

Technical Memorandum of
The Public Works Research Institute
Ministry of Construction

土 木 研 究 所 資 料

第 5 5 8 号

有限要素法による浸透流の解析
(定常流の場合)

An Analysis of Seepage Flow by Finite Element Method
—In Case of Steady Flow—

昭和 45 年 3 月

建 設 省 土 木 研 究 所

有限要素法による浸透流の解析

(定常流の場合)

ダム構造研究室

飯 田 隆 一

朝 倉 肇

目 次

1. 序 論	(1)
2. 粘性流体に関する運動方程式 (Navier-Stokes の式)	(1)
3. 管路内の流れ	(5)
4. 等方性体内の浸透流の運動方程式	(7)
5. 等方性体内の浸透流の連続方程式	(9)
6. 等方性体内の浸透流における変分原理	(10)
7. 異方性体内の浸透流に関する運動方程式および連続方程式	(13)
8. 異方性体内の浸透流における変分原理	(15)
9. 有限要素法による異方性透水層内の定常状態の Darcy flow の解法 (二次元)	(16)
10. 有限要素法による異方性透水層内の定常状態の non Darcy flow の解法 (二次元)	(21)
11. 浸潤面を有する場合	(22)
付1 乱にパターンを与えて $[K_r]$ を求める方法	(24)
付2 有限要素法による異方性透水層内の定常状態の Darcy flow の解法 (三次元)	(26)
参 考 資 料	(29)

1. 序 論

従来から浸透流の問題は広く取扱われてきたが、これらの多くは条件の単純な透水層内のダルシーの法則に従う浸透流に関するものであって、実際に問題となる異方性体や透水係数の異なる透水体の組合わさった場合の浸透流等少しでも複雑なものに関する解析はほとんど行われていない。また、ダルシーの法則は後述するように透水体内を流れる流速の小さい層流に関して経験的に得られたものであって、流速が大きくなって運動エネルギーが無視し得なくなったり、乱流の生じるような状態においては成り立たないものである。

そこで、条件の複雑な透水層内の浸透流や流速が大きくてダルシーの法則が成り立たないような浸透流についても解析するために、よく知られている管路内の流れに関する運動方程式を参照して浸透流に関する運動方程式を導き、それをもとに有限要素法による解析方法を検討してみた。

2. 粘性流体に関する運動方程式 (Navier-Stokes の式)

一般の運動方程式から粘性流体の特性を用いて粘性流体に関する運動方程式 (Navier-Stokes の式) を誘導してみよう。

一般の運動方程式は、Newton の第二法則より

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{nx} dS + \iiint \rho X dx dy dz$$

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{ny} dS + \iiint \rho Y dx dy dz$$

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx dy dz = \iint P_{nz} dS + \iiint \rho Z dx dy dz$$

ここで、 P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} はそれぞれ表面力の x , y , z 軸方向の成分を示し、つぎのように表わされる。

$$P_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z)$$

$$P_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z)$$

$$P_{nz} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z)$$

これに Green の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \iint P_{nx} dS &= \iint \{ \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) \} dS \\ &= \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

同様にして

$$\iint P_{ny} dS = \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\iint P_{nz} dS = \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

となるから

$$\iiint \left[\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho X \right] dx dy dz = 0$$

$$\iiint \left[\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \rho Y \right] dx dy dz = 0$$

$$\iiint \left[\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho Z \right] dx dy dz = 0$$

となり、この関係が任意の大きさの閉曲面について成立するためにはカッコ内は0とならなければならない、運動方程式はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \\ \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

この方程式は着目する実質部分の運動すなわち変位について考えたものであるが、流体力学においては一般に空間の一定点に着目して、そこを通る実質部分の速度の大きさ、方向、向き等の変化を調べる Euler の方法が用いられる。この方法によると、(1)式の左辺の加速度を $\frac{Du}{Dt}$, $\frac{Dv}{Dt}$, $\frac{Dw}{Dt}$ (ここで、 $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ で、 u, v, w は x, y, z, t の関数である。) で表わし、これらは次のようなものである。

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

これを代入すると(1)式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。

上の関係には、 ρ の変化を考えないとして (ρ の変化を考える場合には、流体の状態方程式が必要)、方程式 3 個に未知数が $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ の 9 個含まれていてこのままでは解けない。そのため、流体力学においては、ここで、弾性力学におけるフックの法則に対応するせん断に抵抗する粘性応力は速度勾配 (歪速度) に比例するという

Newtonの法則を用いる。

このNewtonの法則を一般的に表わせばつぎのようになる。

1. 速度勾配がないときは、応力は静水圧として表わされる。
2. 平行移動や回転は抵抗を生じないが、速度勾配がある場合はそれに抵抗する応力が生じ、その応力はその速度勾配（歪速度）の大きさに比例する。
3. この応力と歪速度との関係は座標軸の方向に無関係に成立する。すなわち、流体は力学的に等方性である。

このような前提のもとに、応力と歪速度との関係を求めてみる。

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p$$

$$\sigma_x' = \sigma_x - \sigma, \quad \sigma_y' = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma_z' = \sigma_z - \sigma$$

とし、歪速度成分を

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

とすると仮定により

$$\begin{pmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

つぎに、応力と歪速度との積を考えると

$$\begin{aligned} 2W = & c_{11} e_{xx}^2 + c_{22} e_{yy}^2 + c_{33} e_{zz}^2 + c_{44} e_{yz}^2 + c_{55} e_{zx}^2 + c_{66} e_{xy}^2 \\ & + (c_{12} + c_{21}) e_{xx} e_{yy} + (c_{13} + c_{31}) e_{xx} e_{zz} + (c_{14} + c_{41}) e_{xx} e_{yz} \\ & + (c_{15} + c_{51}) e_{xx} e_{zx} + (c_{16} + c_{61}) e_{xx} e_{xy} + (c_{23} + c_{32}) e_{yy} e_{zz} \\ & + (c_{24} + c_{42}) e_{yy} e_{yz} + (c_{25} + c_{52}) e_{yy} e_{zx} + (c_{26} + c_{62}) e_{yy} e_{xy} \\ & + (c_{34} + c_{43}) e_{zz} e_{yz} + (c_{35} + c_{53}) e_{zz} e_{zx} + (c_{36} + c_{63}) e_{zz} e_{xy} \\ & + (c_{45} + c_{54}) e_{yz} e_{zx} + (c_{46} + c_{64}) e_{yz} e_{xy} + (c_{56} + c_{65}) e_{zx} e_{xy} \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

と書き表わされ、この W は弾性力学における歪エネルギーに当るものであるが、流体力学においては、これは摩擦エネルギーを表わす。流体は等方性と考えているから、このエネルギーは座標軸を回転することによりその値は変化しない。すなわち、このエネルギーは歪速度

成分の不変量によって表わされなければならない。このエネルギーは歪速度成分の二次式で表わされており、二次の不変量には

$$(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2$$

$$\frac{1}{2} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2} e_{yz}^2 + \frac{1}{2} e_{zx}^2 + \frac{1}{2} e_{xy}^2)$$

の二つがある。ところが、 $(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$ は偏差応力による直歪速度の和であるから 0 となり、したがって、

$$c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{21}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{31}, c_{32}, c_{34},$$

$$c_{35}, c_{36}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{45}, c_{46}, c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{56}, c_{61},$$

$$c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65} \text{ はすべて } 0,$$

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 2\mu$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu$$

となる。これから

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

となり、(2)式にこれらを代入すると

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y + \mu \nabla^2 v + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z + \mu \nabla^2 w + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となる。

非圧縮性流体の場合には

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X + \mu \nabla^2 u \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y + \mu \nabla^2 v \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

となり、これが Navier-Stokes の式である。

重力場の場合には、容積分力 X, Y, Z はポテンシャルを用いて表わされ、 Z 軸を鉛直にとり上方を正とすれば、

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} (gz), \quad Y = -\frac{\partial}{\partial y} (gz), \quad Z = -\frac{\partial}{\partial z} (gz)$$

