griffith の理論にもとずいて包絡線を

$$\tau^2 + 4\sigma_t \sigma = 4\sigma_t^2 \quad \dots\dots\dots (76)$$

なる放物線にとる説もある。ここに σ_t は 1 軸引張強度で τ, σ は破壊面での直応力、せん断応力である。

これらの説はいずれも中間主応力の影響を加味していない。しかしコンクリート等では破壊に対し明らかに中間主応力が影響を与えているという報告もある。

いづれにせよ前述したように降伏条件式は数学的には不変量で表現されなければならない。しかもその降伏条件式が複雑な形であれば (71) 式により塑性歪増分を求めるに際し、極めて複雑な形となり、数学的な取扱は極めて困難となる。

Mises の降伏条件式が Tresca の降伏条件式に対する数学的な簡易化を目的とした近似式として提案されたように、Mohr の説に対し、数学的な近似として、降伏条件式を

$$f(\sigma, J_2') = 0$$

として表わすことが考えられる。

Drucker および Prager は降伏条件式を

$$f = (J_2')^{1/2} + \alpha \sigma = k \quad \dots\dots\dots (77)$$

として取扱っている。平面歪状態で Coulomb の内部摩擦説を仮定すると、

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad k = \frac{3C \cos \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \quad \dots\dots\dots (78)$$

にて表わされ、 $\sigma_1 = \sigma_2$ とした 3 軸圧縮試験時では

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{\sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad k = 2\sqrt{3} \frac{C \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (79)$$

として表わされる。

このような降伏条件式を用い塑性歪増分を求めると

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^p &= \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_x + \frac{1}{3} \alpha \right\} d\lambda \\ d\epsilon_y^p &= \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_y + \frac{1}{3} \alpha \right\} d\lambda \\ d\epsilon_z^p &= \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_z + \frac{1}{3} \alpha \right\} d\lambda \\ d\gamma_{yz}^p &= (J_2')^{-1/2} \tau_{yz} d\lambda \\ d\gamma_{zx}^p &= (J_2')^{-1/2} \tau_{zx} d\lambda \\ d\gamma_{xy}^p &= (J_2')^{-1/2} \tau_{xy} d\lambda \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (80)$$

として表わされ、体積変化は

$$d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = + \alpha d\lambda \quad \dots\dots\dots (81)$$

となり作用応力が引張であれ、圧縮であれ塑性変形による体積変化は内部摩擦角に関係した膨脹が生ずることになる。

岩石、コンクリート等について塑性変形による体積変化を測定した資料は少い。しかし、土や砂、岩盤についてはかなりの測定資料がある。これによると、岩盤では応力が比較的低い状態で既に塑性変形は生じているが、この段階では体積変化はむしろ収縮を示しており、或る段階から反転して膨脹を示すに至り、この収縮を示す領域はかなり広く、膨脹を示すに至ると間もなく破壊する。砂については一般に締固めた状態にあるものは初め収縮を示し、次いで膨脹を示すに至るが、ルーズな状態にあるものははっきりした収縮膨脹を示さないものもある。土でもしほと同様な現象を示しているが、一般に砂よりも収縮を示す領域がせまい。また一般に (81) に示す体積変化から求めた値は破壊時の内部摩擦角とは (79) 式で与えられるような関係では結びつけられない。

このような理論と実際の現象との相違は

(i) 土・砂のような不連続材料を連続体の理論で取扱うことの可否

(ii) (71) 式に示す歪増分と降伏条件式との関係の妥当性

(iii) Mohr の説を (77) 式の形に表現したことの可否

(iv) Mohr の説は主として破壊に対して適用されて来たのに対し、降伏条件に用いたことの可否

等が考えられる。

(i) の点については塑性理論は非弾性的な変形が生ずる際に何らかの応力の制約が存在するという前提で解いたものである。従ってミクロな観点からこれらの材料内に生じている現象をモデル化し、そのモデル化が妥当であるならば近似的な取扱は可能な筈である。

土のように土の粒子、空気、水の三相からなる材料についてはそのモデル化は極めて複雑となろうが、岩盤、粒状体等では或る程度可能な筈である。

(iii) の点については (71) 式が一般に力学において承認されている変分原理にもとづいて求めたものである以上これを否定することは出来ない。

(iii) の点については Tresca の説に対して Mises の説が最大 15% の差で一致する以上、前述した理論と現象の差をこれに帰せしめることは無理があり、もし Mohr の説が正しいとしても (77) 式は充分近似度をもった式と考えるべきであろう。

(iv) の点については少くとも破壊という現象と降伏という現象とは全く別のものである。にも拘らずこれを同一視した所には非常に問題がある。恐らく、降伏および破壊が生ずる過程を詳細に考察するならば両者には大きな差があり、これが前述した理論と現象の相違の大半が帰因していると考えられる。

6.5 歪硬化

さて、前々項において塑性理論を非弾性的な変位増分が生ずるとき応力に制約条件が加付される場合の力学体系として捕えた。

しかしもしこの応力の制約条件が材料によって一定で、発生した塑性変形により変化しないものであるならば、1 軸試験における応力-歪曲線は図-7 に示すようなものしか取扱えないことになる。図-7 に示すような応力歪曲線を示す材料は完全塑性体といわれるものであるが、現実存在する材料でこのような応力-歪曲線を示す材料はほとんどない。実際に存在する材料の多くは図-8 に示すような応力-歪曲線を示している。このような応力-歪曲線を示す材料を取扱うには塑性変形が生ずる時の応力の制約条件は発生する塑性変形により変化するという考えを導入する以外にない。

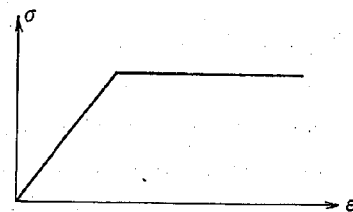


図 - 7

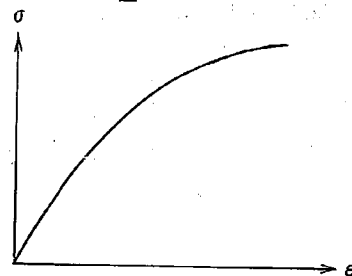


図 - 8

これは塑性理論では歪硬化という名前のもとに取扱われている。

即ち、降伏条件式を $f(\sigma_{ij})$ としたとき、歪硬化のない材料のときは

$$f(\sigma_{ij}) = k$$

として扱われるが、歪硬化を生ずる材料のとき降伏条件式は

$$f(\sigma_{ij}) = H$$

として扱われる。こゝに H は発生した塑性歪または塑性歪エネルギーの関数とする。

こゝに歪硬化に関して2つの説がある。即ち

(i) 歪硬化は発生した塑性歪の関数として与えられるとする説

(ii) 歪硬化は発生した塑性歪エネルギーの関数として与えられるとする説である。前者においては等方性体では降伏条件式は不変量で与えられなければならないから、塑性歪増分は

$$(\overline{d\epsilon^p})^2 = \frac{2}{3} \left[(d\epsilon_x^p)^2 + (d\epsilon_y^p)^2 + (d\epsilon_z^p)^2 + \frac{1}{2} (d\gamma_{yz}^p)^2 + \frac{1}{2} (d\gamma_{zx}^p)^2 + \frac{1}{2} (d\gamma_{xy}^p)^2 \right] \quad (82)$$

なる不変量化した量を導入して、これを相当塑性歪増分 (equivalent plastic strain) と名付け、降伏条件式を

$$f(\sigma_{ij}) = H(\int \overline{d\epsilon^p}) \quad (83)$$

の形で表わしている。

また後者の説では、塑性歪エネルギーは元来等方性体では不変量で表わされるので新しい概念は導入されていない。即ち、Mises の降伏条件に従い塑性歪増分が Prandtl-Reuss の式で与えられているときは塑性歪エネルギー増分は

$$\begin{aligned} dW^p &= \sigma_x d\epsilon_x^p + \sigma_y d\epsilon_y^p + \sigma_z d\epsilon_z^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p \\ &= [\sigma_x \sigma'_x + \sigma_y \sigma'_y + \sigma_z \sigma'_z + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2] d\lambda \\ &= [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)] d\lambda \\ &= [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2] d\lambda \\ &= 2J_2' d\lambda \end{aligned}$$

となり、Drucker の理論により、降伏条件式および塑性歪増分が夫々 (77) 式および (80) 式で示されるときは

$$\begin{aligned} dW^p &= [\sigma_x \{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_x + \frac{1}{3} \alpha \} + \sigma_y \{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_y + \frac{1}{3} \alpha \} \\ &\quad + \sigma_z \{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_z + \frac{1}{3} \alpha \} + (J_2')^{-1/2} \{ \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \}] d\lambda \\ &= [\frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \{ \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \} \\ &\quad + \frac{1}{3} \alpha (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] d\lambda \\ &= [(J_2')^{1/2} + \alpha \sigma] d\lambda \end{aligned}$$

となり、いづれも不変量により示されている。そこで降伏条件式として

$$f(\sigma_{ij}) = F(\int dW^p) \quad \dots\dots\dots (84)$$

の形で表わしている。

一般的には (83) 式による解の方が多い。

こゝで注目すべきことは (83) 式によるときは塑性変形により体積変化が生ずるときも、即ち Drucker の示した (77) 式の降伏条件に従う場合にも体積変化を生ずる塑性歪が加味されていない点である。これは元来塑性理論は金属材料を中心に発達したものであり、金属材料では塑性変形により体積変化は生じないので、このような取扱が生じたものと考えられる。従って体積変化が塑性変形によって生ずるような材料では当然この点については修正が必要となろう。

さて塑性歪増分と降伏条件式との関係を与えた (71) 式の誘導に当っては歪硬化について考慮していなかった。そこで硬化材料においては当然 (71) 式は修正されなければならない。

降伏条件式が (83) 式により与えられ、塑性変形の増加により、H の値が大きくなる場合について考察しよう。即ち硬化材料で

$$\frac{dH}{d(\int d\bar{\epsilon}^p)} > 0$$

のとき

$$df = \frac{dH}{d(\int d\bar{\epsilon}^p)} d(\int d\bar{\epsilon}^p)$$

であるから

- (i) $df > 0$ のとき $d(\int d\bar{\epsilon}^p) > 0$ となり新たな塑性変形が生ずる。
- (ii) $df = 0$ のとき $d(\int d\bar{\epsilon}^p) = 0$ となり新たな塑性変形は生じない。
- (iii) $df < 0$ のとき $d(\int d\bar{\epsilon}^p) < 0$ となり塑性変形は減少しなければならない。

(i) の場合は塑性変形が増加していく場合であり、(iii) の場合は新たな塑性変形は生ぜず、これを中立 (neutral) 変形という。(ii) の場合塑性変形は生ぜず弾性領域にもどると考えられる。

これから

$$d\epsilon_{ij} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (h > 0) \quad \dots\dots\dots (85)$$

と (71) 式が書き改められる。

次に劣化材料について考察しよう。このときは

$$\frac{dH}{d(\int d\bar{\epsilon}^p)} < 0$$

であるから

$$df = \frac{dH}{d(\int d\bar{\epsilon}^p)} d(\int d\bar{\epsilon}^p)$$

より

- (i) $df < 0$ のとき $d(\int d\bar{\varepsilon}^p) > 0$ となり新たな塑性変形が生ずる。
 (ii) $df = 0$ のとき $d(\int d\bar{\varepsilon}^p) = 0$ となり新たな塑性変形は生じない。
 (iii) $df > 0$ のとき $d(\int d\bar{\varepsilon}^p) < 0$ となり塑性変形は減少しなければならない。

したがって

$$d\varepsilon_{ij} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (h < 0) \quad \dots\dots\dots (86)$$

と書き改められ、いづれにせよ

- (i) $hdf = d\lambda > 0$ のとき 新たな塑性変形は生じ
 (ii) $hdf = d\lambda = 0$ のとき 新たな塑性変形は生ぜず
 (iii) $hdf = d\lambda < 0$ のとき 弾性領域にもどる。

従って、(71) 式は

(i) $d\lambda_\nu > 0$ のとき

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} d\lambda_\nu \\ d\varepsilon_y^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} d\lambda_\nu \\ d\varepsilon_z^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} d\lambda_\nu \\ d\gamma_{yz}^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} d\lambda_\nu \\ d\gamma_{zx}^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} d\lambda_\nu \\ d\gamma_{xy}^p &= \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} d\lambda_\nu \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (87)$$

(ii) $d\lambda_\nu = 0$ のとき

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p = d\varepsilon_z^p = d\gamma_{yz}^p = d\gamma_{zx}^p = d\gamma_{xy}^p = 0$$

(iii) $d\lambda_\nu < 0$ のとき 弾性領域にもどる。

と書き改められる。

II 不連続体の解析方法

7. 不連続体のすべりの特徴

前章において塑性理論はすべりが生ずる際に応力に或る制約条件が存在する場合に対する力学体系として把握した。

これから物体の中に不連続面が存在し、この不連続面にそってすべりが生ずるときの特徴について塑性理論において用いられた手法を用いて考察してみよう。

7.1 平滑な不連続平面が存在した場合のこの平面にそってのすべりの特徴

平滑な不連続平面は yz 平面に平行即ち $x = \text{const}$ の面であったとする。

この不連続面は平滑であるとしたからこの面のすべりにより x 方向の変位増分は生じないとする。また他の部分は剛体と見做して力により変位は生じないとする。

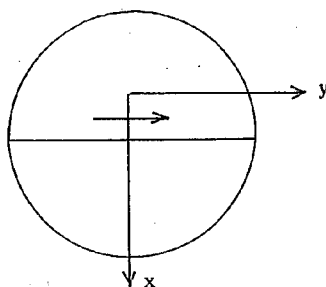


図 - 9

今この不連続面に y 方向にすべらせたとする。しかるとき前述の仮定から

$$du^p = dv^p = 0 \quad dv^p \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (dv^p) = \frac{\partial}{\partial z} (dv^p) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} (dv^p) \neq 0$$

