



土 木 研 究 所 資 料

第 5 4 6 号

有限要素法による盛土等の内部応力
変形解析

昭 和 4 4 年 1 1 月

建 設 省 土 木 研 究 所

目 次

まえがき	1
第1章 2次元問題における有限要素法	2
§ 1 はじめに	2
§ 2 有限要素法解析の方法	3
§ 3 応力法と変形法	4
§ 4 有限要素の変形々式	6
§ 5 有限要素の剛性解析	7
§ 6 要素の剛性計算	9
§ 7 集積剛性マトリクス	14
§ 8 連立方程式の解法	20
§ 9 コンピュータープログラム (B02909)	24
§ 10 盛土体への応用解析例	32
1 Airyの応力函数による解析	32
2 有限要素法による解析	33
3 解析に当っての問題点	44
§ 11 資 料	48
§ 12 非線型問題への応用 (B02910)	53
第2章 軸対称問題への応用	61
§ 1 まえがき	61
§ 2 コンピュータープログラム (B02911)	62
§ 3 応用解析例	69
1 地中応力解析	69
2 三軸試験への適用	78
あ と が き	82
参 考 文 献	83
付 録	84

ま え が き

道路事業調査費「盛土の安定性に関する試験調査」において、粘性土を材料とする盛土体の圧縮沈下量や不等沈下量等の推定に関する調査を行なっているが、その過程で盛土体内部の応力変形解析の必要性を生じてきた。応力解析は圧縮沈下のみならず法面のスベリ安定性の検討にも極めて重要な事柄であるが、従来これに関する解析手段は均一な半無限体に対する弾性理論の適用（Airyの応力函数等の適用）が考えられる程度でこの方法も盛土等の実際問題には適用し難い面を持っていた。ところで近年における電子計算機の発達と共に、連続体構造解析においてクローズアップされてきた有限要素法（Finite Element Method）は、このような問題に関してかなりすぐれた適応性を示す。有限要素法では均一構造体はもちろん非等方性材よりなる不均一構造体についてもある程度任意の境界条件にて解析でき、さらに任意の物性（弾性、弾塑性、粘性等……）を含ませることができると思われる。

ここに述べる報文は、有限要素法の概要を紹介し、これを用いた盛土等の内部応力、変形の解析結果を報告するものである。

昭和44年11月

施工研究室

伊勢田 哲也

島津 晃臣

田中 俊彦

佐藤工業 K.K.

西山 多見夫

第一章 2次元問題における有限要素法

§1 はじめに

有限要素法(The Finite Element Method)は、電子計算機の発達により発展してきた構造解析法である。この方法は、計算を機能的にできる、という点でマトリックス変換理論をその背景にもつ。

有限要素法の基本概念は「すべての構造物は、個々の要素(あるいは成分)の集合体で表わされる。そして構造物はそれらの要素の有限個から成り、有限個の節点で接続されている」と考えることに始まる。従って構造解析は代数連立方程式(即ちマトリックス)を解くことにより行なうことができる。更に連続体の力学問題から構造組織を消去できる。

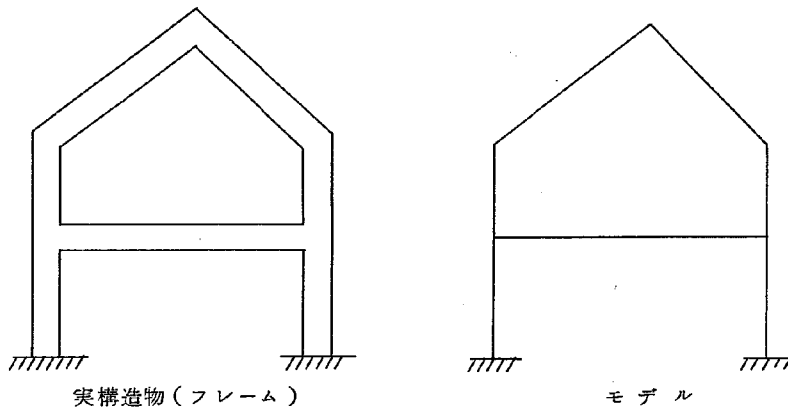


図 1-1-1 一次元の場合

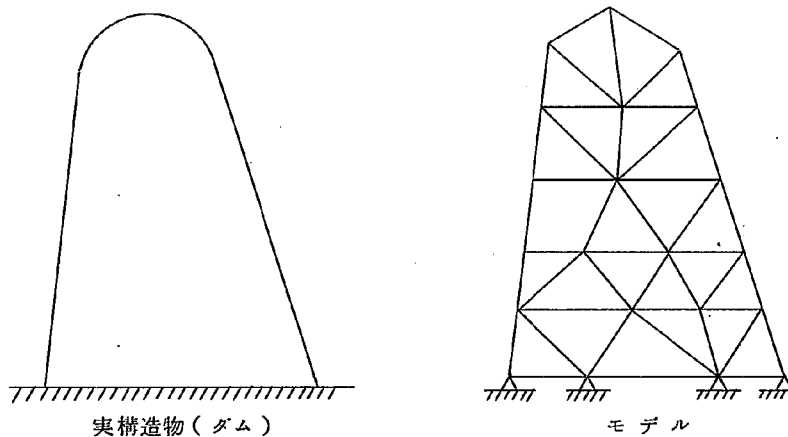


図 1-1-2 二次元の場合

図 1-1-1 に示す様に「要素の集合体」という概念は普通の構造物に、ごく自然に適用される。この場合の構造要素は、単純バリ、柱、ケタである。この場合は一次元であるが二次元、三次元の構造物の解析にも適用できる。二次元ないし三次元の構造物の場合（図 1-1-2）のモデル化は単に原型の連続体を適当な大きさ、形を有する要素に分割することにより行なうことができる。原型における材料の特性は各々の要素において保有させる。例えば、原型の材料が等方弾性体、非弾性あるいは弾塑性であるなら、それに応じて各要素にそれらの特性を保有させることができる。この様に有限要素法は、材料の特性を任意に取りうる、という非常に便利な特色を持っている。

§ 2 有限要素解析の方法

弾性体の有限要素法による解析は次の三つの段階に分けられる。

- (i) 構造物のモデル化（要素に分割すること）
- (ii) 要素の性質の算定
- (iii) 要素集合体の構造解析

- (i) 構造物のモデル化とは、単に原型を個々の要素から成る集合体に分割することである。この分割は注意して行なわなければならない。なぜなら解析作業は、この分割された集合体に対して行なわれ、その結果で原型構造物の応力、その他を求めるからである。しかしこのモデル化は一般にさほど困難なことではない。一般に比較的粗な分割によっても、かなり良い結果が得られる。しかし分割は細かくすればする程精度はあがる。
- (ii) 要素の特性の算定は、有限要素法における最も重要な事項であり、後に詳しく述べる。物理的には要素の剛性 (Stiffness) あるいは靱性 (Flexibility) を求めることである。各要素は有限個の節点で接続しているから、一つの要素の弾性的な性質は節点に働く力と、それにより生ずる変形の二つで表わされる。この力と変形の関係は剛性マトリックス、あるいは靱性マトリックスを使用すると、非常に便利に表わされる。

$$(\text{力}) = (\text{バネ}) \times (\text{変形})$$

の考えの (バネ) に相当するのが剛性である、と考えるとわかり易いであろう。例えば図 1-2-1 の一次元の場合を考えてみると

$$P = K u \dots\dots\dots (1-2-1)$$

であり

$$K = \frac{P}{u} = \frac{E \cdot A \cdot \frac{u}{l}}{u} \text{ より}$$

$$K = \frac{AE}{l} \dots\dots\dots (1-2-2)$$

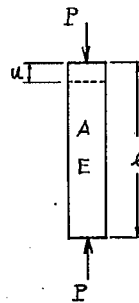


図 1-2-1

となりこの K が剛性となる。剛性マトリックスの誘導は後に述べる。

(iii) 要素の性質がわかったら次はこのモデルについて与えられた荷重条件の下に生ずる応力と変形の解析を行なう。これは通常の構造解析の問題と同じである。即ち本質的な問題は次の三つの事項を同時に満足することである。

(a) 力の釣合式；

各節点に働く内力は、その節点に働く外力と釣り合うこと。

(b) 適合条件式；

各要素の変形状態は、あらゆる節点において適合条件式を満足すること。

(c) 力と変形の関係式；

各要素の内力及び内部変位は、個々の要素の幾何学的な拘束及び材料に基づく要求を満足すること。

以上(i)、(ii)、(iii)の三つの事項は、力の方法（応力法）、あるいは変位の方法（変形法）のいずれの構造解析においても満足されなければならないのは当然である。

§3 応力法と変形法

静定構造の解法で最も一般的に行なわれるのは先ず荷重による支点反力を計算し、さらに断面力、たわみ等を計算する方法である。不静定構造の解法でも、これと同様な方法がとられることが多い。即ち先ず不静定力を適当に選び、外力とこれらの不静定力との作用のもとで静定基本系の変形が、もとの不静定構造物の変形の条件と合致する様に不静定力の大きさを決定する。こうして不静定力が求めれば、断面力、変形はこれら不静定力を荷重と考えることにより、静定構造におけると同様に釣合いの条件から決定することができる。この様な方法を総称して応力法という。従って応力法による不静定構造の解析では、不静定力を未知量とする連立1次方程式を解く必要がある。

変形法による構造物の解法では、応力法とは逆に、各節点の変位を未知量にとる。初等的な変形法の解析では先ず断面力を部材の変形量の函数として表わし、各節点における力の釣り合い条件から、変形量を未知量とした方程式を作り、これを解いて、まず変形量を求める。変形量から断面力、断面力から反力を求める。即ち応力法におけると逆な計算過程をとるのである。一般に応力法を用いた場合の連立1次方程式の未知量の数は、変形法で解く場合の未知量の数とは一致しない。これは、応力法では不静定力を未知量に取るに反し、変形法では構造物の自由度という考え方を基礎としているからである。構造物の自

自由度とは、構造物が外力の作用をうけて変形する際に、その変形を表わす為に最小限必要な量の数である。自由度を決定するには、構造物にあらゆる変形状態を想定し、その変形を決定するに必要な量の数を求めればよい。変形法はこのように、自由度の数で与えられる変形量を未知量にとり、構造物の解析を進める方法といえよう。この場合、構造物の種類、形及び外力の作用の仕方により、構造物の変形にある一定の拘束がある場合、あるいは構造物のある部分における荷重と変形量との関係が既知の場合には、それだけ未知量の数即ち、自由度が少なくなったものと考えて解析を進めることが可能である。

弾性方程式による不静定構造の一般解法、最小仕事の原理の応用、3連モーメント式の応用等は応力法であり、撓角法は変形法の1つである。

ある構造物を解析する場合、応力法によるか変形法によるかは、その構造物の種類、形、および外力の状態などにより判断すべきである。従来は連立方程式の未知量の数が、できるだけ少なくなる様な解法が実用的であるとされていたが、最近では高速電子計算機の発達により多くの未知数を持つ連立一次方程式も容易に解くことが可能になった。従って連立一次方程式の未知数の数より方程式を作る場合の容易さが問題となる。この意味から最近では変形法による解法が多く用いられる様になった。それ故、ここでも変形法により解くことにする。

変形法（変位の方法）の基本操作は次の通りである。

- (a) 個々の構造要素の剛度算定；便利な場所ごとの局部的座標系で表わされる。
- (b) 局所の座標表現から、要素集合体の全体的な座標系に変換する。
- (c) 全集合体の節点における剛性マトリックス $[K]$ を得るため、各節点に対する個々の要素の剛性を重ね合わせる。
- (d) 釣合式の表示とその解析

節点作用力 $\{R\}$ と、それによる節点変位 $\{v\}$ との関係を示したもので

$$\{R\} = [K] \{v\} \dots\dots\dots (1-3-1)$$

で表わされる。変位の方法の利点は構造物の剛性マトリックス $[K]$ が、一般にまばらにしかなく 0 が多い、ということである。

- (e) 力学的な関係より計算された節点の変位量から、要素の変形量の算定を行なう。そして最終的には、この変位量を剛性マトリックスに代入して、要素に作用する力を求める。

以上が変位の方法による構造解析の一般的な手法である。有限要素法の特色は、任意の二次元あるいは三次元の剛性特性を有する構造物の解析を行ないうる、という点にある。

§ 4 有限要素の変形々式

図 1-1-1 において成分の弾性的性質の計算は容易に行なえる。例えば、真直ぐなハリの靱性は、構造物からその部材だけ切離して両端単純支持の条件のもとに、単位の端モーメントを作用させた時の端において生ずる回転角を計算すれば求められる。一方、剛性は端に単位の回転角を与えた時に生ずる端モーメントを計算すれば求められる。この方法は一次元の成分の剛性あるいは靱性マトリックスを定義する際には最も有効な手段となる。しかし二次元あるいは三次元の成分の剛性特性は次の二つの理由により、上と同じ方法で求めることができない。第一に、単位の節点変位による節点力を二次元あるいは三次元について求めることが非常に困難である。第二にもしこの方法で剛性特性が求まったとしても、それを用いて計算された結果が、実際の連続体に生ずる応力や変形と比較して非常に異なる場合があるということである。一例として図 1-1-2 の平面応力状態について考えよう。もし、このダムのモデルを隅の三点でピン接続している三角形の板の集まりであると考えたと、このモデルが荷重を受けた時の挙動は実物のダムの挙動に比べて非常に異なることが予想される。この場合、荷重が加わると、板は節点以外においてはまったく別々にひずむであろうし、端にそっては、すき間があく部分や、重なる部分がでてくることが考えられる。従って、このモデルは実物の連続体よりたわみ易くなる。更にピンに作用する力により大きな応力集中が各節点に発生することが予想される。また応力の分布状態はおそらく実物とは似ても似つかないものであろう。

有限要素法において実物の連続体の挙動を忠実に表現するモデルを得るためには、モデルの各部分において、それに対応する実物の部分に発生する変形に相似な変形を起こさせることが必要である。このためには、モデルの各成分（要素）に生ずる変形々式を規定することが有効となる。各要素の剛性マトリックスを設定する場合の最も重要なことは、許容する変形特性を定めておくことである。この際考慮しなければならないことは、隣り合った要素について変形の適合条件を満足させることである。もし、変形々式が正しく与えられ、要素内の内部適合条件が満足され、さらに要素の境界線上の変位が完全に適合条件を満足するなら、モデル内のひずみエネルギーは実物の連続体に生ずるひずみエネルギーの最小値を与えるはずである。そして、モデルを定める時の要素の網目が充分こまかければ、その解は真の値に収束する。この様に適合条件式を完全に満足する変形々式を採用することが本法による解析の信頼性を確保する重要な条件である。例えば、単純な三角形の平面応力の場合（図 1-1-2）は完全に適合条件を満足した変形々式を設定することが

容易である。それには単に内部変位が直交する二方向に対して直線的に変化するという
 とを規定すればよい。即ち、変形前の要素における任意の直線は、変形後も直線のままで
 あるものとする。従って要素の境界線は、要素がひずんでも接触したままであり、又節点
 における適合条件式が各節点間の境界における適合条件式を満足させる。

この解析においては、要素の境界にそう応力の釣合いは正確には満足されていないこと
 を留意しておかねばならない。すなわち、一般に隣り合う要素の応力は、かならずしも実
 物と相似していないのである。そしてこの釣合式は境界にそって分布した人為的な外力に
 対してのみ成立する。しかし、節点にはたらく合力の釣合式は変位による解析法において
 与えられるものである。従って、人為的な境界の荷重は構造物の全体的な挙動に対して大
 きな影響はもたない。

§5 有限要素の剛性解析

仮定した変形々式を使って任意の形状、形式および材料を持つ要素の剛性は、通常の解
 析手法によって算出することができる。変形々式を選ぶさいの基本事項は前述の如く要素
 間の境界条件を規定することであったが、それと同時に変形々式の数が要素の節点変形の
 自由度の数と一致することが必要である。要素の剛性解析の方法は通常次の要領で行なわ
 れる。ここでは二次元について述べるが、三次元にも拡張できる。

- (1) 内部変位 v を変位函数 M で表わす。

$$\{v(x, y)\} = [M(x, y)] \{a\} \dots\dots\dots (1-5-1)$$

変位函数 M は内部の適合条件を満足しなければならない。また、各要素間の境界に
 おける適合条件を可能な限り満足しなければならない。一般に後者の条件は任意の境
 界にそう変位が境界の両端における節点の変位のみによって表示することが可能なら
 成立するはずである。変位函数の振幅は一般座標 a によって表わされる。ここで独立
 変数の数は節点の独立した変位成分の数に等しくとるべきである。

- (2) 一般座標を使って節点の変位成分 v_L を求める。

$$\{v_L\} = [A] \{a\} \dots\dots\dots (1-5-2)$$

マトリックス $[A]$ は変位函数マトリックス $[M]$ に節点の座標を代入して求める。こ
 のマトリックスは、もし変位函数の数が節点の変位成分の数に等しければ正方マトリ
 ックスとなる。

- (3) 節点の変位を使って一般座標 a を表示する。

$$\{a\} = [A^{-1}] \{u_i\} \dots \dots \dots (1-5-3)$$

まれにマトリックス[A]が特異となることがある。その場合には要素の座標系ないしは変形々式を修正する必要がある。

(4) 要素のひずみ ϵ の計算

$$\{\epsilon(x, y)\} = [B(x, y)] \{a\} \dots \dots \dots (1-5-4)$$

マトリックス[B]は[M]を微分して求まる。

(5) 要素の応力の計算

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\epsilon(x, y)\} = [D] [B(x, y)] \{a\} \dots \dots \dots (1-5-5)$$

要素の材料が持つ特有の弾性的性質は、応力-ひずみマトリックス[D]によって表される。これは等方性、異方性、弾塑性の場合、その他について任意に取りうる。

(6) 一般座標における剛性 K_n の計算

仮想変位の原理を適用すると、要素の微小体積 dV における内部仮想仕事 dW_1 は、仮想ひずみ $\bar{\epsilon}$ と実応力 σ の積として次の如く表わされる。(以後マトリックスを示す為のカッコを略す。) T は転置マトリックスを意味する。

$$dW_1 = \bar{\epsilon}^T \sigma dV \dots \dots \dots (1-5-6)$$

この式に、式(1-5-4)および(1-5-5)を代入すると

$$dW_1 = \bar{a}^T B^T D B a dV \dots \dots \dots (1-5-7)$$

となる。ここに $\bar{a}$ は $\bar{\epsilon}$ に対応する一般座標での仮想変位である。全仕事量は次の積分(全体積に関する)で表わされる。

$$W_1 = \bar{a}^T \left[\int_{vol} B^T D B dV \right] a \dots \dots \dots (1-5-8)$$

a 、 $\bar{a}$ は座標 x 、 y に対して独立であるから積分の外にでる。一般座標における仮想変位 $\bar{a}$ に関する外部仕事量は

$$W_E = \bar{a}^T \beta \dots \dots \dots (1-5-9)$$

で表わされる。ここに、 β は変位 a に対応する一般力である。仮想変位の値を単位にとり(すなわち $\bar{a} \equiv 1$)、外部仕事は内部仕事に等しいとおくと

$$\beta = \left[\int_{vol} B^T D B dV \right] a \dots \dots \dots (1-5-10)$$

が得られる。定義によりこの[]内が一般座標における剛性となる。すなわち

$$\bar{K}_n = \int_{vol} B^T D B dV \dots \dots \dots (1-5-11)$$

(7) 任意の節点における剛性は結局次式により求められる。

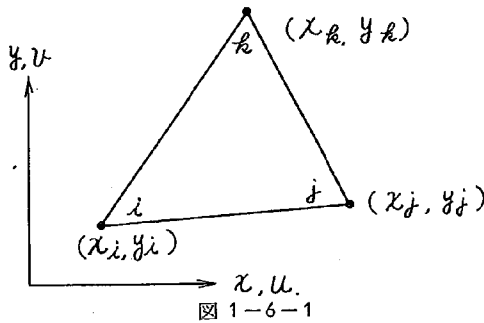
$$K_n = [A^{-1}]^T [\bar{K}_n] [A^{-1}] \dots \dots \dots (1-5-12)$$

これは単なる座標変換であり、式(1-5-3)にも示した様に変換マトリックス $[A^{-1}]$ は一般座標 a を節点座標 u_i に関係づける量である。

§6 要素の剛性計算

有限要素としては三角形要素が便利である。矩形要素は、三角形要素よりも、より細かい変形々式を近似にとる故、より良い近似値をもたらす様であるが、任意の境界における適合性および計算手続きの煩雑さを考えると三角形要素が便利である。

以下、三角形要素の剛性計算について述べる。



各節点において x, y 方向の変位 u, v を持つとすると節点変位の自由度は 6 である。それ故変位函数 $[M]$ を次の様に与える。

$$\{v\} = [M] \{a\} \text{ より}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \dots (1-6-1)$$

$$\text{即ち } u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (1-6-1')$$

$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

次に各節点の座標を代入すると次の様になる。

$$\{v_i\} = [A] \{a\} \text{ より}$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \dots (1-6-2)$$

内部歪を表すマトリックス $[B]$ は $[M]$ を微分することにより求められ次式を得る。

$$\{\epsilon(x, y)\} = [B(x, y)] \{a\} \text{ より}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \dots (1-6-3)$$

最終的には、要素の物質の性質は応力-歪マトリックス $[D]$ により定められる。

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\epsilon(x, y)\} \text{ より}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 & C_2 & 0 \\ C_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-C_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1-6-4)$$

この応力-歪マトリックス[D]の定数項は次のようになる。

いま3次元の異方性体の歪を応力で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1 \sigma_z}{E_1} \\ \varepsilon_y &= \frac{-\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_z}{E_2} \\ \varepsilon_z &= \frac{-\nu_1 \sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_1} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_1} \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-6-5)$$

ここに E_1, ν_1, G_1 は xz 面における弾性常数であり、 E_2, ν_2, G_2 はこの面の法線方向の弾性常数である。

平面応力の場合には応力が一平面、たとえば xy 平面に平行に生じ、この面に垂直な方向成分 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ すべてが0である。したがって上式の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ について解いて $\frac{E_1}{E_2} = n, \frac{G_2}{E_2} = m$ とおけば

$$[D] = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-6-6)$$

等方性体の時は $n=1, m=\frac{1}{2(1+\nu)}, \nu_2=\nu$ とおけばよい。

ゆえに

$$C_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_2 = \nu$$

平面歪の場合は $\varepsilon_z=0, \gamma_{yz}=0, \tau_{xz}=0$ であるから、 σ_z は存在し、 $\sigma_z = \nu_1 \tau_x + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \sigma_y$ となる。これを上式に代入すれば

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu_1)^2}{nE_2} \sigma_x - \frac{(1+\nu_1)\nu_2}{E_2} \sigma_y \dots\dots\dots (1-6-7)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_2(1+\nu_1)}{E_2} \sigma_x + \frac{(1-\nu_2^2)n}{E_2} \sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \frac{r_{xy}}{mE_2} \quad \text{ここで } n = \frac{E_1}{E_2}, m = \frac{G_2}{E_2} \text{ である。}$$

これを $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ について解けば

$$[D] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-6-8)$$

等方性体の時 $n=1, m=\frac{1}{2(1+\nu)}, \nu_1=\nu_2=\nu$ とおいて

$$G_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G_2 = \frac{\nu}{1-\nu},$$

E : ヤング率

ν : ポアソン比

ここでマトリックスの計算を行なうと次の様になる。

$$A^{-1} = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} x_j y_h - x_h y_j & 0 & x_h y_l - x_l y_h & 0 & x_l y_j - x_j y_l & 0 \\ y_j h & 0 & y_h l & 0 & y_l j & 0 \\ x_h j & 0 & x_l h & 0 & x_j l & 0 \\ 0 & x_j y_h - x_h y_j & 0 & x_h y_l - x_l y_h & 0 & x_l y_j - x_j y_l \\ 0 & y_j h & 0 & y_h l & 0 & y_l j \\ 0 & x_h j & 0 & x_l h & 0 & x_j l \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-6-9)$$

$$BA^{-1} = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} y_j h & 0 & y_h l & 0 & y_l j & 0 \\ 0 & x_h j & 0 & x_l h & 0 & x_j l \\ x_h j & y_j h & x_l h & y_h l & x_j l & y_l j \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-6-10)$$

$$DBA^{-1} = \frac{G_1}{\phi} \begin{bmatrix} y_j h & G_2 x_h j & y_h l & G_2 x_l h & y_l j & G_2 x_j l \\ G_2 y_j h & x_h j & G_2 y_h l & x_l h & G_2 y_l j & x_j l \\ \lambda_1 x_h j & \lambda_1 y_h l & \lambda_1 x_l h & \lambda_1 y_h l & \lambda_1 x_j l & \lambda_1 y_l j \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-6-11)$$

ここに

$$x_{ih} = x_i - x_h \quad \text{etc.}$$

$$\phi = x_j y_h - x_h y_j - x_l y_h + x_h y_l + x_j y_l - x_l y_j,$$

$$\lambda_1 = \frac{1-G_2}{2}$$

式(1-6-4)より応力は次の様になる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{C_1}{\phi} \begin{bmatrix} y_{ib} & C_2 x_{ib} & y_{ib} & C_2 x_{ib} & y_{ij} & C_2 x_{ij} \\ C_2 y_{jb} & x_{ib} & C_2 y_{ib} & x_{ib} & C_2 y_{ij} & x_{ij} \\ \lambda_1 x_{ib} & \lambda_1 y_{ib} & \lambda_1 x_{ib} & \lambda_1 y_{ib} & \lambda_1 x_{ij} & \lambda_1 y_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ u_j \\ v_j \\ u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-6-12)$$

要素の剛性は式(1-5-12)より

$$K_n = [A^{-1}]^T [\bar{k}_n] [A^{-1}] = [A^{-1}]^T \int B^T D B dV [A^{-1}]$$

この三角形要素では[B]は x, y に独立であるから、積分の外に出て、積分の中は $(B^T D B t \cdot \Delta)$ となる。ここで Δ は三角形の面積で、 t はその厚さである。また

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix} = \frac{\phi}{2} \text{ でもある。}$$

ゆえに

$$K_n = [A^{-1}]^T [B]^T [D] [B] [A^{-1}] t \cdot \Delta = [BA^{-1}]^T [D] [BA^{-1}] t \cdot \Delta \quad \dots\dots\dots (1-5-12')$$

結局要素の剛性は、表1-6-1の様に求まる。

ここで $\lambda_2 = \frac{1+C_2}{2}$

$\lambda_1 x_{ib}^2 + y_{ib}^2$					
$\lambda_2 x_{ib} y_{ib}$	$\lambda_1 y_{ib}^2 + x_{ib}^2$		(対称)		
$\lambda_1 x_{ib} x_{jb} + y_{jb} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{jb} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{ib}^2 + y_{ib}^2$			
$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 y_{jb} y_{ib} + x_{ib} x_{jb}$	$\lambda_2 x_{ib} y_{ib}$	$\lambda_1 y_{ib}^2 + x_{ib}^2$		
$\lambda_1 x_{ib} x_{jb} + y_{jb} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{jb} y_{ib} + C_2 x_{ib} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{ib} x_{jb} + y_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 x_{jb}^2 + y_{jb}^2$	$\lambda_1 x_{ib}^2$	
$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 y_{jb} y_{ib} + x_{ib} x_{jb}$	$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 y_{ib}^2 + x_{ib}^2$	$\lambda_1 y_{ib}^2$	
$\lambda_1 x_{ib} x_{jb} + y_{jb} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{jb} y_{ib} + C_2 x_{ib} y_{ib}$	$\lambda_1 x_{ib} x_{jb} + y_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 x_{jb}^2 + y_{jb}^2$	$\lambda_2 x_{ib} y_{ib}$	$\lambda_1 y_{ib}^2$
$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 y_{jb} y_{ib} + x_{ib} x_{jb}$	$\lambda_1 x_{ib} y_{jb} + C_2 x_{ib} y_{jb}$	$\lambda_1 y_{ib}^2 + x_{ib}^2$	$\lambda_1 y_{ib}^2$	$\lambda_1 y_{ib}^2$

表1-6-1 三角形要素の剛性マトリックス

表1-6-1の剛性マトリックス K_n の各成分の意味は次の様である。(ただしサフィックスの n は第 n 番目の三角形という意味である。)各成分を $K_n(I, J)$ で表わす。

I, J の数字は図1-6-2の様に i 点の x 方向を 1

" y " 2

j 点の x 方向を 3

" y " 4

k 点の x 方向を 5

" y " 6

とする。

又 i 点は要素の最も左にある頂点を i 点と決める。2つの頂点が同時にきた時はその下方の点を i 点と定める。

i 点がきまると、あとは反時計回りで j 、 k 点を定める。例えば図1-6-3の様に、要素の i 点が x 方向に単位変位した場合を考えてみよう。

$$u_i = 1 \dots \dots \dots (1-6-13)$$

式(1-3-1)より

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_n(1,1), \dots K_n(1,6) \\ K_n(2,1), \vdots \\ K_n(6,1), \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i=1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dots \dots \dots (1-6-14)$$

これからわかる様に、 i 点の x 方向の単位変位 $u_i=1$ により各点に生ずる力は

$$i \text{ 点の } x \text{ 方向の力} \quad R_1 = K_n(1, 1) \times u_i$$

$$\text{" } y \text{ "} \quad R_2 = K_n(2, 1) \times u_i$$

$$j \text{ 点の } x \text{ 方向の力} \quad R_3 = K_n(3, 1) \times u_i$$

$$\text{" } y \text{ "} \quad R_4 = K_n(4, 1) \times u_i$$

$$k \text{ 点の } x \text{ 方向の力} \quad R_5 = K_n(5, 1) \times u_i$$

$$\text{" } y \text{ "} \quad R_6 = K_n(6, 1) \times u_i$$

となる。一般に次の様になる。

$$R_i = K_n(I, 1) \times u_i = K_n(I, 1) \times 1$$

このことは第1列にある剛性成分 $K_n(I, 1)$ は、 i 点の x 方向の単位変位により生ずる各点の力を示すものである、ということを示している。同様に i 点の y 方向の単位変位の場合を考えてみよう。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n(1, 1) & K_n(1, 2) & \cdots & K_n(1, 6) \\ \vdots & K_n(2, 2) & & \vdots \\ & K_n(3, 2) & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ & K_n(6, 2) & & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_i=1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-6-15)$$

この場合も前と同様 $K_n(I, 2)$ が i 点の y 方向 (2 方向) の単位変位により各点に生ずる力を表わしている。同様に、第3列成分 $K_n(I, 3)$ は第3の方向、即ち j 点の x 方向の単位変位により各点に生ずる力、第4列成分 $K_n(I, 4)$ は、第4の方向、即ち j 点の y 方向の単位変位により各点に生ずる力 etc. を表わしている。換言すると、ある点が単位変位した時、各点に生ずる力はその点の剛性を示す、ということである。各点を単位変位させ、各変位に対する剛性を求め、それをまとめると剛性マトリックスとなる。即ち式 (1-6-16) である。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_h \\ v_h \end{Bmatrix} \quad (1-6-16)$$

§7 集積剛性マトリックス

上に求めた剛性マトリックス K_n は全集合体のうちの個々の要素の弾性特性を示すものである。構造物全体を解くときには要素の全集合体の弾性特性即ち集積剛性マトリックスを求める必要がある。即ち、適当な要素の剛性成分を重ねあわすのである。その原理は、