と表わされ

$$p + \rho gz = \rho gh$$

とおくと(6)式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

と書き改められる。

3. 管路内の流れ

Navier-Stokes の式を円管内の流れを考えるために、円筒座標系で表わせば、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial s} + \mu \nabla^2 u \dots\dots\dots(8)$$

管路内の流れを考える場合は平均流速を用い、粘性による摩擦抵抗を表す $\mu \nabla^2 u$ の代りに $-\rho g \frac{\partial h_r}{\partial s}$ を用いる。

平均流速で考えれば、一般に考える管路内の流れでは $v_r = 0, v_\theta = 0$ であるから

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial s} + \rho g \frac{\partial h_r}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

となる。これは、一般的に表わした管路内の流れに関する運動方程式である。

ここで、半径 a の円管内の定常状態の層流について Navier-Stokes の式を用いて(9)式における $\rho g \frac{\partial h_r}{\partial s}$ を求めてみよう。(8)式において

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0$$

より

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right)$$

これを r について積分すると

$$\mu r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) r^2 + c_1$$

$$r=0 \text{ で } \frac{du}{dr} = 0 \text{ という条件より } c_1 = 0$$

もう一度 r で積分すると

$$\mu u = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) r^2 + c_2$$

$$r=a \text{ で } u=0 \text{ という条件により}$$

$$c_2 = -\frac{\rho g}{4\mu} \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) a^2$$

となり,

$$u = \frac{\rho g}{4\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} (r^2 - a^2)$$

となる。これを使って平均流速を求めると

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u r dr = -\frac{\rho g a^2}{8\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \quad \dots\dots\dots (10)$$

または、つぎのように書ける。

$$\rho g \frac{\partial h_r}{\partial s} = \frac{8\mu}{a^2} \bar{u} \quad \dots\dots\dots (11)$$

すなわち、平均流速は $-\frac{\partial h}{\partial s}$ に比例する。あるいは、摩擦抵抗は流速に比例することになる。

図-1のNikuradseの実験に示されるように流速が大きくなり、乱流が生じ始めると(10式)の関係は成り立たなくなり、流速がさらに増大して乱流境界層の厚さが無視できる状態になると、

$$\frac{\partial h_r}{\partial s} = K \frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} \quad (K \text{ は定数}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

すなわち

$$\rho g \frac{\partial h_r}{\partial s} = K \frac{\rho}{d} \cdot \frac{w^2}{2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

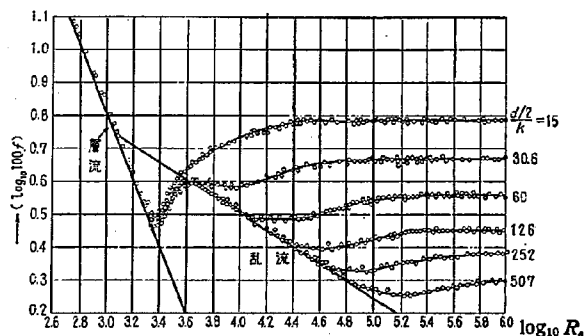


図-1

という関係が成り立つ。すなわち、摩擦抵抗は流速の2乗に比例する。

層流状態と(13)式の関係が成り立つ乱流状態の間の領域を遷移領域といい、この領域については一般的に

$$\rho g \frac{\partial h_r}{\partial s} = K' \frac{\rho}{d} \cdot \frac{u^\lambda}{2} \quad (1 < \lambda < 2) \dots\dots\dots (14)$$

という形で表わされる。

摩擦抵抗の項に関して(11), (13), (14)の式を参照して(9)式を書き改めれば

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial s} + \rho g f u^{\lambda+1} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

と表わせ、層流領域では $\lambda = 0$ 、完全な乱流領域では $\lambda = 1$ 、遷移領域では実験によって $\lambda = 0 \sim 1$ の値を与える。 f は実験によって定められる摩擦係数である。

4. 等方性体内の浸透流の運動方程式

前節では管路内の流れについて考察したが、浸透流は空隙が非常に複雑に交錯した多孔質体内の流れであるから、その流路は極めて入り乱れていると考えられる。しかし、透水体を複雑な管路の組合わせと考えれば、浸透流と管路内の流れとの類似性はあると考えられる。

そこで、一般に浸透流に関して認められているDarcyの式

$$w' = -k' \frac{\partial h}{\partial s} \dots\dots\dots (16)$$

と管路内の流れを表わす方程式(15)とを比較してみると、Darcyの式は、(15)式において $\lambda = 0$ とし、 $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$ を無視したものと同一形であることがわかる。すなわち、Darcyの法則は定常的で、流速が小さくて運動エネルギーの項を無視し得る層流状態の浸透流に関するものであると考えられる。

そこで、流速が大きい浸透流についても検討するために、(15)式を透水体内の流れに拡張することを考えてみた。

(15)式は管路内の流れについて表わしたものであるので、直交座標で一般的に表わすことは無理であるが、透水体内の流れを考えるために、(15)式をもとに(7)式にならって、つぎのような浸透流に関する運動方程式を作ってみた。この際、Darcyの法則との関連から f のかわりに $\frac{1}{k}$ を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{k} \rho g q^\lambda u &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{k} \rho g q^\lambda v &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{k} \rho g q^\lambda w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$

第 3 項を上記のように表わしたのは、摩擦抵抗は流線方向に $q^{\lambda+1}$ に比例して働くと考えられるから、 x, y, z 方向の摩擦抵抗はそれぞれ $q^{\lambda+1} \cos(x, q) = uq^\lambda$, 同様に vq^λ, wq^λ に比例するとしたからである。

また、第一項について考えると、一般に粘性流体では非回転運動はなし得ないが、浸透流のように平均的な流速で取り扱う場合には流れは非回転運動となり、

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

となるので

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

なる速度ポテンシャルが存在する。したがって、

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) \end{aligned}$$

さらに、異方性体についても考慮することを考えて、体積空隙率 γ , 面積空隙率 β を考慮して浸透流の運動方程式を作ると、付 2)

$$\left. \begin{aligned} \alpha \rho \left\{ \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right\} + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \frac{\rho g}{k} u q^\lambda &= 0 \\ \alpha \rho \left\{ \gamma \frac{\partial v}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right\} + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \frac{\rho g}{k} v q^\lambda &= 0 \\ \alpha \rho \left\{ \gamma \frac{\partial w}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right\} + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma \frac{\rho g}{k} w q^\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

と書き表わされる。ここで、 α は流速が十分小さく運動エネルギーを無視するときは 0, 無視しないときは 1 とする。

ここに注意すべきことは、流速 u, v, w , q は透水層の単位面積あたりの流量から求めた見かけの流速ではなく、浸透水そのものがもつ平均流速である。したがって、Darcy の法則での流速とは異なり、(18) 式での $\beta u, \beta v, \beta w$ が Darcy の式の u', v', w' に相当することになる。

このような表示方法を用いたのは $\alpha = 0, \lambda = 0$ としたときは (18) 式の中には流速 u, v, w の一次の項のみが含まれ、いずれを用いても相異はないが、(18) 式は一般形としては運動エネルギー $\frac{q^2}{2}$ が含まれており、後述するようにこの項について変分原理を適用すると $\beta \rho \frac{q^2}{2}$ が生じ、これは $\beta u, \beta v, \beta w$ を流速と定義した際の運動エネルギー $\rho \beta^2 \frac{q^2}{2}$ とは一致せず矛盾が生じるからである。

ここで、(18) 式における k を Darcy の法則における k' で表わせば、 $k = \frac{\gamma}{\beta^2} k'$ となる。

5. 等方性体内の浸透流の連続方程式

つぎに連続の方程式について考察する。いま、辺長が δx , δy , δz なる微小六面体を考えると、この微小六面体に単位時間当りに流入する浸透流の質量は

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho\beta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\beta v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\beta w)\right\} \delta x \delta y \delta z \dots\dots\dots (19)$$