しかるとき最小仕事の原理から

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{xz}) \right\} du^p \right. \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz}) \right\} dv^p \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_z) \right\} dw^p \right] dx dy dz \\ & = \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz}) \right\} dv^p \right] dx dy dz \\ & = \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (dv^p \delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (dv^p \delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (dv^p \delta \tau_{yz}) \right\} dx dy dz \right. \\ & \quad \left. - \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (dv^p) \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (dv^p) \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} (dv^p) \delta \tau_{yz} \right] dx dy dz \right. \\ & = \iint \left[\left\{ \delta \tau_{xy} \cos(n, x) + \delta \sigma_y \cos(n, y) + \delta \tau_{yz} \cos(n, z) \right\} dv^p \right] dS \\ & \quad - \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (dv^p) \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (dv^p) \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} (dv^p) \delta \tau_{yz} \right] dx dy dz \\ & = - \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (dv^p) \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (dv^p) \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} (dv^p) \delta \tau_{yz} \right] dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

初めに $\frac{\partial}{\partial y} (dv^p) = \frac{\partial}{\partial z} (dv^p) = 0$

としたから

$$\iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (dv^p) \delta \tau_{xy} \right] dx dy dz = 0$$

或は

$$\frac{\partial}{\partial x} (dv^p) = \frac{\partial}{\partial x} (dv^p) + \frac{\partial}{\partial y} (du^p) = d\gamma_{xy}$$

であるから

$$\iiint [d\gamma_{xy}^p \cdot \delta \tau_{xy}] dx dy dz = 0 \quad \dots\dots\dots (88)$$

さて、このすべりが生ずるときに存在すべき応力の制約条件すなわち降伏条件を

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

とすると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx} = 0 \quad \dots\dots (89)$$

(88) 式と (89) 式に Lagrange の不定乗数法を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} = 0 \\ d\gamma_{xy}^p &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\lambda \end{aligned}$$

が得られ、 f は τ_{xy} のみの関数であることがわかる。

即ち

$$\boxed{f(\sigma_{ij}) = \tau_{xy}^2 - k^2} \quad \dots\dots\dots (90)$$

なる Tresca の降伏条件が得られる。即ち

平滑な不連続面ですべりは Tresca の降伏条件に従って生じ、或る一定のせん断応力に達したときすべりが生じ、その面に作用する直応力等他の応力には無関係である。

となる。

7.2 不連続面ですべりが Coulomb の内部摩擦説に支配されるときの変位増分の特徴

不連続面は必ずしも平滑でなく、すべりが生ずるときの応力に対する制約条件すなわち降伏条件が Coulomb の説に従うとすると

$$f(\sigma_{ij}) = |\tau_{xy}| - (C - \sigma_x \tan \phi) \quad \dots\dots\dots (91)$$

とすると (71) 式から

$$d\epsilon_x^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda = + \tan \phi d\lambda \quad d\gamma_{xy}^p = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\lambda = \pm d\lambda (\tau_{xy} \geq 0 \text{ のとき} +)$$

$$\therefore \boxed{\frac{d\epsilon_x^p}{d\gamma_{xy}^p} = \pm \tan \phi} \quad \dots\dots\dots (92)$$

この不連続平面に着目すると

$$d\varepsilon_x^p = \frac{\partial}{\partial x} (du^p) = \frac{d(du^p)}{dx}$$

$$d\gamma_{xy}^p = \frac{\partial}{\partial x} (dv^p) + \frac{\partial}{\partial y} (du^p)$$

であるが不連続平面以外の所では $\frac{\partial}{\partial x} (dv^p)$, $\frac{\partial}{\partial y} (du^p)$ は 0 で不連続平面上では一様な性質を持っているとすれば

$$\frac{\partial}{\partial y} (du^p) = 0$$

故に
$$d\gamma_{xy}^p = \frac{\partial}{\partial x} (dv^p) = \frac{d(dv^p)}{dx}$$

$$\therefore \frac{d\varepsilon_x^p}{d\gamma_{xy}^p} = \frac{d(du^p)/dx}{d(dv^p)/dx} = \frac{d(du^p)}{d(dv^p)}$$

即ち

$$\frac{d(du^p)}{d(dv^p)} = \pm \tan \phi$$

..... (93)

云いかえれば

不連続平面沿のすべりが生ずる際に Coulomb の説に従う場合にはこのすべりにより不連続平面に生ずる不連続平面沿に垂直な方向の直歪増分と面沿のせん断歪増分の比は内部摩擦係数 $\tan \phi$ に等しく、このすべりにより生ずる面に垂直な方向の変位増分の変化とすべり方向の変位増分の変化の比も $\tan \phi$ に等しい。

となる。

7.3 不連続平面でのすべりの特徴

以上の 2 つの例から明らかなように平滑な平面ですべりが生ずる場合には現在の力学体系の中では Tresca のせん断応力説に従うことになり、Coulomb の内部摩擦説に従う場合には不連続平面に対して ϕ だけ傾いた方向に移動が生ずることになる。

このことは不連続平面でのすべりが内部摩擦角に従う場合にはその面に凹凸があるからであり、凹凸のすべり面への傾が ϕ であると解釈し得ることになる。

このように解釈すると降伏条件、すなわちすべりが生ずる際の応力に対する制約条件における内部摩擦角 ϕ は不連続面の幾何学的性質に強く支配され、破壊条件に対する ϕ とは異った物理的意味を持つことになる。

なお破壊条件に対する内部摩擦角 ϕ については後に詳しく論ずることにして、このような考察からも明らかなように、岩盤、粒状体等では降伏点をはっきりしないことから、破壊条件の ϕ と降伏条件の ϕ と類似のものとして数学的取扱をする傾向があったが、破壊条件の ϕ と降伏条件の ϕ とは明らかに異っており、(92) 式または (93) 式の性質を利用して降伏条件の ϕ を求めるべきであろう。

8. 不連続体の特徴

土、砂等の内部摩擦説に従う材料においては塑性領域で膨脹が生ずることはDruckerにより示されている。

土、砂等では比較的低い応力から膨脹を生ずるからDruckerにより提案された塑性理論を適用しても比較的問題は少ないが、粒径の大きいロックフィル材料とか岩盤等では膨脹を生ずる前にかなり広い領域で逆に収縮が生じており、しかもこの領域でははっきりした非弾性的な挙動を示している。過去にとられた測定資料からみてこの領域ではDruckerにより提案された塑性理論を適用することは出来ないし、また弾性体として取扱うことも不適当である。

そこでこの領域での特徴を加味するためにルーズな状態と締固った状態とを考えることにする。

岩盤および粒状体の状況を理想化して図-10および11に示すような状況を考えよう。図-10および11から明らかな如く、初めのルーズな状態では直圧縮応力はすべりを促進する方向

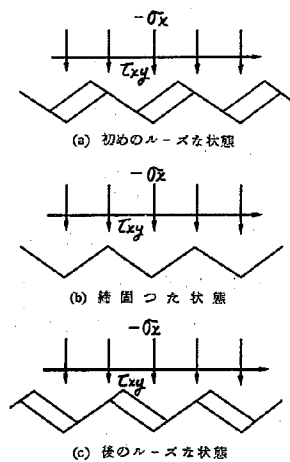


図-10 岩盤

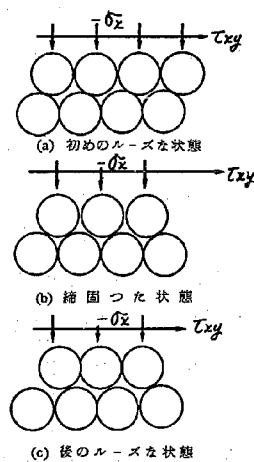


図-11 粒状体

にあるが後のルーズな状態では直圧力はすべりを阻止する方向にある。

このように考えると初め弾性的な領域があり、次に初めのルーズな状態から締固った状態へ移行する弾塑性領域が現れる。この領域では降伏条件式としては

$$|\tau_{xy}| = C + \sigma_x \tan \phi \quad \dots \dots \dots (94)$$

である。次に締固った状態において再び弾性的な領域が現れる。次で締固った状態から後のルーズな状態に移行する弾塑性領域が現れ、この領域での降伏条件は

$$|\tau_{xy}| = C - \sigma_x \tan \phi \quad \dots \dots \dots (95)$$

で表わされる。

初めのルーズな状態から締固った状態への移行過程では図-10, 11および(94)式からも明

表 1

	状 態	物理的性質	降 伏 条 件	膨脹収縮	硬化軟化
I	初めのルーズな状態	弾 性 体			
II	↓	弾塑性体	$ \tau_{xy} = C + \sigma_x \tan \phi$	収 縮	硬 化
III	締 固 っ た 状 態	弾 性 体			
IV	↓ 後のルーズな状態	弾塑性体	$ \tau_{xy} = C - \sigma_x \tan \phi$	膨 脹	劣 化
V	↓ 破 壊				

らかなように収縮が生じ、この間硬化現象が生ずる筈である。一方締固った状態から後のルーズな状態への移行過程においては図-10, 11 および (95) 式からも明らかなように膨脹が生じこの間劣化現象が生ずる筈である。後のルーズな状態を経て破壊が生ずる。

以上が不連続体の一般的な状態の移行過程であると考えられる。

以上を図式的に描けば表-1 の如くである。

ここに注意すべきことは締固った状態とはその材料での最も締固った状態を意味するのではなく、或る応力の履歴過程において最も締固った状態を意味していることである。従って或る種の荷重においてはその過程において極めて締固った状態が現れるが、或る種の荷重のもとではかなりルーズな状態以上に締固まらない筈である。このような締固った状態の差が当然締固った状態から後のルーズな状態への降伏条件にも影響を与えるし、また破壊強度の相違は主としてこの締固った状態の相違に支配されると考えられる。これが個々の過程に現れる降伏条件の ϕ と破壊条件の ϕ の相違とも考えられる。

9. 異方性体におけるすべりによる歪増分と降伏条件

塑性理論においては Prandtl - Reuss 材料に対し

$$f(\sigma_{ij}) = J_2' = k^2, \quad d\varepsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (96)$$

或は

$$\bar{\sigma}^2 = 3 J_2' = \frac{3}{2} [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2]$$

において

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = k \quad d\varepsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (97)$$

としている。ここに

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}}$$

であるから、(97) 式の k は (96) 式の $3k$ を k とおきかえており、(97) 式の $d\lambda$ は (96) 式の $\frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}} d\lambda$ を $d\lambda$ とおきかえている。

一方 Drucker は C, ϕ 材料に塑性理論を適用するに際し,

$$\left. \begin{aligned} f &= (J_2')^{1/2} + \alpha \sigma = k \\ d\epsilon_{ij}^p &= \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma'_{ij} + \frac{\alpha}{3} \right\} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (98)$$

なる式を仮定している。また岩盤の節理, キレツ面でのすべりを考えるときは

$$\left. \begin{aligned} f &= |\tau_{xy}| + \sigma_x \tan \phi = C \\ d\epsilon_x^p &= + \tan \phi d\lambda, \quad d\gamma_{xy}^p = \pm d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (99)$$

なる式を考えなければならない。

そこで異方性体の降伏条件式とすべりによるひずみ増分を一般的に取扱うに当って, 降伏条件式は 6 節に述べたように数学的には 5 ケまで存在することが許されるので, $n (< 6)$ ケあるとして論を進めることにする。

今 K_2' は偏差応力の 2 次式で表わされる関数とし, 等方性体における J_2' に相当するものとする。従って K_2' により表わされる降伏条件に対応するすべり歪増分は体積変化を示さず, 偏差歪を表現するものとする。

K_1' は偏差応力の 1 次式で表わされる関数とし, 等方性体における J_1' に相当するものとする。従って等方性体では消滅することになる。この K_1' により表わされる降伏条件に対応するすべり歪増分も体積変化を示さず, 偏差歪を表現するものとする。

K_1 は応力の 1 次式で表わされる関数とし, 等方性体における J_1 或は σ に相当するものとする。 K_1 により表わされる降伏条件に対応するすべり歪増分は体積変化を示すものとする。

しかるとき降伏条件式およびすべり歪増分は

$$\left. \begin{aligned} f_\nu(\sigma_{ij}) &= (\nu K_2')^{1/2} + \nu K_1' + \nu K_1 \\ d\epsilon_{ij}^p &= \left[\frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \nu K_1}{\partial \sigma_{ij}} \right] d\lambda_\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (100)$$

にて表わされることになる。この場合塑性歪エネルギーの増分は

$$\begin{aligned} d_\nu W^p &= \sigma_x d_\nu \epsilon_x^p + \sigma_y d_\nu \epsilon_y^p + \sigma_z d_\nu \epsilon_z^p + \tau_{yz} d_\nu \gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d_\nu \gamma_{zx}^p + \tau_{xy} d_\nu \gamma_{xy}^p \\ &= \left[\sigma_x \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} \right] d\lambda_\nu \end{aligned}$$