図 1-7-1 を考えるとよくわかるであろう。

$$P = KU \quad (1-2-1)$$

$$\text{とおくと} \quad K = \left(\frac{AE}{l} \right)^{\textcircled{A}} + \left(\frac{AE}{l} \right)^{\textcircled{B}}$$

であり、このKは①の剛性と②の剛性を加え
合わせた集積剛性である。

有限要素法においてはある一つの節点に着
目するとその節点で連結している要素は限ら
れたわずかなものであり、その各要素のその (AE, ℓ)
節点に対する剛性を重ね合わせることにより集
積剛性マトリックスが得られる。それ故、集
積剛性マトリックスは0（零）の項が非常に
多くなり、極めて計算に都合よくなってくる。

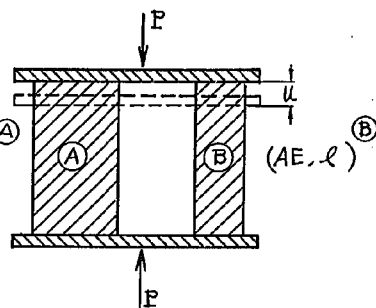


図 1-7-1

この集積剛性マトリックスの計算はコンピューター内部で行なわれ、表示する必要はな
いが、その理解の助けとして、図 1-7-2 の様な、簡単なダム構造物に対し説明する。

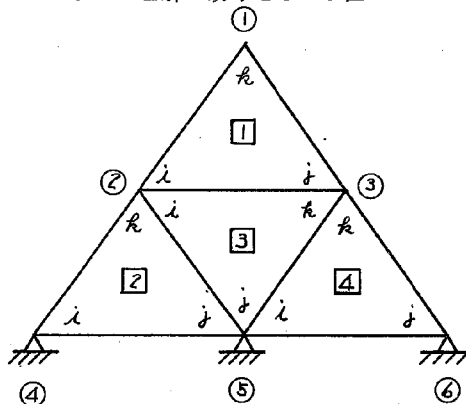
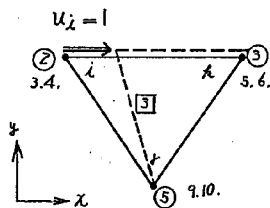


図 1-7-2

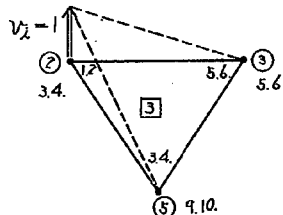
これは節点数6、要素数4であり、①～④
の各要素はいずれも三角形要素であるから、
表1-6-1より各要素の剛性は簡単に求まる。
各要素の剛性をそれぞれ次の様に表わすとす
る。

- ①の要素の剛性 $K_1(I, J)$,
- ② " " $K_2(I, J)$,
- ③ " " $K_3(I, J)$,
- ④ " " $K_4(I, J)$,

各要素は三角形要素であり、自由度6であるからI, J、ともに1～6であり、 $K_n(I, J)$
は6×6の正方マトリックスであることは表1-6-1からも明らかである。
代表として要素③を取り上げて説明する。



$K_3(1, 1)$



$K_3(1, 2)$

図 1-7-4

図の様に i, j, k を定めると節点②が y 方向に単位変位 ($v_L = 1$) した時 (図 1-7-4 参照), ②, ⑤, ③の各節点に生ずる力 (即ち剛性) は次の様になる。

節点②の x 方向 $K_3(1, 2),$

" y " $K_3(2, 2),$

節点⑤の x 方向 $K_3(3, 2),$

" y " $K_3(4, 2),$

節点③の x 方向 $K_3(5, 2),$

" y " $K_3(6, 2),$

これは③の要素だけを取り出して考えたが、次に全体から見ると、節点数は6であるから各節点で x, y 2方向を考慮すると、最終的な集積剛性マトリックスは 12×12 の正方マトリックスとなる。今、節点②の y 方向への単位変位について考えているから、全体から見ると、図1-7-4で示す様に、4の方向の単位変位について考えることになる。

それ故

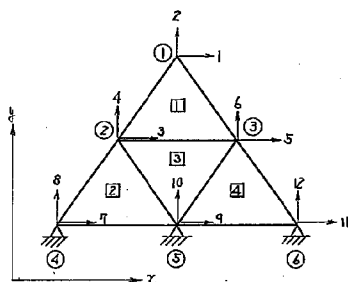


図 1-7-4'

$K_3(1, 2)$ は集積剛性マトリックスの 3 行 4 列

$K_3(2, 2)$ " " 4 行 4 列

$K_3(3, 2)$ " " 9 行 4 列

$K_3(4, 2)$ " " 10 行 4 列

$K_3(5, 2)$ " " 5 行 4 列

$K_3(6, 2)$ " " 6 行 4 列

にそれぞれ書かれる。

同様にして要素③の各節点の x, y 方向の単位変位を考え、それにより各節点に生ずる力 (即ち剛性) を求め、この操作を全要素につき行ない、各成分を重ね合わせたものが求める集積剛性マトリックスである。この集積剛性マトリックスとは、釣合方程式

$$\{R\} = [K]\{v\} \dots\dots\dots (1-3-1)$$

の係数をマトリックス表示したものにすぎず、節点における釣合方程式を解くことが最終目標である。

今少し、集積剛性マトリックスについての理解を容易にするため以下实际的に説明を行なう。図1-7-2の構造物の節点②における釣合方程式を考えてみる。この場合は節点②の周囲の要素①、②、③の剛性に関係してくる。要素①、②、③の各節点①②③④⑤がそれぞれ単位変位を生じた時、節点②に生ずる力、即ち剛性を考えて釣合方程式を作成する。

$$\begin{aligned}
x \text{ 方向 } R_{2x} = & K_1(1, 5) \times v_{1x} + K_1(1, 6) \times v_{1y} \\
& + \{K_1(1, 1) + K_2(5, 5) + K_3(1, 1)\} \times v_{2x} \\
& + \{K_1(1, 2) + K_2(5, 6) + K_3(1, 2)\} \times v_{2y} \\
& + \{K_1(1, 3) + K_3(1, 5)\} \times v_{3x} \\
& + \{K_1(1, 4) + K_3(1, 6)\} \times v_{3y} \\
& + K_2(5, 1) \times v_{4x} + K_2(5, 2) \times v_{4y} \\
& + \{K_2(5, 3) + K_3(1, 3)\} \times v_{5x} \\
& + \{K_2(5, 4) + K_3(1, 4)\} \times v_{5y} \dots\dots\dots (1-7-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \text{ 方向 } R_{2y} = & K_1(2, 5) \times v_{1x} + K_1(2, 6) \times v_{1y} \\
& + \{K_1(2, 1) + K_2(6, 5) + K_3(2, 1)\} \times v_{2x} \\
& + \{K_1(2, 2) + K_2(6, 6) + K_3(2, 2)\} \times v_{2y} \\
& + \{K_1(2, 3) + K_3(2, 5)\} \times v_{3x} \\
& + \{K_1(2, 4) + K_3(2, 6)\} \times v_{3y} \\
& + K_2(6, 1) \times v_{4x} + K_2(6, 2) \times v_{4y} \\
& + \{K_2(6, 3) + K_3(2, 3)\} \times v_{5x} \\
& + \{K_2(6, 4) + K_3(2, 4)\} \times v_{5y} \dots\dots\dots (1-7-2)
\end{aligned}$$

ここに R_{2x} : 節点②の x 方向の力

R_{2y} : 節点②の y 方向の力

v_{2x} : 節点②の x 方向の変位

v_{2y} : 節点②の y 方向の変位

同様にして各節点の x 、 y 方向の釣合方程式を作成する。

$$\begin{aligned}
R_{1x} = & K_1(5, 1) \times v_{2x} + K_1(5, 2) \times v_{2y} \\
& + K_1(5, 3) \times v_{3x} + K_1(5, 4) \times v_{3y} \\
& + K_1(5, 5) \times v_{1x} + K_1(5, 6) \times v_{1y} \dots\dots\dots (1-7-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1y} = & K_1(6, 1) \times v_{2x} + K_1(6, 2) \times v_{2y} + K_1(6, 3) \times v_{3x} \\
& + K_1(6, 4) \times v_{3y} + K_1(6, 5) \times v_{1x} + K_1(6, 6) \times v_{1y} \dots\dots\dots (1-7-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{3x} = & \{K_1(3, 3) + K_3(5, 5) + K_4(5, 5)\} \times v_{3x} \\
& + \{K_1(3, 4) + K_3(5, 6) + K_4(5, 6)\} \times v_{3y} \\
& + K_1(3, 5) \times v_{1x} + K_1(3, 6) \times v_{1y} \\
& + \{K_1(3, 1) + K_3(5, 1)\} \times v_{2x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{K_1(3, 2) + K_3(5, 2)\} \times v_{\textcircled{2}y} \\
& + \{K_3(5, 3) + K_4(5, 1)\} \times v_{\textcircled{2}z} \\
& + \{K_3(5, 4) + K_4(5, 2)\} \times v_{\textcircled{2}y} \\
& + K_4(5, 3) \times v_{\textcircled{2}z} \\
& + K_4(5, 4) \times v_{\textcircled{2}y} \dots\dots\dots (1-7-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{3}y} &= \{K_1(4, 3) + K_3(6, 5) + K_4(6, 5)\} \times v_{\textcircled{3}z} \\
& + \{K_1(4, 4) + K_3(6, 6) + K_4(6, 6)\} \times v_{\textcircled{3}y} \\
& + K_1(4, 5) \times v_{\textcircled{1}z} + K_1(4, 6) \times v_{\textcircled{1}y} \\
& + \{K_1(4, 1) + K_3(6, 1)\} \times v_{\textcircled{2}z} \\
& + \{K_1(4, 2) + K_3(6, 2)\} \times v_{\textcircled{2}y} \\
& + \{K_3(6, 3) + K_4(6, 1)\} \times v_{\textcircled{2}z} \\
& + \{K_3(6, 4) + K_4(6, 2)\} \times v_{\textcircled{2}y} \\
& + K_4(6, 3) \times v_{\textcircled{2}z} \\
& + K_4(6, 4) \times v_{\textcircled{2}y} \dots\dots\dots (1-7-6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{4}z} &= K_2(1, 1) \times v_{\textcircled{1}z} + K_2(1, 2) \times v_{\textcircled{1}y} \\
& + K_2(1, 3) \times v_{\textcircled{5}z} + K_2(1, 4) \times v_{\textcircled{5}y} \\
& + K_2(1, 5) \times v_{\textcircled{2}z} + K_2(1, 6) \times v_{\textcircled{2}y} \dots\dots\dots (1-7-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{4}y} &= K_2(2, 1) \times v_{\textcircled{1}z} + K_2(2, 2) \times v_{\textcircled{1}y} \\
& + K_2(2, 3) \times v_{\textcircled{5}z} + K_2(2, 4) \times v_{\textcircled{5}y} \\
& + K_2(2, 5) \times v_{\textcircled{2}z} + K_2(2, 6) \times v_{\textcircled{2}y} \dots\dots\dots (1-7-8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{5}z} &= \{K_3(3, 3) + K_2(3, 3) + K_4(1, 1)\} \times v_{\textcircled{6}z} \\
& + \{K_3(3, 4) + K_2(3, 4) + K_4(1, 2)\} \times v_{\textcircled{6}y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ K_2(3,5) + K_3(3,1) \} \times v_{\textcircled{2}x} \\
& + \{ K_2(3,6) + K_3(3,2) \} \times v_{\textcircled{2}y} \\
& + K_2(3,1) \times v_{\textcircled{3}x} + K_2(3,2) \times v_{\textcircled{4}y} \\
& + K_4(1,3) \times v_{\textcircled{2}x} + K_4(1,4) \times v_{\textcircled{6}y} \\
& + \{ K_4(1,5) + K_3(3,5) \} \times v_{\textcircled{3}x} \\
& + \{ K_4(1,6) + K_3(3,6) \} \times v_{\textcircled{3}y} \dots\dots\dots (1-7-9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{6}y} = & v_{\textcircled{6}x} \{ K_3(4,3) + K_2(4,3) + K_4(2,1) \} \\
& + v_{\textcircled{6}y} \{ K_3(4,4) + K_2(4,4) + K_4(2,2) \} \\
& + v_{\textcircled{2}x} \{ K_2(4,5) + K_3(4,1) \} \\
& + v_{\textcircled{2}y} \{ K_2(4,6) + K_3(4,2) \} \\
& + v_{\textcircled{4}x} \{ K_2(4,1) \} + v_{\textcircled{4}y} \{ K_2(4,2) \} \\
& + v_{\textcircled{6}x} \{ K_2(2,3) \} + v_{\textcircled{6}y} \{ K_4(2,4) \} \\
& + v_{\textcircled{3}x} \{ K_3(4,5) + K_4(2,5) \} \\
& + v_{\textcircled{3}y} \{ K_3(4,6) + K_4(2,6) \} \dots\dots\dots (1-7-10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{6}x} = & K_4(3,1) \times v_{\textcircled{5}x} + K_4(3,2) \times v_{\textcircled{5}y} \\
& + K_4(3,3) \times v_{\textcircled{6}x} + K_4(3,4) \times v_{\textcircled{6}y} \\
& + K_4(3,5) \times v_{\textcircled{3}x} + K_4(3,6) \times v_{\textcircled{3}y} \dots\dots\dots (1-7-11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\textcircled{6}y} = & K_4(4,1) \times v_{\textcircled{5}x} + K_4(4,2) \times v_{\textcircled{5}y} \\
& + K_4(4,3) \times v_{\textcircled{6}x} + K_4(4,4) \times v_{\textcircled{6}y} \\
& + K_4(4,5) \times v_{\textcircled{3}x} + K_4(4,6) \times v_{\textcircled{3}y} \dots\dots\dots (1-7-12)
\end{aligned}$$

このようにして12個の方程式ができ、この12元連立方程式の係数をマトリックス表示したものがこの場合の集積剛性マトリックス[K]であり表1-7-1に示しておく。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$K_1(5,5)$	$K_1(5,6)$	$K_1(5,1)$	$K_1(5,2)$	$K_1(5,3)$	$K_1(5,4)$						
2	$K_1(6,5)$	$K_1(6,6)$	$K_1(6,1)$	$K_1(6,2)$	$K_1(6,3)$	$K_1(6,4)$						
3	$K_1(1,5)$	$K_1(1,6)$	$K_1(1,1) + K_2(5,5) + K_2(1,1)$	$K_1(1,2) + K_2(5,6) + K_2(1,2)$	$K_1(1,3) + K_2(1,5)$	$K_1(1,4) + K_2(1,6)$	$K_2(5,1)$	$K_2(5,2)$	$K_2(5,3)$	$K_2(5,4)$		
4	$K_1(2,5)$	$K_1(2,6)$	$K_1(2,1) + K_2(6,5) + K_2(2,1)$	$K_1(2,2) + K_2(6,6) + K_2(2,2)$	$K_1(2,3)$	$K_1(2,4)$	$K_2(6,1)$	$K_2(6,2)$	$K_2(6,3)$	$K_2(6,4)$		
5	$K_1(3,5)$	$K_1(3,6)$	$K_1(3,1) + K_2(5,1)$	$K_1(3,2) + K_2(5,2)$	$K_1(3,3) + K_2(5,5) + K_2(6,5)$	$K_1(3,4) + K_2(5,6) + K_2(6,6)$			$K_2(5,3)$	$K_2(5,4)$	$K_1(5,5)$	$K_1(5,4)$
6	$K_1(4,5)$	$K_1(4,6)$	$K_1(4,1) + K_2(6,1)$	$K_1(4,2) + K_2(6,2)$	$K_1(4,3) + K_2(6,5) + K_2(6,6)$	$K_1(4,4) + K_2(6,6)$			$K_2(6,3)$	$K_2(6,4)$	$K_1(6,5)$	$K_1(6,4)$
7			$K_2(1,5)$	$K_2(1,6)$			$K_2(1,1)$	$K_2(1,2)$	$K_2(1,3)$	$K_2(1,4)$		
8			$K_2(2,5)$	$K_2(2,6)$			$K_2(2,1)$	$K_2(2,2)$	$K_2(2,3)$	$K_2(2,4)$		
9			$K_2(3,5)$	$K_2(3,6)$	$K_2(3,3)$	$K_2(3,4)$	$K_2(3,1)$	$K_2(3,2)$	$K_2(3,3) + K_2(5,5) + K_2(1,1)$	$K_2(3,4) + K_2(5,6) + K_2(1,2)$	$K_1(1,3)$	$K_1(1,4)$
10			$K_2(4,5)$	$K_2(4,6)$	$K_2(4,3)$	$K_2(4,4)$	$K_2(4,1)$	$K_2(4,2)$	$K_2(4,3) + K_2(5,6) + K_2(2,1)$	$K_2(4,4) + K_2(6,6) + K_2(2,2)$	$K_1(2,3)$	$K_1(2,4)$
11					$K_2(5,5)$	$K_2(5,6)$			$K_2(5,1)$	$K_2(5,2)$	$K_2(5,3)$	$K_2(5,4)$
12					$K_2(6,5)$	$K_2(6,6)$			$K_2(6,1)$	$K_2(6,2)$	$K_2(6,3)$	$K_2(6,4)$

表 1-7-1 図 1-7-2 の構造物の集積剛性マトリックス

§ 8 連立方程式の解法

図 1-7-2 の構造物は節点数 6 であるから 12 元連立釣合方程式を解かねばならない。

第 7 節において求めたこの構造物に対する集積剛性マトリックス $[K]$ を用いて

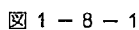
$$\{R\} = [K] \{v\} \quad \dots\dots\dots (1-8-1)$$

$$\{v\} = [K^{-1}] \{R\} \quad \dots\dots\dots (1-8-2)$$

の関係式より $\{R\}$ 及び $\{v\}$ を求めればよい。一般の構造物においては節点力 $\{R\}$ を与えて、節点変位量 $\{v\}$ を解く場合が多いので主に (1-8-2) 式の関係式を利用する。また固定節点の反力 $\{R\}$ を求める場合には (1-8-2) 式で得られた $\{v\}$ を用いて、これを (1-8-1) 式に代入する。

ところで $[K]$ の逆マトリックス $[K^{-1}]$ の計算において、電子計算機が大活躍をするわけであるが、この $[K^{-1}]$ の解法には、消去法、Gauss-Seidel の反復法、Fran の方法等のテクニックがある。この報文におけるプログラムでは消去法を利用している。

今、この連立方程式の解法手順を図 1-8-1 のモデルについて具体的に示してみよう。なお図 1-8-1 は説明の都合上、図 1-7-2 の支承条件を少し変えた形となっているが、集積剛性マトリックス $[K]$ は、三角形要素の性質、形状、ネットの組み方等一般に構



$v_7 = v_8 = v_{12} = 0$ であり 反力 R_7, R_8, R_{12} が生ずる。(構造物全体の自由度は9となる)。

$$\{R\} = [K] \{v\} \pm b$$

式(1-8-3)にて $\Leftarrow$ 印をつけたものについて注目してみよう。今、 R_2 について普通の式にあらわしてみると

$$K_{2,7}v_7, K_{2,8}v_8, K_{2,12}v_{12} \text{ の項は } 0 \text{ となる。}$$

故に (1-8-3) 式は (1-8-5) 式のようにあらわすことが出来る。

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{array} = \begin{array}{c} K_{1,1} K_{1,2} K_{1,3} K_{1,4} K_{1,5} K_{1,6} K_{1,9} K_{1,10} K_{1,11} \\ K_{2,1} K_{2,2} K_{2,3} K_{2,4} K_{2,5} K_{2,7} K_{2,8} K_{2,10} K_{2,11} \\ K_{3,1} K_{3,2} \dots\dots\dots K_{3,11} \\ K_{4,1} \dots\dots\dots K_{4,11} \\ K_{5,1} \dots\dots\dots K_{5,11} \\ K_{6,1} \dots\dots\dots K_{6,11} \\ K_{7,1} \dots\dots\dots K_{7,11} \\ K_{8,1} \dots\dots\dots K_{8,11} \\ K_{9,1} \dots\dots\dots K_{9,11} \\ K_{10,1} \dots\dots\dots K_{10,11} \\ K_{11,1} \dots\dots\dots K_{11,11} \\ K_{12,1} \dots\dots\dots K_{12,11} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{array} \dots\dots\dots (1-8-5)$$

$\swarrow$ 12行9列 $\nwarrow$ 9行

こゝで可動点について(1-8-6)式に、固定点について(1-8-7)式にまとめてみる。

可動点について

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \end{array} = \begin{array}{c} K_{1,1} K_{1,2} K_{1,3} K_{1,4} K_{1,5} K_{1,6} K_{1,9} K_{1,10} K_{1,11} \\ K_{2,1} K_{2,2} K_{2,3} K_{2,4} K_{2,5} K_{2,6} K_{2,9} K_{2,10} K_{2,11} \\ K_{3,1} \dots\dots\dots K_{3,11} \\ K_{4,1} \dots\dots\dots K_{4,11} \\ K_{5,1} \dots\dots\dots K_{5,11} \\ K_{6,1} \dots\dots\dots K_{6,11} \\ K_{9,1} \dots\dots\dots K_{9,11} \\ K_{10,1} \dots\dots\dots K_{10,11} \\ K_{11,1} \dots\dots\dots K_{11,11} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{array} \dots\dots\dots (1-8-6)$$

(9行9列) (9行)

固定点について

$$\begin{pmatrix} R_7 \\ R_8 \\ R_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{7,1} & K_{7,2} & K_{7,3} & K_{7,4} & K_{7,5} & K_{7,6} & K_{7,9} & K_{7,10} & K_{7,11} \\ K_{8,1} & K_{8,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{8,11} \\ K_{12,1} & K_{12,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{12,11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1-8-7)$$

(3行9列)

(1-8-6)式において $R_1, R_2, R_3, R_4,$
 $R_5, R_6, R_9, R_{10}, R_{11}$ は即知数、 $v_1, v_2, v_3, v_4,$
 $v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{11}$ が未知数であり、式は9
 個あるので $\{v\}$ を未知数とする9元連立一
 次方程式となる。

9行9列の $[K]$ の逆マトリックス $[K^{-1}]$ が得られたら $\{v\} = [K^{-1}]\{R\}$ より

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K_{1,9} & K_{1,10} & K_{1,11} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{2,11} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{3,11} \\ K_{4,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{4,11} \\ K_{5,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{5,11} \\ K_{6,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{6,11} \\ K_{9,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{9,11} \\ K_{10,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{10,11} \\ K_{11,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{11,11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1-8-8)$$

(9行9列) (9行)

式(1-8-8)より $\{v\}$ を求めることができる。

式(1-8-8)で求めた $\{v\}$ を式(1-8-7)に代入すると固定点の反力 R_7, R_8, R_{12} が得られる。

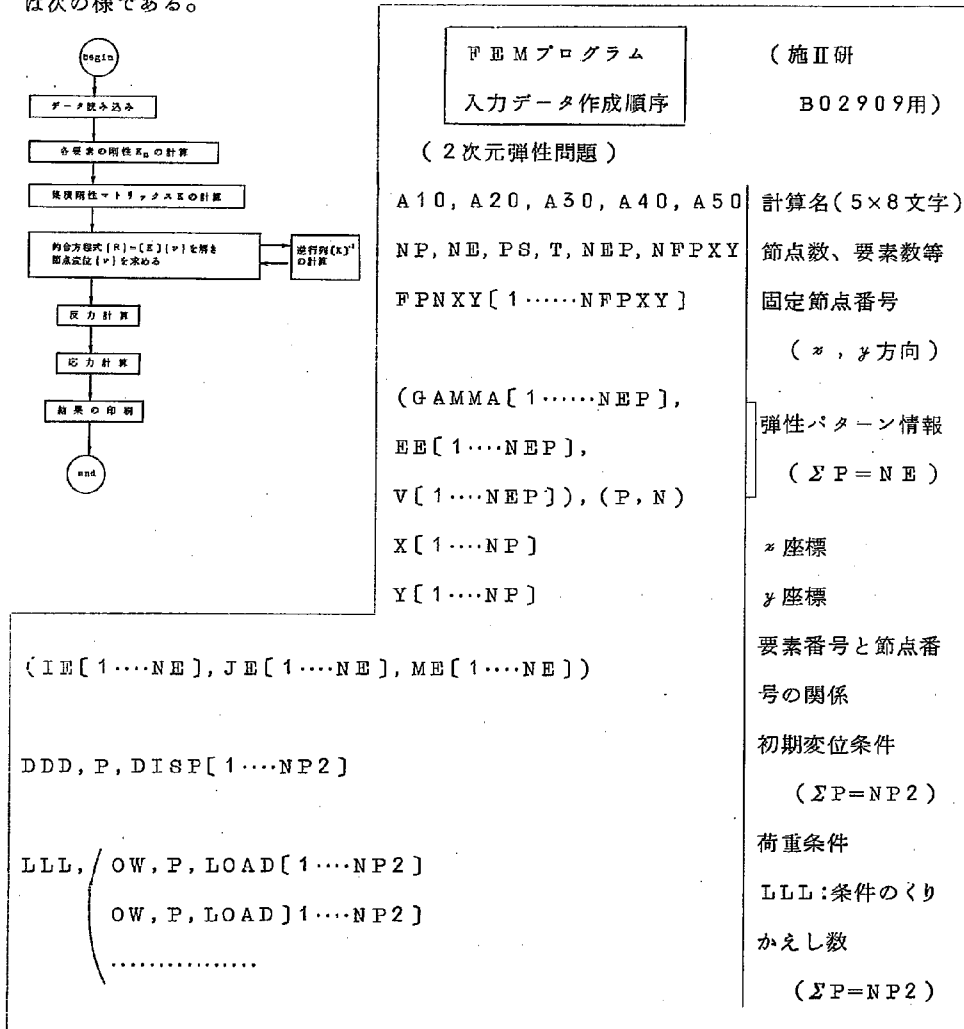
以上のように構造物全体について釣合方程式を解くには $[K^{-1}]$ を利用するのであるが、有限要素法の電算プログラムにおける計算時間の大部分はこの逆マトリックス演算で費されている。またネットの数をふやせばふやす程構造物全体の応力、変形の解析精度は上がるが、一方逆マトリックスの次数があがり電子計算機の記憶容量による制限から、切り得る最大ネット数も自ら決まってくる。

現在、国内の電算では2次元弾塑性問題に対しては2,000～3,000元(節点数1,000

～1,500)、3次元問題に対しては節点数100、2次元振動問題に対しては150元(節点数75)程度が限度とされている。この報文における計算例では逆マトリックス演算を中型電算(FACOM270-30)にて内部記憶(コア32K)のみ用い消去法で行なっているため、最大節点数40程度にとまっている。

§9 コンピューター・プログラム

盛土の変形及び応力解析の為に作成し、建設省土木研究所千葉支所の電子計算機(FACOM270-30)に使用したプログラム及びそのフロー・チャート(Flow chart)(B02909)は次の様である。




```

      | MPNXY[J,J]=FPNXY[INFPXY]*MMI
    end;
  L500:
  for I=1 step 1 until NEP do
    begin READ(GK1,GK2,GK3);
           EP1[I]=GK1; EP2[I]=GK2; EP3[I]=GK3;
    end;
  P=q=0;
  for I=1 step 1 until NE do
    begin
      READ(P,N);
      for J=(1+q) step 1 until (P+q) do
        begin GAMMA[J]=EP1[N];
               EE[J]=EP2[N];
               VI[J]=EP3[N];
        end;
      if (P+q)=NE then go to L600;
      q=P+q;
    end;
  L600:

```

- 90-

- 100-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 3

```

  READARRAY(X,1,NP);
  READARRAY(Y,1,NP);
  for I=1 step 1 until NE do
    begin READ(A1,A2,B1);
           IE[I]=A1; JE[I]=A2; ME[I]=B1;
    end;
  for I=1 step 1 until NP do
    for J=1 step 1 until 8 do
      begin ENP[I,J]=CNP[I,J]=0; end;
  for I=1 step 1 until NP do
    begin A1=A2=B1=0;
      for J=1 step 1 until NE do
        begin
          if IF[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=1; end;
          if JE[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=2; end;
          if ME[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=3; end;
        end;
    end;
  READ(DUD); PPP=0;
  for DD=1 step 1 until DUD do
    begin
      P=q=0;
      for I=1 step 1 until NP2 do
        begin
          READ(P,GK1);
          for J=(1+q) step 1 until (P+q) do
            DISPALJ=GK1;
          if (P+q)=NP2 then go to L700;
          q=P+q;
        end;
    end;
  L700:
  READ(LL1);
  for LL=1 step 1 until LLL do
    begin
      for I=1 step 1 until NP2 do
        DISP[I]=DISPAL[I];
      P=q=0;
      READ(UW);
      for I=1 step 1 until NP2 do
        begin
          READ(P,GK2);
          for J=(1+q) step 1 until (P+q) do
            LOAD[J]=GK2;
          if (P+q)=NP2 then go to L800;
          q=P+q;
        end;
    end;
  L800:
  PPP=PPP+1; if PPP=1 then go to L900;
  for I=1 step 1 until NE do
    begin