にて表わされる。一方、この微小六面体内の単位時間当りの質量の変化は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r \delta x \delta y \delta z) = & \left\{ r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\rho r}{\delta x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) + \frac{\rho r}{\delta y} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\rho r}{\delta z} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta z) \right\} \delta x \delta y \delta z \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

にて表わされる。

さて、この微小六面体に流入する浸透流の量が時間とともに変化すれば、間隙水圧が変化し、このために空隙率が増加すると考えなければならない。

間隙水圧の変化による透水層の体積膨張率を ξ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta x)}{\delta x} + \frac{d(\delta y)}{\delta y} + \frac{d(\delta z)}{\delta z} &= \xi dp \\ \frac{1}{\delta x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta z) &= \xi \frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \xi \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

ところが、透水層の構成材料そのものの圧縮性は、浸透水の圧縮性や空隙率の変化に比して無視され则认为られるから、

$$(1-r) \delta x \delta y \delta z = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} d\{(1-r) \delta x \delta y \delta z\} &= [(1-r) \left\{ \frac{d(\delta x)}{\delta x} + \frac{d(\delta y)}{\delta y} + \frac{d(\delta z)}{\delta z} \right\} \\ &\quad - dr] \delta x \delta y \delta z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial r}{\partial t} &= (1-r) \left\{ \frac{1}{\delta x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta z) \right\} \\ &= (1-r) \rho g \xi \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

また、浸透水の圧縮率を ζ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \rho}{\rho} &= \zeta dp, \quad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = \zeta \rho \frac{\partial p}{\partial t} = \zeta \rho^2 g \frac{\partial h}{\partial t} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial t}(\rho r \delta x \delta y \delta z) &= \left\{ r \zeta \rho^2 g + (1-r) \rho^2 g \xi + \rho^2 g \xi r \right\} \frac{\partial h}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \\ &= \rho^2 g r \left\{ \zeta + \frac{\xi}{r} \right\} \frac{\partial h}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

これから連続の方程式として

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\beta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\beta v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\beta w) = -\rho^2 g r \left(\zeta + \frac{\xi}{r} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (22)$$

あるいは、一般に ρ , β は位置の函数とは考えないので

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho g \frac{r}{\beta} \left(\zeta + \frac{\xi}{r} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。

定常流の場合には、連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。

6. 等方性体内の浸透流における変分原理

有限要素法により数値解析を行なうに当っては、平衡あるいは運動方程式に変分原理を用いて、エネルギーに関する方程式をつくる必要がある。そのため、静力学においては仮想仕事の原理が、動力学においては Hamilton の原理が用いられる。ところが、これらの変分原理は実質部分に着目して、その運動すなわち変位を調べる力学体系における原理であって、すでに述べたように空間の一定点に着目してそこを通る実質部分の運動すなわち速度変化を調べる Euler の方法に基づく Navier-Stokes の式およびこれをもとに浸透流に関して表わした(18)式等にこの原理をそのまま用いても前述の力学体系におけるようにエネルギーの関係式が得られない。そこで、エネルギーの関係が得られる方法を考察した結果、速度による変分を考えればよいことがわかった。

いま、仮想速度 δu , δv , δw を考える。これは時間に無関係と考えられるから

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta u) = \frac{\partial}{\partial t} (\delta v) = \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) = 0$$

(18)式の各項にそれぞれ仮想変位 δu , δv , δw をかけ、加え合せて、全体について積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\left\{ \alpha r \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + r \frac{\rho g}{k} u q \lambda \right\} \delta u \right. \\ & \quad + \left\{ \alpha r \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \beta \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + r \frac{\rho g}{k} v q \lambda \right\} \delta v \\ & \quad \left. + \left\{ \alpha r \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha \beta \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + r \frac{\rho g}{k} w q \lambda \right\} \delta w \right] dx dy dz \\ & = 0 \end{aligned}$$

となる。これを変形して Green の定理を用いると

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\alpha r \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - u \frac{\partial}{\partial t} \delta u - v \frac{\partial}{\partial t} \delta v - w \frac{\partial}{\partial t} \delta w \right\} \right. \\ & \quad \left. + \alpha \beta \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \delta v \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \delta w \right) \right\} \right] dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{q^2}{2} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \} \\
& + \beta \rho g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (h \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (h \delta v) + \frac{\partial}{\partial z} (h \delta w) \right. \\
& \left. - h \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\
& + r \frac{\rho g}{k} \{ u \delta u + v \delta v + w \delta w \} q^\lambda] dx dy dz \\
= & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [\alpha r \rho \frac{\partial}{\partial t} (u \delta u + v \delta v + w \delta w)] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2}) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) \\
& \quad + \delta w \cos(n, z) \}] dS \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2}) \frac{\partial}{\partial t} \{ \frac{r}{\beta} (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [(\beta \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) \\
& \quad + \delta w \cos(n, z) \}] dS \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\beta \rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \{ \frac{r}{\beta} (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint (r \frac{\rho g}{k} q^\lambda) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) dx dy dz \\
= & 0
\end{aligned}$$

体積積分の項と表面積分の項とを分けて書くと

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [\alpha r \rho \frac{\partial}{\partial t} (u \delta u + v \delta v + w \delta w)] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2}) \frac{\partial}{\partial t} \{ r (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \{ r (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(r \frac{\rho g}{k} q^\lambda) (u \delta u + v \delta v + w \delta w)] dx dy dz \\
= & - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2}) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) \\
& \quad + \delta w \cos(n, z) \}] dS \\
& - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [(\beta \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) \\
& \quad + \delta w \cos(n, z) \}] dS \dots\dots (25)
\end{aligned}$$

なる関係が成り立つ。

さて,

$$\begin{aligned}
\delta_u T &= \iiint [\alpha r \rho \frac{\partial}{\partial t} (u \delta u + v \delta v + w \delta w)] dx dy dz \\
\delta_u T v &= \iiint [(\alpha \rho \frac{q^2}{2}) \frac{\partial}{\partial t} \{ r (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz \\
\delta_u W &= \iiint [(\rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \{ r (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \}] dx dy dz
\end{aligned}$$

$$\delta u F = \iiint \left[\left(\gamma \frac{\rho g}{k} q \lambda \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz$$

$$\delta u T_s = - \iint \left[\left(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2} \right) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS$$

$$\delta u W_s = - \iint \left[(\beta \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS$$

とおき、それぞれの物理的意味を考えてみると、

$\delta u T$ は、仮想速度による運動エネルギーの変化

$\delta u T_v$ は、流体の密度変化および透水体の圧縮性のため仮想速度により生じた運動エネルギーの変化

$\delta u W$ は、流体の密度変化および透水体の圧縮性のため仮想速度により内部水頭のなした仕事

$\delta u F$ は、仮想速度により生じた摩擦エネルギー

$\delta u T_s$ は、仮想速度により流入する運動エネルギー

$\delta u W_s$ は、仮想速度により外部水頭のなした仕事

であって、これらの記号を用いて(25)式を書き改めると

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta u T + \delta u T_v + \delta u W + \delta u F) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta u T_s + \delta u W_s) dt \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。

定常流のときは、(25)式において u, v, w, q, h は時間とは無関係になるから

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\gamma \frac{\rho g}{k} q \lambda \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ &= - \iint \left[\left(\alpha \beta \rho \frac{q^2}{2} \right) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS \\ & - \iint \left[(\beta \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

いいかえれば、仮想速度により流入する運動エネルギーと外部水頭のなす仕事との和は仮想速度により生じる摩擦エネルギーに等しい。

(25)式が動力学における Hamilton の原理に対応する非定常浸透流における変分原理を示し、(27)式が静力学における仮想仕事の原理に対応する定常流における変分原理を示している。