さて f_ν が σ_{ij} の 2 次の斉次関数であれば

$$\sigma_x \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} = 2 f_\nu(\sigma_{ij})$$

となり f_ν が 1 次の斉次関数であれば

$$\sigma_x \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial f_\nu}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial f_\nu}{\partial \tau_{xy}} = f_\nu(\sigma_{ij})$$

となる。 $\nu K_2'$ は偏差応力の 2 次の斉次関数であるから

$$\sigma_x \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial \nu K_2'}{\partial \tau_{xy}} = 2 \nu K_2'$$

また $\nu K_1'$, νK_1 は夫々偏差応力および応力の 1 次の齊次関数であるから

$$\sigma_x \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial \nu K_1'}{\partial \tau_{xy}} = \nu K_1'$$

$$\sigma_x \frac{\partial \nu K_1}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial \nu K_1}{\partial \sigma_y} + \sigma_z \frac{\partial \nu K_1}{\partial \sigma_z} + \tau_{yz} \frac{\partial \nu K_1}{\partial \tau_{yz}} + \tau_{zx} \frac{\partial \nu K_1}{\partial \tau_{zx}} + \tau_{xy} \frac{\partial \nu K_1}{\partial \tau_{xy}} = \nu K_1$$

$$\therefore d\nu W^p = \left[-\frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} 2\nu K_2' + \nu K_1' + \nu K_1 \right] d\lambda_\nu = f_\nu(\sigma_x) d\lambda_\nu \quad \dots\dots\dots (101)$$

$\nu K_2'$ は偏差応力の 2 次式で表わされ、これにより偏差歪増分が表現されるとしたから

$(\nu K_2')^{1/2}$ を降伏条件式としたときの偏差歪増分を

$$\begin{bmatrix} d\nu \epsilon_x'^p \\ d\nu \epsilon_y'^p \\ d\nu \epsilon_z'^p \\ d\nu \gamma_{yz}^p \\ d\nu \gamma_{zx}^p \\ d\nu \gamma_{xy}^p \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} \begin{bmatrix} \nu a_{11} & \nu a_{12} & \nu a_{13} & \nu a_{14} & \nu a_{15} & \nu a_{16} \\ \nu a_{21} & \nu a_{22} & \nu a_{23} & \nu a_{24} & \nu a_{25} & \nu a_{26} \\ \nu a_{31} & \nu a_{32} & \nu a_{33} & \nu a_{34} & \nu a_{35} & \nu a_{36} \\ \nu a_{41} & \nu a_{42} & \nu a_{43} & \nu a_{44} & \nu a_{45} & \nu a_{46} \\ \nu a_{51} & \nu a_{52} & \nu a_{53} & \nu a_{54} & \nu a_{55} & \nu a_{56} \\ \nu a_{61} & \nu a_{62} & \nu a_{63} & \nu a_{64} & \nu a_{65} & \nu a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} d\lambda_\nu \quad \dots\dots\dots (102)$$

にて表わされるとする。 $\nu K_1'$ によるすべり歪増分を

$$\begin{bmatrix} d\nu \epsilon_x'^p \\ d\nu \epsilon_y'^p \\ d\nu \epsilon_z'^p \\ d\nu \gamma_{yz}^p \\ d\nu \gamma_{zx}^p \\ d\nu \gamma_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu b_1 \\ \nu b_2 \\ \nu b_3 \\ \nu b_4 \\ \nu b_5 \\ \nu b_6 \end{bmatrix} d\lambda_\nu \quad \dots\dots\dots (103)$$

とし、 νK_1 により体積変化が表示されるとしたから νK_1 によるすべり歪増分を

$$\begin{bmatrix} d\nu \epsilon_x^p \\ d\nu \epsilon_y^p \\ d\nu \epsilon_z^p \\ d\nu \gamma_{yz}^p \\ d\nu \gamma_{zx}^p \\ d\nu \gamma_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu b_1' \\ \nu b_2' \\ \nu b_3' \\ \nu b_4' \\ \nu b_5' \\ \nu b_6' \end{bmatrix} d\lambda_\nu \quad \dots\dots\dots (104)$$

とし、体積変化を

$$d\nu \epsilon_{ij}^p = d\nu \epsilon_x^p + d\nu \epsilon_y^p + d\nu \epsilon_z^p = 3\nu b d\lambda_\nu$$

と表わすと

$$d\nu \varepsilon'_x{}^p + d\nu \varepsilon'_y{}^p + d\nu \varepsilon'_z{}^p = 0$$

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \nu a_{11} + \nu a_{21} + \nu a_{31} &= \nu a_{12} + \nu a_{22} + \nu a_{32} = \nu a_{13} + \nu a_{23} + \nu a_{33} \\ \nu a_{14} + \nu a_{24} + \nu a_{34} &= \nu a_{15} + \nu a_{25} + \nu a_{35} = \nu a_{16} + \nu a_{26} + \nu a_{36} = 0 \\ \nu b_1 + \nu b_2 + \nu b_3 &= 0 \\ \nu b'_1 + \nu b'_2 + \nu b'_3 &= 3\nu b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (105)$$

となる。

(102) ~ (104) 式を用いて塑性歪エネルギーの増分を求めると、

$$\begin{aligned} dW^p &= \left[\frac{1}{2} (\nu K_2') \right]^{\frac{1}{2}} \{ (\nu a_{11} \sigma'_x + \nu a_{12} \sigma'_y + \nu a_{13} \sigma'_z + \nu a_{14} \tau_{yz} + \nu a_{15} \tau_{zx} + \nu a_{16} \tau_{xy}) \\ &\quad \times (\sigma'_x + \sigma) + (\nu a_{21} \sigma'_x + \nu a_{22} \sigma'_y + \nu a_{23} \sigma'_z + \nu a_{24} \tau_{yz} + \nu a_{25} \tau_{zx} + \nu a_{26} \tau_{xy}) \\ &\quad \times (\sigma'_y + \sigma) + (\nu a_{31} \sigma'_x + \nu a_{32} \sigma'_y + \nu a_{33} \sigma'_z + \nu a_{34} \tau_{yz} + \nu a_{35} \tau_{zx} + \nu a_{36} \tau_{xy}) \\ &\quad \times (\sigma'_z + \sigma) + (\nu a_{41} \sigma'_x + \nu a_{42} \sigma'_y + \nu a_{43} \sigma'_z + \nu a_{44} \tau_{yz} + \nu a_{45} \tau_{zx} + \nu a_{46} \tau_{xy}) \\ &\quad \times \tau_{yz} + (\nu a_{51} \sigma'_x + \nu a_{52} \sigma'_y + \nu a_{53} \sigma'_z + \nu a_{54} \tau_{yz} + \nu a_{55} \tau_{zx} + \nu a_{56} \tau_{xy}) \\ &\quad \times \tau_{zx} + (\nu a_{61} \sigma'_x + \nu a_{62} \sigma'_y + \nu a_{63} \sigma'_z + \nu a_{64} \tau_{yz} + \nu a_{65} \tau_{zx} + \nu a_{66} \tau_{xy}) \tau_{xy} \} \\ &\quad + \nu b_1 (\sigma'_x + \sigma) + \nu b_2 (\sigma'_y + \sigma) + \nu b_3 (\sigma'_z + \sigma) + \nu b_4 \tau_{yz} + \nu b_5 \tau_{zx} + \nu b_6 \tau_{xy} \\ &\quad + \nu b'_1 (\sigma'_x + \sigma) + \nu b'_2 (\sigma'_y + \sigma) + \nu b'_3 (\sigma'_z + \sigma) + \nu b'_4 \tau_{yz} + \nu b'_5 \tau_{zx} + \nu b'_6 \tau_{xy} \} d\lambda \\ d\lambda \nu &= \left[\frac{1}{2} (\nu K_2') \right]^{\frac{1}{2}} \{ \nu a_{11} \sigma'^2_x + \nu a_{22} \sigma'^2_y + \nu a_{33} \sigma'^2_z + (\nu a_{12} + \nu a_{21}) \sigma'_x \sigma'_y \\ &\quad + (\nu a_{23} + \nu a_{32}) \sigma'_y \sigma'_z + (\nu a_{31} + \nu a_{13}) \sigma'_z \sigma'_x + (\nu a_{14} + \nu a_{41}) \sigma'_x \tau_{yz} \\ &\quad + (\nu a_{15} + \nu a_{51}) \sigma'_x \tau_{zx} + (\nu a_{16} + \nu a_{61}) \sigma'_x \tau_{xy} + (\nu a_{24} + \nu a_{42}) \sigma'_y \tau_{yz} \\ &\quad + (\nu a_{25} + \nu a_{52}) \sigma'_y \tau_{zx} + (\nu a_{26} + \nu a_{62}) \sigma'_y \tau_{xy} + (\nu a_{34} + \nu a_{43}) \sigma'_z \tau_{yz} \\ &\quad + (\nu a_{35} + \nu a_{53}) \sigma'_z \tau_{zx} + (\nu a_{36} + \nu a_{63}) \sigma'_z \tau_{xy} + (\nu a_{45} + \nu a_{54}) \tau_{yz} \tau_{zx} \\ &\quad + (\nu a_{46} + \nu a_{64}) \tau_{yz} \tau_{xy} + (\nu a_{55} + \nu a_{55}) \tau_{xy} \tau_{zx} + a_{44} \tau_{yz}^2 + a_{55} \tau_{zx}^2 + a_{66} \tau_{xy}^2 \} \\ &\quad + \nu b_1 \sigma'_x + \nu b_2 \sigma'_y + \nu b_3 \sigma'_z + \nu b_4 \tau_{yz} + \nu b_5 \tau_{zx} + \nu b_6 \tau_{xy} \\ &\quad + \nu b'_1 \sigma'_x + \nu b'_2 \sigma'_y + \nu b'_3 \sigma'_z + \nu b'_4 \tau_{yz} + \nu b'_5 \tau_{zx} + \nu b'_6 \tau_{xy} + 3\nu b \sigma \} d\lambda \end{aligned}$$

これが (101) 式と一致するためには

$$\left. \begin{aligned} \nu K_2' &= \frac{1}{2} [\nu a_{11} \sigma'^2_x + \nu a_{22} \sigma'^2_y + \nu a_{33} \sigma'^2_z + \nu a_{44} \tau_{yz}^2 + \nu a_{55} \tau_{zx}^2 + \nu a_{66} \tau_{xy}^2 \\ &\quad + (\nu a_{12} + \nu a_{21}) \sigma'_x \sigma'_y + (\nu a_{23} + \nu a_{32}) \sigma'_y \sigma'_z + (\nu a_{31} + \nu a_{13}) \sigma'_z \sigma'_x \\ &\quad + (\nu a_{14} + \nu a_{41}) \sigma'_x \tau_{yz} + (\nu a_{24} + \nu a_{42}) \sigma'_y \tau_{yz} + (\nu a_{34} + \nu a_{43}) \sigma'_z \tau_{yz} \\ &\quad + (\nu a_{15} + \nu a_{51}) \sigma'_x \tau_{zx} + (\nu a_{25} + \nu a_{52}) \sigma'_y \tau_{zx} + (\nu a_{35} + \nu a_{53}) \sigma'_z \tau_{zx} \\ &\quad + (\nu a_{16} + \nu a_{61}) \sigma'_x \tau_{xy} + (\nu a_{26} + \nu a_{62}) \sigma'_y \tau_{xy} + (\nu a_{36} + \nu a_{63}) \sigma'_z \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

$$\begin{aligned}
& + (\nu a_{45} + \nu a_{54}) \tau_{yz} \tau_{zx} + (\nu a_{56} + \nu a_{65}) \tau_{zx} \tau_{xy} + (\nu a_{64} + \nu a_{46}) \tau_{xy} \tau_{yz} \\
\nu K'_1 &= \nu b'_1 \sigma'_x + \nu b'_2 \sigma'_y + \nu b'_3 \sigma'_z + \nu b'_4 \tau_{yz} + \nu b'_5 \tau_{zx} + \nu b'_6 \tau_{xy} \\
\nu K_1 &= \nu b'_1 \sigma'_x + \nu b'_2 \sigma'_y + \nu b'_3 \sigma'_z + \nu b'_4 \tau_{yz} + \nu b'_5 \tau_{zx} + \nu b'_6 \tau_{xy} + 3 \nu b \sigma
\end{aligned}$$

とならなければならない。このうち νK_1 の最後の項以外は $\nu K'_1$ と全く重複するから

$$\nu b'_1 = \nu b'_2 = \nu b'_3 = \nu b'_4 = \nu b'_5 = \nu b'_6 = 0$$

としてもさしつかえない。

また (100) 式と (102) 式が成立するためには

$$\frac{\partial \nu K'_2}{\partial \sigma_x} = \nu a_{11} \sigma'_x + \nu a_{12} \sigma'_y + \nu a_{13} \sigma'_z + \nu a_{14} \tau_{yz} + \nu a_{15} \tau_{zx} + \nu a_{16} \tau_{xy}$$