```

- 110-

- 120-

- 130-

- 140-

- 150-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 4

三角形各要素の
隣接マトリクス
計算

```

I1=IE(I1)
JJ=JE(I1)
MM=ME(I1)
X1=X(I1)
XJ=X(J1)
XM=X(M1)
Y1=Y(I1)
YJ=Y(J1)
YM=Y(M1)
WE11=(C0,001000000+GAMMA(I1))*T*(XJ-XI)*(YM-YI)-(XM-XI)*(YJ-YI)/6.000000000
= 160-

L1: if p5=1 then begin C1=EE(I1)/(1.000000000-V(I1)*V(I1): C2=V(I1) end
else begin C1=EE(I1)*(1.000000000-V(I1))/(1.000000000+V(I1))*(1.000000000-2.000000000*V(I1))
C2=V(I1)/(1.000000000-V(I1)) end
F1=(1.000000000-C2)/2.000000000
F2=(1.000000000+C2)/2.000000000
C0=C1*T/(2.000000000*(XJ-XI)*YM*(XI-XM)*YJ*(AM-XJ)*YI)
X1J=X1-XJ
XJM=XJ-XM
XM1=XM-XI
Y1J=Y1-YJ
YJM=YJ-YM
YM1=YM-YI
K11111=(F1*XJM*XJM+YJM*YJM)*C0
K11112=(F2*XJM*YJM)*C0
K11113=(F1*XJM*XM1+YJM*YM1)*C0
K11114=(F1*XJM*YM1+C2*XM1*YJM)*C0
K11115=(F1*Y1J*XJM+Y1J*YJM)*C0
K11116=(F1*XJM*Y1J+C2*X1J*YJM)*C0
K11121=K11111+21
K11122=(XJM*XJM+F1*YJM*YJM)*C0
K11123=(F1*XM1*YJM+C2*AM*YM1)*C0
K11124=(XJM*XM1+F1*YJM*YM1)*C0
K11125=(F1*X1J*YJM+C2*XJM*Y1J)*C0
K11126=(X1J*XJM+F1*Y1J*YJM)*C0
K11131=K11111
K11132=K11121
K11133=(F1*XM1*XM1+YM1*YM1)*C0
K11134=(F2*XM1*YM1)*C0
K11135=(F1*X1J*XM1+Y1J*YM1)*C0
K11136=(F1*XM1*Y1J+C2*X1J*YM1)*C0
K11141=K11111
K11142=K11121
K11143=K11131
K11144=(XM1*XM1+F1*YM1*YM1)*C0
K11145=(F1*X1J*YM1+C2*AM*Y1J)*C0
K11146=(X1J*XM1+F1*Y1J*YM1)*C0
K11151=K11111
K11152=K11121
K11153=K11131
K11154=K11141
= 170-

K11123=(F1*XM1*YJM+C2*AM*YM1)*C0
K11124=(XJM*XM1+F1*YJM*YM1)*C0
K11125=(F1*X1J*YJM+C2*XJM*Y1J)*C0
K11126=(X1J*XJM+F1*Y1J*YJM)*C0
K11131=K11111
K11132=K11121
K11133=(F1*XM1*XM1+YM1*YM1)*C0
K11134=(F2*XM1*YM1)*C0
K11135=(F1*X1J*XM1+Y1J*YM1)*C0
K11136=(F1*XM1*Y1J+C2*X1J*YM1)*C0
K11141=K11111
K11142=K11121
K11143=K11131
K11144=(XM1*XM1+F1*YM1*YM1)*C0
K11145=(F1*X1J*YM1+C2*AM*Y1J)*C0
K11146=(X1J*XM1+F1*Y1J*YM1)*C0
K11151=K11111
K11152=K11121
K11153=K11131
K11154=K11141
= 180-

K11123=(F1*XM1*YJM+C2*AM*YM1)*C0
K11124=(XJM*XM1+F1*YJM*YM1)*C0
K11125=(F1*X1J*YJM+C2*XJM*Y1J)*C0
K11126=(X1J*XJM+F1*Y1J*YJM)*C0
K11131=K11111
K11132=K11121
K11133=(F1*XM1*XM1+YM1*YM1)*C0
K11134=(F2*XM1*YM1)*C0
K11135=(F1*X1J*XM1+Y1J*YM1)*C0
K11136=(F1*XM1*Y1J+C2*X1J*YM1)*C0
K11141=K11111
K11142=K11121
K11143=K11131
K11144=(XM1*XM1+F1*YM1*YM1)*C0
K11145=(F1*X1J*YM1+C2*AM*Y1J)*C0
K11146=(X1J*XM1+F1*Y1J*YM1)*C0
K11151=K11111
K11152=K11121
K11153=K11131
K11154=K11141
= 190-

K11123=(F1*XM1*YJM+C2*AM*YM1)*C0
K11124=(XJM*XM1+F1*YJM*YM1)*C0
K11125=(F1*X1J*YJM+C2*XJM*Y1J)*C0
K11126=(X1J*XJM+F1*Y1J*YJM)*C0
K11131=K11111
K11132=K11121
K11133=(F1*XM1*XM1+YM1*YM1)*C0
K11134=(F2*XM1*YM1)*C0
K11135=(F1*X1J*XM1+Y1J*YM1)*C0
K11136=(F1*XM1*Y1J+C2*X1J*YM1)*C0
K11141=K11111
K11142=K11121
K11143=K11131
K11144=(XM1*XM1+F1*YM1*YM1)*C0
K11145=(F1*X1J*YM1+C2*AM*Y1J)*C0
K11146=(X1J*XM1+F1*Y1J*YM1)*C0
K11151=K11111
K11152=K11121
K11153=K11131
K11154=K11141
= 200-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 5

K11155=(F1*X1J*XM1+Y1J*YM1)*C0
K11156=(F2*X1J*Y1J)*C0
K11161=K11111
K11162=K11121
K11163=K11131
K11164=K11141
K11165=K11151
K11166=(X1J*X1J+F1*Y1J*Y1J)*C0
end
L900:
= 210-

CRLF(1): OUT0(6,'103b','R02909 PAGE 1'): CRLF(1):
OUT0(6,'10B','*** STRESS AND DEFORMATION ANALYSIS BY FINITE ELEMENT METHOD *** (K0*cm)'):
CRLF(3):
OUT5(6,'5B','** 8A,8A,8A,8A',A10,A20,A30,A40,A50):
CRLF(6):
OUT0(6,'** INPUT DATA **'):
CRLF(3):
if p5=1 then OUT0(6,'5B','PLANE STRESS') else OUT0(6,'5B','PLANE STRAIN'):
OUT1(6,'10B','THICKNESS','32D,20'T):
if Q=0 then OUT0(6,' O&N EIGHT'):
= 220-

CRLF(3):
OUT0(6,'** NE,AR,GAMMA,5B,YOUNG=1,4B,POISSON=2,AR,1E,5B,1JF,5B,1HE'):
CRLF(2):
for i=1 step 1 until NE do
begin OUT7(6,'22D,70,2D,3D,2B7D,D+78D,3D,9027D,4B2D,4022D',
GAMMA(I),EE(I),V(I),IE(I),JF(I),HE(I)):
CRLF(1):
end
CRLF(4):
OUT0(6,'** NP,3B,(ORDER),9D,YO,9B,YO,8D,LOAD(X),5B,LOAD(Y)',
6B,DISP(X),3B,DISP(Y)):
= 230-

```

入力データの
打ち出し

```

CRLF(2);
for I=1 step 1 until NP do
begin
  I:=2*I-1; J:=2*I;
  OUT1(6, '2D, 32D, 27D, 2R-62D, 2D, -62D, 2D, I, I, I, 2, X(I), Y(I));
  OUT4(6, 'B, 2(H-62D, 4D), 3B, 2(G-32D, 3D), LOAD(I1), LOAD(I2), DIS(I1), DIS(I2));
  CRLF(1);
end;
CRLF(3);
OUT1(6, 'NFPXY, 22D, NFPXY); CRLF(1);
GK1=GK2=0.000000000;
for I=1 step 1 until NFPXY do
begin
  I(GK1)=0.0100000000AGK1<0.0100000000 then SP=CE(2);
  OUT1(6, '32D, FPNXYL(I));
  I:=ENTIER(I/10+0.0100000000); JJ:=ENTIER(I/20+0.0100000000);
  GK1=I/10-FLOAT(I); GK2=I/20-FLOAT(JJ);
  I(GK2)=0.0100000000AGK2<0.0100000000 then CRLF(1);
end;

```

- 240-

- 250-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 6

```

CRLF(1);
if NFPXY=NP2 v NMPXY=NP2 then
begin CRLF(3);
  OUT0(6, '*** I wonder if you are a man of sense. ***');
  CRLF(1); go to L39;
end;
if PPP=1 then go to L910;
L2: for I=1 step 1 until NP2 do
begin
  for J=1 step 1 until NP2 do
  begin MAT[I, J]=0.000000000; end;
end;
for I=1 step 1 until NP do
begin
  A1=2*I-1;
  A2=2*I;
  for J=1 step 1 until 8 do
  begin
    if ENP[I, J]=0 then go to L3 else go to L4;
    KK=ENP[I, J];
    AA1=2*CNP[I, J]-1;
    AA2=2*CNP[I, J];
    for I1=1 step 1 until NP do
    begin
      B1=2*I1-1;
      B2=2*I1;
      for JJ=1 step 1 until 8 do
      begin
        if ENP[I1, JJ]=0 then go to L5 else go to L6;
        if ENP[I1, JJ]=KK then go to L7 else go to L8;
        BB1=2*CNP[I1, JJ]-1;
        BB2=2*CNP[I1, JJ];
        MAT[A1, B1]=MAT[A1, B1]+K[KK, AA1, BB1];
        MAT[A1, B2]=MAT[A1, B2]+K[KK, AA1, BB2];
        MAT[A2, B1]=MAT[A2, B1]+K[KK, AA2, BB1];
        MAT[A2, B2]=MAT[A2, B2]+K[KK, AA2, BB2];
      end;
    end;
  end;
end;
L4:
end;
L5:
end;
L6:
end;
L7:
end;
L8:
end;
L9:
end;
L10:
end;
if Q=0 then go to L99;
for I=1 step 1 until NP do
begin
  A2=2*I;
  for J=1 step 1 until 8 do

```

- 260-

- 270-

- 280-

- 290-

- 300-

累積特性マトリ
クスの計算

自重考慮

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 7

```

begin
  if ENP[I, J]=0 then go to L9 else go to L10;
  L9: KK=ENP[I, J]; LOAD(A2)=LOAD(A2)+KF[KK];
end;
L10:
end;

```

```

L99:
for I=1 step 1 until NP2 do
begin
for J=1 step 1 until NP2 do
- 310-
begin LOAD(I)=LOAD(I)-MAT(I,J)*DISP(J); end;
end;
if PPP=1 then go to L920;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin
begin
I=MNPXY(I);
J=MNPXY(J);
MAT(I,J)=MAT(I,J);
- 320-
end;
end;
end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin
if I=J then MAT(I,J)=MAT(I,J)+1.000000000 else MAT(I,J)=0.000000000;
end;
end;
end;
for NK=1 step 1 until NMPXY do
- 330-
begin
R=2*NMPXY;
if MAT(NK,NK)=0.000000000 then go to L11 else P=NK+1;
if P>NMPXY then go to L12;
L13: if MAT(P,NK)=0.000000000 then go to L14 else P=P+1;
if P>NMPXY then go to L12 else go to L13;
L14: for J=1 step 1 until 8 do
begin MAT(NK,J)=MAT(NK,J)+MAT(P,J); end;
L11: R=MAT(NK,NK);
for J=1 step 1 until 8 do
- 340-
begin MAT(NK,J)=MAT(NK,J)/R; end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
R=MAT(I,NK);
for J=1 step 1 until 8 do
begin if I=NK then MAT(I,J)=R+MAT(NK,J) else MAT(I,J)=MAT(NK,J); end;
end;
if NK<NMPXY then go to L40;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
- 350-
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin
MAT(I,J)=MAT(I,J)+ATM(I,NMPXY+J); end;
end;
end;
L40:
end;
L920:
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
I=MNPXY(I); S=DISP(I);
for J=1 step 1 until NMPXY do
- 360-
begin JJ=MNPXY(J); S=S+MAT(I,J)*LOAD(JJ);
end;
DISP(I)=S;
end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin I=MNPXY(I); RF(I)=0.000000000; end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
I=MNPXY(I);
RF(I)=LOAD(I);
- 370-
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin JJ=MNPXY(J); RF(I)=RF(I)+MAT(I,J)*DISP(JJ); end;
end;
EJECT; CRLF(1);
OUTO(6,'113R','PAGE 2'); CRLF(1);
OUTO(6,'** RESULT-1 ( NODAL POINT INFORMATION ) **');
CRLF(3);
OUTO(6,'** NP',AR,'LOAD(X)',8B,'LOAD(Y)',9B,'EAC(X)',9B,'EAC(Y)',
9B,'DISP(X)',6B,'DISP(Y)',7B,'X',12B,'Y');
CRLF(2);
- 380-
GK1=GK2=GK3=GK4=0.000000000;
for I=1 step 1 until NP do
begin
I1=2*I-1; I2=2*I;
GK1=GK1+LOAD(I1); GK2=GK2+LOAD(I2);
GK3=GK3+RF(I1); GK4=GK4+RF(I2);
OUT1(6,'22DB',I);
OUT1(6,'2(-62D,6D)*2(-72D,6D)+2B,4(-67D,4D)',LOAD(I1),LOAD(I2),RF(I1),RF(I2),
DISP(I1),DISP(I2),X(I1),DISP(I1),Y(I1),DISP(I2));
CRLF(1);
- 390-
end;
end;

```

初期変位考慮

可動節点につ
ての逆マトリク
スの計算

可動節点の変位
の計算

固定節点の反力
計算

結果 [1]
節点情報の打ち
出し
(変位値, 反力)

```

CRLF(1);
OUTO(6, ' GK(R)');
OUTA(6, '2(-AZU,AD),2(-ZDU,6D)', GK1, GK2, GK3, GK4); CRLF(1);
EJECT; CRLF(1);
OUTO(6, '113R, PAGE 3'); CRLF(1);
OUTO(6, 'RESUL-T-2 ( ELLMENT INFORMATION ) ');
CRLF(3);
OUTO(6, ' NF, 9P, SIGMA-X, 7D, SIGMA-Y, 7B, TAU-XY, 8B, TAU-MAX,
      7B, SIGMA-1, 7B, SIGMA-2, 9B, THETA, 7B, K (X/Y)');
- 40U-

```

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 9

各要素内の場力
計算

```

CRLF(2);
for J=1 step 1 until NE do
begin
  I:=IE[I];
  JJ:=JE[I];
  MM:=ME[I];
  X:=XE[I];
  Y:=YE[I];
  YJ:=Y[J];
  YM:=Y[MM];
  UV[1]:=DISP[2*I-1];
  UV[2]:=DISP[2*I];
  UV[3]:=DISP[2*JJ-1];
  UV[4]:=DISP[2*JJ];
  UV[5]:=DISP[2*MM-1];
  UV[6]:=DISP[2*MM];
  if PS=1 then begin C1:=EE[I]/(1.000000000-V[I]*V[I]); C2:=V[I]; end
  else begin C1:=EE[I]*(1.000000000-V[I])/((1.000000000+V[I])*(1.000000000-2.000000000*V[I]));
  C2:=V[I]/(1.000000000-V[I]); end;
  F1:=(1.000000000-C2)/2.000000000;
  C0:=C1/(X-XI)*YM*(XI-XM)*YJ*(XM-XJ)*YI;
  MA[1,1]:=(YM-YJ)*C0;
  MA[1,2]:=C2*(XJ-XM)*C0;
  MA[1,3]:=(YI-YM)*C0;
  MA[1,4]:=(-C2)*(XI-XM)*C0;
  MA[1,5]:=(YI-YJ)*(-C0);
  MA[1,6]:=C2*(XI-XJ)*C0;
  MA[2,1]:=C2*(YM-YJ)*C0;
  MA[2,2]:=(XJ-XM)*C0;
  MA[2,3]:=C2*(YI-YM)*C0;
  MA[2,4]:=(XI-XM)*(-C0);
  MA[2,5]:=(-C2)*(YI-YJ)*C0;
  MA[2,6]:=(XI-XJ)*C0;
  MA[3,1]:=F1*(XJ-XM)*C0;
  MA[3,2]:=F1*(YM-YJ)*C0;
  MA[3,3]:=(-F1*(XI-XM)*C0);
  MA[3,4]:=F1*(YI-YM)*C0;
  MA[3,5]:=F1*(XI-XJ)*C0;
  MA[3,6]:=(-F1*(YI-YJ)*C0);
  for J=1 step 1 until 3 do
  begin
    S:=0.000000000;
    for L=1 step 1 until 6 do
    begin S:=S+MA[J,L]*UV[L]; end;
    SIGMA[J]:=S;
  end;
  S1:=(SIGMA[1]+SIGMA[2])/2.000000000;
  S2:=SQRT(((SIGMA[1]-SIGMA[2])/2.000000000)*((SIGMA[1]-SIGMA[2])/2.000000000)+SIGMA[3]*SIGMA[3]);
- 42U-
- 43U-
- 44U-
- 45U-

```

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 10

```

SIG1:=S1+S2;
SIG2:=S1-S2;
THETA:=2.6478897564*(ARCTAN(2.000000000*SIGMA[3]/(SIGMA[1]-SIGMA[2])));
if (SIGMA[1]-SIGMA[2])>0.000000000 then THETA:=THETA+90.00000000;
L20:
if SIGMA[2]>-0.0000001*SIGMA[2] then GK1:=999.9999 else GK1:=SIGMA[1]/SIGMA[2];
OUT1(6, '2203R, ');
OUTB(6, '6(2B-32D, 6), 5(-2ZU, 3D, 4R-32D, 4D), SIGMA[1], SIGMA[2], SIGMA[3], S1, S2, THETA, GK1);
CRLF(1);
G1[1]:=SIGMA[1]; G2[1]:=SIGMA[2];
G3[1]:=SIGMA[3]; G4[1]:=S2;
G5[1]:=SIG1; G6[1]:=SIG2;
G7[1]:=THETA; G8[1]:=GK1;
end;
- 46U-

```

結果 [2]
要素情報の打ち
出し
(場力)

```

EJECT: CRLF(1);
OUT0(6,'113R','PAGE 4'); CRLF(1);
OUT0(6,'* RESULT-3 ( MEAN VALUE AROUND NODAL POINT ) *');
CRLF(3);
OUT0(6,'* NO*,QR,SIGMA-A',7B,'SIGMA-Y',7B,'TAU-AY',8B,'TAU-AX',7B,'SIG-A-1',
7B,'SIGMA-2',9B,'THEIA',7B,'K (X/Y)');
- 470-

CRLF(2);
for J=1 step 1 until NP do
begin
  SIGMA(1)=SIGMA(2)+SIGMA(3)+S2=S1G1=SIG2=THETA=UK1=0.00000000;
  JJ=0;
  for J=1 step 1 until 8 do
  begin
    KK=EMPF(J);
    if KK=0 then go to L50;
    JJ=JJ+1;
    - 480-

    SIGMA(1)=SIGMA(1)+G1(KK);
    SIGMA(2)=SIGMA(2)+G2(KK);
    SIGMA(3)=SIGMA(3)+G3(KK);
    S2=S2+G4(KK);
    S1G1=S1G1+G5(KK);
    SIG2=SIG2+G6(KK);
    THETA=THETA+G7(KK);
    GK1=GK1+G8(KK);
  end;
  L50;
  - 490-

  GK2=FLOAT(JJ);
  SIGMA(1)=SIGMA(1)/GK2;
  SIGMA(2)=SIGMA(2)/GK2;
  SIGMA(3)=SIGMA(3)/GK2;
  S2=S2/GK2;
  S1G1=S1G1/GK2;
  SIG2=SIG2/GK2;
  THETA=THETA/GK2;
  GK1=GK1/GK2;
  OUT1(6,'22D3R',1);
  - 500-

  FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 6 PAGE 11

  OUT1(6,'6(2D-32D,6D),5D-22D,3D,4R-32D,4D',
  SIGMA(1),SIGMA(2),SIGMA(3),S2,
  S1G1,SIG2,THETA,GK1);
  CRLF(1);
  end;
  go to L39;
  L12: CRLF(5); OUT0(6,'CAN NOT CARRY ON'); CRLF(1);
  L39: EJECT;
  end;
  end;
  - 510-

end; if KEY(8) then go to START;
end;

```

各節点のまわり
の要素における
応力の平均値計
算

結果 [3]
節点における応
力の打ち出し

§ 10 盛土体への応用解析例

まえがき

細粒土を材料とするような盛土では、主として自重により比較的長期間にわたり圧縮沈下現象が認められる。これは盛土の締固めの問題にも関連して重要な問題である。これに関しては別報[※]にて紹介したように試験盛土を築造して圧縮沈下量を観測してきたが、現在はさらに締め固められた土の圧縮特性と盛土の長期間にわたる圧縮沈下量との関連を調べている。ところでこの圧縮沈下量の推定や、またセン断破壊等に対する盛土の安定性の検討に対しても、まず盛土内部の応力分布を知ることが重要な事柄になってくる。

ここでは盛土の内部応力について一応、盛土を弾性体とみなして、Airy の 応力函数を利用した解析と有限要素法を利用した検討を行なっている。

※土木技術資料第 11 巻 8 号「関東ローンを材料とする試験盛土」(第 2 報)

土木研究所資料第 475 号「第 1 試験盛土報告」

(準備中)「第 2 試験盛土報告」

〔1〕 盛土の内部応力

1. Airy の応力函数による解析

図 1-10-1 に示すように地中の点 A における自重による応力を、水平な半無限クサビの積重ねの問題として Airy の 応力函数を導入して求められた弾性解によると

※詳細については付録参照のこと。

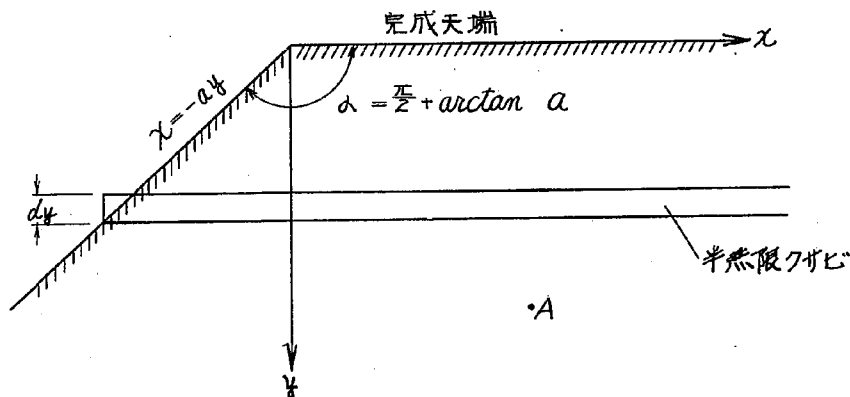


図 1-10-1 半無限クサビの積重ねによる方法 (Airy の 応力函数を利用)

$$\frac{\sigma_x}{\rho g y} = \frac{-1}{(\alpha + \frac{1}{\alpha})(1+a^2)^2} \{ (\alpha[1+a^2] + a)(1+a^2) + a^2(\eta+a) \cdot \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} - ([1+3a^2] + a\eta[1-a^2]) \cdot \sin^{-1}(\frac{1}{1+\eta^2})^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (1-10-1)$$

$$\frac{\sigma_y}{\rho g y} = -1 + \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{\alpha})(1+a^2)^2} \{ a(1+a^2) - (\eta+a) \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} + [1-a^2] - a\eta[3+a^2] \sin^{-1}(\frac{1}{1+\eta^2})^{\frac{1}{2}} \} \dots\dots\dots (1-10-2)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho g y} = \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{\alpha})(1+a^2)^2} \{ (1+a^2) + a(\eta+a) \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} + (a^2-1)(\eta+a) \sin^{-1}(\frac{1}{1+\eta^2})^{\frac{1}{2}} \} \dots\dots\dots (1-10-3)$$

ここに

σ_x : 水平応力 σ_y : 鉛直応力 τ_{xy} : セン断応力

ρg : 単位体積重量

η : $\frac{z}{y}$

a : 斜面勾配 α : 斜面と天端のなす角度

これらの式には弾性常数を含んでいないので等方性の均一物質なら弾性係数、ポアソン比の影響を受けないが、斜面の勾配 a 、 α に大きく影響されることがわかる。

これらの式を図 1-10-2 のような断面を有する盛土にあてはめると図 1-10-3 に破線で示されるような応力分布が得られる。しかしながら、これは半無限連続体の一部分の応力分布であるので、盛土のように有限な境界条件を有するものに対してはあまり適当でなく、次に述べる有限要素法による解の方が実際の値に近いものと考えられる。

2. 有限要素法による解析

盛土のような特殊な形状や境界条件を有するものに対する応力解析は、従来の弾性論を用いる方法によると実用計算上ほとんど不可能に近かった。しかしながら最近開発された有限要素法 (Finite Element Method) を用いることによりこのような問題に対する応力解析も可能になってきている。有限要素法とは、連続体のある形状を有する有

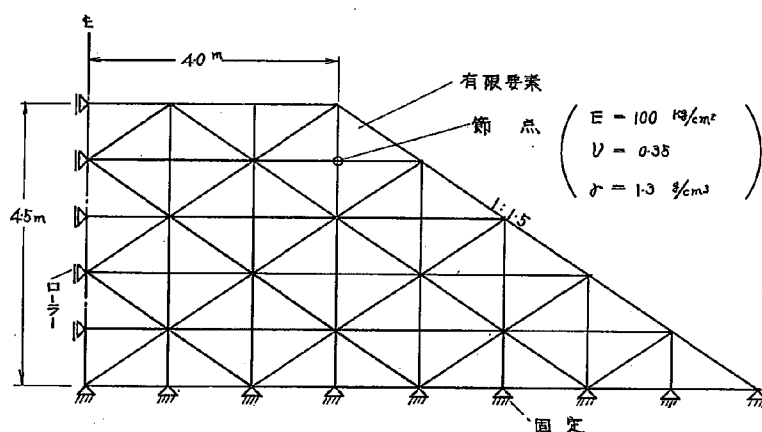


図 1-10-2 盛土体の理想化（左右対称）

限個の要素に分割し、要素の変形条件等の性質を、実際の現象に合致するように仮定することにより連続体をこれら要素の集合体として全体的に解析しようとするものである。こゝでは盛土を二次元の弾性体問題として平面歪の条件で有限要素法を利用して解析した。盛土体を図 1-10-2 に示すような三角形要素の集合であるとした。この場合における要素数は 55 個、節点数は 39 個であるが、この分割数は電子計算機の記憶容量に左右されるもので、分割数を増やすことが出来れば、さらに詳細な結果を得ることが出来る。この報文における要素分割はかなり粗いので細部にわたっての検討はなされていないことをおことわりしておきたい。

なお解析に用いた盛土断面は、先に報告した試験盛土（B 盛土）のものを採用した。

(1) 均一な盛土の内部応力分布

図 1-10-3 には盛土内の A-A' 断面、B-B' 断面に発生する水平応力 σ_x 、鉛直応力 σ_y 、せん断応力 τ_{xy} を示している。A-A' 断面、B-B' 断面上の○印の点は丁度節点の位置に該当するのであるが、法面上の点については分割要素が大きいため解を得るには至っていない。

図中に Airy 応力函数により得られた解を破線で示しているが、 σ_y の分布においては、これは FEM による解とかなり良く一致している。

また図中において一点鎖線で示した

$$\sigma_y = \gamma \cdot h \quad (\gamma: \text{単位体積重量}, h: \text{上載土直高})$$

とする方法による σ_y の分布と FEM 法のそれとを比較すると、盛土中央部においては

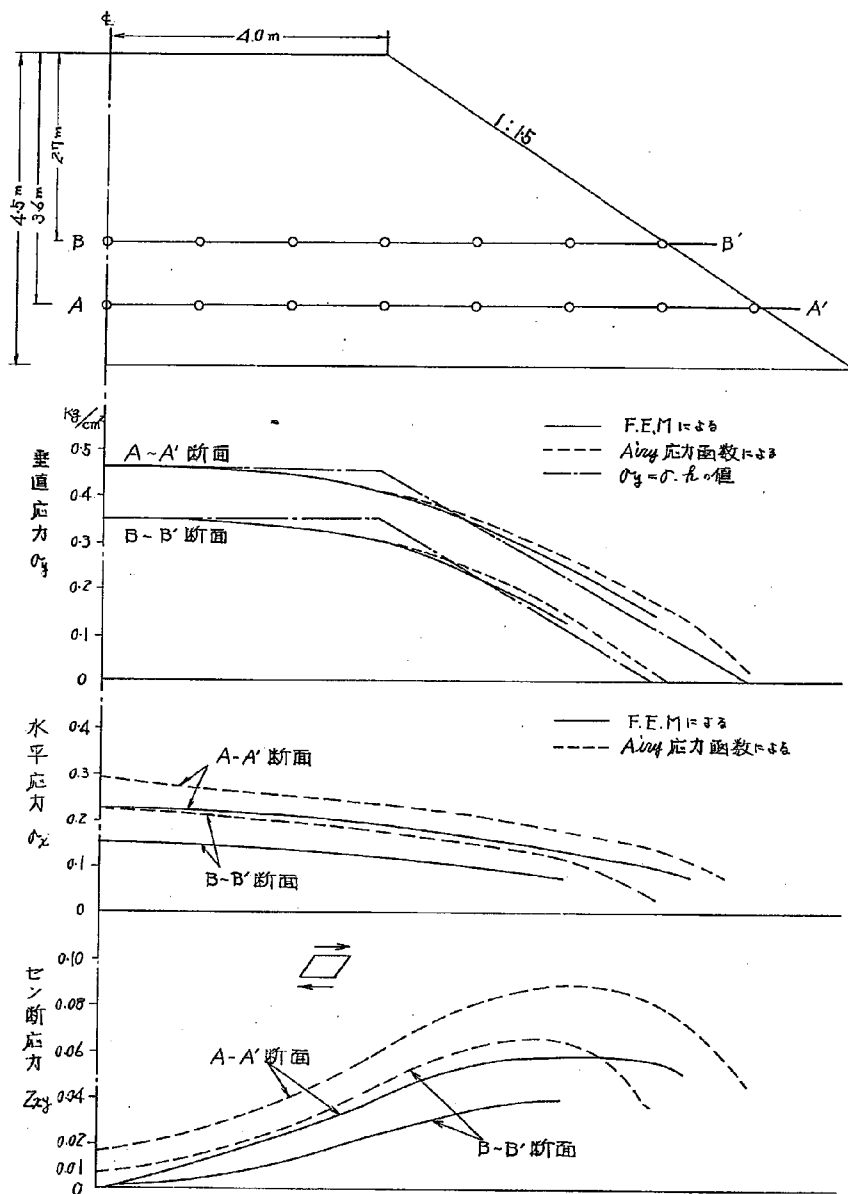


図 1-10-3 σ_y , σ_x , τ_{xy} の分布図

両者共よく一致しているが、法肩部分から法先にかけてはかなり相違していることがわかる。即ち FEM 法で求めた σ_y の弾性解は法肩部分では $\gamma \cdot l$ より小さく、法先部分では大きくなっている。

τ_{xy} の分布においては法先部分で水平せん断応力が増加する様子がわかる。Airy

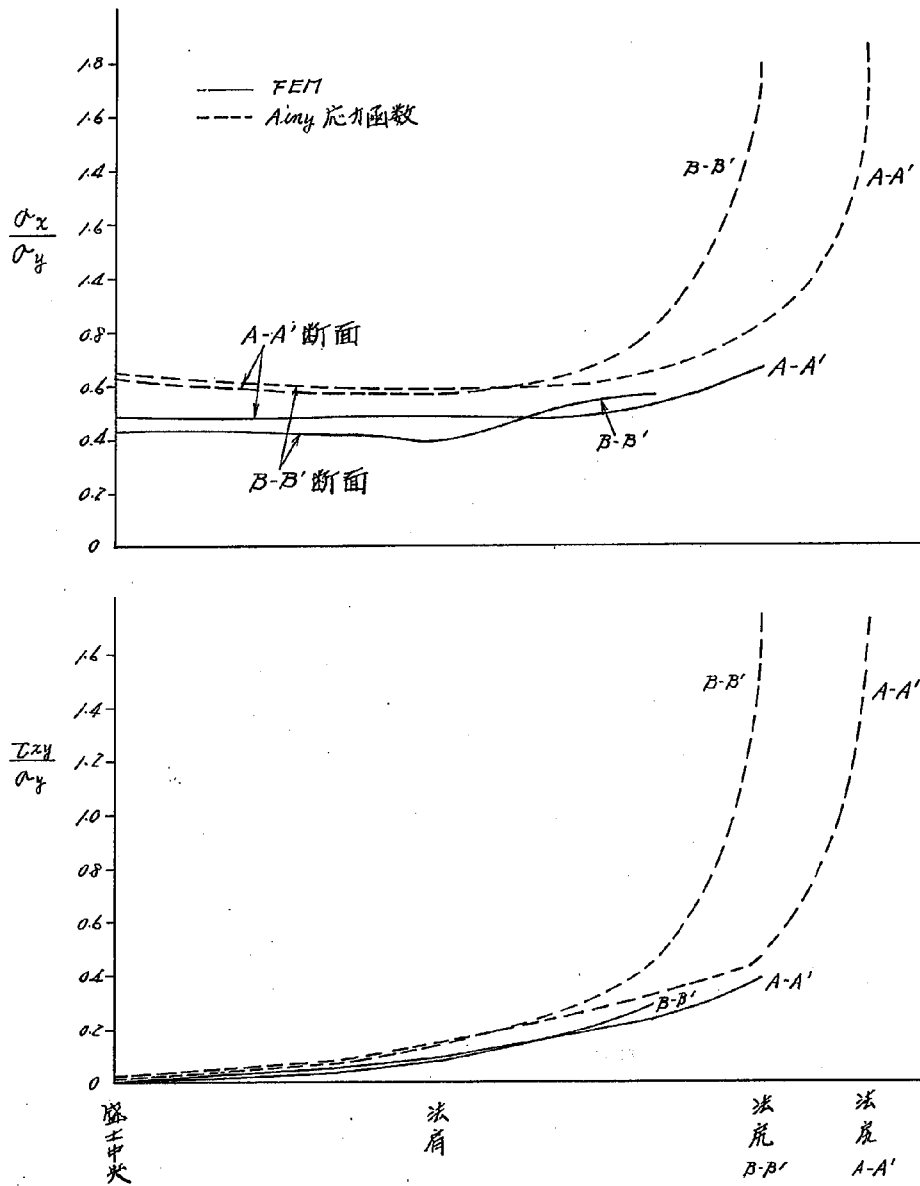


図 1-10-4 σ_x/σ_y 、 τ_{xy}/σ_y の分布

応力函数法と FEM の値はかなり大きく異なるが、値の変化の様子は全く同じ傾向にある。FEM では盛土底面の拘束条件が入ってくるためにポアソン比によっても σ_x 、 τ_{xy} の値は変化し、ポアソン比が大きくなるにつれてこれらの値は増加する。