(25)式において、 $\alpha = 0, \lambda = 0$ とおけば非定常の Darcy flow に関する式が得られ

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[(\rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma \left(\zeta + \frac{\xi}{\gamma} \right) \rho g \delta h \right\} \right] dx dy dz \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\left(\gamma \frac{\rho g}{k} \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[(\beta \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となる。

⑦式において、 $\alpha = 0$ 、 $\lambda = 0$ とおけば定常状態の Darcy flow に関する式が得られ

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\gamma \frac{\rho g}{k} \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ & = - \iint \left[(\rho \rho g h) \{ \delta u \cos(n, x) + \delta v \cos(n, y) \right. \\ & \quad \left. + \delta w \cos(n, z) \} \right] dS \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる。

7. 異方性体内の浸透流に関する運動方程式および連続方程式

前節において単位体積当り、単位時間当りに蓄積される摩擦エネルギーを F とし、単位体積当りの x, y, z 方向の摩擦力の成分を f_x, f_y, f_z とすれば、

$$\delta F = f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w \dots\dots\dots (30)$$

にて表わされることを示した。この摩擦エネルギー関数 F の右辺は弾性エネルギー関数の場合と同様に完全微分でなければならないから

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_x, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f_y, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = f_z \dots\dots\dots (31)$$

なる関係が成立しなければならない。

さて、このような摩擦エネルギー関数が存在するために、異方性体の単位体積当りの摩擦力について一般的に表わした次式の満足しなければならない条件を調べてみよう。

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \gamma \rho g q \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{21}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{31}} & \frac{1}{k_{32}} & \frac{1}{k_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

③式が成立するためには、 $\lambda = 0$ では $k_{rs} = k_{sr}$ という条件が必要で

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \gamma \rho g \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

$$F = \frac{1}{2} \gamma \rho g \left(\frac{1}{k_{11}} u^2 + \frac{1}{k_{22}} v^2 + \frac{1}{k_{33}} w^2 + \frac{2}{k_{12}} uv + \frac{2}{k_{23}} vw + \frac{2}{k_{13}} uw \right) \dots\dots\dots (34)$$

となる。

$\lambda \neq 0$ のときは

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$$

$$\frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_{21}} = \frac{1}{k_{13}} = \frac{1}{k_{31}} = \frac{1}{k_{23}} = \frac{1}{k_{32}} = 0$$

のときのみ式が成立する。すなわち、等方性流体の場合にしか成立しない。すなわち

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \gamma \rho g q \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$F = \frac{1}{(\lambda+2)k} \gamma \rho g q \lambda^2 \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。

直交異方性体内の浸透流については、 $\lambda = 0$ すなわち、Darcy flow の場合についてのみ可能であるが、特に座標軸の方向と透水係数の主軸の方向とが一致している場合は u, v, w のそれぞれの向きが逆になっても摩擦エネルギーの値は変り得ないから、 u, v, w を一次の形で含む項の係数は 0 とならなければならない、したがって、つぎのように表わされる。

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \gamma \rho g \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$F = \frac{1}{2} \gamma \rho g \left(\frac{1}{k_{11}} u^2 + \frac{1}{k_{22}} v^2 + \frac{1}{k_{33}} w^2 \right) \quad \dots\dots\dots (38)$$

以上から、異方性透水層内の Darcy flow の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \beta_x \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \left(\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} + \frac{w}{k_{13}} \right) &= 0 \\ \beta_y \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \left(\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} + \frac{w}{k_{23}} \right) &= 0 \\ \beta_z \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma \left(\frac{u}{k_{13}} + \frac{v}{k_{23}} + \frac{w}{k_{33}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

直交異方性透水層内の Darcy flow で、座標軸の方向と透水係数の主軸の方向とが一致している場合の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} k_{11} \beta_x \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma u &= 0 \\ k_{22} \beta_y \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma v &= 0 \\ k_{33} \beta_z \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (40)$$

となり、等方性透水層の場合は、 $k_{11} = k_{22} = k_{33}$, $\beta_x = \beta_y = \beta_z$ であるから

$$\left. \begin{aligned} k\beta \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma u &= 0 \\ k\beta \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma v &= 0 \\ k\beta \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となり, $k = \frac{\gamma}{\beta^2} k'$, $u = \frac{w'}{\beta}$, $v = \frac{v'}{\beta}$, $w = \frac{w'}{\beta}$ を代入すれば一般の Darcy の法則と同じとなる。

また non Darcy flow の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \alpha \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta_x \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta_x \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + r \frac{\rho g}{k} q^\lambda u &= 0 \\ \alpha \gamma \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \beta_y \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta_y \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + r \frac{\rho g}{k} q^\lambda v &= 0 \\ \alpha \gamma \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha \beta_z \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \beta_z \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + r \frac{\rho g}{k} q^\lambda w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

となる。

連続の方程式はつぎの形で表わされる。

$$\beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho \gamma g \left(\zeta + \frac{\xi}{\gamma} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (43)$$

8. 異方性体内の浸透流における変分原理

前節において求めた異方性体内の浸透流の運動方程式および連続方程式をもとに, 6 節において行なったと同様に速度に関する変分原理を用いてエネルギーに関する方程式を求めてみた。

非定常の non Darcy flow のときは (42) 式は

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\alpha \gamma \rho \frac{\partial}{\partial t} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\left(\alpha \rho \frac{q^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ r \left(\zeta + \frac{\xi}{\gamma} \right) \rho g \delta h \right\} \right] dx dy dz \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[(\rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ r \left(\zeta + \frac{\xi}{\gamma} \right) \rho g \delta h \right\} \right] dx dy dz \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\left(r \frac{\rho g}{k} q^\lambda \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \left[\left(\alpha \rho \frac{q^2}{2} \right) \left\{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \beta_z \delta w \cos(n, z) \right\} \right] dS \\ & - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \left[(\rho g h) \left\{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \beta_z \delta w \cos(n, z) \right\} \right] dS \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

と書き改められる。

また, 定常の non Darcy flow のときは (42) 式は

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(r \frac{\rho g}{k} q^\lambda \right) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) \right] dx dy dz \\ & = - \iint \left[\left(\alpha \rho \frac{q^2}{2} \right) \left\{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \beta_z \delta w \cos(n, z) \right\} \right] dS \\ & - \iint \left[(\rho g h) \left\{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \beta_z \delta w \cos(n, z) \right\} \right] dS \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

となる。

さらに、非定常の Darcy flow に関する式は、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\rho g h) \frac{\partial}{\partial t} \{ r (\zeta + \frac{\xi}{r}) \rho g \delta h \} dx dy dz \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint [(\tau \rho g) \{ (\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} + \frac{w}{k_{13}}) \delta u \\ & + (\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} + \frac{w}{k_{23}}) \delta v + (\frac{u}{k_{13}} + \frac{v}{k_{23}} + \frac{w}{k_{33}}) \delta w \}] dx dy dz \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [(\rho g h) \{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \\ & + \beta_z \delta w \cos(n, z) \}] dS \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

となり、定常の Darcy flow に関する式は

$$\begin{aligned} & \iiint [\tau \rho g \{ (\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} + \frac{w}{k_{13}}) \delta u + (\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} + \frac{w}{k_{23}}) \delta v \\ & + (\frac{u}{k_{13}} + \frac{v}{k_{23}} + \frac{w}{k_{33}}) \delta w \}] dx dy dz \\ & = - \iint [\rho g h \{ \beta_x \delta u \cos(n, x) + \beta_y \delta v \cos(n, y) \\ & + \beta_z \delta w \cos(n, z) \}] dS \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

と書き改められる。

9. 有限要素法による異方性透水層内の定常状態の Darcy flow の解法 (二次元)

異方性透水層内に図-2 に示すような三角形

要素 $\triangle ijk$ をとる。

いま、

$$\left. \begin{aligned} a_j &= x_j - x_i \\ b_j &= y_j - y_i \\ a_k &= x_k - x_i \\ b_k &= y_k - y_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

