

土 木 研 究 所 資 料

Technical Memorandum of the Public Works Research Institute

№ 529

有限要素法による固有値の解析について

On the Modal Analysis
in Finite Element Method

昭和44年8月

August 1969

建設省土木研究所

The Public Works Research Institute

Ministry of Construction

TM-53.FT-6.F-706

まえがき

本小文は二次元弾性体に対する有限要素法を用いた地震応答解析の方法を論じたものである。特に固有振動解析につき、プログラム骨子ならびに実施した演算結果を紹介する。

昭和44年8月

建設省土木研究所振動研究室

栗 林 栄 一

岩 崎 敏 男

TM-53.FT- 6.F- 707

On the Modal Analysis in Finite Element Method

by Eiichi Kuribayashi* and Toshio Iwasaki**
Proceedings of 3rd Meeting on Matrix Method
of Structure Analysis, JSSC, May, 1969

Synopsis:

A method of analysis of the earthquake responses of idealized 2-dimensional elastic bodies is presented. The outline of the method is as follows:

- 1) Structural idealization by finite element technique-----The number of maximum nodal points is 75, in this case the model is of 150-degree of freedom. The shapes of elements are triangles or rectangles.
- 2) Determination of the element properties-----Ten sets of stress-strain relationship or density are considered.
- 3) Modal analysis of the model-----Eigenvalues and eigenvectors are calculated by Jacobi's method.
- 4) Evaluation of the response during earthquakes-----Both statistical maximum response due to the average response spectra and precise response history when subjected to ground accelerations are calculated by modal superposition.

Some modal analyses were performed to evaluate the response of earth dams during earthquakes. The results obtained are shown to be in good agreement with those shown by the former investigators.

* Chief of Earthquake Resistant Structure Section, the Public Works Research Institute, Ministry of Construction.

** Research Member, ditto.

TM-53.FT- 6.F- 708

有限要素法による固有値の解析について

栗 林 栄 一 ※
岩 崎 敏 男 ※※

1. ま え が き

構造解析における Virtual Work の原理は 1717 年に発表された Jean Bernoulli の研究にその端を発しており、最も基本的でありかつ最も普遍的な原理であるといえる。その後輩出した構造解析の理論の多くは Virtual Work の原理に立脚しているものである。この原理を適用する場合、便宜上、互換性のあるつぎの二つの原理に区分する習慣となっているが、両者は表裏一体であるといえる。

Virtual Displacement の原理

Virtual Force の原理

一方、第二次大戦後の電子計算機の開発と普及にともなって実用化されてきた、いわゆるマトリックスによる構造解析法は、Virtual Work の原理を熔融して組み立てられた整然とした手法である。構造物に作用する外力とそのときに生ずる変位の関係を表わすために、三つの独立したマトリックスを用いている。その一つは内部応力と内部歪の関係を表わす独立したマトリックスであり、またその応力-歪関係を矛盾の起らない範囲で非線型の範囲にも適用しうる便利さが高く評価される。

さらに、その内容とは別の角度からみると、その手順の明快さと表現の簡潔さは、われわれ技術者にとってまことに有難いことであるといわなければならない。

本報告においては、土木研究所の他の研究部（ダム部ダム構造研究室）において開発された二次元問題における静的解析法を、著者らが二次元の固有値問題に拡張した結果について、二・三の試算例を混えて報告する。

有限要素法による動的問題においては、広義の減衰作用の評価法について議論すべきところが多いと考えているが、まだそれを具体的に議論する段階に著者らは達していない。しかし固有ベクトルの直交性に着目して導かれる Cauchy 数列による減衰、弾性波動による逸散性の減衰、さらに剛性低下に起因する場合などの導入も必要であると考えている。

今回は、特に共通の目的を持っているわけではない二つの研究部の間において、きわめて手際よく電算プログラムにおける既成の Matrix Form の収受が、十分の理解のもとに行われたことを御理解下されば幸いである。この事実はマトリックスによる構造解析法の汎用性を立証するものであり、また本方法の発展性を妨げない範囲で統一化した表現法のもとに、電算プログラムの相互利用の促進を示唆するものである。

2. 運動方程式と解析の基本概念

(1) 運動方程式

有限要素モデルの地震時における $x-y$ 平面内での運動方程式は、周知のごとく次式で表わされる。(1), (2)