図 1-10-4 には図 1-10-3 に対応して σ_x/σ_y 、 τ_{xy}/σ_y の値を示している。な

お側方変位が完全に拘束された場合に自重による σ_x/σ_y の値は $\nu/(1-\nu)$ に等しくなる。

図 1-10-5 には主応力分布と地盤反力分布（剛性基礎）を示す。地盤反力分布は図 1-10-3 に示した σ_y の分布と全く同様な変化をしている。

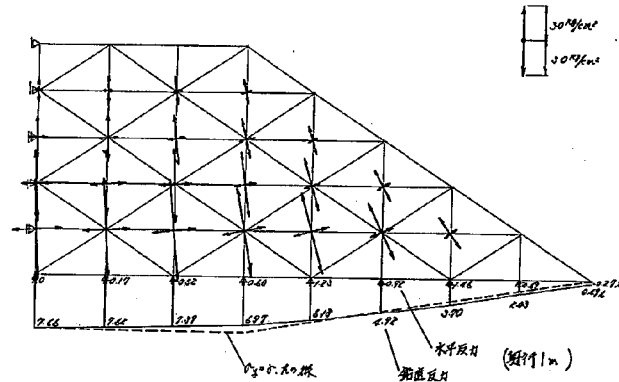


図 1-10-5 主応力と地盤反力（剛性基礎）

(2) 均一な盛土の変形

盛土においては施工中、施工後を通して圧縮クリープを含む粘弾性的な、あるいは塑性的な変形が生ずると考えられるが、ここでは盛土施工中に自重により弾性的に変形する場合を取り扱う。図 1-10-6 の左半分には盛土が瞬間的に築造されたときの自重による瞬間的な弾性変形を示している。右半分には施工が水平な 5 層に分けて段階的に行なわれた場合の弾性変形を示している。これは丁度、施工中に各層の境界に沈下板を設置して沈下観測を行なって得られる量に相当する。

図 1-10-6 によると、施工における盛土の鉛直変位は盛土高の半分の位置で大きく、水平変位は法面部で大きいことがわかる。このことは試験盛土において観測された施工中の沈下現象によく一致している。

(瞬間築造)

(5層の施工)

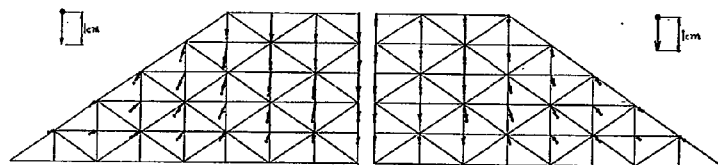


図 1-10-6 自重による変位

(3) 不均一な盛土の内部応力

(1) 法面が中央部に比してゆるく締められた場合

法面がゆるく締められた場合にはその部分の弾性係数が小さくなるとして、中央部と法面部との弾性係数を変えて、図 1-10-7 に示すような点の σ_y 、 τ_{xy} を調べた。結果を表 1-10-1 に示す。表中、○印でかこんだ数字は法面部における点である。この結果から法面がゆるい場合には、均一な盛土に比して σ_y 、 τ_{xy} 共に中央部の法面寄りの部分 (12、19、27番) に応力が集中し、逆に法面部分では減少することがわかる。

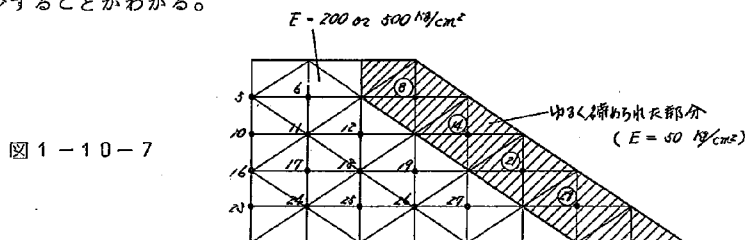


図 1-10-7

節点	垂直応力 σ_y (Kg/cm ²)			せん断応力 τ_{xy} (Kg/cm ²)		
	均	中央部 法面 200-50	500-50	均	200-50	500-50
5	0.120	0.116	0.114	0.002	0	-0.001
6	0.119	0.117	0.115	0.002	0.001	0
⑧	①0.092	①0.089	①0.087	①0.008	①0.003	①0.009
10	0.239	0.234	0.232	0.002	0.004	0.005
11	0.236	0.237	0.238	0	0.001	0.002
12	0.228	0.240	0.247	-0.004	-0.005	-0.005
⑬	①0.126	①0.113	①0.110	①0.023	①0.004	①0.001
16	0.354	0.352	0.351	-0.002	-0.002	-0.001
17	0.352	0.351	0.351	-0.005	-0.004	-0.004
18	0.334	0.342	0.345	-0.013	-0.014	-0.015
19	0.308	0.323	0.326	-0.024	-0.030	-0.032
⑳	①0.136	①0.121	①0.117	①0.039	①0.013	①0.007
25	0.467	0.464	0.463	0.001	0.001	0.001
24	0.461	0.461	0.462	-0.011	-0.011	-0.010
25	0.440	0.455	0.458	-0.024	-0.025	-0.026
26	0.407	0.418	0.420	-0.038	-0.044	-0.045
27	0.349	0.362	0.364	-0.054	-0.062	-0.064
㉑	①0.147	①0.122	①0.119	①0.057	①0.025	①0.017

表 1-10-1 均一な盛土と法面部分のゆるい盛土における応力の比較

(2) 盛土施工面が不均一に締め固められた場合

ある施工基面に締め固め度の不均一性を想定して、図 1-10-8 のように弾性係数の異なる施工基面上にさらに盛土した場合の内部応力分布を検討した。図中の各点 a、b、c...、A、B、C... の σ_y を、施工基面が均一な場合 ($E=200 \text{ Kg/cm}^2$) のそれと比較した結果を表 1-10-2 に示す。

不均一な盛土の内部では応力の再配分が行われ、かたい部分に応力が集中し、

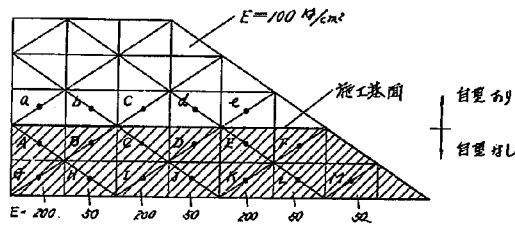


図 1-10-8

やわらかい部分では応力が減少している。この量は
施工基面の不均一の場合によっても変わるが、この
例では、かたい部分での応力の増加率は施工基面が
均一な場合に比して約 50% であり、やわらかな部

分の減少の割合は 50~60% であった。また不均一な基面上に施工された均一な
盛土の内部応力には、この不均一さはあまり影響を与えていないようである。

(c) 水平各層の締め固め度が異なる場合

盛土が水平 5 層から成る場合、各層の弾性係数を図 1-10-9 に示すように変
えて、図中の各点における σ_y と τ_{xy} について比較検討を行なった。表 1-10-3
によると σ_y については、層毎に弾性係数が変化しても盛土が均一な場合とほとんど
同じであるが、 τ_{xy} についてみると上層がかたい場合には、均一な盛土に比して法
面近くの τ_{xy} が多少減少する傾向にある。

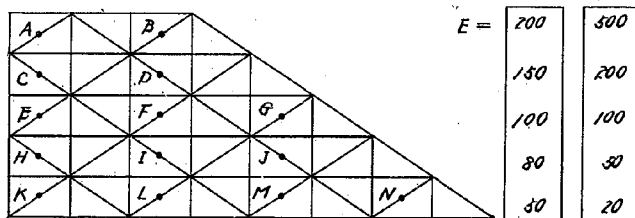


図 1-10-9

表 1-10-3 均一な盛土との締め固め度が異なる盛土における応力の比較

	垂直応力 σ_y (kg/cm ²)			せん断応力 τ_{xy} (kg/cm ²)		
	均一盛土	200→50	500→20	均一盛土	200→50	500→20
A	0.041	0.062	0.062	0.002	0.004	-0.004
B	0.049	0.046	0.031	0	-0.001	-0.016
C	0.179	0.182	0.182	0.001	0.004	0.005
D	0.156	0.150	0.138	-0.001	0.004	0.006
E	0.224	0.302	0.301	-0.001	0	0
F	0.269	0.266	0.259	-0.013	-0.009	-0.003
G	0.131	0.133	0.141	-0.032	-0.029	-0.028
H	0.411	0.416	0.416	-0.004	-0.005	-0.002
I	0.377	0.375	0.368	-0.023	-0.019	-0.013
J	0.242	0.239	0.240	-0.046	-0.039	-0.029
K	0.520	0.525	0.527	-0.006	-0.006	-0.006
L	0.482	0.482	0.479	-0.038	-0.034	-0.028
M	0.353	0.352	0.354	-0.066	-0.060	-0.052
N	0.146	0.146	0.148	-0.057	-0.056	-0.053

(4) 基礎地盤が不等沈下した場合の盛土内部応力

盛土の基礎地盤が図 1-10-10 のように不等沈下したときに、盛土体はその弾性変形の範囲内で追隨して沈下した場合の盛土内部の応力分布を得て、それによって生ずる盛土体内部の応力の増減を図中に示している。これによると基礎の沈下の大きい箇所の上部では盛土内部の σ_y は減少する。また σ_x は上層において増加の割合が大きく、 τ_{xy} はさらに法面部分において増加の割合が著しい。

なお基礎地盤の弾性を考慮に入れて、盛土と基礎地盤とを一体とした

解析を行なえばさらに実際の場合に近い検討が行なえるものと思われる。

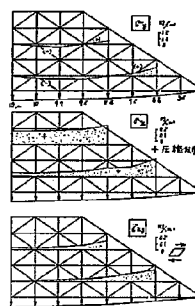
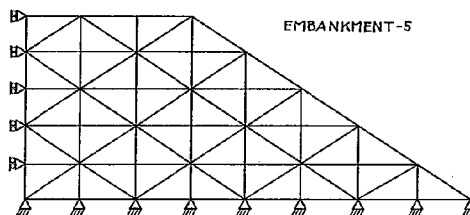


図 1-10-10

(5) ポアソン比の影響

次にヤング率 $E = 100 \text{ Kg/cm}^2$ 、単位体積重量 $\gamma = 1.3 \text{ t/m}^3$ 、の場合の応力ならびに変形をポアソン比 (ν) をパラメーターに表わした図を図 1-10-11、表 1-10-4、表 1-10-5、表 1-10-6 と図 1-10-12、表 1-10-7 に示す。

変形についていえばポアソン比の増加につれて、盛土体は横にふくれる傾向を示している。垂直応力 (σ_y) はポアソン比の変化による変化は認められないが、水平応力 (σ_x) ならびにせん断力 (τ_{xy}) はポアソン比の増加につれて大きくなっている。これらは弾性理論解によるものと同様な傾向を示しているといえるであろう。

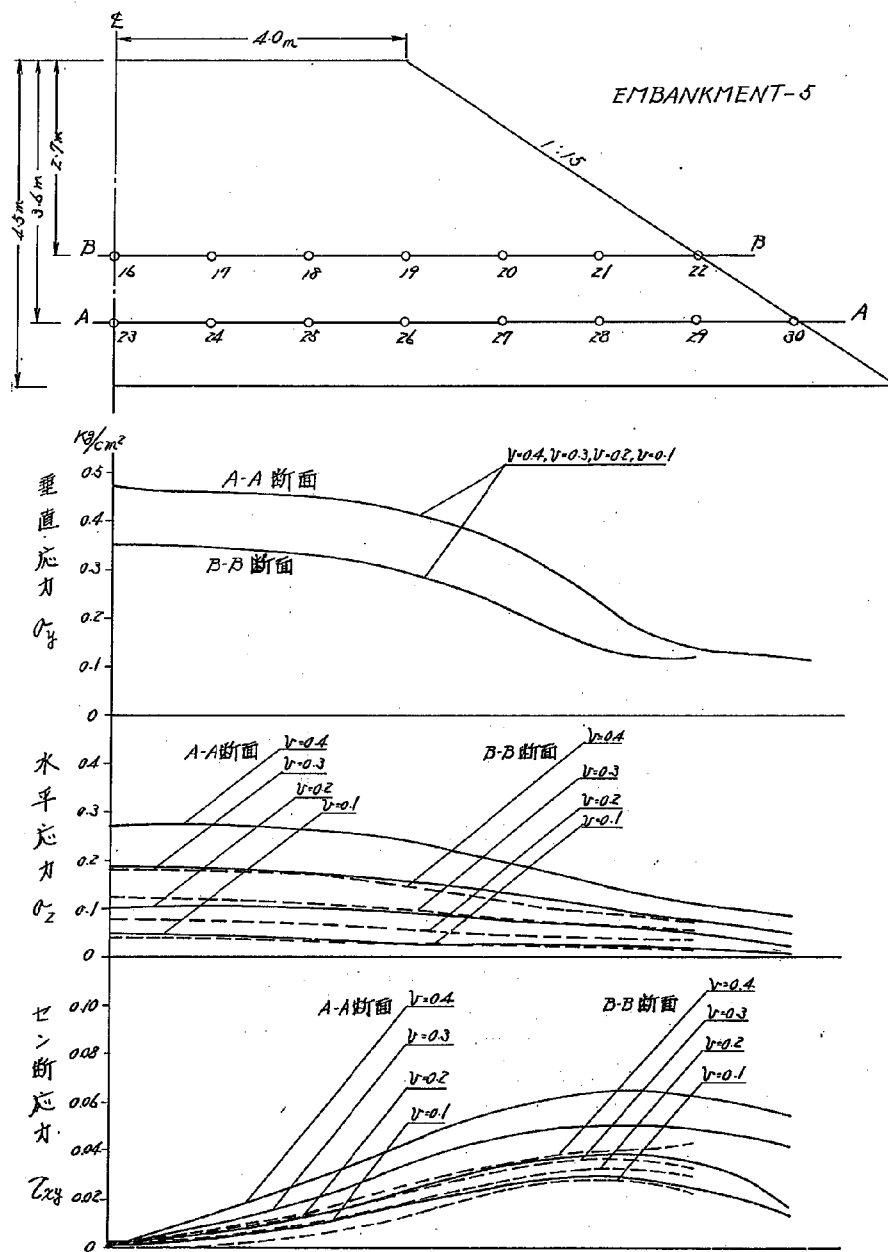


図 1-10-11 ポアソン比による応力変化

表 1-10-4 ポアソン比の変化による応力: σ_x (Kg/cm²)

	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$
16	0.041	0.080	0.127	0.188
17	0.037	0.075	0.121	0.180
18	0.036	0.071	0.114	0.169
19	0.030	0.060	0.098	0.147
20	0.034	0.057	0.086	0.123
21	0.032	0.048	0.066	0.087
22	0.023	0.039	0.059	0.082
23	0.048	0.107	0.181	0.275
24	0.049	0.107	0.180	0.276
25	0.043	0.099	0.167	0.255
26	0.042	0.092	0.156	0.239
27	0.034	0.077	0.131	0.200
28	0.035	0.068	0.109	0.163
29	0.026	0.049	0.079	0.117
30	0.010	0.029	0.053	0.087

表 1-10-5 ポアソン比の変化による応力: σ_y (Kg/cm²)

	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$	γ_h
16	0.353	0.353	0.353	0.355	0.351
17	0.351	0.351	0.351	0.354	
18	0.332	0.332	0.333	0.336	
19	0.304	0.304	0.306	0.311	
20	0.231	0.231	0.230	0.228	
21	0.140	0.140	0.138	0.134	
22	0.119	0.119	0.118	0.115	
23	0.474	0.472	0.469	0.464	0.468
24	0.463	0.461	0.461	0.461	
25	0.453	0.451	0.449	0.446	
26	0.407	0.407	0.407	0.407	
27	0.355	0.354	0.351	0.346	
28	0.251	0.251	0.251	0.249	
29	0.142	0.144	0.146	0.148	
30	0.116	0.119	0.123	0.125	

表 1-10-6 ポアソン比の変化による応力: τ_{xy} (Kg/cm²)

	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$
16	-0.001	0	0.001	0.003
17	0.001	0.003	0.004	0.006
18	0.005	0.008	0.011	0.014
19	0.014	0.018	0.022	0.027
20	0.023	0.028	0.032	0.036
21	0.029	0.033	0.037	0.041
22	0.024	0.030	0.038	0.045
23	-0.005	0.004	-0.002	0.001
24	0.003	0.006	-0.009	0.013
25	0.009	0.014	0.020	0.028
26	0.016	0.024	0.033	0.044
27	0.027	0.036	0.048	0.060
28	0.028	0.039	0.051	0.065
29	0.027	0.038	0.050	0.064
30	0.013	0.026	0.042	0.061

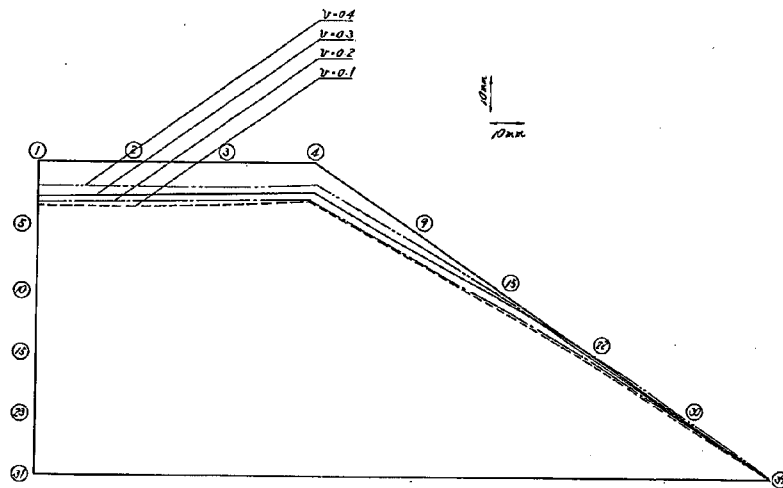


図1-10-12 ポアソン比の変化による変形 (EMBANKMENT-5, $E=100 \text{ Kg/cm}^2$, $\gamma=1.3 \text{ t/m}^3$)

表 1-10-7 ポアソン比の変化による変形
x 方向の変位 (cm)

	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$
1	0	0	0	0
2	-0.06	-0.04	-0.04	0.04
3	-0.13	-0.08	-0.02	0.07
4	-0.19	-0.13	-0.04	-0.08
5	0	0	0	0
9	-0.16	-0.07	0.04	0.18
10	0	0	0	0
15	-0.10	-0.01	0.11	0.27
16	0	0	0	0
22	-0.03	0.04	0.14	0.26
23	0	0	0	0
30	0.01	0.05	0.09	0.16
31	0	0	0	0
39	0	0	0	0

y 方向の変位

	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$
1	-1.28	-1.18	-1.00	-0.72
2	-1.29	-1.19	-1.00	-0.73
3	-1.22	-1.13	-0.96	-0.70
4	-1.11	-1.02	-0.88	-0.64
5	-1.25	-1.16	-0.98	-0.68
9	-0.85	-0.78	-0.66	-0.45
10	-1.08	-1.0	-0.84	-0.57
15	-0.53	-0.49	-0.4	-0.25
16	-0.84	-0.77	-0.64	-0.43
22	-0.25	-0.23	-0.18	-0.11
23	-0.45	-0.42	-0.35	-0.23
30	-0.08	-0.08	-0.07	-0.05
31	0	0	0	0
39	0	0	0	0

3. 解析にあたっての問題点

以上有限要素法により盛土の解析を行なったが、盛土材料は弾性体ではないのに弾性論を適用していることに無理があることは明らかであり、今後塑性論等をいかに有限要素法に適用させるかが問題となってくる。

電子計算機の発達と共に発展してきた有限要素法は今後も種々の分野への広い適応性の可能性を持っているが、そのためにはまだまだ解決しなければならない点が多くある。現段階で有限要素法を適用して気付いたことを、いくつか述べておく。

① 要素の形状により解析の精度が異なってくる。

すなわち、三角形要素では自由度6として

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

と仮定しているが、四角形要素では自由度8として

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

と仮定することにより、変位函数に xy の項が加わり変位形式が変わってくる。

一般に自由度を大きくすると精度は上がる様であるが、適合条件や計算の煩雑さを考えるとそう一概にもいえない。

② 構造物の分割の仕方により解析結果が大きく異なる場合がある。

すなわち、同じ三角形要素であっても正三角形の場合と底辺の長さが小さく、高さの大きい二等辺三角形の様な場合とでは結果が異なってくるようである。又合同な三角形であってもその向きが違うと結果も異なってくるようである。そこで要素の切り方による差がどのように現われるかを調べるために、図1-10-13に示すEM-2、EM-3、EM-4、EM-5 ($E=100\text{Kg/cm}^2$ 、 $\gamma=1.3\text{t/m}^3$ 、 $\nu=0.3$)の盛土体に対する節点の応力、変形を求めてみた。その結果の一部を表1-10-8、図1-10-14と表1-10-9、図1-10-15に示す。

垂直応力 σ_y を γh (γ :単位体積重量、 h :深さ)の値と比較してみるとEM-2は大きめに、EM-3は小さめに現われる。そしてEM-4、EM-5は比較的近い値を示していることがわかる。水平応力 σ_x 、せん断応力 τ_{xy} についても同様な傾向が生じていることが理解できる。このように要素の切り方は、盛土全体を一方向に切るよりも、互い違いに切る方がより現実的ではないかと思われる。

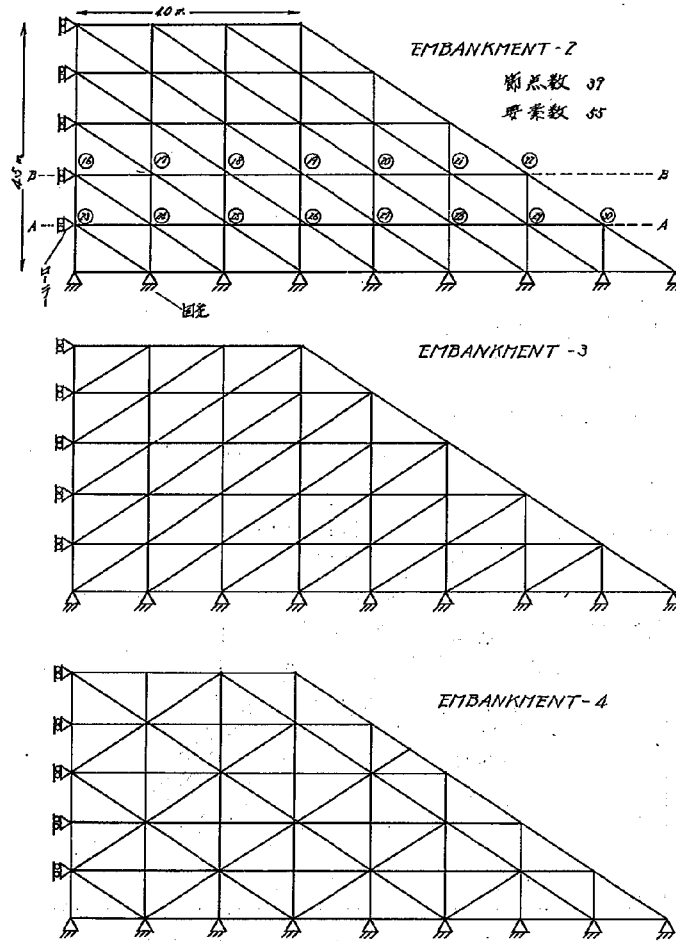


図 1-10-13 各盛土体の断面

表 1-10-8 要素の切り方による応力 ($E=100 \text{ Kg/cm}^2$, $\gamma=1.3 \text{ t/m}^3$, $\nu=0.3$)

節 点	水平応力: σ_x				垂直応力: σ_y					せん断応力: τ_{xy}			
	BM-2	BM-3	BM-4	BM-5	BM-2	BM-3	BM-4	BM-5	γh	BM-2	BM-3	BM-4	BM-5
16	0.154	0.117	0.124	0.127	0.576	0.526	0.554	0.555	0.351	0.003	0	0.002	0.001
17	0.122	0.122	0.124	0.121	0.552	0.544	0.549	0.551		0.006	0.005	0.004	0.004
18	0.114	0.113	0.111	0.114	0.535	0.531	0.538	0.533		0.013	0.010	0.011	0.011
19	0.101	0.101	0.102	0.098	0.500	0.297	0.297	0.306		0.023	0.021	0.022	0.022
20	0.086	0.083	0.084	0.086	0.234	0.235	0.239	0.230		0.035	0.034	0.033	0.032
21	0.069	0.069	0.071	0.066	0.137	0.179	0.163	0.138		0.038	0.039	0.038	0.037
22	0.061	0.053	0.062	0.059	0.083	0.128	0.082	0.118		0.034	0.040	0.033	0.038
23	0.194	0.167	0.183	0.181	0.486	0.442	0.466	0.469	0.468	0.004	0.002	0.005	0.002
24	0.178	0.178	0.177	0.180	0.462	0.458	0.465	0.461		0.010	0.008	0.009	0.007
25	0.170	0.169	0.171	0.167	0.445	0.441	0.444	0.449		0.021	0.018	0.020	0.020
26	0.155	0.155	0.152	0.156	0.409	0.405	0.415	0.407		0.034	0.032	0.034	0.033
27	0.134	0.135	0.136	0.131	0.346	0.341	0.342	0.351		0.046	0.044	0.045	0.048
28	0.108	0.106	0.108	0.109	0.257	0.254	0.258	0.251		0.051	0.051	0.053	0.051
29	0.078	0.082	0.082	0.079	0.146	0.187	0.172	0.146		0.048	0.051	0.049	0.050
30	0.056	0.058	0.060	0.053	0.086	0.134	0.087	0.123		0.039	0.048	0.042	0.042

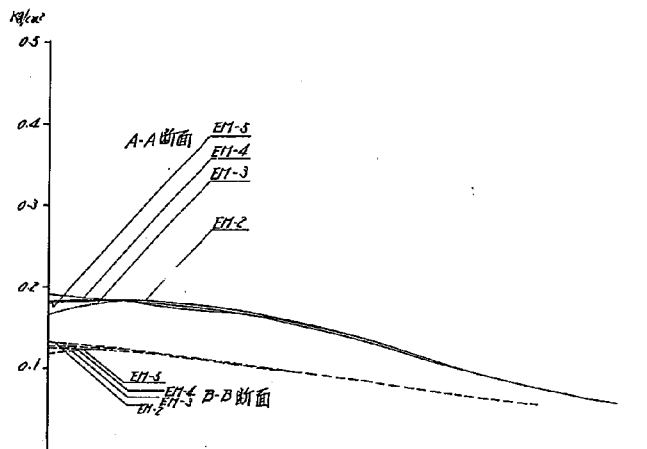


図 1-10-14 要素の切り方による応力差: σ_x

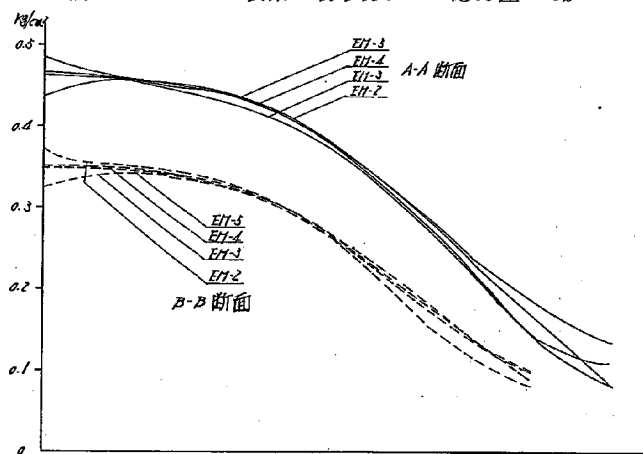


図 1-10-14 要素の切り方による応力差: σ_y

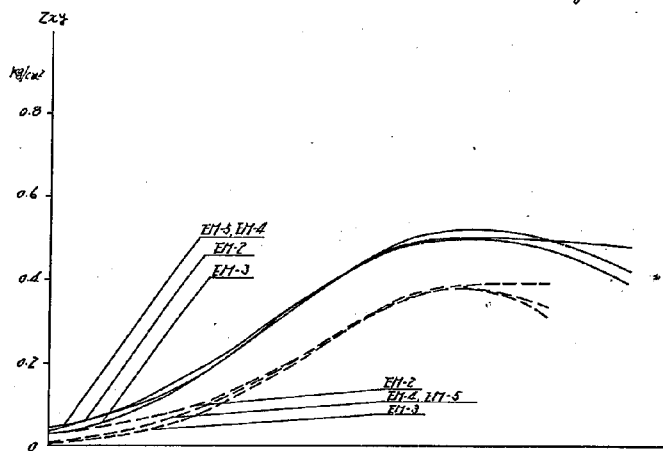


図 1-10-14 要素の切り方によるせん断応力差: τ_{xy}

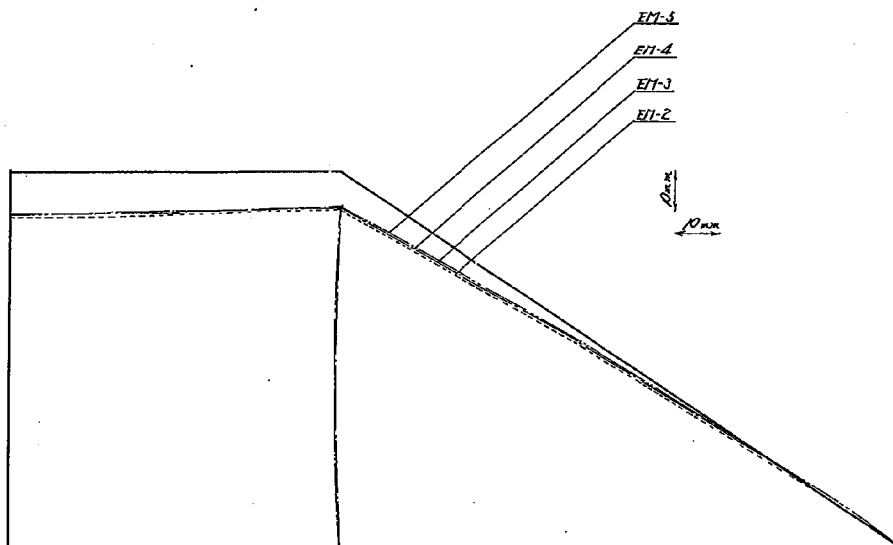


図 1-10-15 要素の切り方による変形

節点	x 方向の変位				y 方向の変位			
	EM-2	EM-3	EM-4	EM-5	EM-2'	EM-3	EM-4	EM-5
1	0	0	0	0	-105	-097	-102	-10
2	-0004	-0005	-0004	-0004	-101	-099	-10	-10
3	-001	-001	-002	-002	-097	-098	-098	-096
4	-003	-002	-003	-004	-087	-089	-088	-088
5	0	0	0	0	-099	-094	-096	-098
8	005	004	004	003	-085	-084	-085	-084
9	003	005	003	004	-065	-067	-066	-066
10	0	0	0	0	-085	-083	-085	-084
14	012	011	012	010	-061	-060	-061	-059
15	010	013	011	011	-039	-041	-039	-040
16	0	0	0	0	-064	-063	-063	-064
19	011	010	012	011	-057	-056	-057	-056
22	012	016	013	014	-018	-021	-019	-018
23	0	0	0	0	-035	-035	-034	-035
26	008	008	007	009	-032	-031	-031	-032
30	0	011	008	009	-005	-007	-005	-007
31	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0