なる関係が成立しなければならない。従って、(106) 式から

$$\nu a_{rs} = \nu a_{sr} \quad (107)$$

となる。以上から一般的な異方性体における降伏条件式およびすべり歪増分は

$$\begin{aligned}
f(\sigma_{ij}) &= (\nu K'_2)^{1/2} + \nu K'_1 + \nu K_1 = k \\
\nu K'_2 &= \frac{1}{2} [\nu a_{11} \sigma'^2_x + \nu a_{22} \sigma'^2_y + \nu a_{33} \sigma'^2_z + \nu a_{44} \tau^2_{yz} + \nu a_{55} \tau^2_{zx} + \nu a_{66} \tau^2_{xy} \\
&+ 2 \nu a_{12} \sigma'_x \sigma'_y + 2 \nu a_{23} \sigma'_y \sigma'_z + 2 \nu a_{13} \sigma'_x \sigma'_z + 2 \nu a_{14} \sigma'_x \tau_{yz} + 2 \nu a_{15} \sigma'_x \tau_{zx} \\
&+ 2 \nu a_{16} \sigma'_x \tau_{xy} + 2 \nu a_{24} \sigma'_y \tau_{yz} + 2 \nu a_{25} \sigma'_y \tau_{zx} + 2 \nu a_{26} \sigma'_y \tau_{xy} \\
&+ 2 \nu a_{34} \sigma'_z \tau_{yz} + 2 \nu a_{35} \sigma'_z \tau_{zx} + 2 \nu a_{36} \sigma'_z \tau_{xy} + 2 \nu a_{45} \tau_{yz} \tau_{zx} \\
&+ 2 \nu a_{56} \tau_{zx} \tau_{xy} + 2 \nu a_{46} \tau_{xy} \tau_{yz}] \\
\nu K'_1 &= \nu b'_1 \sigma'_x + \nu b'_2 \sigma'_y + \nu b'_3 \sigma'_z + \nu b'_4 \tau_{yz} + \nu b'_5 \tau_{zx} + \nu b'_6 \tau_{xy} \\
\nu K_1 &= 3 \nu b \sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d \nu \epsilon_x^p \\ d \nu \epsilon_y^p \\ d \nu \epsilon_z^p \\ d \nu \gamma_{yz}^p \\ d \nu \gamma_{zx}^p \\ d \nu \gamma_{xy}^p \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \nu a_{11} & \nu a_{12} & \nu a_{13} & \nu a_{14} & \nu a_{15} & \nu a_{16} \\ \nu a_{12} & \nu a_{22} & \nu a_{23} & \nu a_{24} & \nu a_{25} & \nu a_{26} \\ \nu a_{13} & \nu a_{23} & \nu a_{33} & \nu a_{34} & \nu a_{35} & \nu a_{36} \\ \nu a_{14} & \nu a_{24} & \nu a_{34} & \nu a_{44} & \nu a_{45} & \nu a_{46} \\ \nu a_{15} & \nu a_{25} & \nu a_{35} & \nu a_{45} & \nu a_{55} & \nu a_{56} \\ \nu a_{16} & \nu a_{26} & \nu a_{36} & \nu a_{46} & \nu a_{56} & \nu a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \right. \\
&+ \begin{bmatrix} \nu b_1 \\ \nu b_2 \\ \nu b_3 \\ \nu b_4 \\ \nu b_5 \\ \nu b_6 \end{bmatrix} + \left. \begin{bmatrix} \nu b \\ \nu b \\ \nu b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} d \lambda \nu
\end{aligned} \quad (108)$$

となり，(105) 式は

$$\begin{aligned} \nu a_{11} + \nu a_{12} + \nu a_{13} &= \nu a_{12} + \nu a_{22} + \nu a_{23} = \nu a_{13} + \nu a_{23} + \nu a_{33} \\ \nu a_{14} + \nu a_{24} + \nu a_{34} &= \nu a_{15} + \nu a_{25} + \nu a_{35} = \nu a_{16} + \nu a_{26} + \nu a_{36} = 0 \\ \nu b_1 + \nu b_2 + \nu b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

と書き改められる。

以上非硬化の場合について述べて来た。次に歪硬化が生ずる場合について考察してみよう。

岩盤の場合に内部摩擦角は不連続面での凹凸の幾何学的性質によるものであり，その1つ1つの凹凸を形成する面が完全に平滑な平面であると考えるならば，表-1に示すIIの弾塑性領域とIVの弾塑性領域とでは ϕ の値は異ると考えられるが，岩片の破壊が生じない限り，各々のすべりの過程で ϕ が大きく変えることは考え難く，むしろ接触面積の変化による ϕ の変化が主として現れると考えた方が考え易い。

しかし，1つ1つの凹凸を形成する面が完全な平滑な平面でなく，更に小さな凹凸が存在すると考えるならば各々のすべりの過程でも ϕ の変化が生ずると考えるべきであろう。

一方粒状体の場合には接触面積の変化も当然考えられるが，粒子間の接触点の位置が移動することから，すべりの方向が変化し ϕ の値は各過程の中でも変化する筈である。

従って ϕ ， ϕ 材料においては各々のすべりの過程において ϕ ， ϕ 共変化すると考えなければならない。そして或る場合には ϕ 或は ϕ の値は大きくなるが或る場合には小さくなると考えなければならない。

これらの ϕ ， ϕ の値の変化をそれが増加であれ減少であれ，一応総称して歪硬化と名付けて以下論ずることとする。

前述したように金属材料においては塑性変形により体積変化は生じないので，体積変化による歪硬化は考えられていない。しかし ϕ 材料ではすべりにより体積変化が生ずるので，体積変化による歪硬化は生ずると考えなければならない。

形の変化による歪硬化と体積変化による歪硬化とはどのような関係にあるかということは極めてむづかしい問題である。

そこでここでは一般的に考えて降伏条件の内部摩擦角 ϕ も粘着力 ϕ も，体積変化と形の変化により変化し，いわゆる歪硬化現象を示すとして以下論を進めることにする。

そこで $\nu H_1(\int \overline{d\nu\epsilon_s^p}, \overline{d\nu\epsilon_s^p})$ は体積変化相当歪と形の変化による相当歪による内部摩擦係数の変化を示す関数とし， $\nu H_2(\int \overline{d\nu\epsilon_s^p}, \overline{d\nu\epsilon_s^p})$ は粘着力の変化を示す関数であるとする。

さて前述したように， $\nu K_1'$ ， $\nu K_1'$ は偏差歪を生じさせるものであるから，形の変化に対応するものであり， νK_1 は体積変化を生ずるものである。従って内部摩擦係数は νK_1 に含まれると考えるのが容易である。

しかし前述した例で降伏条件を

$$|\tau_{xy}| - (C - \sigma_x \tan \phi_x) = 0$$

としたとき

$$d\tau_{xy}^p = \pm d\lambda$$

$$d\varepsilon_x^p = \tan \phi_x d\lambda = (\nu b_1 + \nu b) d\lambda$$

$$d\varepsilon_y^p = d\varepsilon_z^p = 0$$

$$\therefore \nu b_2 = \nu b_3 = -\nu b$$

$$\nu b_1 + \nu b_2 + \nu b_3 = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\nu b_1 = \frac{2}{3} \tan \phi_x, \quad \nu b_2 = \nu b_3 = -\nu b = -\frac{1}{3} \tan \phi_x$$

となり, $\nu K'_1$ にも内部摩擦係数を含むことがある。

故に $\nu K'_2$ には内部摩擦係数は含まれないが, $\nu K'_1$, νK_1 には内部摩擦係数は含まれるとする。しかるとき, 歪硬化を考慮した場合の降伏条件式は

$$\begin{aligned} f_\nu(\sigma_{ij}) &= (\nu K'_2)^{1/2} + \nu H_1 \left(\int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p, \int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p \right) (\nu K' + \nu K_1) \\ &= \nu H_2 \left(\int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p, \int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p \right) \\ \begin{bmatrix} d\nu\varepsilon_x^p \\ d\nu\varepsilon_y^p \\ d\nu\varepsilon_z^p \\ d\nu\gamma_{yz}^p \\ d\nu\gamma_{zx}^p \\ d\nu\gamma_{xy}^p \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \nu a_{11} & \nu a_{12} & \nu a_{13} & \nu a_{14} & \nu a_{15} & \nu a_{16} \\ \nu a_{12} & \nu a_{22} & \nu a_{23} & \nu a_{24} & \nu a_{25} & \nu a_{26} \\ \nu a_{13} & \nu a_{23} & \nu a_{33} & \nu a_{34} & \nu a_{35} & \nu a_{36} \\ \nu a_{14} & \nu a_{24} & \nu a_{34} & \nu a_{44} & \nu a_{45} & \nu a_{46} \\ \nu a_{15} & \nu a_{25} & \nu a_{35} & \nu a_{45} & \nu a_{55} & \nu a_{56} \\ \nu a_{16} & \nu a_{26} & \nu a_{36} & \nu a_{46} & \nu a_{56} & \nu a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \nu H_1 \left(\int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p, \int \overline{d\nu\varepsilon}_s^p \right) \begin{bmatrix} \nu b_1 + \nu b \\ \nu b_2 + \nu b \\ \nu b_3 + \nu b \\ \nu b_4 \\ \nu b_5 \\ \nu b_6 \end{bmatrix} \right\} d\lambda_\nu \\ K'_2 &= \frac{1}{2} \left[\nu a_{11} \sigma_x'^2 + \nu a_{22} \sigma_y'^2 + \nu a_{33} \sigma_z'^2 + \nu a_{44} \tau_{yz}^2 + \nu a_{55} \tau_{zx}^2 + \nu a_{66} \tau_{xy}^2 \right. \\ &\quad + 2\nu a_{12} \sigma'_x \sigma'_y + 2\nu a_{13} \sigma'_x \sigma'_z + 2\nu a_{14} \sigma'_x \tau_{yz} + 2\nu a_{15} \sigma'_x \tau_{zx} + 2\nu a_{16} \sigma'_x \tau_{xy} \\ &\quad + 2\nu a_{23} \sigma'_y \sigma'_z + 2\nu a_{24} \sigma'_y \tau_{yz} + 2\nu a_{25} \sigma'_y \tau_{zx} + 2\nu a_{26} \sigma'_y \tau_{xy} + 2\nu a_{34} \sigma'_z \tau_{yz} \\ &\quad + 2\nu a_{35} \sigma'_z \tau_{zx} + 2\nu a_{36} \sigma'_z \tau_{xy} + 2\nu a_{46} \tau_{yz} \tau_{zx} + 2\nu a_{46} \tau_{yz} \tau_{xy} \\ &\quad \left. + 2\nu a_{56} \tau_{zx} \tau_{xy} \right] d\lambda_\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu K'_1 &= \nu b_1 \sigma'_x + \nu b_2 \sigma'_y + \nu b_3 \sigma'_z + \nu b_4 \tau_{yz} + \nu b_5 \tau_{zx} + \nu b_6 \tau_{xy} \\
\nu K_1 &= 3 \nu b \sigma = \nu b (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
\overline{d\nu \epsilon_s^P} &= \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \nu b d\lambda \nu \\
(\overline{d\nu \epsilon_s^P})^2 &= \frac{2}{3} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{11} \sigma'_x + \nu a_{12} \sigma'_y + \nu a_{13} \sigma'_z + \nu a_{14} \tau_{yz} + \nu a_{15} \tau_{zx} \right. \right. \\
&\quad + \left. \nu a_{16} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \nu b_1 \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{12} \sigma'_x \right. \\
&\quad + \nu a_{22} \sigma'_y + \nu a_{23} \sigma'_z + \nu a_{24} \tau_{yz} + \nu a_{25} \tau_{zx} + \nu a_{26} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \\
&\quad \times \nu b_2 \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{13} \sigma'_x + \nu a_{23} \sigma'_y + \nu a_{33} \sigma'_z + \nu a_{34} \tau_{yz} + \nu a_{35} \tau_{zx} \right. \\
&\quad + \left. \nu a_{36} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \nu b_3 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{14} \sigma'_x \right. \\
&\quad + \nu a_{24} \sigma'_y + \nu a_{34} \sigma'_z + \nu a_{44} \tau_{yz} + \nu a_{45} \tau_{zx} + \nu a_{46} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \\
&\quad \times \nu b_4 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{15} \sigma'_x + \nu a_{25} \sigma'_y + \nu a_{35} \sigma'_z + \nu a_{45} \tau_{yz} + \nu a_{55} \tau_{zx} \right. \\
&\quad + \left. \nu a_{56} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \nu b_5 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{16} \sigma'_x \right. \\
&\quad + \nu a_{26} \sigma'_y + \nu a_{36} \sigma'_z + \nu a_{46} \tau_{yz} + \nu a_{56} \tau_{zx} + \nu a_{66} \tau_{xy}) + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \\
&\quad \times \left. \nu b_6 \right\}^2 \Big] (d\lambda \nu)^2
\end{aligned}$$

(110)

となる。

この降伏条件式およびすべり歪増分によるすべり歪エネルギーの増分は (101) 式から

$$dW^P = \left[(\nu K'_2)^{\frac{1}{2}} + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) (\nu K'_1 + \nu K_1) \right] d\lambda \quad (111)$$

となる。

さて直交異方性体では x 軸, y 軸, z 軸の周りに夫々 180° 廻転しても, 降伏条件およびすべり歪エネルギーは値を変えないから, τ_{yz} , τ_{xy} , τ_{zx} を 1 次の形で含む項の係数は 0 とならなければならない。

