

多径間吊橋の振動特性 に関する調査報告書

昭和 45 年 3 月

建設省土木研究所

多経間吊橋の振動特性に関する調査報告書

正 誤 表

誤 → 正

目次	相似側→相似則
P 8 前16行目	式(- 1) → 式(1 - 1)
P 8 前28行目	$T = \frac{W}{2g} \int_0^L \omega^2 \eta^2 dx + 2 \frac{W_1}{2g} \int_0^{L_1} \omega^2 \eta dx + 2 \frac{W_2}{2g} \int_0^{L_2} \omega^2 \eta dx$ $\rightarrow T = \frac{W}{2g} \int_0^L \omega^2 \eta^2 dx + 2 \frac{W_1}{2g} \int_0^{L_1} \omega^2 \cdot \eta^2 dx + 2 \frac{W_2}{2g} \int_0^{L_2} \omega^2 \cdot \eta^2 dx$
P 1 0 後2行目	$a_1, a_2, \dots, C_2 \rightarrow a_1, a_3, \dots, C_1$
P 1 1 ... (14)	= を入れる
P 1 2 前14行目	$(GK_2 + \frac{H_w b^2}{4}) \int_0^{L_2} \varphi^2 dx \rightarrow (GK_2 + \frac{H_w b^2}{4}) \int_0^{L_2} \varphi'^2 dx$
P 1 2 前15行目	$h = \frac{E_c A_c}{L_c} \{ \frac{8f}{\ell^2} \int_0^L \frac{b}{2} \varphi dx \rightarrow h = \frac{E_c A_c}{L_c} \{ \frac{8f}{\ell^2} \int_0^L \frac{b}{2} \varphi dx$
P 1 3 前5行目	$2EC_w \frac{\ell_2}{2} C_1^2 \rightarrow 2EC_{w2} \frac{\ell_2}{2} C_1^2]$
P 1 6 後4行目	$\xi_i, \xi_1 \rightarrow \zeta_i, \zeta_1$
P 2 7	アンカー → 附加重錘
P 2 9	補剛桁 → アンカー
P 3 1	附加重錘 → 補剛桁
P 1 5	なお、計算に使用した振動解析のプログラムを巻末に記す。→ とる。

目 次

諸 言

1 調査の概要	1
1-1 まえがき	1
1-2 調査の方法	1
1-3 5 径間吊橋の概要	2
2 理論的解析	7
2-1 まえがき	7
2-2 撓みの固有振動数の計算	8
2-3 捩り振動の固有振動数の計算	12
2-4 数値計算	15
3 模型実験	16
3-1 まえがき	16
3-2 相似側と模型	16
3-3 実験方法	33
3-4 実験結果	33
4 考 察	43
4-1 模型実験結果に関する考察	43
4-2 理論式に関する考察	43
あ と が き	44

緒 言

昭和34年に始まった本州・四国連絡橋に関する調査は予備調査の段階をおえてようやく実施のための調査が始められようとしている。この間、広い瀬戸内海のあちこちに本州と四国を結ぶいくつかの路線が調査の対象としてとりあげられ各路線について詳細な検討が加えられて来た。各路線に計画されている最も重要な構造物は広い海面をまたぐ吊橋である。これらの吊橋には中央径間長1,500mの世界に類を見ない長大吊橋を始めとして大小さまざまなものが計画されたが、なかでも大規模な吊橋は全長5,000m余の5径間吊橋である。

本報告は、この5径間吊橋の振動特性に関する一連の調査を取りまとめたものである。

昭和45年3月

構造研究室 大久保 忠 良
榎 波 義 幸
山 崎 賢 一

§ 1. 調査の概要

1-1 ま え が き

長径間橋梁としての吊橋は力学的に非常に秀れた構造型式であって中央径間長 $1,298m$ と云う世界最大の Verrazano Narrows 橋を始めとして径間長 $550m$ 以上の長大橋は全て吊橋である。従って、多くの長大橋梁をつらねて本州と四国を結ぼうとする本州・四国連絡道路の計画には多くの長大吊橋が予定されていて、その中には中央径間長 $1,500m$ と云った Verrazano Narrows 橋をはるかにしのぐ長大橋も計画され、現在その調査が進められている。このように吊橋は広い海峡をつなぐ橋梁としては橋長に比して橋脚の数が少なく、このような工事において最も面倒な海面下の作業を少なくできる利点があるが、橋の規模に較べて海峡の幅が更に大きい場合には現在最も普通の吊橋の形式である三径間吊橋ではかなり大規模な海面下の工事が要求される。特に主ケーブルを定着するためのアンカーブロックは海中では非常に大きな構造物となる。例えば本州・四国連絡道路の一つの計画路線を横切る明石海峡は幅が $5,000m$ を越え、現在のところ建設可能な規模の三径間吊橋では海中にアンカーブロックを建設せざるを得ない。そのため、この解決策として提案されたのが五径間吊橋である。この計画案では橋長 $5,053m$ の超長大吊橋となり、明石海峡においてもこの橋梁をあてはめれば困難なアンカーブロック工事は陸上で行なうことができる。