表 1-10-9 要素の切り方による変形 ($E=100 \text{ kg/cm}^2$, $\gamma=1.3 \text{ t/m}^2$, $\nu=0.3$)

③ 仮定した変位函数がどの程度实际的であるか。

内部変位が直交する二方向に対し、直線的に変化するという仮定、すなわち変形前の要素における任意の直線は変形後も直線であると仮定して、三角形要素の時

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

を与えているが、これは下図の左の場合であり、右の場合は不適当である。



④ 外力は節点にのみ作用するとしているから、等分布荷重の場合には正確な外力を用させることができない。

⑤ 物性の与え方

今回行なった解析は弾性論によるものであり、塑性論等の適用により盛土のような土を扱う場合もより実地的なものとなるであろう。しかしこの⑤の点は、厳密には、有限要素法そのものの問題ではなく実際の利用法における問題点である。

⑥ 電子計算機の容量により要素数、節点数が制限される。一般に要素が細かければ細かいほど精度はあがるといわれている。

以上のような問題点が考えられるがそれでも有限要素法の未来は大きく開かれており、その適用範囲は増々拡大されるであろう。

§ 11 資 料

有限要素法 (Finite Element Method) を使って堤体の応力と変形の解析を行なった興味ある論文

『 Analysis of Embankment Stresses and Deformations 』

by Ray W. Clough, Richard J. Woodward,

ASCE, Vol. 93, No. SM 4, July, 1967

に述べられている計算結果を、ここに紹介しておく。この計算は the University of California Computer Center の IBM 7094 により行なわれたものである。

盛土は図 1-11-1 の様な形について考えた。

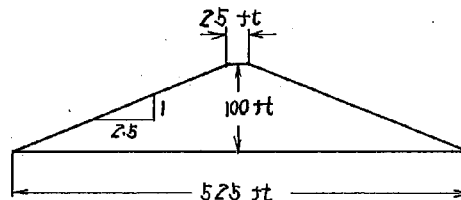


図 1-11-1

土は弾性であるとし、平面歪問題とし、次の様に仮定する。

弾 性 係 数: $200 \text{ Ksf} \div 97.7 \text{ Kg/cm}^2$

ポアソン 比: 0.40

単位体積重量: $135 \text{ Pcf} \div 2.16 \text{ g/cm}^3$

有限要素法を適用する為の要素分割は図1-11-2の様にした。これは10フィート層の積み重ねと考える時に便利である。

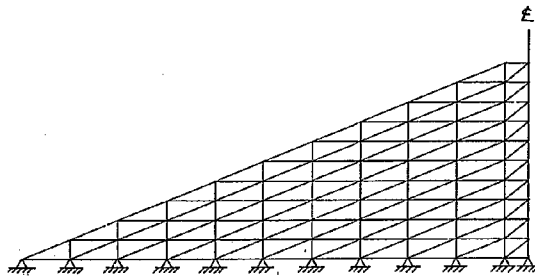


図1-11-2 盛土の要素分割

解析の第1の方法として、図1-11-2の要素分割につき完成状態で解析を行う。即ち荷重（自重）が一時に作用するとして解析を行った。（1段階の荷重）

第2の方法としては、盛土構築の進行状態に合わせて荷重を順次増加させていく方法である。一つの層の厚さを10フィートとし、それを10層積み重ねて考えている。即ち10段階の荷重増加方式である。

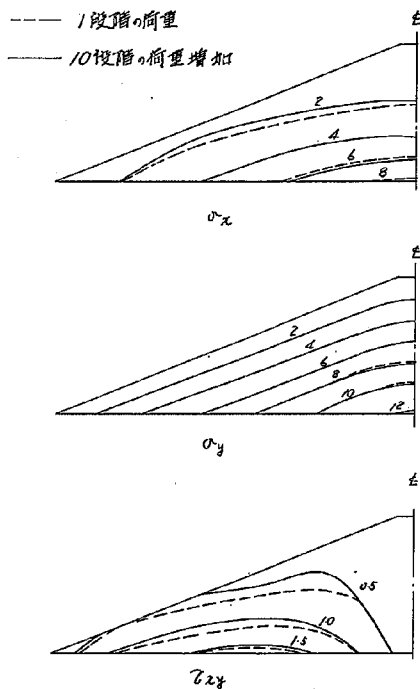


図1-11-3 死荷重による応力等高線（単位Ksf）

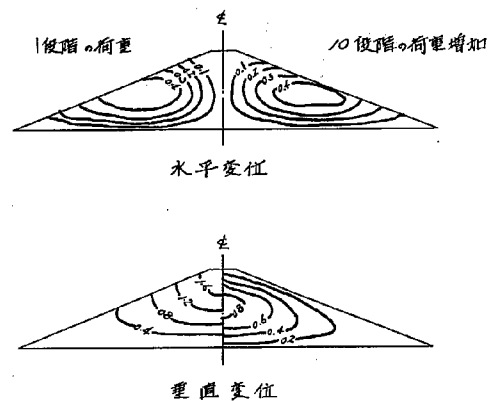


図1-11-4 死荷重による変位（単位ft）

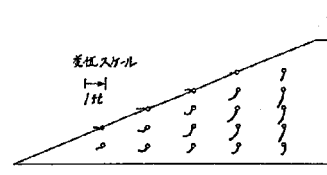


図1-11-5 ダム内部の変位ベクトル

（荷重増加方式による）

この2種類の方法により解析された応力及び変位は、以下に示す通りである。

(注) $Ksf = Klb / ft^2 \approx 0.488 kg / cm$

図1-11-3、図1-11-4に示す様に1段階の荷重による解析と、10段階の荷重増加方式による解析とはそんなに大きな違いはない。ただ垂直変位のみが全く異った様子を
示している。1段階の荷重方式では、天端で垂直変位が最大になっているが、10段階の
荷重増加方式では、天端では垂直変位は零である。これは歪を全高にわたり累積していく
方法と、歪がそれ以上発達しなくなった後物質(土)を積み重ねていくから、天端ではた
わみは起きえない、という違いによるものである。

以上のことから考えて、盛土を構築する際に発達する垂直変位を求めるには1段階より、
多くの段階の荷重増加方式の方が、より实际的である。

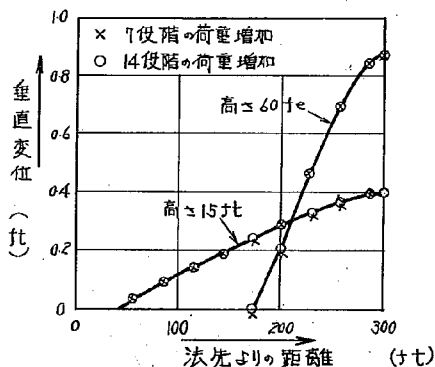


図1-11-6 7段階と14段階の垂直変位の比較

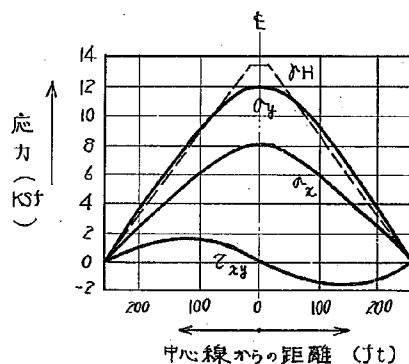


図1-11-7 底部における最終応力分布

実際には、層の厚さは1フィートより小さいが、それに合わせた要素分割を行なうと、
非常に多くの計算時間が必要になる。それで、層の数の相異による変位の相異を見るため
7層と14層の2つの場合を考え、底部より15フィートと60フィートにおける垂直変
位を比べてみたものが図3-6である。二組のデータはほとんど一致しているので、層の
数の影響はないと見なし、以後も10層による解析を行なう。

盛土の底部の4点の応力を、盛土構築の進行状態、即ち構築の高さの函数として、水平
にプロットしたものが図1-11-8であり、盛土が完成した時の底部の最終応力分布が図
1-11-7である。

参考の為、破線で示した γH は、考えている点の上の物質のみによる重量である。

図1-11-7、図1-11-8は荷重増加方式によるものであることは言うまでもない。

Stress Factorを次の様に定め、その等高線を示したものが図1-11-9である。

$$K_x = \sigma_x / \gamma H$$

$$K_y = \sigma_y / \gamma H$$

$$K_{xy} = \tau_{xy} / \gamma H$$

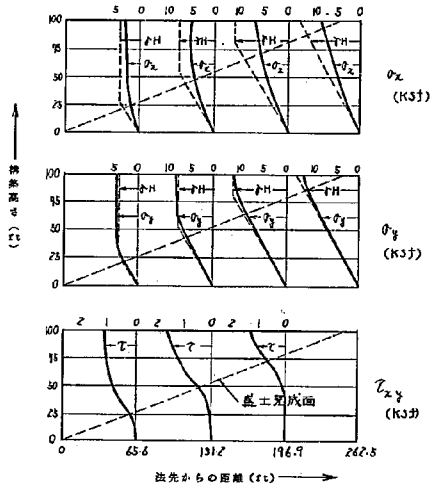


図 1-11-8

底部における応力と構築高さの関係

これまでの結果を標準とし、ポアソン比と斜面の勾配の変化による各値の変化の割合を示すものが図 1-11-11 である。

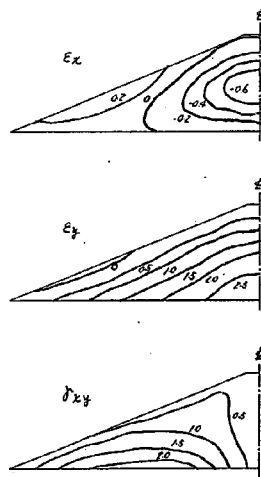


図 1-11-10 歪等高線 (単位%)
(荷重増加方式)

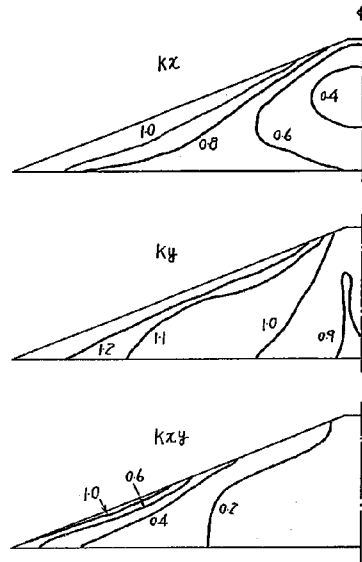


図 1-11-9 Stress Factor K の等高線
(荷重増加方式)

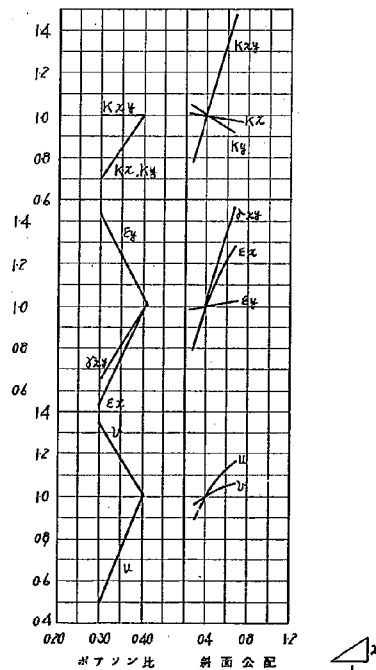


図 1-11-11

今までは堤体は剛な基礎地盤の上に置かれる、と仮定して解析したが、実際は、ある程度の弾性を持つと考え図 1-11-12 の様な組織を考え、基礎を 10 層に分割して有限要素法を適用した。その結果は図 1-11-13、図 1-11-14 である。

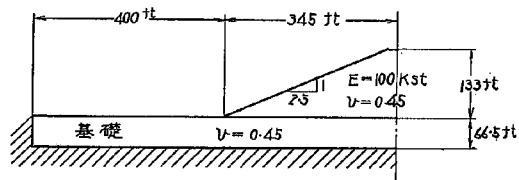


図 1-11-12

基礎の弾性係数 E_F は ∞ , 500, 200, 100 ksf の 4 種につき考える。なお、基礎は剛な岩盤により支えられているものとする。

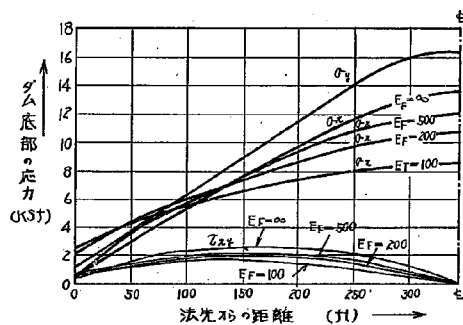
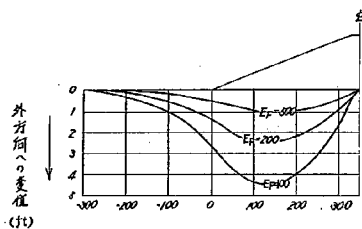
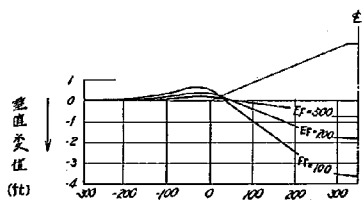


図 1-11-13



(a) 水平変位



(b) 垂直変位

図 1-11-14 堤体底部の変位

§ 12 非線型問題への応用

要素に非線型の性質を与えるには式 (1-5-5) の $[D]$ マトリクスにその性質を表現させて、反復法等を用いて計算させる方法が一般に用いられている。

反復法とは図 1-12-1 において、各応力に対応する弾性係数を用いる方法で、初期の弾性係数より最初の応力分布を求め、次にこの応力に対応する新しい弾性係数を用いて新しく応力を計算し、この操作を応力が収束するまで繰り返し行なう方法である。

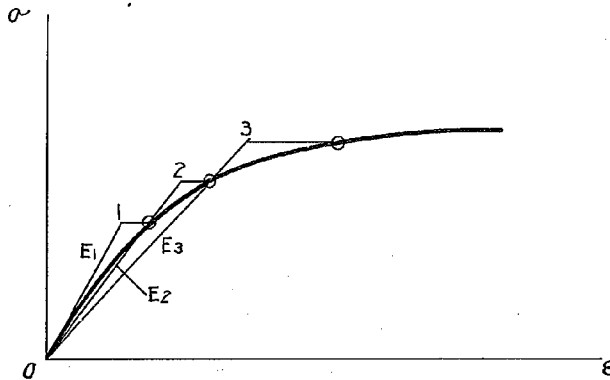


図 1-12-1

次に紹介する非線型プログラム (B02910) は先に紹介した 2 次元弾性問題プログラム (B02909) の $[D]$ マトリクス中の弾性係数 E を各垂直応力に応じて変化させることによって非線型性を得ている。

```

begin
  comment #02910 NON LINEAR ANALYSIS
  This is a program for stress and deformation analysis using Finite Element Method
  with vertical and horizontal roller ( triangular element )
  HOW TO GIVE DATA
  A10,A20,A30,A40,A50: name of calculation (double real)
  NP: number of nodal points (integer)
  NE: number of elements (integer)
  PS: for plane strain, PS=0
      for plane stress, PS=1
  T: thickness of each element (cm) (real)
  NEP: number of elastic patterns (integer)
  NFPXY: number of fixed points considering x and y direction (integer)
  FPNXY[1]: fixed point number considering x and y direction (integer array)
  GAMMA[1]: bulk density of each element (g/cm3) (array)
  EE[1]: Young's modulus of each element (kg/cm2) (array)
  VE[1]: Poisson's ratio (array)
  P: number of seriesed same data (integer)
  N: elastic pattern number (integer)
  X[1]: x-coordinate of nodal points (cm) (array)
  Y[1]: y-coordinate of nodal points (cm) (array)
  IE[1]: nodal point number of I corner in each element (integer array)
  JE[1]: nodal point number of J corner in each element (integer array)
  ME[1]: nodal point number of M corner in each element (integer array)
  DDD: number of repeat for initial displacements data (integer)
  DISP[1]: initial displacement of each nodal point in x and y direction (cm) (array)
  LLL: number of repeat for loads data (integer)
  OW: when you think of own weight, Oa=1
      when you do not think of it, Oa=0
  LOAD[1]: loads for each nodal point in x and y direction (kg) (array)
  R1: error limit (real)
  AS2: non linear analysis points number (integer)
  ORDER TO GIVE DATA
  A10, A20, A30, A40, A50, NP, NE, PS, T, NEP,
  NFPXY, FPNXY[1..NFPXY],
  ( GAMMA[1..NEP], EE[1..NEP], VE[1..NEP] ) ... ( P, N ) ... (EP=NE),
  X[1..NP], Y[1..NP], ( IE[1..NE], JE[1..NE], ME[1..NE] ) ... ,
  DDD, ( P, DISP[1..NP2] ) ... (EP=NP2),
  LLL, OW, ( P, LOAD[1..NP2] ) ... (EP=NP2),
  R1, AS2, GK1, GK2, ....
  double real A10,A20,A30,A40,A50;
  real X1,XJ,XM,Y1,YJ,YM,XIJ,XJM,XMI,YIJ,YJM,YMI,C1,C2,F1,F2,
  S,RR,S1,S2,SIG1,SIG2,THETA,T,GK1,GK2,GK3,GK4,CD;
  integer NP,NE,NMP,PS,OW,NP2,NP4,1,J,L,N,H,S,1,JJ,M,KK,A1,A2,B1,B2,
  NMP2,P1,NK,P,0,1,1,2,AA1,AA2,BB1,BB2,NMPXY,NMPXY2,NFPXY,NEP,
  DD,DDD,LL,LLL,PPP,
  AS1,AS2,AS3,AS4;
  START:
  READA(A10,A20,A30,A40,A50);
  READ(NP,NE,PS,T,NEP,NFPXY);
  NP2=2*NP; NMPXY=NP2-NFPXY; NMPXY2=2*NMPXY;
  begin
  array GAMMA=EE=VE[1:NE]; X=Y[1:NP]; LOAD=LOADA+DISP+DISPA+RF[1:NP2];
  K[1:NE,1:6,1:6]=MAT[1:NP2,1:NP2]*MAT[1:NMPXY,1:NMPXY2]*MA[1:3,1:6];
  EP1,EP2,EP3[1:NFP],UV[1:6],SIGMA[1:3],
  G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8[1:NE],
  J1,J2,J3,J4[1:20];
  integer array JE,JM,ME[1:NE],ENP,CNP[1:NP,1:1],NPNXY[1:NMPXY],FPNXY[1:NFPXY];

  READARRAY(FPNXY,1,NFPXY);
  if NFPXY=NP2 v NMPXY=NP2 then go to L500;
  for I=1 step 1 until NMPXY do
  begin
  if FPNXY[I]=1 then NPNXY[I]=1 else go to L100;
  end;
  L100:
  N=J=1;
  for I=2 step 1 until NMPXY do
  begin
  J=FPNXY[I]-FPNXY[I-1];
  if J=1 then go to L200 else go to L300;
  L200: MM=0;
  for JMN step 1 until (N+J-2) do
  begin
  MM=MM+1;
  NPNXY[IJJ]=FPNXY[I-1]+MM;
  end;
  N=J;
  L300:
  end;
  L400:
  MM=0;
  for JJ=N step 1 until NMPXY do
  begin
  MM=MM+1;
  NPNXY[JJ]=FPNXY[NFPXY]+MM;
  end;
  L500:
  for I=1 step 1 until NEP do
  begin READ(GK1,GK2,GK3);
  EP1[I]=GK1; EP2[I]=GK2; EP3[I]=GK3;
  end;

```

Comment部

宣言部

入力データの
読み込み及び
演算

三角形各要素の 剛性マトリクス 計算

入力データの
打ち出し

```

if PPP=1 then go to L910;
L2: for I=1 step 1 until NP2 do
begin
for J=1 step 1 until NP2 do
begin MAT[I,J]=0.000000000; end;
end;
for I=1 step 1 until NP do
begin
A1=2*I-1;
A2=2*I;
for J=1 step 1 until 8 do
begin
if ENP[I,J]=0 then go to L3 else go to L4;
L3: KK=ENP[I,J];
AA1=2*CNP[I,J]-1;
AA2=2*CNP[I,J];
for I1=1 step 1 until NP do
begin
B1=2*I1-1;
B2=2*I1;
for J1=1 step 1 until 8 do
begin
if ENP[I1,J1]=0 then go to L5 else go to L6;
if ENP[I1,J1]=KK then go to L7 else go to L8;
L5: BB1=2*CNP[I1,J1]-1;
BB2=2*CNP[I1,J1];
MAT[A1,B1]=MAT[A1,B1]+K*KK*AA1*BB1;
MAT[A1,B2]=MAT[A1,B2]+K*KK*AA1*BB2;
MAT[A2,B1]=MAT[A2,B1]+K*KK*AA2*BB1;
MAT[A2,B2]=MAT[A2,B2]+K*KK*AA2*BB2;
L8: end;
L6: end;
L4: end;
end;
end;
L910:
if NW=0 then go to L99;
for I=1 step 1 until NP do
begin
A2=2*I;
for J=1 step 1 until 8 do
begin
if ENP[I,J]=0 then go to L9 else go to L10;
L9: KK=ENP[I,J]; LOAD[A2]=LOAD[A2]+W*KK;
end;
L10: end;
end;
L99:
for I=1 step 1 until NP2 do
begin
for J=1 step 1 until NP2 do
begin LOAD[I]=LOAD[I]-MAT[I,J]*DISP[J]; end;
end;
if PPP=1 then go to L920;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin
I1=NMPXY[I];
J1=NMPXY[J];
MAT[I,J]=MAT[I1,J1];
end;
end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
for J=1 step 1 until NMPXY do
begin
if I=J then MAT[I,NMPXY+J]=1.000000000 else MAT[I,NMPXY+J]=0.000000000;
end;
end;
for NK=1 step 1 until NMPXY do
begin
Q=2*NMPXY;
if MAT[NK,NK]=0.000000000 then go to L11 else P=NK+1;
if P>NMPXY then go to L12;
L13: if MAT[P,NK]=0.000000000 then go to L14 else P=P+1;
if P>NMPXY then go to L12 else go to L13;
L14: for J=1 step 1 until 8 do
begin MAT[NK,J]=MAT[NK,J]+MAT[P,J]; end;
L11: RB=MAT[NK,NK];
for J=1 step 1 until 8 do
begin MAT[NK,J]=MAT[NK,J]/RB; end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
RB=MAT[I,NK];
for J=1 step 1 until 8 do
begin if I=NK then MAT[I,J]=(MAT[I,J]-RB*MAT[NK,J]) else MAT[I,J]=MAT[NK,J]; end;

```

集積剛性マトリ
クスの計算

自重考慮

初期変位考慮

可動節点につい
ての逆マトリク
スの計算

```

      end;
      if NKENMPXY then go to L40;
      for I=1 step 1 until NMPXY do
      begin
        for J=1 step 1 until NMPXY do
          begin MATM[I,J]:=MATM[I,NMPXY+J]; end;
        end;
      end;
L40:
end;
L920:
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
  I:=NMPXY[I]; S:=DISP[I];
  for J=1 step 1 until NMPXY do
    begin JJ:=NMPXY[J]; S:=S+MATM[I,J]*LOAD[J];
    end;
  DISP[I]:=S;
end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin I:=NMPXY[I]; RF[I]:=0.000000000; end;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
  I:=NMPXY[I];
  RF[I]:=-LOAD[I];
  for J=1 step 1 until NMPXY do
    begin JJ:=NMPXY[J]; RF[I]:=RF[I]+MATM[I,J]*DISP[J]; end;
  end;
  EJECT; CRLF(1);
  OUTO(6,'113B','PAGE 2'); CRLF(1);
  OUTO(6,'* RESULT-1 ( NODAL POINT INFORMATION ) *');
  CRLF(3);
  OUTO(6,'* NP',9B,'LOAD(X)',8B,'LOAD(Y)',9B,'REAC(X)',9B,'REAC(Y)',
    9B,'DISP(X)',6B,'DISP(Y)',7B,'X',12B,'Y');
  CRLF(2);
  GK1=GK2=GK3=GK4=0.00000000;
  for I=1 step 1 until NP do
  begin
    I1=2*I-1; I2=2*I;
    GK1=GK1+LOAD[I1]; GK2=GK2+LOAD[I2];
    GK3=GK3+RF[I1]; GK4=GK4+RF[I2];
    OUTI(6,'27DB',1);
    OUTI(6,'2(-67D,6D)*2(-72D,6D)+2(-52D,4D)',LOAD[I1],LOAD[I2],RF[I1],RF[I2],
      DISP[I1],DISP[I2],X[I1]+DISP[I1],Y[I1]+DISP[I2]);
    CRLF(1);
  end;
  CRLF(1);
  OUTO(6,'* GK',9B);
  OUTI(6,'2(-67D,6D)+2(-72D,6D)',GK1,GK2,GK3,GK4); CRLF(1);
  EJECT; CRLF(1);
  OUTO(6,'113B','PAGE 3'); CRLF(1);
  OUTO(6,'* RESULT-2 ( ELEMENT INFORMATION ) *');
  CRLF(3);
  OUTO(6,'* NE',9B,'SIGMA-X',7B,'SIGMA-Y',7B,'TAU-XY',8B,'TAU-MAX',
    7B,'SIGMA-1',7B,'SIGMA-2',9B,'THETA',7B,'K (X/Y)');
  CRLF(2);
  for I=1 step 1 until NE do
  begin
    I1=IE[I];
    JJ=JE[I];
    MM=ME[I];
    XI=X[I1];
    XJ=X[J1];
    XM=X[M1];
    YI=Y[I1];
    YJ=Y[J1];
    YM=Y[M1];
    UV11=DISP[2*I1-1];
    UV12=DISP[2*I1];
    UV13=DISP[2*JJ-1];
    UV14=DISP[2*JJ];
    UV15=DISP[2*MM-1];
    UV16=DISP[2*MM];
    if PS=1 then begin C1=EEF[I]/(1.000000000-V[I]*V[I]); C2=V[I]; end
    else begin C1=EEF[I]/(1.000000000-V[I])/((1.000000000+V[I])*(1.000000000-2.000000000+V[I]));
      C2=V[I]/(1.000000000-V[I]); end;
    F1=(1.000000000-C2)/2.000000000;
    CO=C1/(XJ-XI)*YM+(XI-XM)*YJ+(XM-XJ)*YI;
    MA(1,1)=(YM-YJ)*CO;
    MA(1,2)=C2*(XJ-XI)*CO;
    MA(1,3)=(YI-YM)*CO;
    MA(1,4)=(-C2)*(XI-XM)*CO;
    MA(1,5)=(YI-YJ)*(-CO);
    MA(1,6)=C2*(XI-XJ)*CO;
    MA(2,1)=C2*(YM-YJ)*CO;
    MA(2,2)=(XJ-YM)*CO;
    MA(2,3)=C2*(YI-YM)*CO;
    MA(2,4)=(XI-XI)*(-CO);
    MA(2,5)=(-C2)*(YI-YJ)*CO;

```

可動節点の変位
の計算

固定節点の反力
計算

結果 [1]
節点情報の打ち
出し
(変位量, 反力)

各要素内の応力
計算

```

MAL2,6)=(X1-XJ)*C01
MAL3,1)=F1+(YJ-KJ)*C01
MAL3,2)=F1+(YJ-YJ)*C01
MAL3,3)=(-F1*(X1-XJ)+C01)
MAL3,4)=F1+(YJ-YJ)*C01
MAL3,5)=F1+(XJ-XJ)*C01
MAL3,6)=(-F1*(Y1-YJ)+C01)
for J=1 step 1 until N do
begin
S=0.000000000
for L=1 step 1 until 6 do
begin S=S+MALJ,L)*DIV(L) end
SIGMA(J)=S
end
S1=(SIGMA(1)+SIGMA(2))/2.000000000
S2=SQR(((SIGMA(1)-SIGMA(2))/2.000000000)*((SIGMA(1)-SIGMA(2))/2.000000000)+SIGMA(3)*SIGMA(3))
SIG1=S1+S2
SIG2=S1-S2
THEFA=24.647897565*(ARCTAN(2.000000000*(SIGMA(1)/(SIGMA(1)-SIGMA(2))))
if (SIGMA(1)-SIGMA(2))<0.000000000 then THEFA=THEFA+90.00000000
L20:
if (SIGMA(2))<0.00000001*(SIGMA(2))<0.00000001 then GK1=9999.9999 else GK1=SIGMA(1)/SIGMA(2)
OUT1(6,'27D34,1)
OUT8(6,'6(2H-32D,6U),5B-27D,3D,4B-32D,4D',SIGMA(1),SIGMA(2),SIGMA(3),S2,SIG1,SIG2,THEFA,GK1)
CRLF(1)
G1(1)=SIGMA(1) G2(1)=SIGMA(2)
G3(1)=SIGMA(3) G4(1)=S2
G5(1)=SIG1 G6(1)=SIG2
G7(1)=THEFA G8(1)=GK1
end
EJECT: CRLF(1)
OUTO(6,'113R,'PAGE A'): CRLF(1)

OUTO(6,'* RESULT-3 ( MEAN VALUE AROUND NODAL POINT ) *'):
CRLF(3)
OUTO(6,'* NP,9R,'SIGMA-X',7B,'SIGMA-Y',7B,'TAU-XY',8B,'TAU-MAX',7B,'SIGMA-1',
7B,'SIGMA-2',9R,'THETA',7B,'K (X/Y)'):
CRLF(2)
for I=1 step 1 until NP do
begin
SIGMA(1)=SIGMA(2)=SIGMA(3)=S2=SIG1=SIG2=THEFA=GK1=0.000000000
JJ=0
for J=1 step 1 until 8 do
begin
KK=ENP(I,J)
if KK=0 then go to L50
JJ=JJ+1
SIGMA(1)=SIGMA(1)+G1(KK)
SIGMA(2)=SIGMA(2)+G2(KK)
SIGMA(3)=SIGMA(3)+G3(KK)
S2=S2+G4(KK)
SIG1=SIG1+G5(KK)
SIG2=SIG2+G6(KK)
THEFA=THEFA+G7(KK)
GK1=GK1+G8(KK)
end
L50:
GK2=FLOAT(JJ)
SIGMA(1)=SIGMA(1)/GK2
SIGMA(2)=SIGMA(2)/GK2
SIGMA(3)=SIGMA(3)/GK2
S2=S2/GK2
SIG1=SIG1/GK2
SIG2=SIG2/GK2
THEFA=THEFA/GK2
GK1=GK1/GK2
OUT1(6,'27D34,1)
OUT8(6,'6(2H-32D,6U),5B-27D,3D,4B-32D,4D',
SIGMA(1),SIGMA(2),SIGMA(3),S2,
SIG1,SIG2,THEFA,GK1)
CRLF(1)
end
go to L39
L12: CRLF(5) OUTO(6,'CAN NOT CARRY ON'): CRLF(1)
L39: EJECT
if AS1=1 then go to L20
CRLF(3)
OUTO(6,'10R,'* BEGINNING OF NON LINEAR ANALYSIS *'(2/)):
READ(R1,AS2)
OUT2(6,'R1',22D,6D,5R,'N',27D,9R,'STRESS',9R,'STRAIN',R1,AS2)
for I=1 step 1 until AS2 do
begin
READ(GK1,GK2)
Z1(1)=GK1
Z2(1)=GK2
OUT12(6,'23H,2(=07D,6D),Z1(1),Z2(1))
end
EJECT
L820:
if AS1=1 then go to L830
if ABS(DISP(AS41-R1)>1 then go to L850
R4=DISP(AS2)
go to L840