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = -\{R(t)\} \quad (1)$$

ここに

- $[M]$: 質量マトリックス
- $[C]$: 粘性減衰マトリックス
- $[K]$: 剛性マトリックス
- $\{r\}$: 節点変位のベクトル
- $\{R(t)\}$: 地震荷重ベクトル

※ 建設省土木研究所振動研究室、室長 ※※ 同、研究員

TM-53.FT-6.F-709

であり、 t は時刻、 $\dot{r}$ および $\ddot{r}$ は t に関する一回および二回微分を示す。地震荷重は一般に次式で与えられる

$$\{R(t)\} = -\{M_x\}\ddot{z}_x(t) \text{ または } -\{M_y\}\ddot{z}_y(t)$$

ここに、

$$\{M_x\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ 0 \\ \vdots \\ M_n \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{M_y\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ 0 \\ M_n \end{Bmatrix}$$

但し M_i : 節点 i に集中する質量
 n : 全節点数

$\ddot{z}_x(t)$: 水平動 (x 方向) の地動加速度

$\ddot{z}_y(t)$: 鉛直動 (y 方向) の地動加速度。

有限要素モデルの地震応答解析は一般には(1)式を直接数値積分することによって実施できるが、我々が今回取り扱う二次元弾性体の面内振動の解析においては、下記の固有振動解析にもとづくモーダル・アナリシス手法によるものとする。もとよりこの方法はベクトルと位相からみれば現象に忠実であるとはいえないが、演算時間を短縮できかつ解が比較的安定しているという利点を有しているため、この種の解析においてはしばしば利用されている。

(2) 固有振動解析

固有振動の解析においては、いうまでもなく(1)式の外力 $\{R(t)\} = 0$ とおき、さらに粘性減衰 $[C]$ を無視する。すなわち(1)式は、つぎの(2)式となる。

$$[M]\{\ddot{r}\} + [K]\{r\} = 0 \quad (2)$$

ここで節点変位を

$$r(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-ip^2 t} \quad (3)$$

但し、 p : 固有円振動数、 ϕ : 固有ベクトル

とおき、これを(2)式に代入すると、

$$[K - p^2 M]\{\phi\} = 0 \quad (4)$$

が得られる。変位 r が 0 以外の値を取るための条件として、

$$|K - p^2 M| = 0 \quad (5)$$

が得られる。これは p^2 (これを固有値という) に関する $2n$ 次 (n : 節点数) の固有方程式で、 $2n$ 箇の固有値を与える。この結果を(4)式に代入すると $2n$ 元の連立一次方程式が $2n$ 組得られ、これらを独立に解いて固有ベクトル ϕ を求める。しかし電子計算機を用いる演算にあたっては、(4)式から直接固有値と固有ベクトルを同時に求める方法 (Jacobi の回転法など) を用いる場合が多い。

(3) 地震応答解析

(1)式を解く一つの方法として、ここでは固有振動解析結果にもとづくモーダル・アナリシス法による地震応答解析の基本概念を示す。いま節点変位を

$$\{r\} = [\phi]\{Y\} \quad (6)$$

但し $\{\phi\}$: 固有ベクトルのマトリックス

$\{Y\}$: 各モードの振巾を示す時間関数

とおき、これを(1)式に代入して整理すると、

$$\ddot{Y}_r + 2h_r \dot{Y}_r + p_r^2 Y_r = \frac{P_r^*(t)}{M_r^*} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } M_r^* &= \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} \\ p_r^2 M_r^* &= \{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\} \\ 2h_r p_r M_r^* &= \{\phi_r\}^T [C] \{\phi_r\} \\ P_r^* &= -\{\phi_r\}^T [M_x] \ddot{z}_x(t) - \{\phi_r\}^T [M_y] \ddot{z}_y(t) \end{aligned}$$

となる。ここでサフィックス r は r 次モードに対する諸量を示し、 h は粘性減衰定数（臨界減衰に対する比）である。

式(7)で示される $2n$ 箇の独立な微分方程式を解き、 $\{Y_r\}$ を求めて、さらに(6)式から各節点の変位 $\{r_r\}$ を求めて、これらをモードに関して合成することによって応答値を算定する。各要素の歪・応力なども同様の手順で計算しうる。