とする。

さて、定常流の場合には、連続方程式として (43)

式から

$$\beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (49)$$

が成立する。このことは、 i, j, k 点でこの要素内に流入する等価節点流量を考え、これを

Q_i, Q_j, Q_k としたとき

$$Q_i + Q_j + Q_k = 0 \dots\dots\dots (50)$$

なる関係が成立する。したがって、 Q_i, Q_j, Q_k を求めるに際し、自由度は 2 である。そ

こで、パターンとして流速をとり^{付1)}

$$u = l, \quad v = m$$

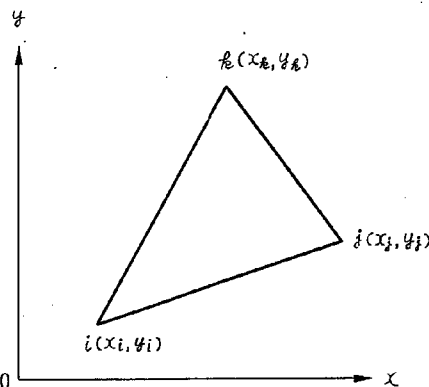


図 - 2

とする。すなわち、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = [B] [\alpha] \dots\dots\dots (5)$$

とする。いま、

辺 ij の x 方向流れで j 点の流れにおきかえられる流量を	$ij Q_{xj}$
辺 jk " j 点 "	$jk Q_{xj}$
辺 jk " k 点 "	$jk Q_{xk}$
辺 ki " k 点 "	$ki Q_{xk}$
辺 ij の y 方向流れで j 点 "	$ij Q_{yj}$
辺 jk " j 点 "	$jk Q_{yj}$
辺 jk " k 点 "	$jk Q_{yk}$
辺 ki " k 点 "	$ki Q_{yk}$

とすれば

$$\begin{aligned} ij Q_{xj} &= \frac{\beta_x}{b_j} \int_0^{b_j} u y \, dy = \frac{1}{2} \beta_x b_j l \\ jk Q_{xj} &= \frac{\beta_x}{b_k - b_j} \int_{b_i}^{b_k} u (b_k - y) \, dy = \frac{1}{2} \beta_x (b_k - b_j) l \\ jk Q_{xk} &= \frac{\beta_x}{b_k - b_j} \int_{b_i}^{b_k} u (y - b_i) \, dy = \frac{1}{2} \beta_x (b_k - b_j) l \\ ki Q_{xk} &= \frac{\beta_x}{-b_k} \int_{b_k}^0 -u y \, dy = -\frac{1}{2} \beta_x b_k l \\ ij Q_{yj} &= \frac{\beta_y}{a_j} \int_0^{a_j} v x \, dx = \frac{1}{2} \beta_y a_j m \\ jk Q_{yj} &= \frac{\beta_y}{a_k - a_j} \int_{a_j}^{a_k} v (a_k - x) \, dx = \frac{1}{2} \beta_y (a_k - a_j) m \\ jk Q_{yk} &= \frac{\beta_y}{a_k - a_j} \int_{a_j}^{a_k} v (x - a_j) \, dx = \frac{1}{2} \beta_y (a_k - a_j) m \\ ki Q_{yk} &= \frac{\beta_y}{-a_k} \int_{a_k}^0 -v y \, dy = -\frac{1}{2} \beta_y a_k m \end{aligned}$$

節点 i, j, k が、反時計まわりに配列されているとすると、節点 i, j, k を通して $\triangle ijk$ に流入する等価節点流量は

$$\begin{aligned} Q_{xj} &= -ij Q_{xj} - kj Q_{xj} = -\frac{1}{2} \beta_x b_k l \\ Q_{xk} &= -ik Q_{xk} - ki Q_{xk} = \frac{1}{2} \beta_x b_j l \\ Q_{yj} &= ij Q_{yj} + jk Q_{yj} = \frac{1}{2} \beta_y a_k m \\ Q_{yk} &= jk Q_{yk} + ki Q_{yk} = -\frac{1}{2} \beta_y a_j m \\ \therefore [Q_r] &= \begin{bmatrix} Q_j \\ Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xj} + Q_{yj} \\ Q_{xk} + Q_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \beta_x b_k l + \frac{1}{2} \beta_y a_k m \\ \frac{1}{2} \beta_x b_j l - \frac{1}{2} \beta_y a_j m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\beta_x b_k & \beta_y a_k \\ \beta_x b_j & -\beta_y a_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = [A][\alpha] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

さて、つぎに $[A]$ の逆マトリックス $[A^{-1}]$ を求めると

$$[A^{-1}] = \frac{-2}{a_j b_k - a_k b_j} \begin{bmatrix} \frac{a_j}{\beta_x} & \frac{a_k}{\beta_x} \\ \frac{b_j}{\beta_y} & \frac{b_k}{\beta_y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

すると

$$[\alpha] = [A^{-1}] [Q_r] \dots\dots\dots (54)$$

$$[u] = [B][\alpha] = [B][A^{-1}][Q_r] \dots\dots\dots (55)$$

また、摩擦係数 f_x, f_y を表わすマトリックスを $[F]$ とすると

$$[F] = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \gamma \rho g \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} [u] \dots\dots\dots (56)$$

$$\text{いま, } [C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix}$$

とすると

$$[F] = \gamma \rho g [C][u] = \gamma \rho g [C][B][A^{-1}][Q_r] \dots\dots\dots (57)$$

となる。

つぎに、節点 j, k の水圧の節点 i に対する相対的な値を H_j, H_k とし、これらを $[\alpha]$ をもって表わすことを考えよう。すなわち、

$$[H_r] = \begin{bmatrix} H_j \\ H_k \end{bmatrix} = [E][\alpha] \dots\dots\dots (58)$$

における $[E]$ を (47) 式の関係を用いて求めることを考えてみよう。

(47) 式の右辺が等価節点流量 $[Q_r]$ と $[H_r]$ との積に等しいと仮定すれば

$$\iint [\bar{w}]^T [F] dx dy = [\bar{Q}_r]^T [H_r] \rho g = [\bar{Q}_r]^T [E][\alpha] \rho g$$

なる関係が成立しなければならない。これを变形して

$$\iint [\bar{Q}_r]^T [A^{-1}]^T [B]^T \gamma \rho g [C][B][\alpha] dx dy = [\bar{Q}_r]^T [E][\alpha] \rho g$$

$$[E] = \gamma [A^{-1}]^T [B]^T [C][B] \iint dx dy$$

$$= \gamma s [A^{-1}]^T [B]^T [C][B]$$

ここで、 s は $\triangle ijk$ の面積で $s = \frac{1}{2} (a_j b_k - a_k b_j)$ で表わせる。 $[E]$ をさらに变形して

$$[E] = \gamma s [A^{-1}]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= r_s [A^{-1}]^T \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{pmatrix} \\
&= -r \begin{pmatrix} \frac{a_j}{\beta_x} & \frac{b_j}{\beta_y} \\ \frac{a_k}{\beta_x} & \frac{b_k}{\beta_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (59)
\end{aligned}$$

前記の仮定が正しいかどうか調べるために、つぎのような計算を行なった。

$$\rho_x \rho_g \frac{\partial h}{\partial x} + r \rho_g \left(\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} \right) = 0$$

$$\rho_x \rho_g \frac{\partial h}{\partial x} + r \rho_g \left(\frac{v}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} \right) = 0$$

より、両式をそれぞれ x , y について積分して解くと

$$h = -r \left\{ \left(\frac{x}{\beta_x k_{11}} + \frac{y}{\beta_y k_{12}} \right) l + \left(\frac{x}{\beta_x k_{12}} + \frac{y}{\beta_y k_{22}} \right) m \right\}$$

となり、これに $x = a_j, y = b_j$ を代入して求めた h および $x = a_k, y = b_k$ を代入して求めた h は、それぞれ (58) 式における H_j, H_k と一値する。したがって、前記のような仮定を用いてもよいことが証明された。