```

結果 [2]
要素情報の打ち
出し
(応力)

各節点のまわり
の要素における
応力の平均値計
算

結果 [3]
節点における応
力の打ち出し

```

L830:
R2=0.000000000;
for I=1 step 1 until NP2 do
begin
  R3=ABS(DISPL(I));
  if R3>R2 then begin R4=R3; AS4=1; R2=R3; end;
end;
L840:
for I=1 step 1 until NF do
begin
  for J= 1 step 1 until (AS2-1) do
  begin
    if G2(I)>Z1(J)*G2(I)*Z1(J+1) then
    begin
      P5=(Z1(J+1)-Z2(J))/(Z1(J+1)-Z1(J));
      R6=R5*G2(I)+(R5*(-Z1(J)+Z2(J)));
    end;
    end;
    FE(I)=G2(I)/R6;
  end;
  if AS1<10 then go to L810;
L850:
  CRLF(3); OUT0(6,10B,'OWARIMASHITAYO'); EJECT;
  end;
end;
end; if KEY(8) then go to START;
end;

```

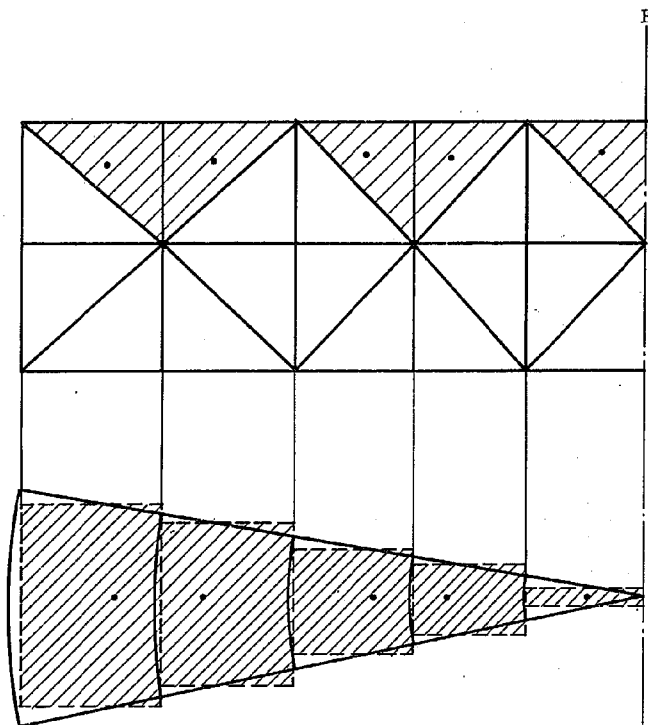
第2章 軸対称問題への応用

§1 ま え が き

軸対称問題においては、各要素内において厚さが軸心からの距離に応じて変化する。厚さが変化する場合についての各要素の剛性マトリクスを導くのは複雑で手間のかかる計算を要する。

そこで第1章にて紹介した2次元弾性問題用プログラム(B02909)を利用して、これを次図に示すように軸心から各要素の重心位置までの距離に比例して各要素の厚さを変化(2-1-1)させることによって軸対称問題にも適用できるように改造した。

このような操作にて得た簡易軸対称プログラム(B02911)と、これによる解析例を次に紹介するものである。



・印は重心位置

図 2-1-1

§ 2 コンピュータープログラム (B02911)

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 1

```

begin
comment B02911 AXI-SYMMETRICAL ANALYSIS
This is a program for stress and deformation analysis using Finite Element Method
with vertical and horizontal roller ( triangular element )
HOW TO GIVE DATA
A10,A20,A30,A40,A50: Name of calculation (double real)
NP: number of nodal points (integer)
NE: number of elements (integer)
PS: for plane strain, PS=0
    for plane stress, PS=1
- 10-
ANGLE: angle of proposed slit for center axis (degree) (real)
NEP: number of elastic patterns (integer)
NFPXY: number of fixed points considering x and y direction (integer)
FNPXY[1]: fixed point number, considering x and y direction (integer array)
GAMMA[1]: bulk density of each element (g/cm3) (array)
EE[1]: youngs modulus of each element (kg/cm2) (array)
V[1]: poisson's ratio (array)
P: number of serlesed same data (integer)
N: elastic pattern number (integer)
X[1]: x-coordinate of nodal points (cm) (array)
- 20-
Y[1]: y-coordinate of nodal points (cm) (array)
IE[1]: nodal point number of I corner in each element (integer array)
JE[1]: nodal point number of J corner in each element (integer array)
ME[1]: nodal point number of M corner in each element (integer array)
DDD: number of repeat for initial displacements data (integer)
DISP[1]: initial displacement of each nodal point in x and y direction (cm) (array)
LLL: number of repeat for loads data (integer)
OW: when you think of own weight, OW=1
    when you do not think of it, OW=0
LOAD[1]: loads for each nodal point in x and y direction (Kg) (array)
- 30-
ORDER TO GIVE DATA
A10, A20, A30, A40, A50, NP, NE, PS, ANGLE, NEP,
NFPXY, FNPXY[1...NFPXY],
( GAMMA[1...NEP], EE[1...NEP], V[1...NEP] ) ... ( P, N ) ... (OP=NE),
X[1...NP], Y[1...NP], ( IE[1...NE], JE[1...NE], ME[1...NE] ) ...
DDD, ( P, DISP[1...NP2] ) ... (OP=NP2),
LLL, OW, ( P, LOAD[1...NP2] ) ... (OP=NP2),
double real A10,A20,A30,A40,A50;
real X[1:XJ,XM,Y[1:YJ,YM,X[1:1J,XJH,XM],Y[1:YJ,YM,YM],C1,C2,F1,F2,
- 40-
S,RB,S1,S2,SIG1,SIG2,THETA,T,GK1,GK2,GK3,GK4,CO,ANGLE;
integer NP,NE,NMP,PS,OW,NP2,NP4,1,J,L,N,MS,1,1,JJ,MM,KK,A1,A2,B1,B2,
NMP2,P1,NK,P,0,1,1,2,AA1,AA2,BB1,BB2,NMPXY,NMPXY2,NFPXY,NEP,
DD,DDD,LL,LLL,PPP;
START:
READA(A10,A20,A30,A40,A50);
READ(NP,NE,PS,ANGLE,NEP,NFPXY);
NP2=2*NP; NMPXY=NP2-NFPXY; NMPXY2=2*NMPXY;
begin
array GAMMA,EE,V,ME[1:NE], X,Y[1:NP], LOAD,DISP,DISP,RF[1:NP2];
- 50-

```

Comment部

宣言部

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 2

```

K[1:NE,1:6,1:6]=MAT[1:NP2,1:NP2],MATM[1:NMPXY,1:NMPXY2],HA[1:3,1:6],
EP1,EP2,EP3[1:NFP],UV[1:6],SIGMA[1:3],
G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8[1:NE];
integer array IE,JE,ME[1:NE],ENP,CNP[1:NP,1:8],NPNXY[1:NMPXY],FNPXY[1:NFPXY];
READARRAY(FNPXY,1,NFPXY);
if NFPXY=NP2 v NPNXY=NP2 then go to L300;
for I=1 step 1 until NMPXY do
begin
if FNPXY[1]≠I then NPNXY[I]=I else go to L100;
end;
- 60-
L100:
N=J=1;
for I=2 step 1 until NFPXY do
begin
I=FNPXY[1]+FNPXY[1]-1;
if I[1] then go to L200 else go to L300;
L200: MM=0;
for JJ=N step 1 until (N+I-2) do
begin
MM=MM+1;
NPNXY[IJJ]=FNPXY[I]-1+MM;
end;
N=JJ;
L300:
end;
L400:
MM=0;
for JJ=N step 1 until NMPXY do

```

入力データの
読み込み及び演
算

```

begin
  MM=MM+1;
  MPNXY[J]=FPNXY[INF+XY]+MM;
end;
L500;
for I=1 step 1 until NEP do
begin READ(GK1,GK2,GK3);
  EP1[I]=GK1; EP2[I]=GK2; EP3[I]=GK3;
end;
P=0;
for I=1 step 1 until NE do
begin
  READ(P+N);
  for J=(1+0) step 1 until (P+0) do
  begin GAMMA[J]=EP1[N];
    EE[J]=EP2[N];
    V[J]=EP3[N];
  end;
  if (P+0)=NE then go to L600;
  P=P+0;
end;
L600;

```

- 80-

- 90-

- 100-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 3

```

READARRAY(X,1,NP);
READARRAY(Y,1,NP);
for I=1 step 1 until NE do
begin READ(A1,A2,B1);
  IE[I]=A1; JE[I]=A2; ME[I]=B1;
end;
for I=1 step 1 until NP do
  for J=1 step 1 until 8 do
  begin ENP[I,J]=CNP[I,J]; end;
for I=1 step 1 until NP do
begin A1=A2=B1=0;
  for J=1 step 1 until NE do
  begin
    if IE[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=1; end;
    if JE[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=2; end;
    if ME[J]=1 then begin A1=A1+1; ENP[I,A1]=J; CNP[I,A1]=3; end;
  end;
end;
READ(DDO); PPP=0;
for DD=1 step 1 until DDD do
begin
  P=0;
  for I=1 step 1 until NP2 do
  begin
    READ(P+GK1);
    for J=(1+0) step 1 until (P+0) do
    begin DISPA[J]=GK1;
      if (P+0)=NP2 then go to L700;
    end;
    P=P+0;
  end;
L700;
READ(LLL);
for LL=1 step 1 until LLL do
begin
  for I=1 step 1 until NP2 do
  begin DISPI[I]=DISPA[I];
    P=0;
    READ(OW);
    for I=1 step 1 until NP2 do
    begin
      READ(P+GK2);
      for J=(1+0) step 1 until (P+0) do
      begin LOAD[J]=GK2;
        if (P+0)=NP2 then go to L800;
      end;
      P=P+0;
    end;
  end;
L800;
PPP=PPP+1; if PPP=1 then go to L900;
for I=1 step 1 until NE do
begin

```

- 110-

- 120-

- 130-

- 140-

- 150-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 4

三角形各要素の 剛性マトリクス 計算

入力データの 打ち出し

```

end;
CRLF(4);
OUT(6, 'NP', 3B, 'ORDER', 9B, 'X0', 9B, 'Y0', 8B, 'LOAD(X)', 5B, 'LOAD(Y)',
6B, 'DISP(X)', 3B, 'DISP(Y)');
CRLF(2);
for I=1 step 1 until NP do
begin
  I1=2*I-1; I2=2*I;
  OUT(6, '2D', 3B, 2D, 6Z, 2D, 2B, 6Z, 2D, -6Z, 2D, 'I', [I, I2, X[I], Y[I]);
  OUT(6, 'B', 2(B-6Z, 2D), 3B, 2(B-3Z, 3D), 'LOAD[I1], LOAD[I2], DISP[I1], DISP[I2]');
  CRLF(1);
end;
CRLF(3);
OUT(6, 'NFPXY', 2Z, 'NFPXY'); CRLF(1);
GK1=GK2=0.000000000;
for I=1 step 1 until NFPXY do
begin
  if (GK1=0.010000000 or GK1<0.010000000) then SPACE(2);
  OUT(6, '3D', 6P, 'FPXY', I);
  I1=ENTIER(I/10*0.010000000); JJ=ENTIER(I/20*0.010000000);
  - 250-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 6

GK1=I/10-FLOAT(I); GK2=I/20-FLOAT(JJ);
if (GK2=0.010000000 or GK2<0.010000000) then CRLF(1);
CRLF(1);
if NFPXY=NP2 v NFPXY=NP2 then
begin CRLF(3);
  OUT(6, '**** I wonder if you are a man of sense. ****');
  CRLF(1); go to L39;
end;
if PPP=1 then go to L910;
- 260-

L2: for I=1 step 1 until NP2 do
begin
  for J=1 step 1 until NP2 do
  begin MAT[I, J]=0.000000000; end;
end;
for I=1 step 1 until NP do
begin
  A1=2*I-1;
  A2=2*I;
  for J=1 step 1 until 8 do
  begin
    - 270-
    if ENP[I, J]=0 then go to L3 else go to L4;
    KK=ENP[I, J];
    AA1=2*CNP[I, J]-1;
    AA2=2*CNP[I, J];
    for II=1 step 1 until NP do
    begin
      B1=2*II-1;
      B2=2*II;
      for JJ=1 step 1 until 8 do
      begin
        - 280-
        if ENP[II, JJ]=0 then go to L5 else go to L6;
        if ENP[II, JJ]=KK then go to L7 else go to L8;
        BB1=2*CNP[II, JJ]-1;
        BB2=2*CNP[II, JJ];
        MAT[A1, B1]=MAT[A1, B1]+K[KK, AA1, BB1];
        MAT[A1, B2]=MAT[A1, B2]+K[KK, AA1, BB2];
        MAT[A2, B1]=MAT[A2, B1]+K[KK, AA2, BB1];
        MAT[A2, B2]=MAT[A2, B2]+K[KK, AA2, BB2];
        - 290-
      end;
    end;
  end;
end;
L5:
L6:
L7:
L8:
L910:
if OK=0 then go to L99;
for I=1 step 1 until NP do
- 300-

```

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 7

集積特性マトリ
クスの計算

自重考慮

```

begin
  A2=2+1
  for J=1 step 1 until 8 do
    begin
      if ENP[I,J]≠0 then go to L9 else go to L10:
      L9: KK=ENP[I,J]: LOAD[A2]=LOAD[A2]+WE[KK]:
      end:
      L10:
    end:
  L99:
  - 310-

  for I=1 step 1 until NP2 do
    begin
      for J=1 step 1 until NP2 do
        begin
          LOAD[I]=LOAD[I]-MAT[I,J]*DISP[J]: end:
        end:
      if PPP=1 then go to L920:
      for I=1 step 1 until NMPXY do
        begin
          for J=1 step 1 until NMPXY do
            begin
              II=MPNXY[I]:
              JJ=MPNXY[J]:
              MATH[I,J]=MAT[I,J]*JJ:
            end:
          end:
          for I=1 step 1 until NMPXY do
            begin
              for J=1 step 1 until NMPXY do
                begin
                  if I=J then MATH[I,NMPXY+J]=1.0000000000 else MATH[I,NMPXY+J]=0.0000000000:
                end:
              end:
            end:
          for NK=1 step 1 until NMPXY do
            begin
              Q=2*NMPXY:
              if MATH[NK,NK]≠0.0000000000 then go to L11 else P=NK+1:
              if P>NMPXY then go to L12:
              L13: if MATH[P,NK]≠0.0000000000 then go to L14 else P=P+1:
              if P>NMPXY then go to L12 else go to L13:
              L14: for J=1 step 1 until 0 do
                - 340-
                begin
                  MATH[NK,J]=MATH[NK,J]+MATH[P,J]: end:
                L11: RB=MATH[NK,NK]:
                for J=1 step 1 until 0 do
                  begin
                    MATH[NK,J]=MATH[NK,J]/RB: end:
                  for I=1 step 1 until NMPXY do
                    begin
                      RB=MATH[I,NK]:
                      for J=1 step 1 until 0 do
                        begin
                          if I=NK then MATH[I,J]=(MATH[I,J]-RB*MATH[NK,J]) else MATH[I,J]=MATH[NK,J]: end:
                        end:
                      - 350-
                    end:
                  end:
                end:
              if NK<NMPXY then go to L40:
              for I=1 step 1 until NMPXY do
                begin
                  for J=1 step 1 until NMPXY do
                    begin
                      MATH[I,J]=MATH[I,NMPXY+J]: end:
                    end:
                  end:
                end:
              L40:
            end:
          L920:
          for I=1 step 1 until NMPXY do
            - 360-
            begin
              II=MPNXY[I]: S=DISP[II]:
              for J=1 step 1 until NMPXY do
                begin
                  JJ=MPNXY[J]: S=S+MATH[I,J]*LOAD[J]:
                end:
              DISP[II]=S:
            end:
          for I=1 step 1 until NMPXY do
            begin
              II=MPNXY[I]: RF[II]=0.0000000000: end:
            for I=1 step 1 until NMPXY do
              - 370-
              begin
                II=MPNXY[I]:
                RF[II]=LOAD[II]:
                for J=1 step 1 until NMPXY do
                  begin
                    JJ=MPNXY[J]: RF[II]=RF[II]+MATH[II,J]*DISP[J]: end:
                  end:
                EJECT: CRLF(1):
                OUTO(6,1138,'PAGE 2'): CRLF(1):
                OUTO(6,1138,'RESULT-1 ( NODAL POINT INFORMATION ) *'):
                CRLF(3):
                - 380-
                OUTO(6,1138,'NP',88,'LOAD(X)',88,'LOAD(Y)',98,'REAC(X)',98,'REAC(Y)',
                  98,'DISP(X)',68,'DISP(Y)',78,'X',128,'Y'):
            end:
          end:

```

初期変位考慮

可動節点につい
ての逆マトリク
スの計算

可動節点の変位
の計算

固定節点の反力
の計算

```

CRLF(2);
GK1=GK2=GK3=GK4=0.000000000;
for I=1 step 1 until NP do
begin
  I1=2*I-1; I2=2*I;
  GK1=GK1+LOAD[I1]; GK2=GK2+LOAD[I2];
  GK3=GK3+RF[I1]; GK4=GK4+RF[I2];
  OUT1(6,'2ZDB',I);
  OUTB(6,'2(-6ZD,6D),2(-7ZD,6D),2B,4(-6ZD,4D)',LOAD[I1],LOAD[I2],RF[I1],RF[I2],
  DISP[I1],DISP[I2],X[I1],DISP[I1],Y[I1],DISP[I2]);
  CRLF(1);
end;
CRLF(1);
OUTO(6,'* GK',B');
OUTA(6,'2(-6ZD,6D),2(-7ZD,6D)',GK1,GK2,GK3,GK4); CRLF(1);
EJECT; CRLF(1);
OUTO(6,'113B,PAGE 3'); CRLF(1);
OUTO(6,'* RESULT-2 ( ELEMENT INFORMATION ) *');

```

結果 [1]
節点情報の打ち
出し
(変位量,反力)

- 400-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 9

```

CRLF(3);
OUTO(6,'* NE',9B,'SIGMA-X',7B,'SIGMA-Y',7B,'TAU-XY',8B,'TAU-MAX',
7B,'SIGMA-1',7B,'SIGMA-2',9B,'THETA',7B,'K (X/Y)');
CRLF(2);
for I=1 step 1 until NE do
begin
  I1=IE[I];
  JJ=JE[I];
  MM=ME[I];
  XI=X[I];
  XJ=X[J];
  XM=X[MM];
  YI=Y[I];
  YJ=Y[J];
  YM=Y[MM];
  UV[1]=DISP[2*I-1];
  UV[2]=DISP[2*I];
  UV[3]=DISP[2*JJ-1];
  UV[4]=DISP[2*JJ];
  UV[5]=DISP[2*MM-1];
  UV[6]=DISP[2*MM];
  if PS=1 then begin C1=EE[I]/(1.000000000-V[I]*V[I]); C2=V[I]; end
  else begin C1=EI[I]*(1.000000000-V[I])/(1.000000000+V[I]); C2=V[I]/(1.000000000-V[I]); end;
  F1=(1.000000000-C2)/2.000000000;
  C0=C1/(XJ-XI)*YM+(XI-XM)*YJ+(XM-XJ)*YI);
  MA[1,1]=(YM-YJ)*C0;
  MA[1,2]=C2*(XJ-XM)*C0;
  MA[1,3]=(YI-YM)*C0;
  MA[1,4]=(-C2)*(XI-XM)*C0;
  MA[1,5]=(YI-YJ)*(-C0);
  MA[1,6]=C2*(XI-XJ)*C0;
  MA[2,1]=C2*(YM-YJ)*C0;
  MA[2,2]=(XJ-XM)*C0;
  MA[2,3]=C2*(YI-YM)*C0;
  MA[2,4]=(XI-XM)*(-C0);
  MA[2,5]=(-C2)*(YI-YJ)*C0;
  MA[2,6]=(XI-XJ)*C0;
  MA[3,1]=F1*(XJ-XM)*C0;
  MA[3,2]=F1*(YM-YJ)*C0;
  MA[3,3]=(-F1*(XJ-XM)*C0);
  MA[3,4]=F1*(YI-YM)*C0;
  MA[3,5]=F1*(XI-XJ)*C0;
  MA[3,6]=(-F1*(YI-YJ)*C0);
  for J=1 step 1 until 3 do
  begin
    S=0.000000000;
    for L=1 step 1 until 6 do
    begin S=S+MA[J,L]*UV[L]; end;
    SIGMA[J]=S;
  end;

```

各要素の応力計
算

- 410-

- 420-

- 430-

- 440-

- 450-

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 10

```

end;
S1=(SIGMA(1)+SIGMA(2))/2.00000000;
S2=SORT((SIGMA(1)-SIGMA(2))/2.00000000)*((SIGMA(1)-SIGMA(2))/2.00000000)+SIGMA(3)+SIGMA(3));
S1G1=S1+S2;
S1G2=S1-S2;
THETA=28.647897562*(ARCTAN(2.000000000*S1G1/(SIGMA(1)-SIGMA(2)))));
IF (SIGMA(1)-SIGMA(2))>0.00000000 then THETA=THETA+90.00000000;
L20:
IF SIGMA(2)<0.0000001*SIGMA(2) AND 0.000001 then GK1=9999.9999 else GK1=SIGMA(1)/SIGMA(2);
OUT1(6,'2D3R',1);
OUT8(6,'6(2B-32D.6U).5B-22D.3D.4B-32D.4D',S1G1,S1G2,S1G2,THETA,GK1);
CRLF(1);
G1(1)=SIGMA(1); G2(1)=SIGMA(2);
G3(1)=SIGMA(3); G4(1)=S2;
G5(1)=S1G1; G6(1)=S1G2;
G7(1)=THETA; G8(1)=GK1;
end;
EJECT; CRLF(1);
OUT0(6,'113R','PAGE 4'); CRLF(1);
OUT0(6,'** RESULT-3 * MEAN VALUE AROUND NONAL POINT *');
CRLF(3);
OUT0(6,'** NP',9B,'SIGMA-X',7B,'SIGMA-Y',7B,'TAU-X',8B,'TAU-MAX',7B,'SIGMA-1',
7B,'SIGMA-2',9B,'THETA',7B,'K (X/Y)');
CRLF(2);
for I=1 step 1 until NP do
begin
SIGMA(1)=SIGMA(2)=SIGMA(3)=S2=S1G1=S1G2=THETA=GK1=0.000000000;
JJ=0;
for J=1 step 1 until 8 do
begin
KK=ENPI(J);
if KK=0 then go to L50;
JJ=JJ+1;
SIGMA(1)=SIGMA(1)+G1(KK);
SIGMA(2)=SIGMA(2)+G2(KK);
SIGMA(3)=SIGMA(3)+G3(KK);
S2=S2+G4(KK);
S1G1=S1G1+G5(KK);
S1G2=S1G2+G6(KK);
THETA=THETA+G7(KK);
GK1=GK1+G8(KK);
end;
L50:
GK2=FLOAT(JJ);
SIGMA(1)=SIGMA(1)/GK2;
SIGMA(2)=SIGMA(2)/GK2;
SIGMA(3)=SIGMA(3)/GK2;
S2=S2/GK2;
S1G1=S1G1/GK2;
S1G2=S1G2/GK2;
THETA=THETA/GK2;
GK1=GK1/GK2;
end;
go to L39;
L12: CRLF(5); OUT0(6,'** CAN NOT CARRY ON'); CRLF(1);
L39: EJECT;
end;
end;
if KEY(8) then go to START;
end;

```

結果 [2]
要素情報の打ち
出し
(応力)

各節点のまわり
の要素における
応力の平均値計
算

FACOM 270-20/30 ALGOL LIST V-1 L-004 012344 DATE 44/10/ 4 PAGE 11

```

THETA=THETA/GK2;
GK1=GK1/GK2;
OUT1(6,'2D3R',1);
OUT8(6,'6(2B-32D.6U).5B-22D.3D.4B-32D.4D',
SIGMA(1),SIGMA(2),SIGMA(3),S2,
S1G1,S1G2,THETA,GK1);
CRLF(1);

```

結果 [3]
節点における応
力の打ち出し

§ 3 応 用 解 析 例

1. 地中応力解析例

解析に用いた要素は図 2-3-1 に示すものである。節点数 42、要素数 57 で拘束条件としては、側面をローラーに、底面を固定支承とした。

これは前述の方式の軸対称プログラムがどの程度ブジネスクの理論解と合致するかをチェックするために行なったもので、境界条件は最も一般的なものを用いたのである。外荷重は集中荷重 1000 Kg と等分布円荷重（半径 12.5cm）1Kg/cm² の 2通り作用させた。

集中荷重直下（軸心）の垂直応力 σ_y 及び軸心から水平に 50 cm 離れた位置における σ_y を、それぞれブジネスクの理論解と比較してみる。理論解の方は半無限体を対照にしているので、図 2-3-1 のような境界条件を有する FEM で解いた値が、理論解と完全に一致することは望めないが、軸心における σ_y の分布と軸心より水平から 50 cm 離れた点の σ_y の分布は理論解の分布にかなり近いことがわかる。これはさらに要素の数をふやすこととネットの組み方、境界の設定の仕方を工夫することにより実用上充分の近似をもって使用できると考えられる。なお、軸心の σ_y よりも軸心から 50 cm 離れた位置の σ_y の方が理論解に近いことが示されているが、これはこの位置における σ_y の算定が節点のまわりの要素応力の平均にもとづいているために、となり合う三角形要素の厚さも平均化されるような効果を与えているのに対して、軸心の応力は厚さが 0 でなくて、ある一定の厚さをもった要素の応力としての形で与えられるためであろう。また水平応力は側面の拘束条件に大きく作用され FEM の値と理論解の値との間に大きな差異がみとめられる。