従って

$$\begin{aligned}
\nu a_{14} &= \nu a_{15} = \nu a_{16} = \nu a_{24} = \nu a_{25} = \nu a_{26} = \nu a_{34} = \nu a_{35} = \nu a_{36} = \nu a_{45} \\
&= \nu a_{46} = \nu a_{56} = 0, \quad \nu b_4 = \nu b_5 = \nu b_6 = 0
\end{aligned}$$

となり, 直交異方性体の降伏条件およびすべり歪増分は

$$\begin{aligned}
f\nu(\sigma_{ij}) &= (\nu K'_2)^{\frac{1}{2}} + \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) (\nu K'_1 + \nu K_1) \\
&= \nu H_2 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \\
\nu K'_2 &= \frac{1}{2} (\nu a_{11} \sigma_x'^2 + \nu a_{22} \sigma_y'^2 + \nu a_{33} \sigma_z'^2 + \nu a_{44} \tau_{yz}^2 + \nu a_{55} \tau_{zx}^2 + \nu a_{66} \tau_{xy}^2 \\
&\quad + 2\nu a_{12} \sigma_x' \sigma_y' + 2\nu a_{23} \sigma_y' \sigma_z' + 2\nu a_{13} \sigma_x' \sigma_z')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d_{\nu} \varepsilon_x^P \\ d_{\nu} \varepsilon_y^P \\ d_{\nu} \varepsilon_z^P \\ d_{\nu} \tau_{yz}^P \\ d_{\nu} \tau_{zx}^P \\ d_{\nu} \tau_{xy}^P \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \nu a_{11} & \nu a_{12} & \nu a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \nu a_{12} & \nu a_{22} & \nu a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \nu a_{13} & \nu a_{23} & \nu a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}) \begin{bmatrix} \nu b_1 + \nu b \\ \nu b_2 + \nu b \\ \nu b_3 + \nu b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} d\lambda_{\nu} \\
\overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P} &= \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}) \nu b d\lambda_{\nu} \\
(\overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P})^2 &= \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\nu K_2')^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{11} \sigma_x' + \nu a_{12} \sigma_y' + \nu a_{13} \sigma_z') + \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}, \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}) \right. \right. \\
&\quad \times \nu b_1 \left. \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (\nu K_2')^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{12} \sigma_x' + \nu a_{22} \sigma_y' + \nu a_{23} \sigma_z') + \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}, \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}) \right. \\
&\quad \times \nu b_2 \left. \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (\nu K_2')^{-\frac{1}{2}} (\nu a_{13} \sigma_x' + \nu a_{23} \sigma_y' + \nu a_{33} \sigma_z') + \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}, \overline{d_{\nu} \varepsilon_s^P}) \right. \\
&\quad \times \nu b_3 \left. \right]^2 + \frac{1}{8} (\nu K_2')^{-\frac{1}{2}} [(\nu a_{44} \tau_{yz})^2 + (\nu a_{55} \tau_{zx})^2 + (\nu a_{66} \tau_{xy})^2] \left. \right\} (d\lambda_{\nu})^2
\end{aligned}$$

(112)

となる。

さらに等方性体では降伏条件式は不変量で表わされなければならないから

$$\nu K_2' = A_{\nu} \cdot J_2', \quad \nu K_1' = 0, \quad \nu K_3' = 3 B_{\nu} \cdot \sigma$$

となり

$$\nu a_{11} = \nu a_{22} = \nu a_{33} = A_{\nu}$$

$$\nu a_{44} = \nu a_{55} = \nu a_{66} = 2 A_{\nu}$$

$$\nu a_{12} = \nu a_{23} = \nu a_{31} = 0$$

$$\nu b_1 = \nu b_2 = \nu b_3 = 0, \quad \nu b = B_{\nu}$$

となり，等方性体の降伏条件式およびすべり歪増分は

$$\begin{aligned}
f_{\nu}(\sigma_{ij}) &= (A_{\nu} J_2')^{\frac{1}{2}} + 3B_{\nu} \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) \sigma = H_2 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) \\
\begin{bmatrix} d_{\nu} \epsilon_x^P \\ d_{\nu} \epsilon_y^P \\ d_{\nu} \epsilon_z^P \\ d_{\nu} \gamma_{yz}^P \\ d_{\nu} \gamma_{zx}^P \\ d_{\nu} \gamma_{xy}^P \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{A_{\nu}}{J_2'} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) \cdot B_{\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} d\lambda_{\nu} \quad (113) \\
\overline{d_{\nu} \epsilon_s^P} &= B_{\nu} \cdot \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) d\lambda_{\nu} \\
(\overline{d_{\nu} \epsilon_s^P})^2 &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4} A_{\nu} (J_2')^{-1} \cdot 2 J_2 \right] (d\lambda_{\nu})^2 = \frac{1}{3} A_{\nu} (d\lambda_{\nu})^2
\end{aligned}$$

となる。

$$\epsilon \gg \nu \quad A_{\nu} = 3, \quad B_{\nu} = 0, \quad d\lambda_{\nu} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\lambda$$

とおけば

$$\overline{d_{\nu} \epsilon_n^P} = 0, \quad \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P} = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 (d\lambda)^2$$

となり

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = H(\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}), \quad d\epsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\lambda$$

が得られ、(97) 式と一致する。また

$$A_{\nu} = 1, \quad 3B_{\nu} \cdot \nu H_1 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) = \alpha$$

$$\nu H_2 (\int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}, \int \overline{d_{\nu} \epsilon_s^P}) = k, \quad d\lambda_{\nu} = d\lambda$$

とすれば

$$f(\sigma_{ij}) = (J_2')^{\frac{1}{2}} + \alpha \sigma = k$$

$$d\epsilon_{ij}^P = \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-\frac{1}{2}} \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha \right\} d\lambda$$

が得られ、(98) 式と一致する。

10. 異方性不連続体の有限要素法による解法

不連続体のすべりを生じている領域での挙動を巨視的にみて、連続体の力学体系により近似的に解析する場合に有限要素法は極めて有効な手段となる。この場合に各応力段階において応力増分と歪増分との関係を求め、これを弾性領域における弾性係数に対応するものとして解析すればよい。

さて前節まで降伏条件式の数は n (< 6) ケある場合について取扱って来た。これは前章にも述べたように数学的には変分変数の数より少ない数まで降伏条件式の存在が可能だからである。しかし、一般に連続体ないし不連続体でも等方性を有するものでは、2つ以上の降伏条件が存在することは考えられない。このため塑性理論は単一の降伏条件が存在する場合について体系化されている。

しかし岩盤のように節理面、キレツ面が存在し、これらの面でのすべりが生ずる所にその特性が現れる場合には異って来る。即ち一般に岩盤では卓越した節理の方向が2~3ヶ存在し、岩石が破壊しない限り、これらの卓越した節理面でのすべり以外にすべりが生ずることは考えられないし、またその方向により力学的性質も異って来るので、各方向の節理毎に別の降伏条件を考える必要がある。このために以下の誘導においても降伏条件式は n (< 6) ケ存在するとして取扱うことにする。

異方性体の降伏条件式およびすべり歪増分は(110)式により表わされるから

$$\begin{aligned} \nu T_1 &= \nu b \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \\ \nu T_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{11} \sigma'_x + \nu a_{12} \sigma'_y + \nu a_{13} \sigma'_z + \nu a_{14} \tau_{yz} + \nu a_{15} \tau_{zx} + \nu a_{16} \tau_{xy}) \right. \right. \\ &\quad + \nu b_1 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{12} \sigma'_x + \nu a_{22} \sigma'_y + \nu a_{23} \sigma'_z \right. \\ &\quad + \nu a_{24} \tau_{yz} + \nu a_{25} \tau_{zx} + \nu a_{26} \tau_{xy}) + \nu b_2 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{13} \sigma'_x + \nu a_{23} \sigma'_y + \nu a_{33} \sigma'_z + \nu a_{34} \tau_{yz} + \nu a_{35} \tau_{zx} + \nu a_{36} \tau_{xy}) \right. \\ &\quad + \nu b_3 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{14} \sigma'_x + \nu a_{24} \sigma'_y + \nu a_{34} \sigma'_z \right. \\ &\quad + \nu a_{44} \tau_{yz} + \nu a_{45} \tau_{zx} + \nu a_{46} \tau_{xy}) + \nu b_4 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{15} \sigma'_x + \nu a_{25} \sigma'_y + \nu a_{35} \sigma'_z + \nu a_{45} \tau_{yz} + \nu a_{55} \tau_{zx} + \nu a_{56} \tau_{xy}) \right. \\ &\quad + \nu b_5 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} (\nu K_2')^{-1/2} (\nu a_{16} \sigma'_x + \nu a_{26} \sigma'_y + \nu a_{36} \sigma'_z \right. \\ &\quad + \nu a_{46} \tau_{yz} + \nu a_{56} \tau_{zx} + \nu a_{66} \tau_{xy}) + \nu b_6 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_s^P}) \left. \right\}^2 \left. \right\}^{1/2} \quad (114) \end{aligned}$$

とすると

$$\overline{d\nu \epsilon_s^P} = \nu T_1 d\lambda_\nu, \quad \overline{d\nu \epsilon_s^P} = \nu T_2 d\lambda_\nu \quad \dots\dots\dots (116)$$

となる。今

$$\left. \begin{aligned} \nu H_1' &= \frac{\partial \nu H_1}{\partial (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P})}, & \nu H_2' &= \frac{\partial \nu H_1}{\partial (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P})} \\ \nu H_3' &= \frac{\partial \nu H_2}{\partial (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P})}, & \nu H_4' &= \frac{\partial \nu H_2}{\partial (\int \overline{d\nu \epsilon_s^P})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

とおく、すべりが生じている領域では降伏条件を満足しながら、応力の変化は生じなければならぬから

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} d\tau_{zx} + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \\ &= [\nu H'_3 \cdot \nu T_1 + \nu H'_4 \cdot \nu T_2 - \{ \nu H'_1 \cdot \nu T_1 + \nu H'_2 \cdot \nu T_2 \} (\nu K'_1 + \nu K'_2)] d\lambda_{\nu} \quad (118) \end{aligned}$$

今弾性係数を

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (119)$$

とすると

$$d\varepsilon_x^e = d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_x - \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} d\lambda_{\nu}$$

であるから

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= c_{11} d\varepsilon_x + c_{12} d\varepsilon_y + c_{13} d\varepsilon_z + c_{14} d\gamma_{yz} + c_{15} d\gamma_{zx} + c_{16} d\gamma_{xy} \\ &= c_{11} d\varepsilon_x + c_{12} d\varepsilon_y + c_{13} d\varepsilon_z + c_{14} d\gamma_{yz} + c_{15} d\gamma_{zx} + c_{16} d\gamma_{xy} \\ &\quad - \sum_{\nu} \left(c_{11} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{12} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{13} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{14} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{15} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{16} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \right) d\lambda_{\nu} \end{aligned}$$

となる。今

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= c_{11} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{12} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{13} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{14} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{15} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{16} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \\ P_2 &= c_{12} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{22} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{23} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{24} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{25} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{26} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \\ P_3 &= c_{13} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{23} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{33} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{34} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{35} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{36} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \\ P_4 &= c_{14} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{24} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{34} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{44} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{45} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{46} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \\ P_5 &= c_{15} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{25} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{35} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{45} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{55} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{56} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \\ P_6 &= c_{16} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} + c_{26} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} + c_{36} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_z} + c_{46} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{yz}} + c_{56} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{zx}} + c_{66} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

とおく。たゞし

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{11} \sigma'_x + \nu a_{12} \sigma'_y + \nu a_{13} \sigma'_z + \nu a_{14} \tau_{yz} + \nu a_{15} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{16} \tau_{xy}) + (\nu b_1 + \nu b) \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P}) \\
\frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{21} \sigma'_x + \nu a_{22} \sigma'_y + \nu a_{23} \sigma'_z + \nu a_{24} \tau_{yz} + \nu a_{25} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{26} \tau_{xy}) + (\nu b_2 + \nu b) \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P}) \\
\frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_z} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{31} \sigma'_x + \nu a_{32} \sigma'_y + \nu a_{33} \sigma'_z + \nu a_{34} \tau_{yz} + \nu a_{35} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{36} \tau_{xy}) + (\nu b_3 + \nu b) \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P}) \\
\frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{41} \sigma'_x + \nu a_{42} \sigma'_y + \nu a_{43} \sigma'_z + \nu a_{44} \tau_{yz} + \nu a_{45} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{46} \tau_{xy}) + \nu b_4 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P}) \\
\frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{zx}} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{51} \sigma'_x + \nu a_{52} \sigma'_y + \nu a_{53} \sigma'_z + \nu a_{54} \tau_{yz} + \nu a_{55} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{56} \tau_{xy}) + \nu b_5 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P}) \\
\frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{2} (\nu K'_2)^{-1/2} (\nu a_{61} \sigma'_x + \nu a_{62} \sigma'_y + \nu a_{63} \sigma'_z + \nu a_{64} \tau_{yz} + \nu a_{65} \tau_{zx} \\
&\quad + \nu a_{66} \tau_{xy}) + \nu b_6 \cdot \nu H_1 (\int \overline{d\nu \epsilon_B^P}, \int \overline{d\nu \epsilon_S^P})
\end{aligned} \tag{121}$$