3. 各種マトリックスの算定

(1) 質量マトリックス $[M]$

有限要素の各節点に集中する質量系を仮定する。ある節点の質量は、当該節点に関連する全ての要素から供給されるものとし、各要素においてはその質量を当該要素がもつ節点数で除して関係する節点に均等に配分する。質量マトリックス $[M]$ は

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_1 & & & \\ & & M_2 & & 0 \\ & & & M_2 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & M_n \\ & & & & & & M_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

なる $2n$ 元の対角マトリックスで表わされる。ここで、 M_i は節点 i における質量を示し、 n は全節点数を示す。

(2) 粘性減衰マトリックス $[C]$

粘性減衰マトリックスをいかなる形で与えれば最も合理的であるかについては現在のところ定説がない。仮りに何らかの形で与えることができたとしても、それが対象とする構造物に対して適切であるか否かの検証が難しい。このことは(1)式を直接解析することの困難性の一因ともなっている。しかしここではモーダル・アナリシス法によるため、粘性減衰マトリックス $[C]$ を直接与える代りに、(7)式の h_r の形で構造物の減衰効果を見込むことができる。減衰定数 h は物理的意味がある程度明確であり、現実の構造物に関して実測も可能な量である。このような手法によれば、ベクトルと位相は共に(1)式を近似的に満足するにすぎないことになる。

減衰定数 h と粘性減衰マトリックス $[C]$ との関係は、今後明らかにしていきたい問題点の一つである。

(3) 剛性マトリックス $[K]$

剛性マトリックスは

$$[K] = [a^T] [K_e] [a] \quad (9)$$

ここで、 $[K]$: 系全体の剛性マトリックス

$[K_e]$: 要素の剛性マトリックス

$[a]$: 変位変換マトリックス

で与えられ、 $2n$ 元 (n : 節点数) の正方マトリックスである。本マトリックスの作成にあたっては、当所ダム構造研究室が開発した二次元弾性体の静的応力計算プログラムになった。⁽³⁾

4. 電算プログラムと試算例の紹介

(1) 電算プログラム

解析プログラムの基本事項を表-1に示す。本プログラムは固有振動解析、静的計算および地震応答計算に大別されるが、その概要を示すと下記のとおりである。

- (a) 最大節点数: 75、最大自由度: 150、
- (b) 最大要素数: 150、要素形状: 三角形および四角形
- (c) 応力-歪関係: 10種
- (d) 固有値解析: 150次までの固有値と正規固有ベクトル——Jacobi の回転法
- (e) 静的応答計算: 静的外力・静的加速度による変位・応力の計算——消去法
- (f) 地震応答計算: 応答スペクトルを用いた最大応答ならびに地震加速度波形を用いた各時刻の応答の計算——モーダル・ナリンス法

(2) 試算例

図1~4に現在までに試みた固有振動解析の演算結果の一部を示す。これらの演算はすべてIBMシステム/360、モデルI75を用いて行ったが、演算時間の実績を図5に示しておく。これらの試算結果から、次の事柄が指摘される。

- (a) Clough らの例にもあるように、固有周期の値は剪断または曲げによる理論値よりやや大き目となる。
- (b) 振動モード (固有ベクトル) は剪断変形と伸縮による変形を重畳したものとなる。
- (c) 固有値・固有ベクトルの演算の精度は、応力度の解析を行う場合に比べてかなり粗い分割法によっても、相当程度保たれることが予想される。
- (d) 演算時間は、Jacobi の回転法によれば、自由度の低いところでは自由度に比例し、自由度が大きい場合には自由度の3乗に比例する。実際問題では3乗に比例すると考えてよいであろう。