等分布円荷重による荷重直下の垂直応力図 2-3-6 も集中荷重と同じ程度の接近度を持っていることがわかる。

この図には又二次元プログラムそのもので解析した二次元平面歪状態の応力値も示している。

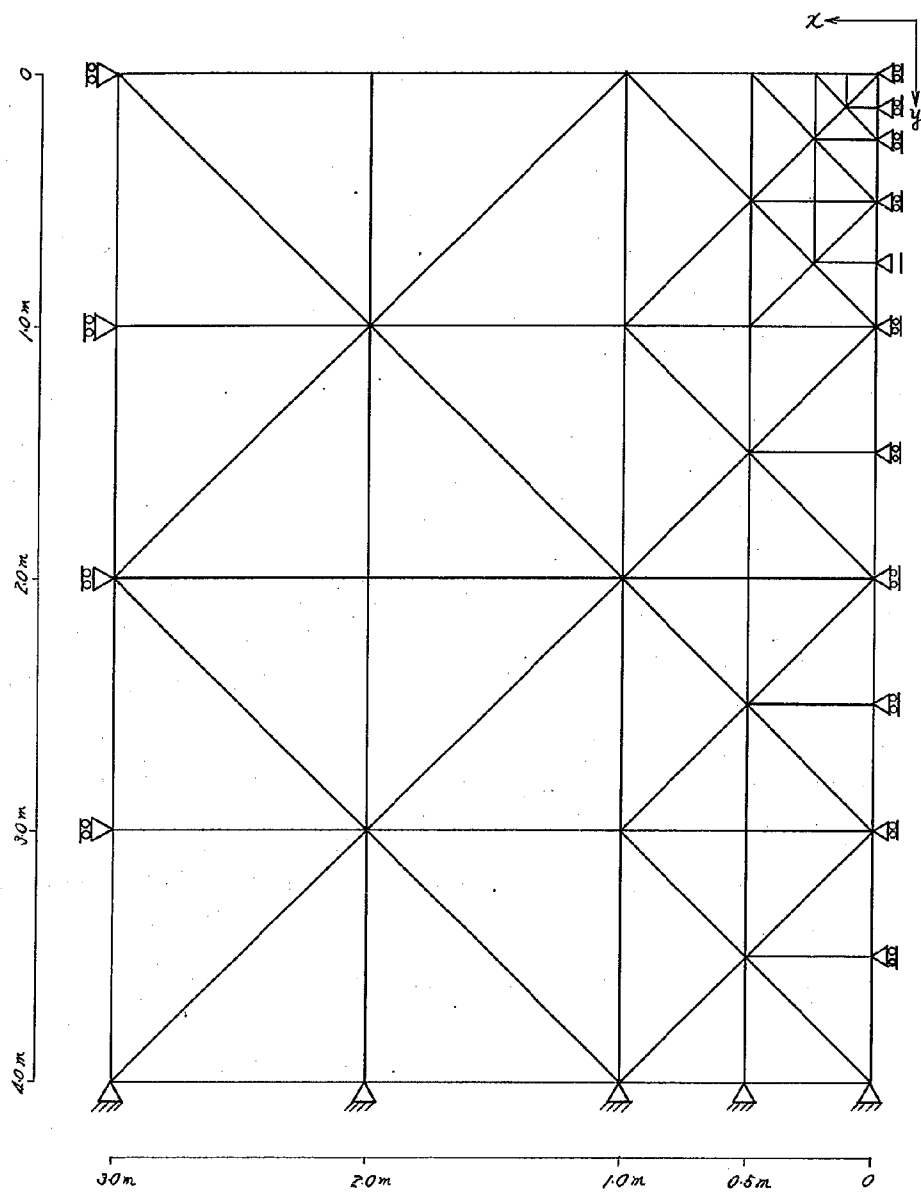


圖 2-3-1 断面 節点数 42
要素数 57

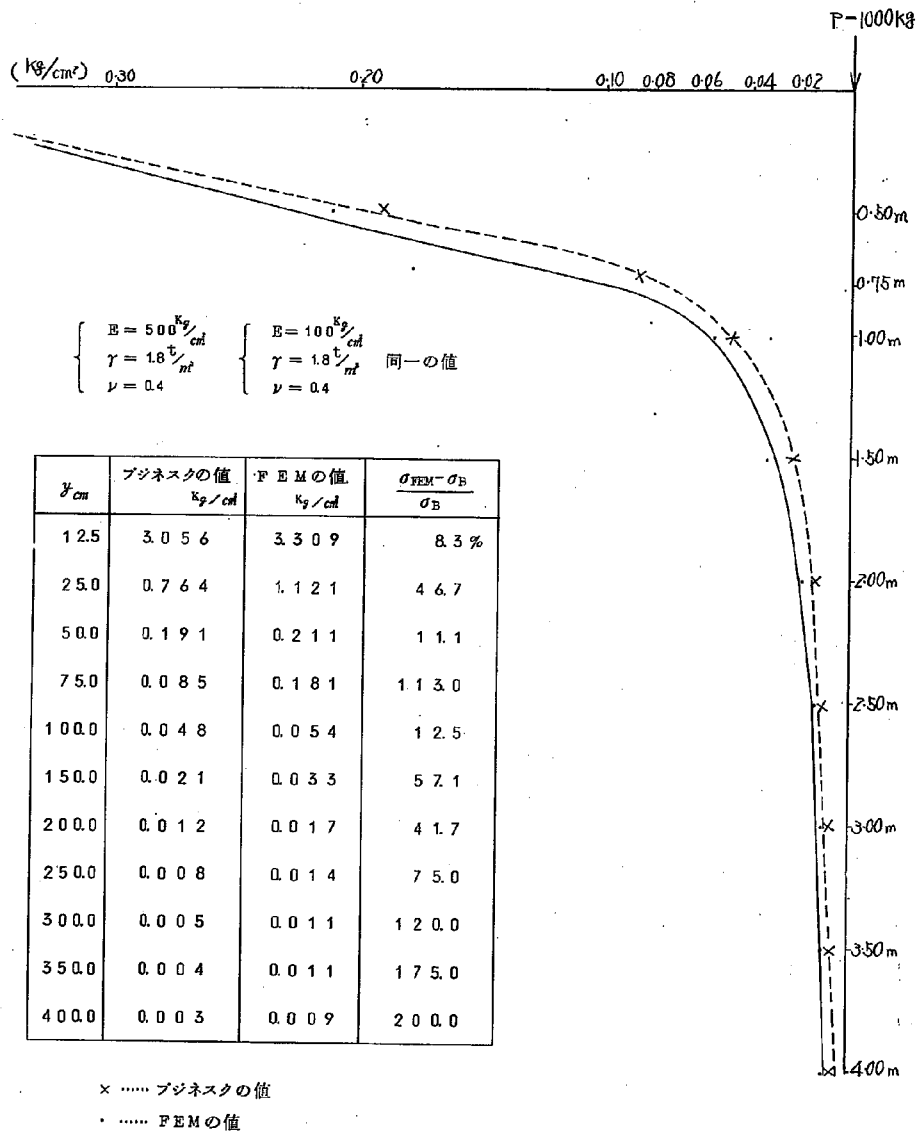


図 2 - 3 - 2 集中荷重直下の σ_y

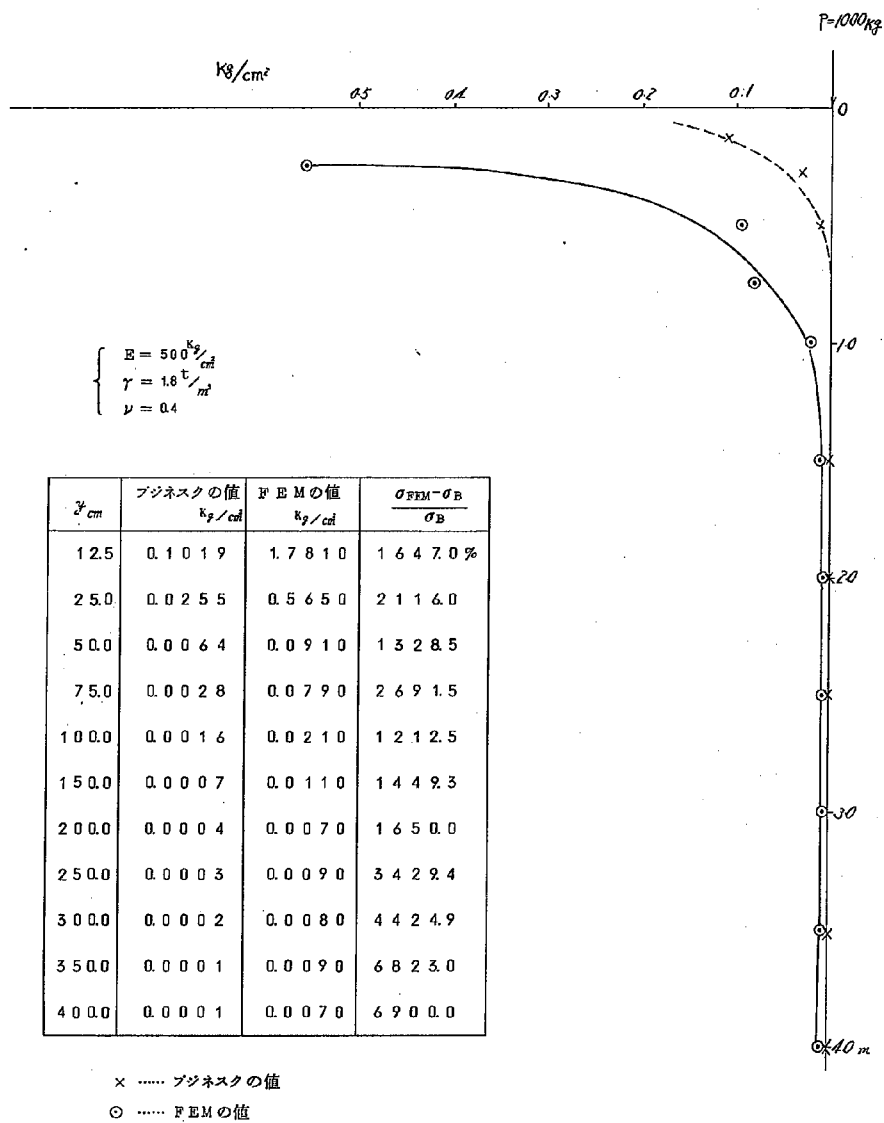


図 2-3-3 集中荷重直下の σ_x

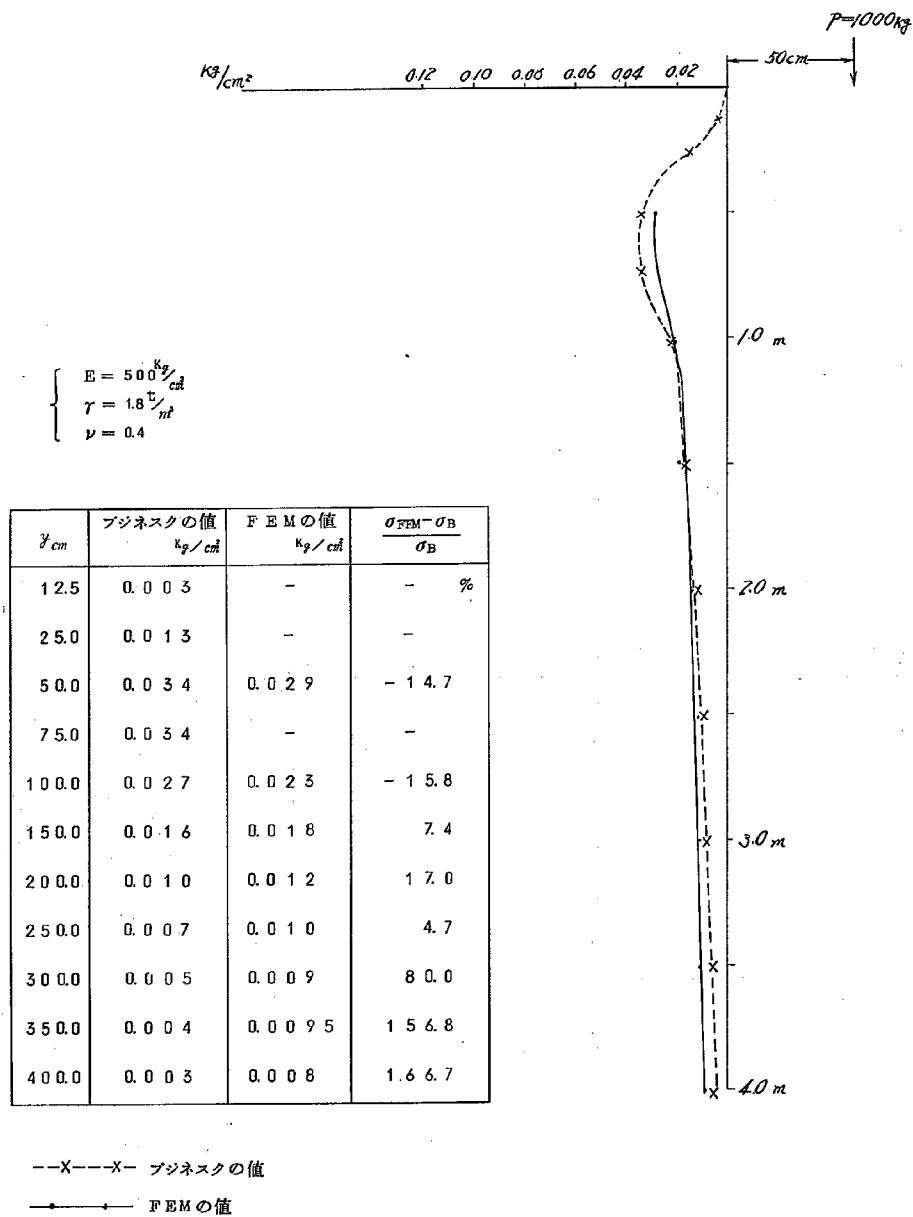


図 2-3-4 集中荷重直下から 50 m 離れた所の σ_y

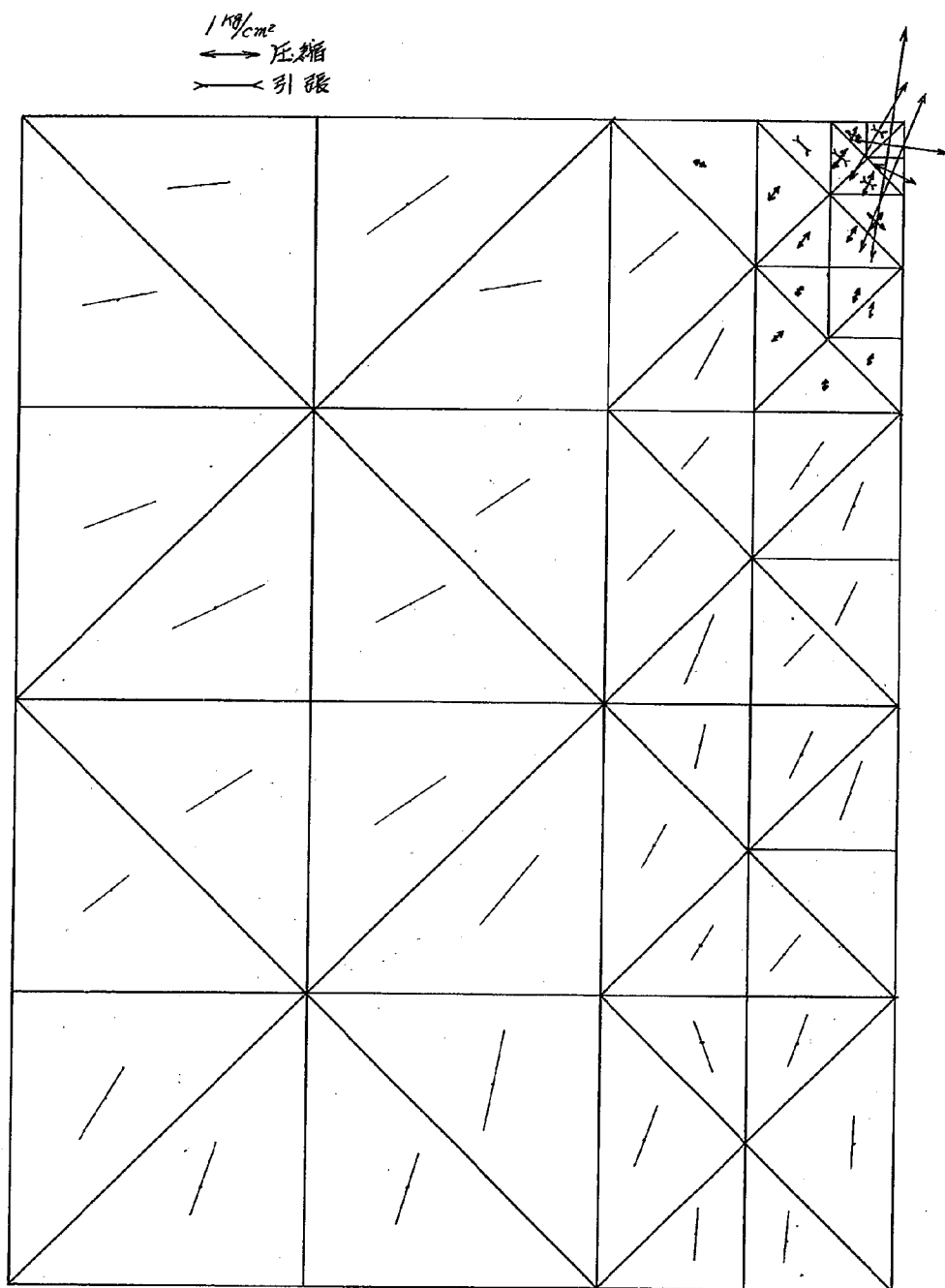
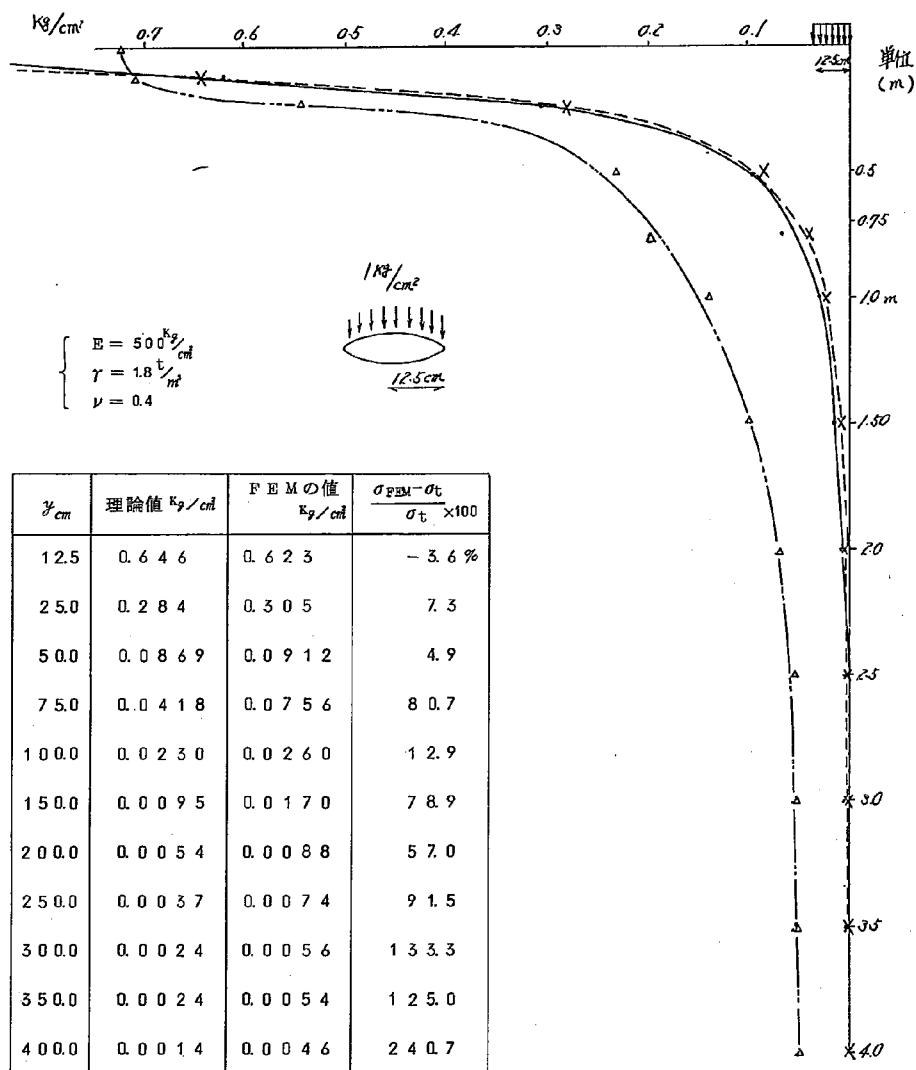


图 2-3-5 集中荷重 $P=1000\text{kg}$ による主応力 σ_1 、 σ_3 と方向



X --- 理論値
 • --- FEM (軸対称)
 Δ --- FEM (2次元)

図 2-3-6 等分布荷重による直下の σ_y

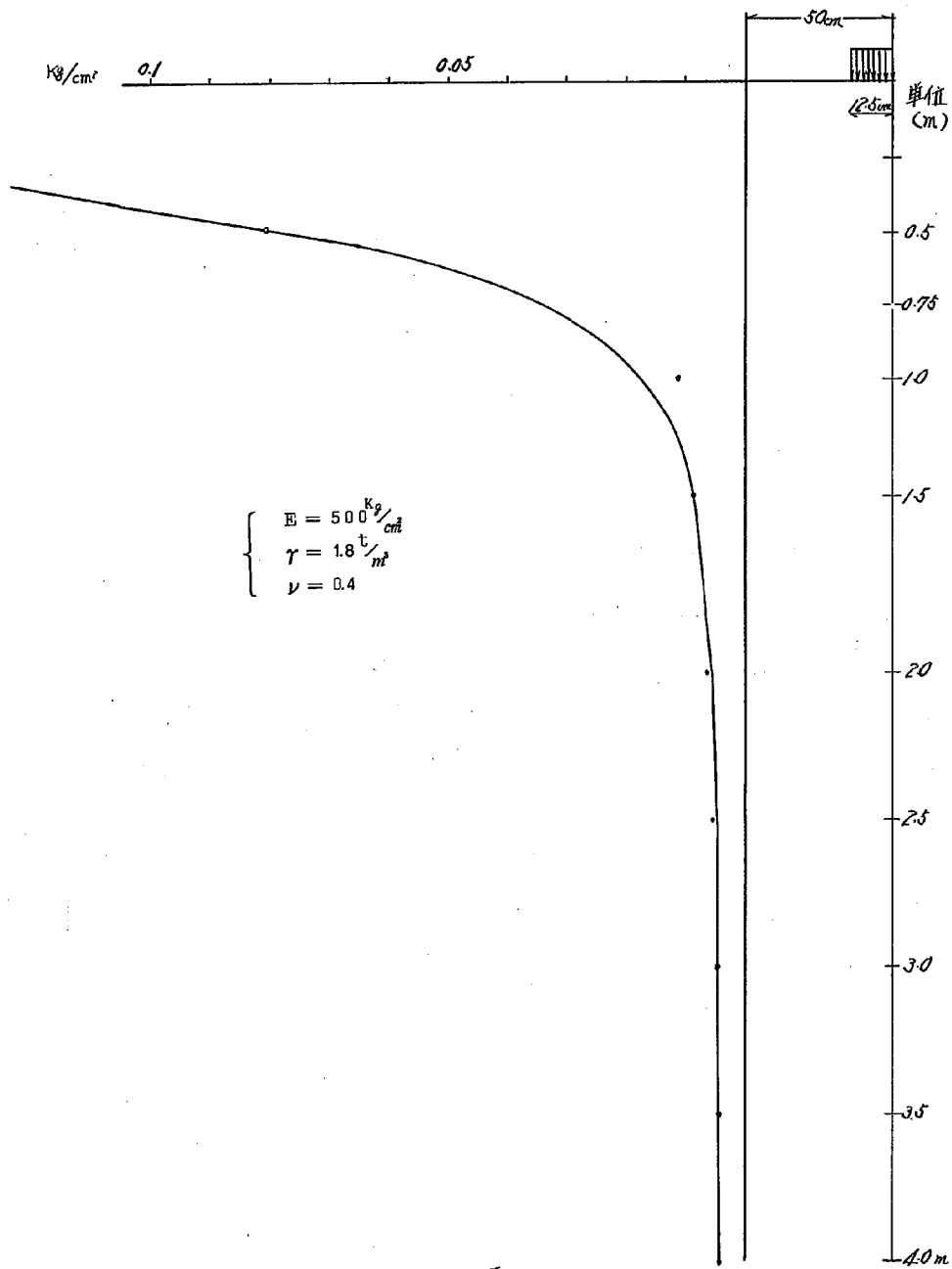


図 2-3-7 等分布荷重による 50 cm 離れた所の σ_y

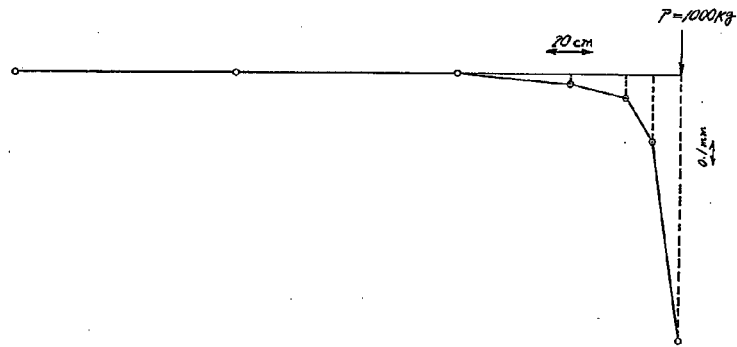


図 2-3-8 集中荷重による地表面の変位

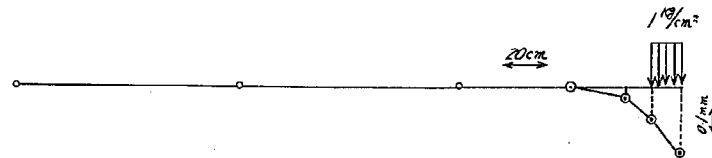


図 2-3-9 等分布荷重による地表面の変位

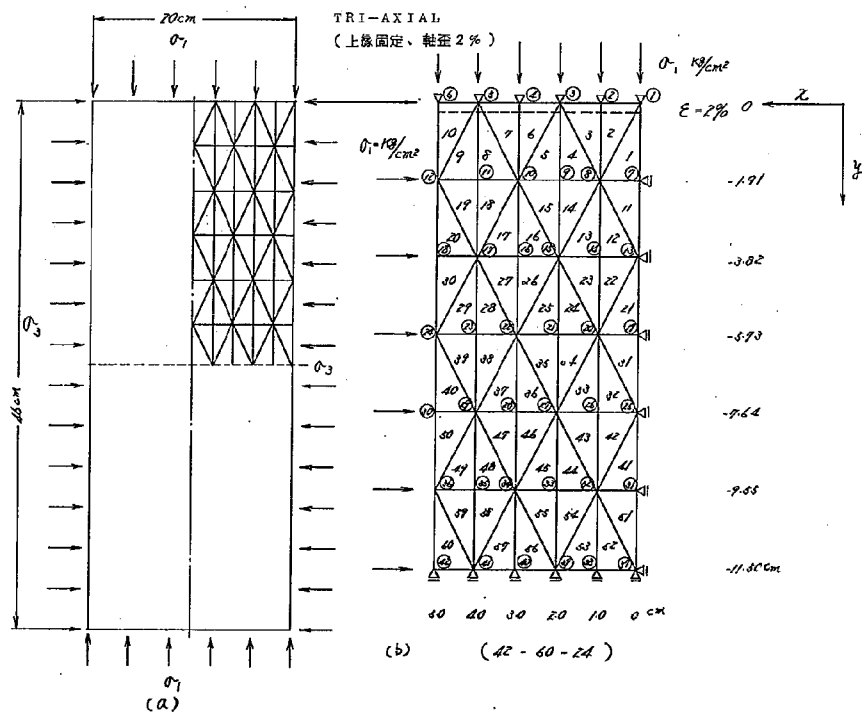


図 2-3-10 断面

2. 三軸試験への適用

三軸圧縮供試体における応力と変形の解析を行なったもので、図2-3-10に示すような境界条件即ち上面に軸方向に等変位（2%）の圧縮を生ぜしめた場合である。

ポアソン比をパラメーターとした場合の供試体の変形状態を図2-3-12～図2-3-17に、側圧をパラメーターとした場合の供試体の変形状態を図2-3-18と図2-3-19に示す。変形はポアソン比によって非常に大きな影響を受けることがよくわかる。またポアソン比が小さくなり側圧が増加すると供試体側面は内側にくぼんでくることが見出されている。なお実際の供試体の側面の変形状態を測定して、FEMの計算結果とくらべることにより、その材料のポアソン比と弾性係数の推定が可能となるかもしれない。

図2-3-22から図2-3-24までは水平に切った各断面における σ_x 、 σ_z 、 τ_{xy} を示している。ここで興味深いことは、一軸圧縮状態（側圧0）の場合は各断面でかなり均一な応力分布となっているが、側圧が増加するにつれて垂直軸下に応力集中がみられ、特に上面ピストンに近くなる程それが顕著になることである。なお当然のことながら水平方向の τ_{xy} はいかなる場合でもほとんど0であることも示されている。

ν $\sigma_3 / \text{kg/cm}^2$	0.1		0.2		0.3		0.4	
	σ_1	σ_1'	σ_1	σ_1'	σ_1	σ_1'	σ_1	σ_1'
0	1.00	1.01	1.00	1.05	1.00	1.13	1.00	1.28
0.1	1.02	1.03	1.04	1.09	1.06	1.20	1.08	1.40
0.3	1.06	1.06	1.12	1.17	1.18	1.34	1.24	1.63
0.5	1.10	1.10	1.20	1.25	1.30	1.48	1.40	1.86
0.7	1.14	1.14	1.28	1.33	1.42	1.62	1.56	2.08
1.0	1.20	1.18	1.40	1.44	1.60	1.83	1.80	2.43

表中

σ_1 は $\sigma_1 = E \epsilon_1 + 2 \nu \sigma_3$ より求めた値
 σ_1' は電算結果より得られた値

図2-3-11 軸歪2%に対する軸荷重 σ_1 (Kg/cm²)

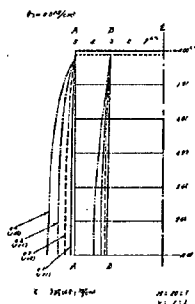


図2-3-12 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 0$ Kg/cm²)

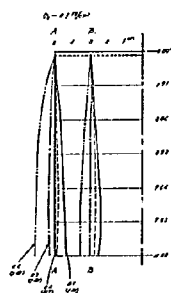


図2-3-13 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 0.1$ Kg/cm²)

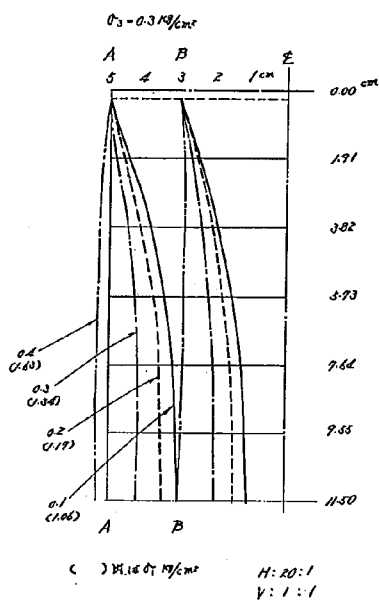


図2-3-14 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 0.3 \text{ Kg/cm}^2$)

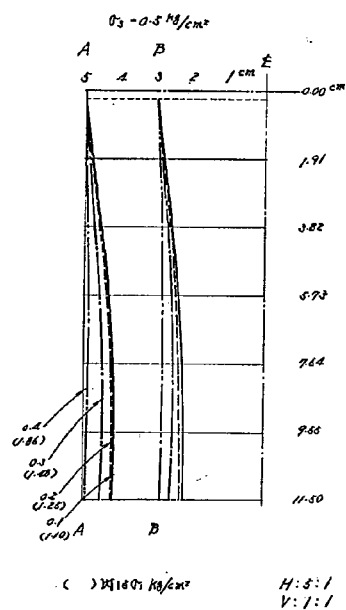


図2-3-15 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 0.5 \text{ Kg/cm}^2$)

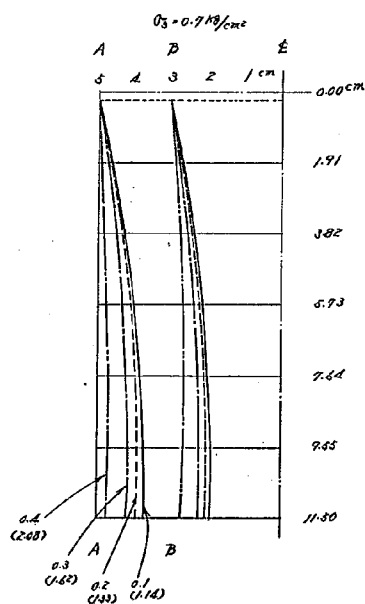


図2-3-16 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 0.7 \text{ Kg/cm}^2$)

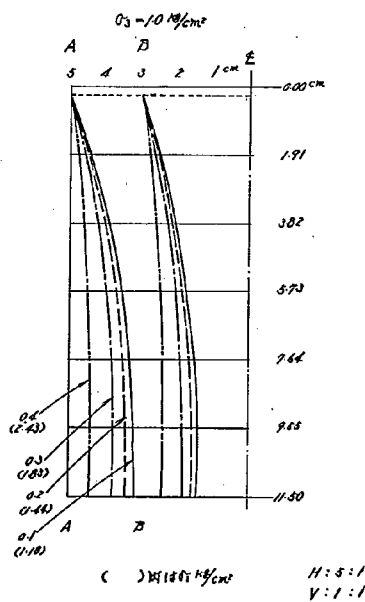
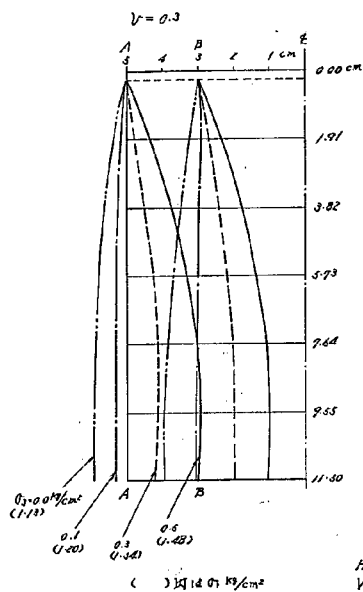


図2-3-17 ポアソン比をパラメーターとした各変形 ($\sigma_3 = 1.0 \text{ Kg/cm}^2$)



H: 20:1
V: 1:1

図2-3-18 側圧をパラメーターとした各変形 ($\nu=0.3$)

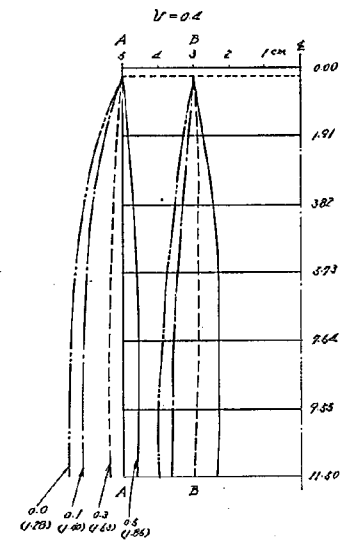


図2-3-19 側圧をパラメーターとした各変形 ($\nu=0.4$)