とすると

$$d\sigma_x = c_{11} d\epsilon_x + c_{12} d\epsilon_y + c_{13} d\epsilon_z + c_{14} d\gamma_{yz} + c_{15} d\gamma_{zx} + c_{16} d\gamma_{xy} - \sum_{\nu}^n (\nu P_1 \cdot d\lambda_{\nu})$$

となる。これを(118)式に代入し、

$$\begin{aligned}
S_{\nu\mu} &= \nu P_1 \frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_x} + \nu P_2 \frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_y} + \nu P_3 \frac{\partial f\nu}{\partial \sigma_z} + \nu P_4 \frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{yz}} + \nu P_5 \frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{zx}} + \nu P_6 \frac{\partial f\nu}{\partial \tau_{xy}} \\
&\quad + \delta_{\nu\mu} [\nu H'_3 \cdot \nu T_1 + \nu H'_4 \cdot \nu T_2 - (\nu H'_1 \cdot \nu T_1 + \nu H'_2 \cdot \nu T_2) (\nu K'_1 + \nu K'_2)] \tag{122}
\end{aligned}$$

とし

$$\nu = \mu \text{ のとき } \delta_{\nu\mu} = 1$$

$$\nu \neq \mu \text{ のとき } \delta_{\nu\mu} = 0$$

$$\nu K'_1 = \nu b_1 \sigma'_x + \nu b_2 \sigma'_y + \nu b_3 \sigma'_z + \nu b_4 \tau_{yz} + \nu b_5 \tau_{zx} + \nu b_6 \tau_{xy}$$

$$\nu K_1 = 3_{\nu} b \sigma$$

とすると

$$\nu P_1 d\epsilon_x + \nu P_2 d\epsilon_y + \nu P_3 d\epsilon_z + \nu P_4 d\gamma_{yz} + \nu P_5 d\gamma_{zx} + \nu P_6 d\gamma_{xy} = \sum S_{\nu\mu} d\lambda_{\mu}$$

が得られる。これを $d\lambda_{\mu}$ について連立にいて

$$d\lambda_{\nu} = \nu R_1 d\epsilon_x + \nu R_2 d\epsilon_y + \nu R_3 d\epsilon_z + \nu R_4 d\gamma_{yz} + \nu R_5 d\gamma_{zx} + \nu R_6 d\gamma_{xy} \tag{123}$$

が得られたとすると

$$\begin{aligned}
d\sigma_x &= (c_{11} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_1) d\epsilon_x + (c_{12} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_2) d\epsilon_y + (c_{13} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_3) d\epsilon_z \\
&\quad + (c_{14} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_4) d\gamma_{yz} + (c_{15} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_5) d\gamma_{zx} + (c_{16} - \sum_{\nu}^n \nu P_1 \cdot \nu R_6) d\gamma_{xy}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} - \frac{n}{\nu} \nu P_1 \cdot \nu R_1 & c_{12} - \frac{n}{\nu} \nu P_1 \cdot \nu R_2 & c_{13} - \frac{n}{\nu} \nu P_1 \cdot \nu R_3 & c_{14} - \frac{n}{\nu} \nu P_1 \cdot \nu R_4 \\ c_{12} - \frac{n}{\nu} \nu P_2 \cdot \nu R_1 & c_{22} - \frac{n}{\nu} \nu P_2 \cdot \nu R_2 & c_{23} - \frac{n}{\nu} \nu P_2 \cdot \nu R_3 & c_{24} - \frac{n}{\nu} \nu P_2 \cdot \nu R_4 \\ c_{13} - \frac{n}{\nu} \nu P_3 \cdot \nu R_1 & c_{23} - \frac{n}{\nu} \nu P_3 \cdot \nu R_2 & c_{33} - \frac{n}{\nu} \nu P_3 \cdot \nu R_3 & c_{34} - \frac{n}{\nu} \nu P_3 \cdot \nu R_4 \\ c_{14} - \frac{n}{\nu} \nu P_4 \cdot \nu R_1 & c_{24} - \frac{n}{\nu} \nu P_4 \cdot \nu R_2 & c_{34} - \frac{n}{\nu} \nu P_4 \cdot \nu R_3 & c_{44} - \frac{n}{\nu} \nu P_4 \cdot \nu R_4 \\ c_{15} - \frac{n}{\nu} \nu P_5 \cdot \nu R_1 & c_{25} - \frac{n}{\nu} \nu P_5 \cdot \nu R_2 & c_{35} - \frac{n}{\nu} \nu P_5 \cdot \nu R_3 & c_{45} - \frac{n}{\nu} \nu P_5 \cdot \nu R_4 \\ c_{16} - \frac{n}{\nu} \nu P_6 \cdot \nu R_1 & c_{26} - \frac{n}{\nu} \nu P_6 \cdot \nu R_2 & c_{36} - \frac{n}{\nu} \nu P_6 \cdot \nu R_3 & c_{46} - \frac{n}{\nu} \nu P_6 \cdot \nu R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

(124)

が得られる。

これをすべりが生じている領域で、各応力段階において求め、これを弾性領域における弾性係数に対応したものとして有限要素法に適用して、反復計算すれば解が得られる。

11. 岩盤の解析

元来岩盤には節理、キレツ等が存在し、このために岩盤内の力の伝わり方、変形状態等は弾性体とはかなり異っていることは岩盤の実測資料により明らかにされており、これらの特性を定性的に裏付ける実験的研究も行われている。岩盤の力学的性質がその内部に存在する節理、レッキ等によるものであるならば、岩盤内に存在する節理、キレツの状態に応じて、いくつかのモデルを考え、その特徴に応じた力学的な取扱を検討する必要がある。

現在までの岩盤の節理、キレツの調査によると、多くの場合、節理、キレツは3つの卓越した方向を示している。

そこで先ず2次元問題として、2つの卓越した節理が存在し、その各々が直交している場合について検討を加え、次いで斜行している場合について解析方法を検討することにする。

11.1 節理が直交している場合の解析方法

岩盤に対し図-12に示すような5種類のモデルを考える。

これらを不連続体のまゝ解析することは極めて労力を要するので、巨視的にみて、不連続体の特性を加味した連続体として解析することを検討しよう。

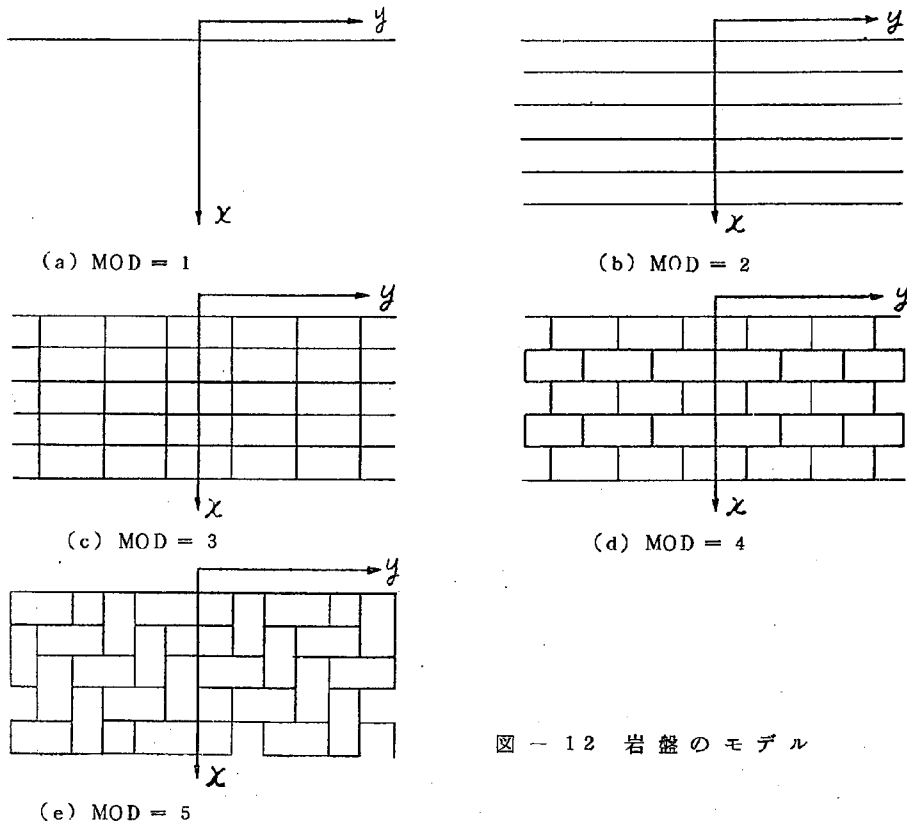


図 - 12 岩盤のモデル

簡単のために2つの卓越した節理群は夫々 x 軸, y 軸に平行であるとする。

今 $x = \text{const}$ の面での降伏条件式, すべり歪増分に対し $\nu = 1$ とし

$y = \text{const}$ の面での降伏条件式, すべり歪増分に対し $\nu = 2$ とする。

11.1.1 $x = \text{const}$ の面で y 方向にすべる場合

先ず初めのルーズな状態から締固った状態への移行過程について考察しよう。このとき降伏条件式としては

$$f_1(\sigma_{ij}) = |\tau_{xy}| - \sigma_x \tan \phi_x - c_x = 0$$

の形のものが考えられる。従って (110) 式において

$$1 a_{11} = 1 a_{12} = 1 a_{13} = 1 a_{14} = 1 a_{15} = 1 a_{16} = 0$$

$$1 a_{22} = 1 a_{23} = 1 a_{24} = 1 a_{25} = 1 a_{26} = 0$$

$$1 a_{33} = 1 a_{34} = 1 a_{35} = 1 a_{36} = 1 a_{44} = 1 a_{45} = 1 a_{46} = 0$$

$${}_1 a_{33} = {}_1 a_{30} = 0 \quad {}_1 a_{00} = 2$$

$${}_1 b_1 = -\frac{2}{3}, \quad {}_1 b_2 = {}_1 b_3 = \frac{1}{3}, \quad {}_1 b = -\frac{1}{3}, \quad {}_1 b_4 = {}_1 b_5 = {}_1 b_6 = 0$$

とおけば

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| - {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \sigma_x = {}_1 H_2 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \\ d_1 \epsilon_x^p &= -{}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) d\lambda_1 \\ d_1 r_{xy}^p &= \pm d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_s^p &= -\frac{1}{3} {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) d\lambda_1 \\ (d_1 \epsilon_s^p)^2 &= \frac{2}{9} \left[\left\{ {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \right\}^2 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{8} 4 \right] (d\lambda_1)^2 \\ &= \frac{4}{9} \left[\left\{ {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \right\}^2 + \frac{3}{4} \right] (d\lambda_1)^2 \end{aligned} \quad (125)$$

となる。さてここで ${}_1 H_1, {}_1 H_2$ の関数形が問題となる。(125) 式から

$$\begin{aligned} {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= \mp \frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 r_{xy}^p} \\ \overline{d_1 \epsilon_s^p} &= \frac{1}{3} d_1 \epsilon_x^p \\ \overline{d_1 \epsilon_s^p} &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 r_{xy}^p} \right)^2 + \frac{3}{4}} d_1 r_{xy}^p \\ {}_1 H_2 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= |\tau_{xy}| \pm \frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 r_{xy}^p} \sigma_x \end{aligned} \quad (126)$$

が得られる。すなわち、 $x = \text{const}$ の面のみですべりが生ずる岩盤試験により、各応力段階での $d_1 \epsilon_x^p, d_1 r_{xy}^p$ を測定し得れば (126) 式 ${}_1 H_1, {}_1 H_2$ の関数形を求めることが出来る。

しかし岩盤内の節理の状況をごく単純化したモデルのもとに考え、9 節に述べたように不連続面でのすべりにおける内部摩擦角は、不連続面での凹凸の幾何学的性質によるものであるという事実に着目し、節理面での凹凸を形成する面が完全に平滑な平面から成っていると見做し得るならば、すべりが生じている過程で内部摩擦角は変化しない筈である。更に σ に相当する項は接触面の摩擦によると考えてさしつかえないから、接触面積の変化により変化すると考えてもよいであろう。この場合に接触面積の変化は接触面の両側での

$$\left[(d_1 u^p)^2 + (d_1 v^p)^2 \right]^{1/2}$$

の差として表わされるから

$$\left[(d_1 \epsilon_x^p)^2 + (d_1 r_{xy}^p)^2 \right]^{1/2} = \pm \sec \phi_x d\lambda_1$$

に比例すると考えられる。従って (125) 式において

$$\begin{aligned} {}_1 H_1 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= \tan \phi_x \\ {}_1 H_2 (\int \overline{d_1 \epsilon_s^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= {}_1 O_{x,0} + {}_1 O_{x,1} \sec \phi_x \int d\lambda_1 \end{aligned}$$

とすることが出来る。即ち、すべりの過程で内部摩擦係数が変化せず $d_1 \epsilon_x^p / d_1 \gamma_{xy}^p$ が一定した値を示すときは

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| - \sigma_x \tan \phi_x = {}_1C_{x,0} + {}_1C_{x,1} \sec \phi_x \int d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_x^p &= -\tan \phi_x d\lambda_1 \quad d_1 \gamma_{xy}^p = \pm d\lambda_1 \end{aligned} \quad (127)$$

として取扱うことも可能である。

締固った状態から後のルーズな状態への移行過程においては

${}_1a_{ij}$ は初めのルーズな状態から締固った状態への移行過程と同じ値をとり

$${}_1b_1 = \frac{2}{3}, \quad {}_1b_2 = {}_1b_3 = -\frac{1}{3}, \quad {}_1b = \frac{1}{3}, \quad {}_1b_4 = {}_1b_5 = {}_1b_6 = 0$$