つぎに、 $[H_r]$ と $[Q_r]$ との関係求めてみる。

$$[H_r] = [D] [Q_r] = [E] [\alpha] = [E] [A^{-1}] [Q_r] \quad \text{より}$$

$$[D] = [E] [A^{-1}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{s} \begin{pmatrix} \frac{a_j}{\beta_x} & \frac{b_j}{\beta_y} \\ \frac{a_k}{\beta_x} & \frac{b_k}{\beta_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_j}{\beta_x} & \frac{a_k}{\beta_x} \\ \frac{b_j}{\beta_y} & \frac{b_k}{\beta_y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{r}{s} \left[\begin{aligned} &\frac{a_j^2}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{2a_j b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_j^2}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{a_j a_k}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{a_j b_k + a_k b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_j b_k}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{a_j a_k}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{a_j b_k + a_k b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_j b_k}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{a_k^2}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{2a_k b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_k^2}{k_{22} \beta_y^2} \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (60)
\end{aligned}$$

$[K_r] = [D^{-1}]$ とおくと

$$\begin{aligned}
[K_r] = \frac{\beta_x^2 \beta_y^2}{4rs \left\{ \frac{1}{k_{11} k_{22}} - \frac{1}{k_{12}^2} \right\}} &\left[\begin{aligned} &\frac{a_k^2}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{2a_k b_k}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_k^2}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{-a_j a_k}{k_{11} \beta_x^2} - \frac{a_j b_k + a_k b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} - \frac{b_j b_k}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{-a_j a_k}{k_{11} \beta_x^2} - \frac{a_j b_k + a_k b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} - \frac{b_j b_k}{k_{22} \beta_y^2} \\ &\frac{a_j^2}{k_{11} \beta_x^2} + \frac{2a_j b_j}{k_{12} \beta_x \beta_y} + \frac{b_j^2}{k_{22} \beta_y^2} \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (61)
\end{aligned}$$

となる。

さて、いま解析の対象としている透水層を $A, B, \dots, N$ なる要素に分割したとする。

しかるとき、

$$\begin{bmatrix} H_{r,A} \\ H_{r,B} \\ \vdots \\ H_{r,N} \end{bmatrix} = [H] \quad \begin{bmatrix} Q_{r,A} \\ Q_{r,B} \\ \vdots \\ Q_{r,N} \end{bmatrix} = [Q] \quad \begin{bmatrix} K_{r,A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & K_{r,B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & K_{r,N} \end{bmatrix} = [K] \quad \dots \quad (62)$$

とみると

$$[Q] = [K] [H] \quad \dots \quad (63)$$

と表わされる。

つぎに圧力変換マトリックスを考えよう。

i, j, k でのポテンシャルの値を h_i, h_j, h_k とすると、 j, k 点の i 点に対する相対的なポテンシャルの値は

$$H_j = h_j - h_i, \quad H_k = h_k - h_i$$

したがって、

$$[a_I] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [a_J] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [a_K] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (64)$$

とし、要素の配列に対応して a_I, a_J, a_K を配列したマトリックスを $[a]$ とすると

$$[H] = [a] [h] \quad \dots \quad (65)$$

となる。

さて、各節点における外部からの流入量を $[R]$ とすると、(47) 式は透水層内部での湧水を考えていないので、水圧で与えられた境界面以外の節点の R は 0 とする。

境界からの流入量 $[R]$ と $[h]$ との関係を求めるために、(47) 式の関係は透水層全体に適用してみよう。

$$[R] = [G] [h] \quad \dots \quad (66)$$

とおき、仮定の流入量を $[\bar{R}] = [G] [\bar{h}]$ とすると(47) 式の右辺は

$$[\bar{R}]^T [h] = [\bar{h}]^T [G]^T [h]$$

となる。一方、(47) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \iint (\bar{u})^T [F] dx dy &= \sum_j^N \iint_s (\bar{u})^T [F] dx dy \\ &= \sum_j^N [\bar{Q}_r]^T [H] \rho g = \rho g [\bar{H}]^T [K]^T [H] \\ &= \rho g [\bar{h}]^T [a]^T [K]^T [a] [h] \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} [G]^T &= \rho g [a]^T [K]^T [a] \\ \therefore [G] &= \rho g [a]^T [K] [a] \quad \dots \quad (67) \end{aligned}$$

となる。この $[G]$ により式(67)を解けば未知の $[h]$ および $[R]$ が求まる。この $[h]$ を用いて、

$$\left. \begin{aligned} [H] &= [G] [h] \\ [Q_r] &= [K_r] [H_r] \\ [u] &= [B] [A^{-1}] [Q_r] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

より、 $[u]$ が求められ各節点の $h (=p+\rho g z)$ と各節点および各要素の u, v が求められる。

10. 有限要素法による異方性透水層内の定常状態の non Darcy flow の解析 (二次元)

Darcy の法則に従う流れを解析するに当っては(67)式を対象にして解法を検討したが、流速が大きく Darcy の法則に従わない流れを解析する場合には(65)式を対象に解法を検討しなければならない。

(67) 式と(65) 式とを比較すると、(65) 式は(67)式において

$$\frac{1}{k_{12}} = 0, \quad \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{k_{22}} = \frac{q^\lambda}{k}$$

$$\rho g h \rightarrow \rho g h + \alpha \rho \frac{q^2}{2}$$

としたものに一致する。

ところが、 q^λ を摩擦力に含ませた場合に、これをそのままマトリックス解析にのせることは不可能である。そこで、 q の値を仮定して $\frac{q^\lambda}{k}$ を一つの常数として取扱うことが考えられる。そのため、まず全透水層において層流状態の流れが生じているものとして u, v を求め、これから $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ を計算し、その q を $\frac{q^\lambda}{k}$ に代入して繰り返し計算する方法が考えられる。

一方、 $\rho g h + \alpha \rho \frac{q^2}{2}$ は前節に述べた解法における $[h]$ に ρg を乗じたものに対応して考えればよく、したがって、この場合の $[h]$ を求めるためには $[u]$ から $\frac{q^2}{2g}$ を計算して前述の $[h]$ からひけば良いことがわかる。

さて、実際問題を解析する場合のことを考えてみよう。流速がある値以下で流れが層流状態と考えられる部分では $\lambda = 0$ であり、流速が大きく乱流が生じていると考えられる部分については λ が値をもつ。この λ は流速によって異なる値を有するので、実験的に各流速での λ および $\frac{1}{k}$ を求める必要がある。

これらの値が次表のように与えられたとする。

流 速	$0 \sim q_1$	$q_1 \sim q_2$	$q_2 \sim q_3$	$q_3 \sim$
λ の 値	0	λ_1	λ_2	λ_3
$\frac{1}{k_{11}}$	$\frac{1}{k_{11}}$	$\frac{1}{k_1}$	$\frac{1}{k_2}$	$\frac{1}{k_3}$
$\frac{1}{k_{22}}$	$\frac{1}{k_{22}}$			
$\frac{1}{k_{12}}$	$\frac{1}{k_{12}}$	0	0	0

まず、 $\lambda = 0$ として前節に述べた解析方法により全領域を解析し、 $[w]$ を求め $q = \sqrt{w^2 + v^2}$ を各要素に対して求める。

$q < q_1$ の要素に対してはそのままとし、

$$q_1 < q < q_2 \text{ の要素に対しては } \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{k_{22}} = \frac{q\lambda_1}{k_1}, \quad \frac{1}{k_{12}} = 0$$

$$q_2 < q < q_3 \quad \quad \quad \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{k_{22}} = \frac{q\lambda_2}{k_2}, \quad \frac{1}{k_{12}} = 0$$

$$q_3 < q \quad \quad \quad \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{k_{22}} = \frac{q\lambda_3}{k_3}, \quad \frac{1}{k_{12}} = 0$$