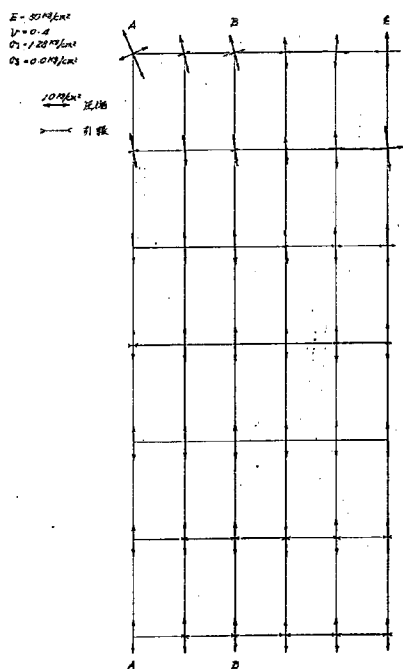


図2-3-19' 各節点の主応力

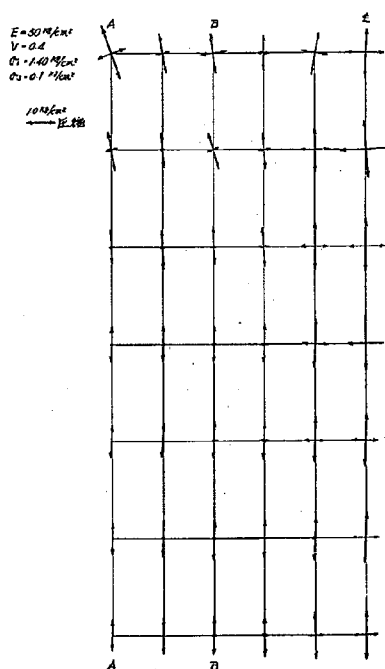


図2-3-20 各節点の主応力

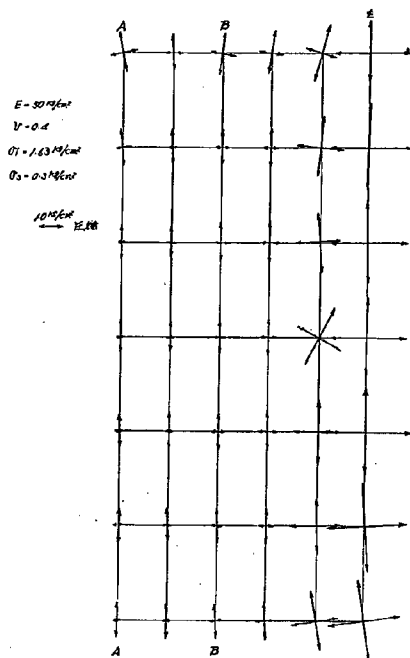


図 2-3-21 各節点の主応力

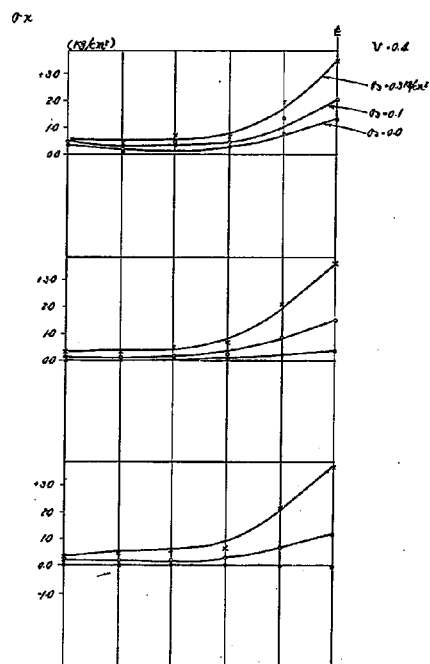


図 2-3-22 各断面の水平応力

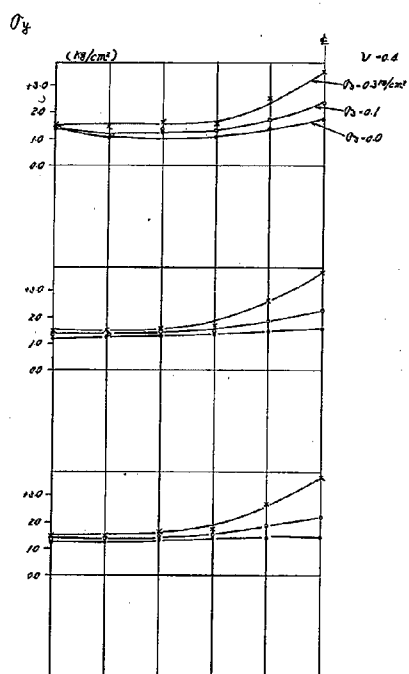


図 2-3-23 各断面の垂直応力

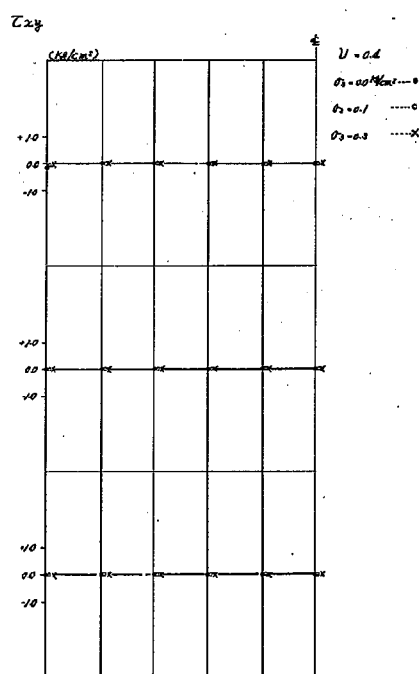


図 2-3-24 各断面のせん断応力

あ と が き

盛土の内部応力について有限要素法による弾性解析結果を紹介した。有限要素法による解析法は今後も非常に有用な手段となろうが、今後は土の性質を正確にとり入れた解析、例えば非線型、粘弾性、マサツ等の効果、を適切に表現できるような方向へ進んでいくものと思われる。これらに関しては既に諸家により、かなり研究が進められているようであるが、これと共にそのもとになる物性の研究が今後の大きな課題であろう。

昭和44年11月

施 工 研 究 室

参 考 文 献

"Theory of Elasticity"

by Timoshenko and Goodier, McGraw - Hill Book Co.,

"Dead Load Stresses and The Instability of Slopes"

by L.E.Goodman and C.B.Brown, ASCE, Vol.89, NO.SM3, May, 1963,

"The Finite Element Method in Plane Stress Analysis"

by Ray W.Clough, 2nd ASCE Conference on electronic
computation Pittsburgh, Pa., September 8-9, 1960,

"The Finite Element Method in Structural Mechanics"

by Ray W.Clough, in [Stress Analysis] edited by Zinkiewicz
and Hollister, John Wiley & Sons, Ltd., London, 1965,

"Analysis of Embankment Stresses and Deformations"

by Ray W.Clough and R.J.Woodward, ASCE, Vol.93,
NO.SM4, July, 1967,

"Finite Element Analysis of Axi-Symmetric Solids"

by R.W.Clough and Y.Rashid, ASCE, NO.EMI, Feb., 1965,

"Application of the Elastic Theory to Highway Embankments by Use
of Difference Equations"

by J.C.DingWall and F.H.Scrivner, Highway Research Board
Proceedings, Vol.33, 1954,

"Stress Distribution Within and Under Long Elastic Embankments"

by W.H.Perloff, G.Y.Baladi and M.E.Harr, Highway Research
Record, NO.181, 1967,

"Finite Element Method - 有限要素法の解説 -"

梶田建夫, 成岡昌夫著, 土木学会誌, 1967年5月号,

"ALGOL 入門"

森口繁一 編 JUSE 出版,

"構造力学 第Ⅱ巻"

小西一郎, 横尾義貴, 成岡昌夫 著 P.217 ~ P.248 丸善株式会社

付録 Airy の応力函数による解析

§ 1 天端が無限大とする応力解析

図の様に天端が無限大と仮定した時を考えてみる。斜面と天端とのます角 α は $\pi/2$ から π の間にあるとする。土は弾性体ではないが弾性体とみなし、 $x-y$ 2次元の平面歪につき考える。

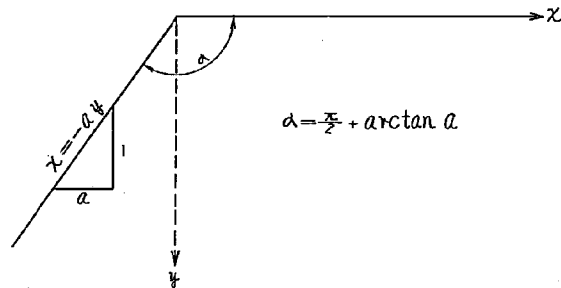


図-1

今、盛土の最終的な天端、即ち完成した時の天端より下方 Y の距離の平面 A 上に厚さ Δ の層を積み重ねるとして、盛土内の任意の点 $O(x_0, y_0)$ の応力を求める為 Airy の応力函数を次の様に定める。但し ρg は物質の単位体積重量であり、厚さ Δ の層の重さのみを考慮する。

$$\phi(x_0, y_0) = \frac{-\rho g \Delta}{2(a + \frac{1}{a})} \left\{ \left[a - \sin^{-1} \left(\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (x_0^2 + y_0^2) + x_0 y_0 + \frac{x_0^2}{a} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

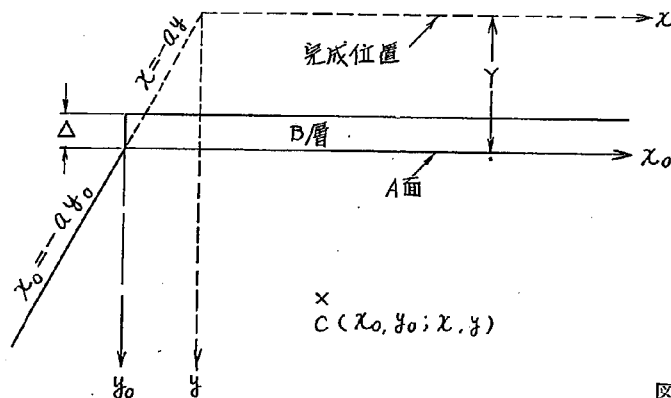


図-2

$$\sigma_{x_0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_{y_0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau_{x_0 y_0} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial y_0} \dots\dots\dots (4)$$

より、特別解 σ_{x_0} , σ_{y_0} , $\tau_{x_0 y_0}$ を求めると次式を得る

$$\sigma_{x_0} = \frac{-\rho g \Delta}{(a + \frac{1}{a})} \left\{ a - \sin^{-1} \left(\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_{y_0} = \frac{-\rho g \Delta}{(a + \frac{1}{a})} \left\{ (a + \frac{1}{a}) - \sin^{-1} \left(\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_{x_0 y_0} = \frac{\rho g \Delta y_0}{(a + \frac{1}{a})(x_0^2 + y_0^2)} \dots\dots\dots (7)$$

これらは次の各条件を満足している。

境界条件

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{y_0} = -\rho g \Delta \\ \tau_{x_0 y_0} = 0 \end{array} \right\} \text{ on } y_0 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{x_0} = -a \tau_{x_0 y_0} \\ \tau_{x_0 y_0} = -a \sigma_{y_0} \end{array} \right\} \text{ on } x_0 = -a y_0 \dots\dots\dots (9)$$

釣合条件

$$\frac{\partial \sigma_{x_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial \tau_{x_0 y_0}}{\partial y_0} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \rho y_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \tau_{x_0 y_0}}{\partial x_0} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

適合条件

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) (\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

式(5)~式(7)において、 Δdy_0 に置き換える。そして次の様に固定座標 (x, y)

に変換する。

$$x_0 = x + ay \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$y_0 = y - Y \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$dy_0 = -dY \quad \dots\dots\dots (15)$$

今問題にしている点 O ($Y = y$) から、最終完成高 ($Y = 0$) まで、 Y に関し積分すると、最終的に次の応力が得られる。

$$\sigma_x = \frac{-\rho g}{\left(a + \frac{1}{a}\right)(1+a^2)^2} \left\{ \begin{aligned} & (a[1+a^2] + a)(1+a^2)y \\ & + a^2(x+ay) \ln \frac{x^2+y^2}{(x+ay)^2} - (y[1+3a^2] \\ & + ax(1-a^2)) \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\sigma_y = -\rho g y + \frac{\rho g}{\left(a + \frac{1}{a}\right)(1+a^2)^2} \left\{ \begin{aligned} & ay(1+a^2) \\ & - (x+ay) \ln \frac{x^2+y^2}{(x+ay)^2} + (y[1-a^2] \\ & - ax[3+a^2]) \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\rho g}{\left(a + \frac{1}{a}\right)(1+a^2)^2} \left\{ \begin{aligned} & y(1+a^2) + a(x+ay) \ln \frac{x^2+y^2}{(x+ay)^2} \\ & + (a^2-1)(x+ay) \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$x < 0$ の場合は $\sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ は、第2象限とする。積分する際、 $x = ay$ と

$x = \infty$ とで境界が制限されていることに注意する。

式(16)～式(18)に示す最終応力は次の各条件を満たしている。

境界条件

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -a\tau_{xy} \\ \tau_{xy} &= -a\sigma_y \end{aligned} \right\} \quad \text{on } x = -ay \quad \dots\dots\dots (20)$$

釣合条件 (自重を考慮する)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

適合条件は満足しない。なぜなら最初に仮定した Airy の応力函数は、盛土構築の中間段階の層に対して与えたものであり、又、各層に対する適合条件は満足しても、その層の積み重ねでできる最終的に完成した盛土では、その工法により最終応力は一般的には異なったものとなる。それは層と層の間に生ずる種々の条件によるものであり、それ故適合条件は厳密に満足しなくてもかまわない。

$z \rightarrow \infty$ にすると

$$\sigma_x = \frac{-\rho g a y}{a + \frac{1}{a}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\sigma_y = -\rho g y \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、 y のみの函数となる。

斜面を垂直と考えると $a = 0$ となり

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -\rho g y \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。これは、単一層を考える時に相当している。

§2 変位解析

平面歪であるから次式が成り立つ。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1}{E} \{ (1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y \} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = \frac{1}{E} \{ (1-\nu^2) \sigma_y - \nu(1+\nu) \sigma_x \} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{E} \{ 2(1+\nu) \tau_{xy} \} \quad \dots\dots\dots (29)$$

これより厚さ Δ の B 層による変位を求めると次式の様になる。

$$u_0 = \frac{-\rho g \Delta}{2\mu \left(a + \frac{1}{a}\right) (3 + 2\mu)} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(a - \sin^{-1} \left[\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) x_0 \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{a} x_0 - (3\lambda + 2\mu) y_0 - 2(\lambda + \mu) y_0 \ln(x_0^2 + y_0^2) \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$v_0 = \frac{-\rho g \Delta}{2\mu \left(a + \frac{1}{a}\right) (3\lambda + 2\mu)} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(a - \sin^{-1} \left[\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) y_0 \right. \\ \left. + \frac{2}{a} (\lambda + \mu) y_0 + 2(\lambda + \mu) x_0 \ln(x_0^2 + y_0^2) \right\} \dots\dots\dots (31)$$

但し ν は Poisson 比であり、 λ 、 μ は Lamé の常数といわれ

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

で表わされる。

最終応力を求めたと同様にして、 Δ を ay とし、最終変位を求めると次式の様になる。

$$u = \frac{-\rho g}{2\mu \left(a + \frac{1}{a}\right) (3\lambda + 2\mu)} \left\{ (\lambda + 2\mu) ay \left(x + \frac{ay}{2} \right) - \lambda \frac{y}{a} (x + ay) \right. \\ - (\lambda + 2\mu) y \left(x + \frac{ay}{2} \right) \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{ay(x + ay)(3\lambda + 2\mu)}{2(1+a^2)} \\ + \frac{(x + ay)^2}{2(1+a^2)^2} \left[\lambda(4a^2 + 1) + 2\mu(2a^2 + 1) \right] \ln \frac{x^2 + y^2}{(x + ay)^2} \\ - (\lambda + \mu) y^2 \ln(x^2 + y^2) + a \frac{(x + ay)^2}{2(1+a^2)^2} \left[2\mu(1 + 3a^2) + \lambda(5a^2 - 1) \right] \times \\ \left. \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

$$v = \frac{-\rho g}{2\mu \left(a + \frac{1}{a}\right) (3\lambda + 2\mu)} \left\{ a(\lambda + 2\mu) \frac{y^2}{2} + \frac{(\lambda + \mu)}{a} y(y - 3a^2y - 4ax) \right. \\ \left. + \frac{y(x + ay)}{2(1+a^2)} \left[\lambda(1 + 4a^2) + 2\mu(1 + 2a^2) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda+2\mu) \frac{y^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + (x+y) \frac{2[\lambda(4a^4+5a^2+7)+2\mu(2a^4+3a^2+3)]}{2(1+a^2)^2} \sin^{-1} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& - (\lambda+\mu)(2x+ay) y \ln(x^2+y^2) - \frac{a(3\lambda+2\mu)(x+ay)^2}{2(1+a^2)^2} \times \\
& \left. \ln \frac{x^2+y^2}{(x+ay)^2} \right\} \dots\dots\dots (33)
\end{aligned}$$

§ 3 応 力 計 算

応力解式(16)~式(18)は、弾性常数を含まず、それ故、今問題にしている点Cより下方の物質の影響は受けない。そして、C点より上方の物質の単位体積重量 ρg のみの値により応力は定まる。各層の ρg は異なるが同一層内では ρg は一定である。

又、式(16)~式(18)は x 、 y の項も含まれており、計算がわずらわしいので、

$$\frac{x}{y} = \eta$$

とおき、更に $\rho g y$ で応力を割った表現にしておくと、無次元になるので非常に便利である。即ち次の様になる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x}{\rho g y} &= \frac{-1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)(1+a^2)^2} \left\{ (a(1+a^2)+a)(1+a^2) \right. \\
& + a^2(\eta+a) \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} - ([1+3a^2]+a\eta[1-a^2]) \times \\
& \left. \sin^{-1} \left(\frac{1}{1+\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \dots\dots\dots (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y}{\rho g y} &= -1 + \frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)(1+a^2)^2} \left\{ a(1+a^2) - (\eta+a) \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} \right. \\
& + [1-a^2] - a\eta[3+a^2] \sin^{-1} \left(\frac{1}{1+\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left. \right\} \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho g y} = \frac{1}{(a + \frac{1}{a})(1+a^2)^2} \left\{ (1+a^2) + a(\eta+a) \ln \frac{\eta^2+1}{(\eta+a)^2} \right. \\ \left. + (a^2 - a) \sin^{-1} \left(\frac{1}{1+\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \dots\dots\dots$$

斜面の勾配 a を $\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{2}$ に $\frac{1}{2}$ きざみで与えて計算し、グラフにしたものが図 3 ～ 図 5 である。これを見てもわかる様に、各応力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} は斜面の勾配 a により大きく左右される。

斜面より遠ざかるに従い、 a の影響は小さくなり式 (23) ～ 式 (25) に急速に近づく。

(例 1)

$$a = 3, \quad x = 1.5 \text{ m}, \quad y = 3.0 \text{ m}, \quad \rho g = 1.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

として各応力を求めてみる。

$$\frac{x}{y} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

図 (3)、(4)、(5) より

$$\frac{\sigma_x}{\rho g y} = -0.71$$

$$\frac{\sigma_y}{\rho g y} = -0.97$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho g y} = 0.054$$

$$\therefore \sigma_x = -0.71 \times 1.3 \times 300 = -277 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_y = -0.97 \times 1.3 \times 300 = -378 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{xy} = 0.054 \times 1.3 \times 300 = 21.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

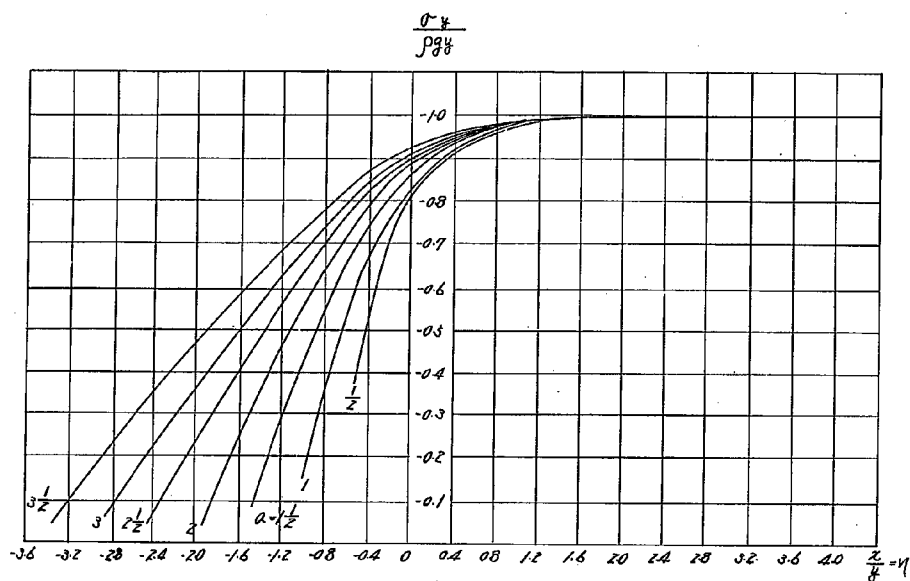


図4 $\frac{\sigma_y}{\rho g y}$ と $\frac{x}{y}$ の関係

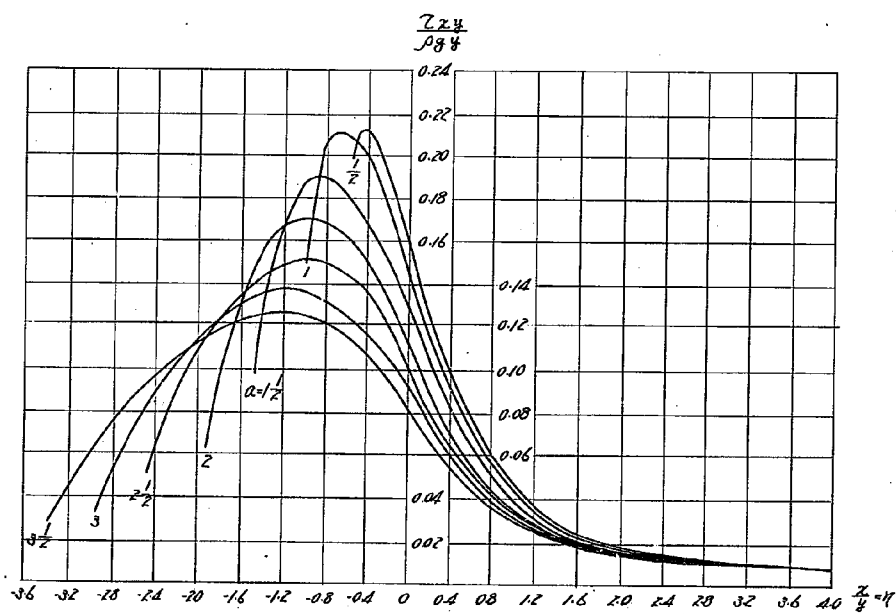


図5 $\frac{\tau_{xy}}{\rho g y}$ と $\frac{x}{y}$ の関係

(例 2)

$$a = 3, \quad x = -4\text{m}, \quad y = 5\text{m}, \quad \rho g = 1.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

として各応力を求めてみる。

$$\frac{x}{y} = \frac{-4}{5} = -0.8$$

図(3)、(4)、(5)より

$$\frac{\sigma_x}{\rho g y} = -0.58$$

$$\frac{\sigma_y}{\rho g y} = -0.75$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho g y} = +0.132$$

$$\therefore \sigma_x = -0.58 \times 1.3 \times 500 = -377 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_y = -0.75 \times 1.3 \times 500 = -488 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{xy} = 0.132 \times 1.3 \times 500 = +85.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

(例 1) (例 2) で計算した点の位置は下图の通りである。

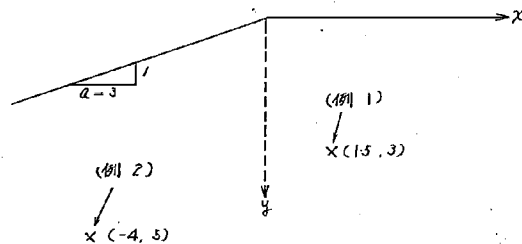


図 6

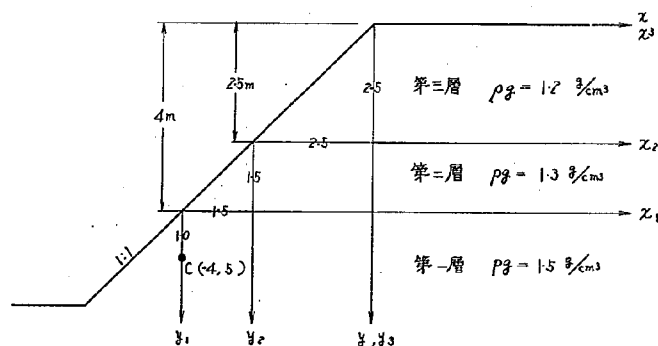


図 7

(例3)

斜面の勾配が1:1である盛土を構築し、図7の様に ρg を得た。弾性は一定として $x=-4m$ 、 $y=5m$ の位置における各応力を求めてみる。これは三層にわけて構築した場合に相当する。

先ず第一層につき考える。

$$a = 1, x_1 = 0m, y_1 = 1m, \rho g = 1.5 \frac{g}{cm^2}$$
$$\eta = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0.0 \quad \text{として図(3)、(4)、(5)より}$$

$$\frac{\sigma_{x_1}}{\rho g y_1} = -0.39$$

$$\frac{\sigma_{y_1}}{\rho g y_1} = -0.85$$

$$\frac{\tau_{x_1 y_1}}{\rho g y_1} = 0.148$$

$$\therefore \sigma_{x_1} = -0.39 \times 1.5 \times 100 = -58.5 \frac{g}{cm^2}$$

$$\sigma_{y_1} = -0.85 \times 1.5 \times 100 = -127.5 \frac{g}{cm^2}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = 0.148 \times 1.5 \times 100 = 22.2 \frac{g}{cm^2}$$

次に第二層について考える。先ず、第一層も第二層と同じ ρg であるとして各応力を求める。

$$\eta = \frac{x_2}{y_2} = \frac{-1.5}{2.5} = -0.6, \rho g = 1.3 \frac{g}{cm^2}, a = 1$$

$$\frac{\sigma'_{x_2}}{\rho g y_2} = -0.28$$

$$\frac{\sigma'_{y_2}}{\rho g y_2} = -0.55$$

$$\frac{\tau'_{x_2 y_2}}{\rho g y_2} = 0.210$$

$$\therefore \sigma'_{x_2} = -0.28 \times 1.3 \times 250 = -91.0 \frac{g}{cm^2}$$

$$\sigma'_{y_2} = -0.55 \times 1.3 \times 250 = -178.8 \frac{g}{cm^2}$$

$$\tau'_{x_2 y_2} = 0.210 \times 1.3 \times 250 = 68.3 \frac{g}{cm^2}$$

この σ'_{x_2} 、 σ'_{y_2} 、 $\tau'_{x_2 y_2}$ は第一層、第二層ともに $\rho g = 1.3 \frac{g}{cm^2}$ としての応力であるから、第一層が $\rho g = 1.5 \frac{g}{cm^2}$ であることを考えると次の様にして、第一層の影響をなくさねばならない。

$$\sigma_{x_2} = \sigma'_{x_2} - \sigma_{x_1} \times \frac{1.3}{1.5} = (-91.0) - (-58.5) \times \frac{1.3}{1.5} = -40.3 \text{ g/cm}^2$$

$$\sigma_{y_2} = \sigma'_{y_2} - \sigma_{y_1} \times \frac{1.3}{1.5} = (-178.8) - (-127.5) \times \frac{1.3}{1.5} = -68.9 \text{ g/cm}^2$$

$$\tau_{x_2 y_2} = \tau'_{x_2 y_2} - \tau_{x_1 y_1} \times \frac{1.3}{1.5} = (68.3) - (22.2) \times \frac{1.3}{1.5} = 49.3 \text{ g/cm}^2$$

この σ_{x_2} 、 σ_{y_2} 、 $\tau_{x_2 y_2}$ は第二層のみによる点Cの応力である。

最後に第三層につき考える。前と同様に第一、二、三層いずれも $\rho g = 1.2 \text{ g/cm}^2$ として、
先ず計算する。

$$\eta = \frac{x_3}{y_3} = \frac{-4}{5} = -0.8 \quad \rho g = 1.2 \text{ g/cm}^2 \quad a = 1$$

$$\frac{\sigma_{x_3}}{\rho g y_3} = -0.23$$

$$\frac{\sigma'_{y_3}}{\rho g y_3} = -0.37$$

$$\frac{\tau'_{x_3 y_3}}{\rho g y_3} = -0.202$$

$$\therefore \sigma'_{x_3} = -0.23 \times 1.2 \times 500 = -138.0 \text{ g/cm}^2$$

$$\sigma'_{y_3} = -0.37 \times 1.2 \times 500 = -222.0 \text{ g/cm}^2$$

$$\tau'_{x_3 y_3} = 0.202 \times 1.2 \times 500 = 121.0 \text{ g/cm}^2$$

これらより第一、二層の影響を消去しなければならない。即ち

$$\sigma_{x_3} = \sigma'_{x_3} - \sigma'_{x_2} \times \frac{1.2}{1.3} = (-138.0) - (-91.0) \times \frac{1.2}{1.3} = -54.0 \text{ g/cm}^2$$

$$\sigma_{y_3} = \sigma'_{y_3} - \sigma'_{y_2} \times \frac{1.2}{1.3} = (-222.0) - (-178.8) \times \frac{1.2}{1.3} = -57.2 \text{ g/cm}^2$$

$$\tau_{x_3 y_3} = \tau'_{x_3 y_3} - \tau'_{x_2 y_2} \times \frac{1.2}{1.3} = (121.0) - (68.3) \times \frac{1.2}{1.3} = 58.0 \text{ g/cm}^2$$

この σ_{x_3} 、 σ_{y_3} 、 $\tau_{x_3 y_3}$ は、第三層のみによる点Cの応力である。

最終的に、第一、二、三層の各々異なる ρg により生ずる点Cの応力は、上で求めた各層による点Cの応力を加えたものである。即ち

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} + \sigma_{x_3} = -58.5 - 40.3 - 54.0 = -152.8 \text{ g/cm}^2$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} + \sigma_{y_3} = -127.5 - 68.9 - 57.2 = -253.6 \text{ g/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = \tau_{x_1 y_1} + \tau_{x_2 y_2} + \tau_{x_3 y_3} = 22.2 + 49.3 + 58.0 = 129.5 \text{ g/cm}^2$$

一般には次の様になる。

$$\sigma = \sigma_3 + \sigma_2 \left(1 - \frac{1.2}{1.3}\right) + \sigma_1 \left(1 - \frac{1.3}{1.5}\right)$$

以上、求めた様に σ_x 、 σ_y は負、即ち圧縮であり、切り取り等で発生する引張りに対してはこの理論は適用できない。