とおけば

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| + {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \sigma_x = {}_1H_2(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) \\ d_1 \epsilon_x^p &= {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) d\lambda_1 \\ d_1 \gamma_{xy}^p &= \pm d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_b^p &= \frac{1}{3} {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) d\lambda_1 = \frac{1}{3} d_1 \epsilon_x^p \\ d_1 \epsilon_s^p &= \frac{2}{3} \sqrt{\{{}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p})\}^2 + \frac{3}{4}} d\lambda_1 \\ &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 \gamma_{xy}^p}\right)^2 + \frac{3}{4}} d_1 \gamma_{xy}^p \\ {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= \pm \frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 \gamma_{xy}^p} \\ {}_1H_2(\int \overline{d_1 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^p}) &= |\tau_{xy}| \pm \frac{d_1 \epsilon_x^p}{d_1 \gamma_{xy}^p} \sigma_x \end{aligned} \quad (128)$$

となり、さらに節理面の凹凸を形成する面が平滑な平面と見做し得るときは、(127) 式と同様に

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| + \sigma_x \tan \phi_x = {}_2C_{x,0} - {}_2C_{x,2} \sec \phi_x \int d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_x^p &= \tan \phi_x d\lambda_1 \quad d_1 \gamma_{xy}^p = \pm d\lambda_1 \end{aligned} \quad (129)$$

として取扱うことも可能である。

11.1.2 $y = \text{const}$ の面で x 方面にすべる場合

前項と同様に、初めのルーズな状態から後の締固った状態への移行過程では ${}_2a_{ij}$ は ${}_2a_{66} = 2$ とする以外全部 0 とし

$${}_2b_2 = -\frac{2}{3}, \quad {}_2b_1 = {}_2b_3 = \frac{1}{3}, \quad {}_2b = -\frac{1}{3}, \quad {}_2b_4 = {}_2b_5 = {}_2b_6 = 0$$

として

$$\begin{aligned} f_2(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| - {}_2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^p}) \sigma_y = {}_2H_2(\int \overline{d_2 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^p}) \\ d_2 \epsilon_y^p &= -{}_2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_b^p}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^p}) d\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2 \gamma_{xy}^p &= \pm d\lambda_2 \\
d_2 \bar{\epsilon}_y^p &= -\frac{1}{3} {}_2H_1 (\int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_y^p, \int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_s^p) d\lambda_2 = d_2 \bar{\epsilon}_y^p \\
d_2 \bar{\epsilon}_s^p &= \frac{2}{3} \sqrt{\{{}_2H_1 (\int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_y^p, \int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_s^p)\}^2 + \frac{3}{4} d\lambda_2} \\
&= \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{d_2 \bar{\epsilon}_x^p}{d_2 \gamma_{xy}^p}\right)^2 + \frac{3}{4} d_2 \gamma_{xy}^p} \\
{}_2H_1 (\int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_y^p, \int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_s^p) &= \frac{d_2 \bar{\epsilon}_x^p}{d_2 \gamma_{xy}^p} \\
{}_2H_2 (\int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_y^p, \int \bar{d}_2 \bar{\epsilon}_s^p) &= |\tau_{xy}| \pm \frac{d_2 \bar{\epsilon}_y^p}{d_2 \gamma_{xy}^p} \sigma_y
\end{aligned} \tag{130}$$

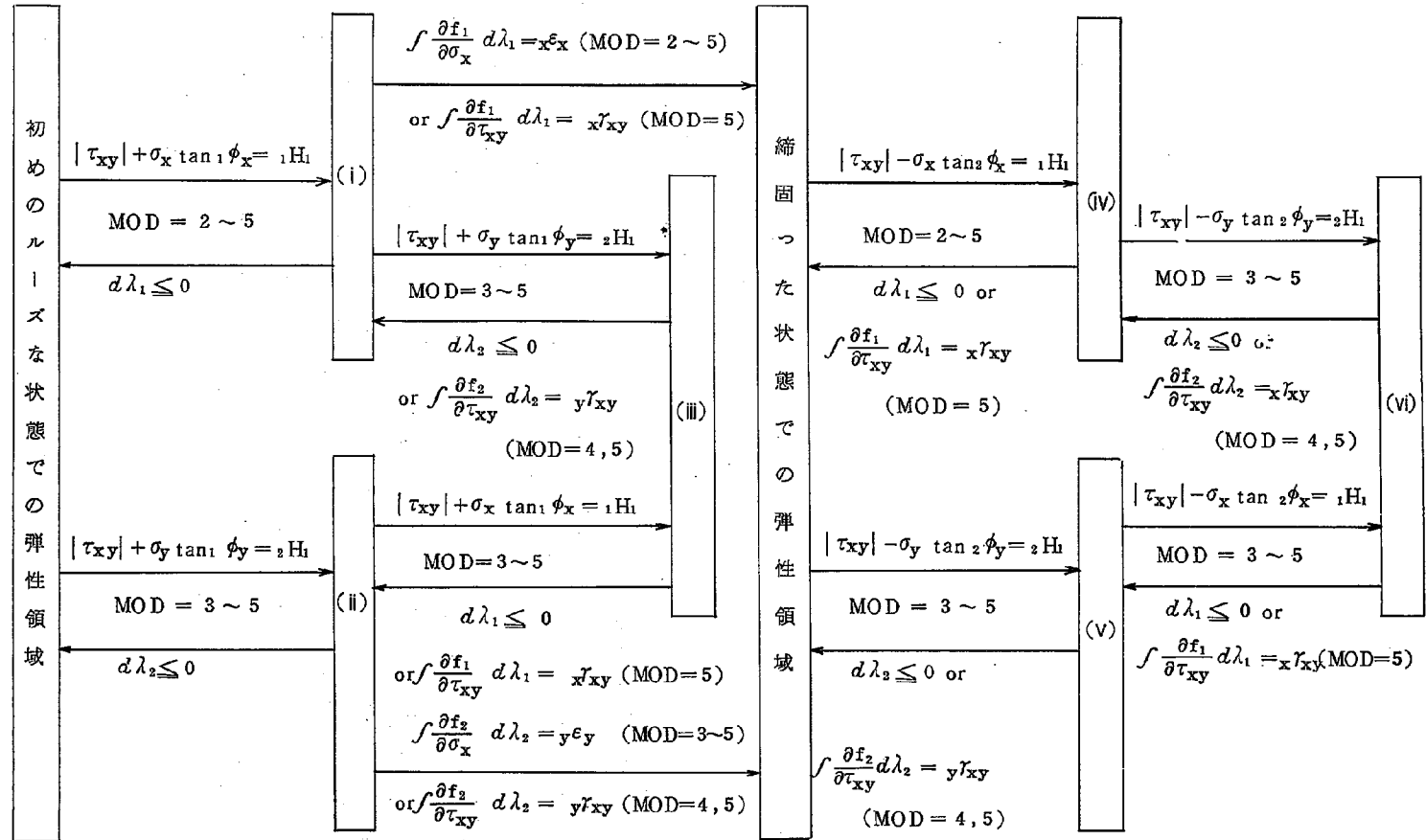
が得られ、節理面の凹凸を形成する面が平滑な平面と見做し得るときは

$$\begin{aligned}
f_2(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| - \sigma_y \tan \phi_y = {}_1C_{y,0} + C_{y,1} \sec \phi_y \int d\lambda_2 \\
d_2 \bar{\epsilon}_y^p &= -\tan \phi_y d\lambda_2, \quad d_2 \gamma_{xy}^p = \pm d\lambda_2
\end{aligned} \tag{131}$$

として取扱うことが出来る。

表 - 2

過程	状態	降伏条件式	諸係数
初め縮固った状態への移行過程	(I) x = Const な面で y 方向へすべる場合	$ \tau_{xy} + \sigma_x \tan \phi_x = {}_1H_1$ ${}_1H_1 = {}_1C_{x,0} - C_{x,1} \sec \phi_x \int d\lambda_1$	${}_1b_1 = {}_1b = \frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_1b_2 = -\frac{1}{2} \tan \phi_x$
	(II) y = Const な面で x 方向へすべる場合	$ \tau_{xy} + \sigma_y \tan \phi_y = {}_2H_1$ ${}_2H_1 = {}_1C_{y,0} - C_{y,1} \sec \phi_y \int d\lambda_2$	${}_2b_2 = {}_2b = \frac{1}{2} \tan \phi_y$ ${}_2b_1 = -\frac{1}{2} \tan \phi_y$
	(III) x = Const な面での y 方向へのすべりと y = Const な面での x 方向へのすべりとが同時に生じている場合	$ \tau_{xy} + \sigma_x \tan \phi_x = {}_1H_1$ ${}_1H_1 = {}_1C_{x,0} - C_{x,1} \sec \phi_x \int d\lambda_1$ $ \tau_{xy} - \sigma_y \tan \phi_y = {}_2H_1$ ${}_2H_1 = {}_1C_{y,0} - C_{y,1} \sec \phi_y \int d\lambda_2$	${}_1b_1 = {}_1b = \frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_1b_2 = -\frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_2b_2 = {}_2b = \frac{1}{2} \tan \phi_y$ ${}_2b_1 = -\frac{1}{2} \tan \phi_y$
縮固った状態から後の移行過程	(IV) x = Const な面で y 方向へすべる場合	$ \tau_{xy} - \sigma_x \tan \phi_x = {}_1H_1$ ${}_1H_1 = {}_2C_{x,0} - C_{x,2} \sec \phi_x \int d\lambda_1$	${}_1b_1 = {}_1b = -\frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_2b_1 = \frac{1}{2} \tan \phi_x$
	(V) y = Const な面で x 方向へすべる場合	$ \tau_{xy} - \sigma_y \tan \phi_y = {}_2H_1$ ${}_2H_1 = {}_2C_{y,0} - C_{y,2} \sec \phi_y \int d\lambda_2$	${}_2b_2 = {}_2b = -\frac{1}{2} \tan \phi_y$ ${}_2b_1 = \frac{1}{2} \tan \phi_y$
	(VI) x = Const な面での y 方向へのすべりと y = Const な面での x 方向へのすべりとが同時に生じている場合	$ \tau_{xy} - \sigma_x \tan \phi_x = {}_1H_1$ ${}_1H_1 = {}_2C_{x,0} - C_{x,2} \sec \phi_x \int d\lambda_1$ $ \tau_{xy} - \sigma_y \tan \phi_y = {}_2H_1$ ${}_2H_1 = {}_2C_{y,0} - C_{y,2} \sec \phi_y \int d\lambda_2$	${}_1b_1 = {}_1b = -\frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_2b_1 = \frac{1}{2} \tan \phi_x$ ${}_2b_2 = {}_2b = -\frac{1}{2} \tan \phi_y$ ${}_2b_1 = \frac{1}{2} \tan \phi_y$



また締固った状態から後のルーズな状態への移行過程では

${}_2a_{ij}$ は (130) 式の場合と同様にとり、

$${}_2b_2 = \frac{2}{3}, \quad {}_2b_1 = {}_2b_3 = -\frac{1}{3}, \quad {}_2b = 1/3, \quad {}_2b_4 = {}_2b_5 = {}_2b_6 = 0$$

として

$$\begin{aligned} f_2(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| + 2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) \sigma_y = 2H_2(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) \\ d_2 \epsilon_y^P &= 2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) d\lambda_2 \\ d_2 r_{xy}^P &= \pm d\lambda_2 \\ d_2 \epsilon_y^P &= \frac{1}{3} 2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) d\lambda_2 = \frac{1}{3} d_2 \epsilon_y^P \\ d_2 \epsilon_s^P &= \frac{2}{3} \sqrt{\{2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P})\}^2 + \frac{3}{4} d\lambda_2^2} \\ &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{d_2 \epsilon_y^P}{d_2 r_{xy}^P}\right)^2 + \frac{3}{4} d_2 r_{xy}^P} \\ {}_2H_1(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) &= \pm \frac{d_2 \epsilon_y^P}{d_2 r_{xy}^P} \\ {}_2H_2(\int \overline{d_2 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_2 \epsilon_s^P}) &= |\tau_{xy}| \pm \frac{d_2 \epsilon_y^P}{d_2 r_{xy}^P} \sigma_y \end{aligned} \quad (132)$$

が得られ、節理面の凹凸を形成する面が平滑な平面と見做し得るときは

$$\begin{aligned} f_2(\sigma_{ij}) &= |\tau_{xy}| + \sigma_y \tan 2\phi_y = {}_2C_{y,0} - C_{y,2} \sec 2\phi_y \int d\lambda_2 \\ d_2 \epsilon_y^P &= \tan 2\phi_y d\lambda_2, \quad d_2 r_{xy}^P = \pm d\lambda_2 \end{aligned} \quad (133)$$

として取扱うことが出来る。

11.1.3 $x = \text{const}$ の面での y 方向のすべりと $y = \text{const}$ の面での x 方向のすべりとが同時に生ずる場合

この場合は 11.1.1 での取扱と 11.1.2 での取扱を組合せればよい。

以上を凹凸面が平滑な平面からなる場合を例にとって降伏条件式と諸係数の値を表に示せば表一 2 の如くであり、各種モデルに対応した場合の移行関係を図示すれば図-13 の如くである。