として、反復計算を行なう。

ここで、境界条件の入力について少し考えてみよう。境界条件が節点の等価流入量で与えられたときは問題ないが、境界面上での $[R]$ が未知で $[h]$ が与えられているときは少し問題がある。 $p = 0$ すなわち $h = z$ で与えられている部分については運動エネルギーによる補正が必要で $h = h + \frac{v^2}{2g}$ とする。 $p \neq 0$ の部分すなわち水圧が作用している部分については p の変化と相殺するから h に対する補正は必要としない。

このようにして、反復計算を行ない、

$$[d]_{\max} = \left[\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{\max}} \right] < h_c \quad \dots\dots\dots (69)$$

となったとき計算を終了し、各節点での w 、 v を用いて $\frac{v^2}{2g}$ を計算し、これを $[h]$ から差し引いて各節点での h を求める。

11. 浸潤面を有する場合

浸潤面を有する浸透流については、数値解析が不可能なので一般に図式解法が行なわれている。しかし、図式解法では複雑な条件のものについては解けないので、有限要素法で浸潤面を求めることを考えた。

浸潤面においては $p = 0$ 、浸潤面に垂直方向の $q_n = 0$ すなわち浸潤面上の節点の流入量 $R = 0$ という条件がある。そこで、これらの条件を満足するように浸潤面を決めればよいわけであるが、そのためには、まず浸潤面の位置を仮定し、その浸潤面上の節点の p を0として計算を行ない R の値により浸潤面の位置を修正して $p = 0$ 、 $R = 0$ という条件を満足するように繰返し計算していく方法および $R = 0$ という条件を与えて p の値により浸潤面の位置を修正し $R = 0$ 、 $p = 0$ という条件を満足するように繰返し計算していく方法がある。

以下に $p = 0$ という条件を与えて解く方法について具体的にフィルタイプダム浸潤面を求める場合で説明してみる。

まず、図-3のように、予想される浸潤面をより上方に（この場合は構造物表面）に浸潤面を仮定し、この浸潤面上の節点の p の値を0として計算を行なう。その結果、この浸潤面に接する要素で節点流入量 R の和が正すなわち流入を示す要素については、その要素は浸潤

面の上方にあるものとして浸潤面の位置を修正していく。そのようにして修正していった結果が図-6である。このままでは浸潤面がでこぼこであるから求められた浸潤面上の節点の R の値を用いて、たとえば、辺 AB 上での A および B の R の値を用いて辺 AB 上に $R=0$ に相当する点 C を求め、これらの点をつないで破線で示すような浸潤面を求める。

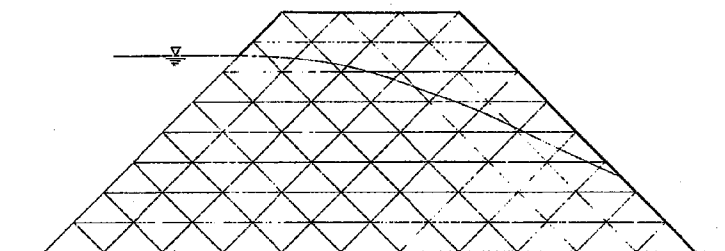


図 - 3

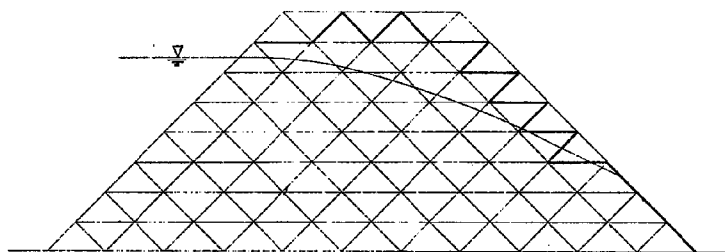


図 - 4

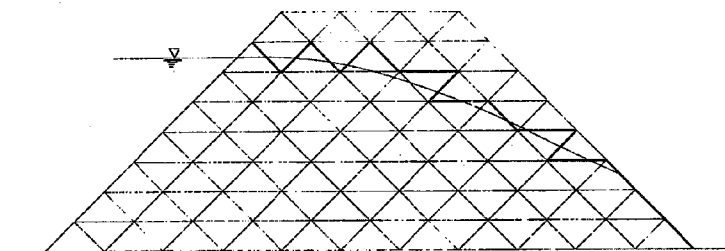


図 - 5

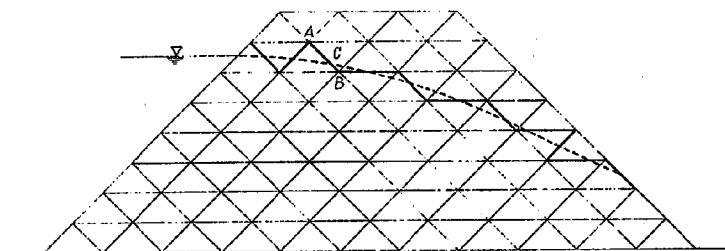


図 - 6

付1 h にパターンを与えて $[K_r]$ を求める方法

異方性透水層内に図-7に示すような三角形

要素 $\triangle ijk$ をとる。

いま,

$$\left. \begin{aligned} a_j &= x_j - x_i \\ b_j &= y_j - y_i \\ a_k &= x_k - x_i \\ b_k &= y_k - y_i \end{aligned} \right\}$$

とする。

異方性透水層内の Darcy の流れの運動方程式 (3)

$$\left. \begin{aligned} \beta_x \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \left(\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} \right) &= 0 \\ \beta_y \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \left(\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

より, 実流速 u, v と $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ との関係を求めると

$$-\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} \quad [\beta] = \begin{bmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{bmatrix}$$

とおくと

$$[u] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta] \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$h = ax + by$ とおき

$$[a] = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ a_k & b_k \end{bmatrix}$$

とおくと

$$[H_r] = \begin{bmatrix} H_j \\ H_k \end{bmatrix} = [A] [a]$$

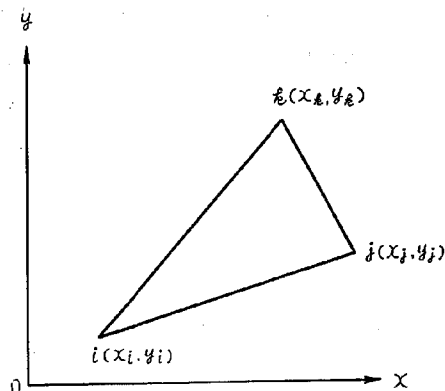


図 - 7

$$[\alpha] = [A]^{-1} [H_r]$$

$$[w] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta] [\alpha] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1} [H_r]$$

また、摩擦力 f_x, f_y を表わすマトリックスを $[f]$ とすると、

$$[f] = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \gamma \rho g \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} [w] = \gamma \rho g [C] [w]$$

$$= -\rho g [C] [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1} [H_r]$$

$$= -\rho g [\beta] [A]^{-1} [H_r]$$

つきに(4)式の右辺が等価節点流量 $[Q_r]$ と節点ポテンシャル $[H_r]$ との積に等しいと仮定して、 $[Q_r]$ と $[H_r]$ との関係を求めてみよう。

$$[Q_r] = [D] [w] \dots\dots\dots (A)$$

と仮定すれば

$$\iint (\bar{w})^T [f] dx dy = (\bar{w})^T [f] s = [\bar{Q}_r] [H_r] \rho g = (\bar{w})^T [D]^T [H_r] \rho g$$

より

$$[H_r]^T [D] = \frac{s}{\rho g} [f]^T$$

ここで、 s は三角形 ijk の面積

$[D]$ を消去するため(A) 式の両辺に $[H_r]^T$ をかけると

$$\begin{aligned} [H_r]^T [Q_r] &= [H_r]^T [D] [w] = \frac{s}{\rho g} [f]^T [w] \\ &= \frac{s}{\rho g} \times (-\rho g) [H_r]^T [A^{-1}]^T [\beta]^T \times \left(-\frac{1}{\gamma}\right) [C]^{-1} [\beta] [A^{-1}] [H_r] \end{aligned}$$

$$[Q_r] = \frac{s}{\gamma} [A^{-1}]^T [\beta]^T [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1} [H_r]$$

$$[K_r] = \frac{s}{\gamma} [A^{-1}]^T [\beta]^T [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1}$$