5. あとがき

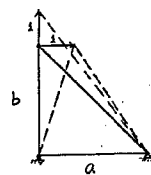
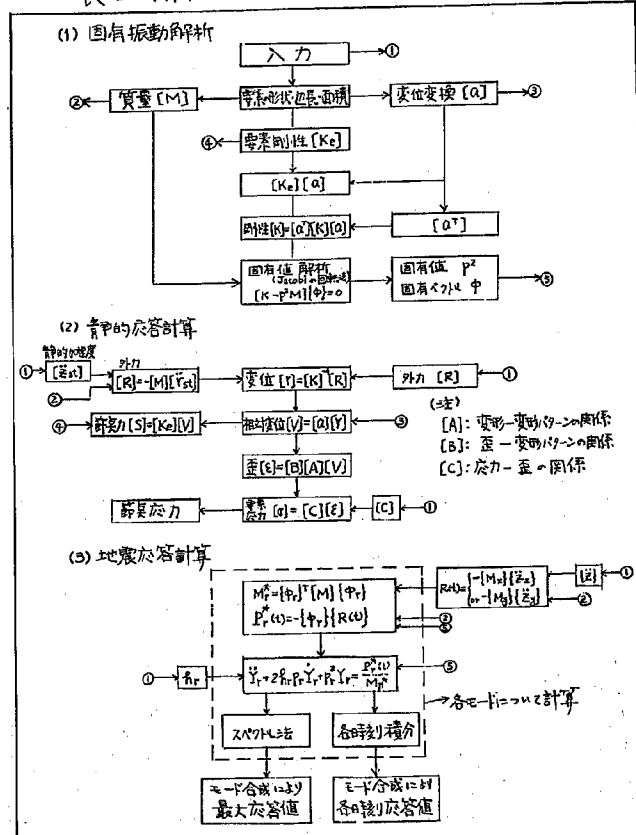
有限要素法を利用して構造物の二次元平面内における地震時の挙動を解析するための電算プログラムを作成した。また先進諸家の指摘するものとはほぼ同じ結果を得た。さらに今後の問題として次の諸点について解決を図っていくべきであろう。(a)物理座標に対する直接積分(すなわち(1)式の積分)、(b)減衰マトリックス〔 C 〕の与え方とその物理的な意味づけ、(c)非線型構造物に対する〔 K 〕、〔 C 〕のとり方、(d)三次元問題ならびに波動伝播などを考慮した場合の演算の可能性。これらについては順次検討を重ね、より忠実な構造物の地震応答解析法を確立していきたいと考えている。

6. 参考文献

- (1) R. W. Clough: The Finite Element Method in Structural Mechanics, Stress Analysis, Edited by C. C. Ziekiewicz and G. S. Holister, John Wiley & Sons, Ltd, London, 1965
- (2) R. W. Clough and A. K. Chopra: Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Proc. of ASCE, EM2, April, 1966
- (3) 飯田隆一・小林茂敏: 弾塑性理論における有限要素法、建設省土木研究所, 昭和43年3月。

TM-53.FI-6.F-712

表-1 解析プログラム概略



Case	a (cm)	b (cm)	1次固有周期 T ₁ (sec)	2次固有周期 T ₂ (sec)
1	1	1	0.0259	0.0150
2	1	2	0.0318	0.0299
3	1	3	0.0777	0.0449
4	2	1	0.0259	0.0150
5	3	1	0.0259	0.0150

条件
平面座
ヤング率 $E=10000 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比 $\nu=0.25$
節点数 $P=3$
要素数 $Q=1$
自由度 2