11.2 節理が斜交している場合の解析方法

2つの節理群の法線方向を夫々 α_1, α_2 とし、これに直交する方向を夫々 β_1, β_2 とする。こゝでは2次元問題とするので $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ はいずれも x, y 平面内にあるものとする。

今 α_1, α_2 が x 軸となす角を夫々 ϑ_1, ϑ_2 とする。

$\alpha_1 = \text{const}$ の面での降伏条件式は (125) 式と

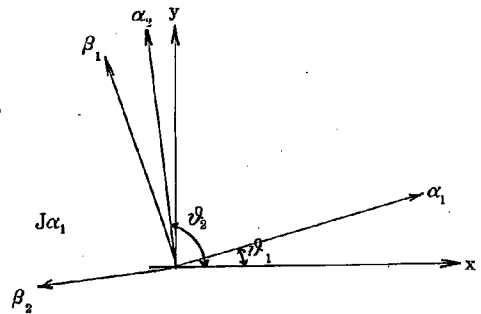


図 - 14

同様に

$$f_1(\sigma_{ij}) = |\tau_{a_1 \beta_1}| - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \sigma_{a_1} = {}_1H_2(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P})$$

にて表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_{a_1 \beta_1} &= -\sigma_x \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \sigma_y \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \tau_{xy} (\cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\vartheta_1 + \tau_{xy} \cos 2\vartheta_1 \\ \sigma_{a_1} &= \sigma_x \cos^2 \vartheta_1 + \sigma_y \sin^2 \vartheta_1 + 2\tau_{xy} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\vartheta_1 + \tau_{xy} \sin 2\vartheta_1 \end{aligned}$$

であるから, (110) 式において

$$\begin{aligned} {}_1a_{11} &= {}_1a_{22} = -{}_1a_{12} = \frac{1}{2} \sin^2 2\vartheta_1 \\ -{}_1a_{13} &= {}_1a_{23} = \frac{1}{2} \sin 4\vartheta_1 \\ {}_1a_{33} &= 2 \cos^2 2\vartheta_1 \\ {}_1a_{14} &= {}_1a_{15} = {}_1a_{16} = {}_1a_{24} = {}_1a_{25} \\ &= {}_1a_{34} = {}_1a_{35} = {}_1a_{36} = {}_1a_{44} = {}_1a_{45} \\ &= {}_1a_{46} = {}_1a_{55} = {}_1a_{56} = 0 \\ {}_1b_1 &= (\cos^2 \vartheta_1 - \frac{1}{2}), {}_1b_2 = (\sin^2 \vartheta_1 - \frac{1}{2}) \\ {}_1b_3 &= -\frac{1}{2}, {}_1b_4 = \frac{1}{2} \\ {}_1b_4 &= {}_1b_5 = 0, {}_1b_6 = +\sin 2\vartheta_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (133)$$

とおいたものになる。従って

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= |-(\sigma_x - \sigma_y) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \tau_{xy} \cos 2\vartheta_1| \\ &\quad - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) (\sigma_x \cos^2 \vartheta_1 + \sigma_y \sin^2 \vartheta_1 + \tau_{xy} \sin 2\vartheta_1) \\ &= {}_1H_2(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \\ d_1 \epsilon_x^P &= \{\mp \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \cos^2 \vartheta_1\} d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_y^P &= \{\pm \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \sin^2 \vartheta_1\} d\lambda_1 \\ d_1 \tau_{xy}^P &= \{\pm \cos 2\vartheta_1 - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \sin 2\vartheta_1\} d\lambda_1 \\ d_1 \epsilon_s^P &= -\frac{1}{2} {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) d\lambda_1 = \frac{1}{2} (d_1 \epsilon_x^P + d_1 \epsilon_y^P) \\ d_1 \epsilon_s^P &= \frac{2}{3} \sqrt{\{ {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) \}^2 + \frac{3}{4}} d\lambda_1 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(d_1 \epsilon_x^P + d_1 \epsilon_y^P)^2 + \frac{3}{4} \{ (d_1 \epsilon_x^P - d_1 \epsilon_y^P) \sin 2\vartheta_1 - d_1 \tau_{xy}^P \cos 2\vartheta_1 \}^2} \\ {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) &= \mp \frac{d_1 \epsilon_x^P + d_1 \epsilon_y^P}{-(d_1 \epsilon_x^P - d_1 \epsilon_y^P) \sin 2\vartheta_1 + d_1 \tau_{xy}^P \cos 2\vartheta_1} \\ {}_1H_2(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) &= |-(\sigma_x - \sigma_y) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \tau_{xy} \cos 2\vartheta_1| \\ &\quad - {}_1H_1(\int \overline{d_1 \epsilon_s^P}, \int \overline{d_1 \epsilon_s^P}) (\sigma_x \cos^2 \vartheta_1 + \sigma_y \sin^2 \vartheta_1 + \tau_{xy} \sin 2\vartheta_1) \end{aligned} \quad (134)$$

となる。

以下縮固った状態から後のルーズな状態への移行過程では

$${}_1b_1 = -(\cos^2 \vartheta_1 - \frac{1}{3}), \quad {}_1b_2 = -(\sin^2 \vartheta_1 - \frac{1}{3}), \quad {}_1b_3 = \frac{1}{3}, \quad {}_1b = -\frac{1}{3}$$

と変えればよい。

また $\alpha_2 = \text{const}$ の面でのすべりのときは $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_2$ に変えればよい。この方法は x, y 軸が直交している節理面と一致していない場合にも適用し得る。

なお、節理面の凹凸が平滑な平面から成っていると見做し得るときは、

$${}_p H_1 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) = \mp \tan \phi_{av}$$

$${}_p H_2 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) = {}_p O_{av,0} \pm O_{av} \sec \phi_{av} \int d\lambda_p$$

とすればよい。

12. 粒 状 体 の 解 析

粒状体の場合、個々の粒子の形如何によっては局部的に方向性を持っている場合はあり得る。しかし巨視的にみれば局部的な方向性も入り乱れて存在し、大局的には等方性体と見做してもさしつかえないと考えられる。

等方性体の降伏条件式としては G, ϕ 材料では Drucker の降伏条件式が数学的取扱が容易で、中間主応力の影響がない場合でもかなりの近似度をもっていることを前章で述べた。そこで (113) 式が用い得るとして以下論を進めることにする。

(113) 式において H_1, H_2 に係数を含ませて考えれば

$$A_p = 1 \quad B_p = \frac{1}{3}$$

とおくことが出来るから

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= (J_2')^{1/2} + H_1 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) \sigma = H_2 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) \\ \begin{bmatrix} d\varepsilon_x^P \\ d\varepsilon_y^P \\ d\varepsilon_z^P \\ d\gamma_{yz}^P \\ d\gamma_{zx}^P \\ d\gamma_{xy}^P \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} H_1 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} d\lambda \\ d\varepsilon_p^P &= \frac{1}{3} H_1 (\int \overline{d\varepsilon}_p^P, \int \overline{d\varepsilon}_s^P) d\lambda \\ \overline{d\varepsilon}_s^P &= \frac{1}{\sqrt{3}} (d\lambda) \end{aligned} \quad (135)$$

となる。

こゝで H_1, H_2 の関数形が問題となる。

一般に粒状体の試験においては降伏条件に着目した試験はほとんど行われていない。これはこれらの材料はいずれもはっきりとした降伏点を示していないからである。しかし、降伏条件は数学的には降伏が生じ始める時の応力条件という意味の他に、降伏或はすべりが生じているときの応力に対する制約条件という意味を持っており、すべりが生じているとき、(135)に示すようなすべり歪増分を示すとするならば、すべり歪増分を測定し、これからすべりが生じているときの応力の制約条件を求め得る筈である。

一般に三軸圧縮試験では軸圧縮力の作用する方向の変位と体積変化が測定され、一面せん断試験ではせん断変位とせん断面に垂直な方向の変位とが測定されている。そこでこれらを用いて H_1, H_2 を求める方法を検討してみよう。

先ず三軸圧縮試験について考察する。

$$d\epsilon_x^p = \left\{ \frac{1}{2} (J_2')^{-1/2} \sigma_x' + \frac{1}{3} H_1 (\int d\epsilon_s^p, \int d\epsilon_s^p) \right\} d\lambda$$

$$d\gamma_{yz}^p = (J_2')^{-1/2} \tau_{yz} d\lambda$$

$$d\epsilon_{ii}^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = H_1 (\int d\epsilon_s^p, \int d\epsilon_s^p) d\lambda$$

$$\therefore d\epsilon_x^p = \frac{1}{3} (J_2')^{-1/2} \sigma_x' d\lambda$$

$$H_1 (\int d\epsilon_s^p, \int d\epsilon_s^p) = \frac{\sigma_x' d\epsilon_{ii}^p}{2 (J_2')^{1/2} d\epsilon_x^p}$$

$$\overline{d\epsilon_s^p} = \frac{1}{3} d\epsilon_{ii}^p$$

$$\overline{d\epsilon_s^p} = \frac{1}{\sqrt{3}} d\lambda = \frac{2(J_2')^{1/2}}{\sqrt{3} \sigma_x'} d\epsilon_x^p$$

であるから

$$H_1 \left(\frac{1}{3} \int d\epsilon_{ii}^p, \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{(J_2')^{1/2}}{\sigma_x'} d\epsilon_x^p \right) = \frac{\sigma_x' d\epsilon_{ii}^p}{2 (J_2')^{1/2} d\epsilon_x^p}$$

$$H_2 \left(\frac{1}{3} \int d\epsilon_{ii}^p, \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{(J_2')^{1/2}}{\sigma_x'} d\epsilon_x^p \right) = \frac{\sigma_x' d\epsilon_{ii}^p}{2 (J_2')^{1/2} d\epsilon_x^p} + (J_2')^{1/2}$$

(136)

が得られる。

従って同一の材料について軸圧縮力と側圧を変えた試験を行い、各応力段階における軸方向偏差歪増分 $d\epsilon_x^p$ と体積変化率 $d\epsilon_{ii}^p$ を求め、これらの値に適合する H_1, H_2 の関数形を定めればよいことになる。

粒状体にも表一に示すような状態の移行過程が考えられる。この場合に締固った状態における弾性的な領域が比較的広く存在するときは初めのルーズな状態から締固った状態への移行

過程と、縮固った状態から後のルーズな状態への移行過程とに分けて H_1, H_2 を求め、どのような条件のもとに $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV$ へと移り変って行くかを調べる必要があるが、縮固った状態における弾性領域がせまく、無視し得る程度であれば全領域を通じて適合する H_1, H_2 を求め解析してもさしつかえないと考えられる。

次に一面せん断試験について考察しよう。

$$d\lambda = \frac{(J_2')^{1/2}}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p$$

であるから、

$$H_1 \left(\int d\bar{\epsilon}_s^p, \int d\bar{\epsilon}_s^p \right) = \frac{3\tau_{xy} d\epsilon_x^p}{(J_2')^{1/2} d\gamma_{xy}^p} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_x'}{(J_2')^{1/2}}$$

$$d\bar{\epsilon}_s^p = d\epsilon_x^p - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x'}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p$$

$$d\bar{\epsilon}_s^p = \frac{1}{\sqrt{3}} d\lambda = \frac{(J_2')^{1/2}}{\sqrt{3} \tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p$$

となり

$$\begin{aligned} H_1 \left(\int d\epsilon_x^p - \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_x'}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p, \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{(J_2')^{1/2}}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p \right) &= \frac{3\tau_{xy} d\epsilon_x^p}{(J_2')^{1/2} d\gamma_{xy}^p} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_x'}{(J_2')^{1/2}} \\ H_2 \left(\int d\epsilon_x^p - \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_x'}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p, \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{(J_2')^{1/2}}{\tau_{xy}} d\gamma_{xy}^p \right) & \\ = \frac{3\tau_{xy} d\epsilon_x^p}{(J_2')^{1/2} d\gamma_{xy}^p} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_x'}{(J_2')^{1/2}} + (J_2')^{1/2} & \end{aligned} \quad (137)$$

が得られる。従って同一材料について垂直荷重を変えて試験を行い、垂直方向直徑増分 $d\epsilon_x^p$ とせん断歪増分 $d\gamma_{xy}^p$ を各応力段階で求め、これらの値に適合する H_1, H_2 の関数形を定めればよいことになるが、実際には一面せん断試験においては応力分布が不均一で $\sigma_x', \tau_{xy}, J_2'$ 等が求め難く、その上一般にせん断面に垂直な変位とせん断変位とが測定され、 $d\epsilon_x^p, d\gamma_{xy}^p$ が直接測定されていないので、応力は平均化した値を用い、変位はせん断面をはさんだ適当な巾（平均粒径との関係で考えるべきであろう）の部分で生じていると仮定して $d\epsilon_x^p, d\gamma_{xy}^p$ を求め、(137) 式から H_1, H_2 の関数形を求め有限要素法の弾塑性解析により反復して修正する必要がある。従って一面せん断試験のときは H_1, H_2 を定めるのにかなり複雑な手続を要することになる。

粒状体の場合には初めの状態により各段階での降伏条件がどのような対応を示すか、また縮固った状態は材料により固定されたものでなく、初めの状態のみならず応力の履歴にも強く影響されることが考えられるが、その対応関係がどのように表わされるか、平均粒径、粒度分布との関係等、極めて興味深い問題であるが、これらは今後の研究課題であろう。