かくして $[Q_r] = [K_r] [H_r]$ なる関係が求まった。

付2 有限要素法による異方性透水層内の定常状態のDarcy flowの解法(三次元)

異方性透水層内に図-8に示すような四面体

要素ijklをとる。

$$\text{いま, } a_j = x_j - x_i, \quad b_j = y_j - y_i$$

$$c_j = z_j - z_i,$$

$$a_k = x_k - x_i, \quad b_k = y_k - y_i$$

$$c_k = z_k - z_i,$$

$$a_l = x_l - x_i, \quad b_l = y_l - y_i$$

$$c_l = z_l - z_i,$$

とする。

異方性透水層内のDarcy flowの流れの運動

方程式⑧

$$\beta_x \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \left(\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} + \frac{w}{k_{13}} \right) = 0$$

$$\beta_y \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \left(\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} + \frac{w}{k_{23}} \right) = 0$$

$$\beta_z \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma \left(\frac{u}{k_{13}} + \frac{v}{k_{23}} + \frac{w}{k_{33}} \right) = 0$$

より, 実流速 u, v, w と $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$ との関係を求めてみると

$$-\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = -\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} \end{bmatrix} \quad [\beta] = \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{bmatrix}$$

とおくと

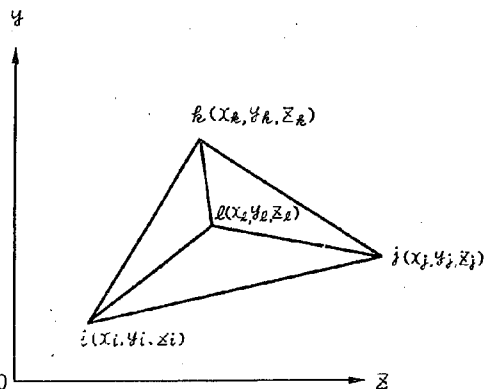


図-8

$$[u] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta] \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$h = ax + by + cz$ とおき

$$[a] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \end{bmatrix}$$

とおくと

$$[H_r] = \begin{bmatrix} H_j \\ H_k \\ H_l \end{bmatrix} = [A][a]$$

$$[a] = [A]^{-1} [H_r]$$

$$[u] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta][a] = -\frac{1}{\gamma} [C]^{-1} [\beta][A]^{-1} [H_r]$$

また、摩擦力 f_x, f_y, f_z を表わすマトリックスを $[f]$ とすると、

$$[f] = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \gamma \rho g \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{13}} \\ \frac{1}{k_{12}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{23}} \\ \frac{1}{k_{13}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \gamma \rho g [C][u]$$

$$= -\rho g [C][C]^{-1} [\beta][A]^{-1} [H_r]$$

$$= -\rho g [\beta][A]^{-1} [H_r]$$

つぎに(4)式の左辺が等価節点流量 $[Q_r]$ と節点ポテンシャル $[H_r]$ との積に等しいと仮定して、 $[Q_r]$ と $[H_r]$ との関係求めてみよう。

$$[Q_r] = [D][u] \quad \dots\dots\dots (A)$$

と仮定すれば

$$\begin{aligned} \iiint [\bar{u}]^T [f] dx dy dz &= [\bar{u}]^T [f] V = [\bar{Q}_r] [H_r] \rho g \\ &= [\bar{u}]^T [D]^T [H_r] \rho g \end{aligned}$$

より

$$[H_r]^T [D] = \frac{V}{\rho g} [f]^T$$

ここで、 V は四面体 $ijkl$ の体積

$[D]$ を消去するため (A) 式の両辺に $[H_r]^T$ をかけると、

$$\begin{aligned}
[H_r]^T [Q_r] &= [H_r]^T [D] [u] = \frac{V}{\rho g} [f]^T [u] \\
&= \frac{s}{\rho g} \times (-\rho g) [H_r]^T [A^{-1}]^T [\beta]^T \times \left(-\frac{1}{\gamma}\right) [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1} [H_r] \\
[Q_r] &= \frac{s}{\gamma} [A^{-1}]^T [\beta]^T [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1} [H_r] \\
[K_r] &= \frac{s}{\gamma} [A^{-1}]^T [\beta]^T [C]^{-1} [\beta] [A]^{-1}
\end{aligned}$$

かくして、 $[Q_r] = [K_r] [H_r]$ なる関係が求まった。

さて、いま解析の対象としている透水層を $A, B, \dots, N$ なる要素に分割したとする。

しかるとき

$$\begin{bmatrix} H_{r,A} \\ H_{r,B} \\ \vdots \\ H_{r,N} \end{bmatrix} = [H], \quad \begin{bmatrix} Q_{r,A} \\ Q_{r,B} \\ \vdots \\ Q_{r,N} \end{bmatrix} = [Q], \quad \begin{bmatrix} K_{r,A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{r,B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{r,N} \end{bmatrix} = [K]$$

とおくと

$$[Q] = [K] [H]$$

と表わされる。

つぎに、圧力変換マトリックスを考えよう。

i, j, k, l でのポテンシャルの値を h_i, h_j, h_k, h_l とすると、 j, k, l 点の i 点に対する相対的なポテンシャルの値は

$$H_j = h_j - h_i, \quad H_k = h_k - h_i, \quad H_l = h_l - h_i,$$

したがって

$$\begin{aligned}
[a_i] &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} & [a_j] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [a_k] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [a_l] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

とし、要素の配列に対応して a_i, a_j, a_k を配列したマトリックスを $[a]$ とすると

$$[H] = [a] [h]$$

となる。

さて、各節点における外部からの流入量を $[R]$ とすると、(4)式は透水層内部での質量保存の法則を表わしているので(4)式は内部での水の出入は考えていない。したがって、境界面以外の節点の R は 0 としなければならない。

境界からの流入量 $[R]$ と $[h]$ との関係を求めるために、(4)式の関係を保水層全体に適用してみよう。

$$[R] = [G] [h]$$

とおき、仮定の流入量を $[R] = [G] [\bar{h}]$ とすると (4)式の右辺は、

$$[\bar{R}]^T [h] = [h]^T [G]^T [h]$$

となる。一方、47式の左辺は

$$\begin{aligned} \iiint [\bar{w}]^T [F] dx dy dz &= \sum_{\frac{N}{8}} \iint_{\frac{8}{8}} [\bar{w}]^T [F] dx dy dz \\ &= \sum_{\frac{N}{8}} [\bar{Q}_r]^T [H] \rho g = \rho g [\bar{H}]^T [K]^T [H] \\ &= \rho g [\bar{h}]^T [a]^T [K]^T [a] [h] \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$[G]^T = \rho g [a]^T [K]^T [a]$$

$$\therefore [G] = \rho g [a]^T [K] [a]$$

となる。かくして

$$[H] = [a][h], [Q_r] = [K_r][H_r], [w] = [B][A]^{-1} [Q_r],$$

となり、 h, p, w, v, w 等が求まる。

参 考 資 料

- 1) 友 近 晋 : 流体力学 (共立出版)
- 2) 本 間 仁 : 標準水理学 (丸善)
- 3) 岩 佐 義 朗 : 水理学, 朝倉土木工学講座 3 (朝倉書店)
- 4) M. Maskat : "Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media"
(McGraw-Hill)
- 5) R. W. Clough : "The Finite Element Method in Structural Mechanics"
Chapter 7 of Stress Analysis (John Wiley & Son)
- 6) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung : "The Finite Element Method
in Structural and Continuum Mechanics"
(McGraw-Hill)