図.1 三角形モデル

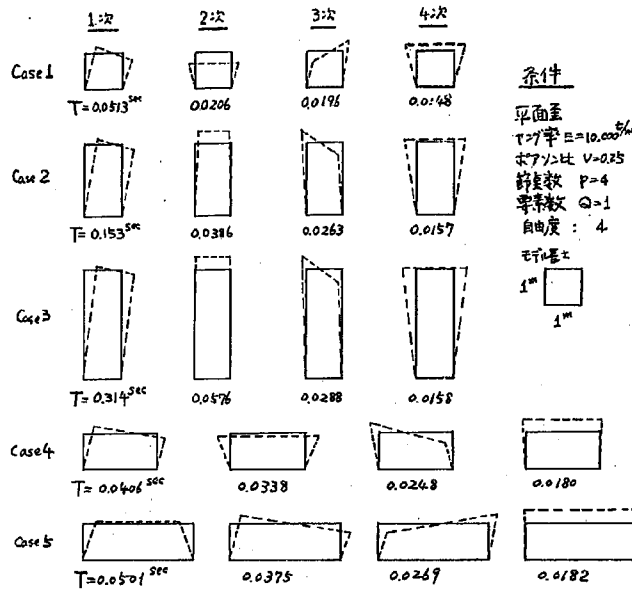


図.2 四角形モデル

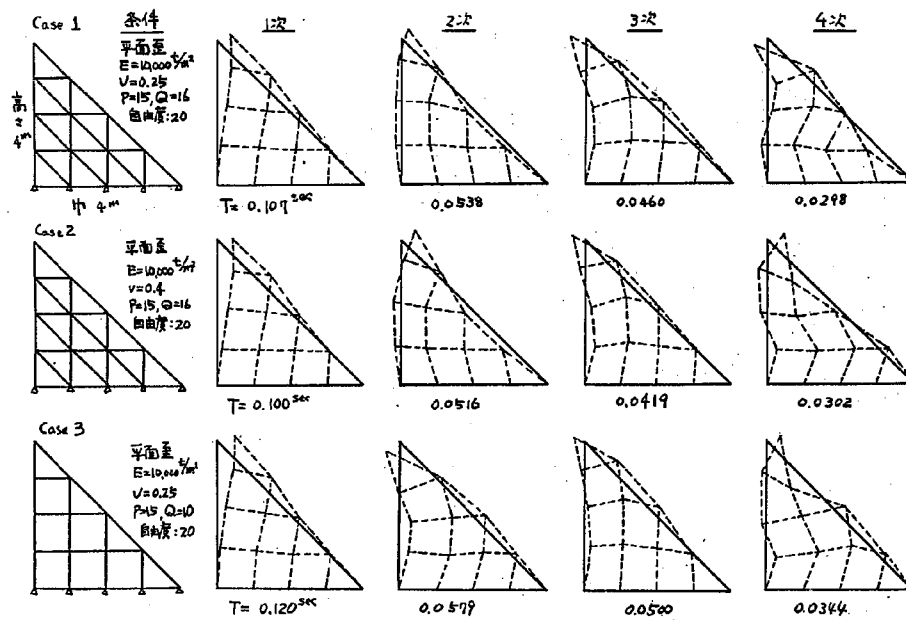
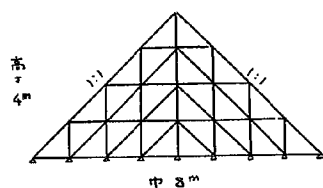


図.3 楔状モデル



条件
平面型
ヤング率 $E = 10,000 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比 $\nu = 0.25$
節点数 $P = 25$
要素数 $Q = 32$
自由度 32

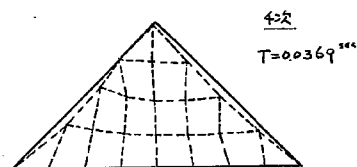
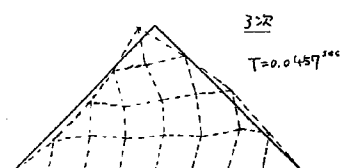
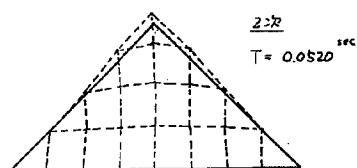
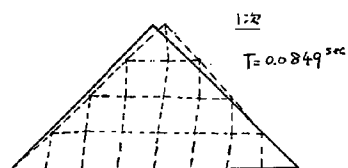


図.4 フィルタイプラジウムモデル

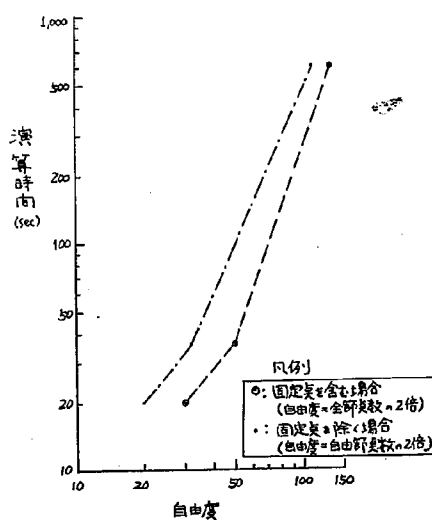


図.5 モデルの自由度と演算時間の関係

TM-53.FT-6.F-715