然しながら長径間の五径間吊橋は三径間吊橋に較べて更に解決されなければならない多くの問題を内在している。その一つが耐風安定性の問題である。

一般に吊橋は他の型式の橋梁に較べ耐風性が劣っていることは承知のとおりであるが、同じ吊橋でも剛性に較べ長さが長くなって固有振動数が下ると、それにつれ剛性も低下してくることが知られている。従って五径間吊橋は三径間吊橋に較べ更に厳しい制約のもとに耐風設計を行なわなければならないが、その前に五径間吊橋の振動特性を明らかにしておく必要がある。

1-2 調査の方法

構造物の振動特性を支配するものは 1. 振動系の質量分布, 2. 振動体の剛性, 3. 構造物の減衰, 等の因子である。しかし構造物の振動特性を定量的に表現するものは, 1. 固有振動数, 2. 規準振動形, 3. 構造減衰の対数減衰率である。このうち減衰は構造物の使用材料, 継手の種類及びその施工の差異, 部材間の摩擦等によってことなり, いわば構造物固有のものと云ってよく現在のところ理論的にも実験的にも解明できる問題ではないので今回の調査も多径間の固有振動数及び規準振動形が理論的にどの程度正確に解析できるかを振動模型実験とあわせて比較してみることにした。

吊橋の振動理論は従来より多くの研究者によって研究が進められ, その妥当性の確認された成果も多いが, 今回の調査はこれらの研究のうち F. Bleich の手法によるエネルギー法による振動解析理論が五径間吊橋に拡張できるかどうかについてである。数ある理論式のうちから特に Bleich の方法を

とりあげたのは、この方法で耐風設計上必要とされる低次の固有振動数の解析が比較的正確に且つ簡単に可能なためである。この理論値の検証は1/300の縮尺の振動模型をつかって行なった。

1-3 5径間吊橋の概要

今回の調査の対象とした5径間吊橋の諸元を下に記し、その一般形状を図-1に示す。

中央径間塔間隔	1,515.4	m
側径間塔間隔	1,263.9	m
端径間塔間隔	506.2	m
中央径間長	1,500.0	m
側径間長	1,250.0	m
端径間長	500.0	m
橋長	5,055.6	m
中央径間垂距	136.364	m
側径間垂距	94.677	m
端径間垂距	15.152	m
主塔高	211.76	m
支点用支持桿長(中央径間)	6.55	m
" (側径間)	6.67	m
ケーブル間隔	36.0	m
死荷重	31.86	t/m
ケーブル・	12.368	t/m
吊構造部	19.492	t/m
床版部と縦桁	13.550	t/m
床トラス	2.368	t/m
主構	1.828	t/m
横構	0.566	t/m
吊材	0.176	t/m
公共添加物	1.000	t/m
主ケーブル断面積	1.3828	m ²
補剛桁鉛直断面2次モーメント(中央径間)	4.613	m ⁴
" (側径間)	5.190	m ⁴
" (端径間)	5.766	m ⁴

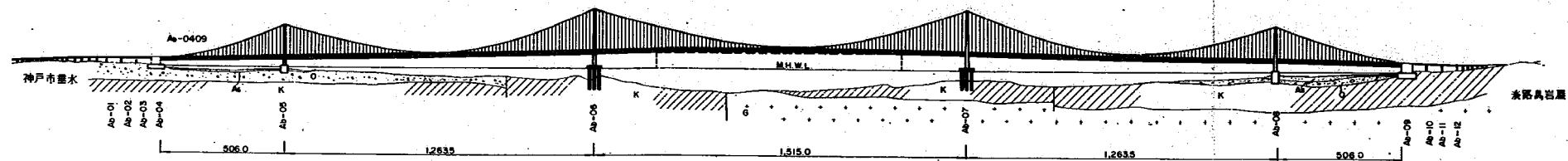
補剛桁水平断面 2 次モーメント (中央径間)	46.656	m
" (側径間)	41.472	m
" (端径間)	38.880	m
上横構断面積	105.84	cm ²
下横構断面積	122.76	cm ²
斜材断面積	150.00	cm ²
補剛桁極慣性モーメント中心	上弦材より下側 0.933 m	
ケーブルを含めた極慣性モーメント	6,286	t·m ²

主 塔 諸 元

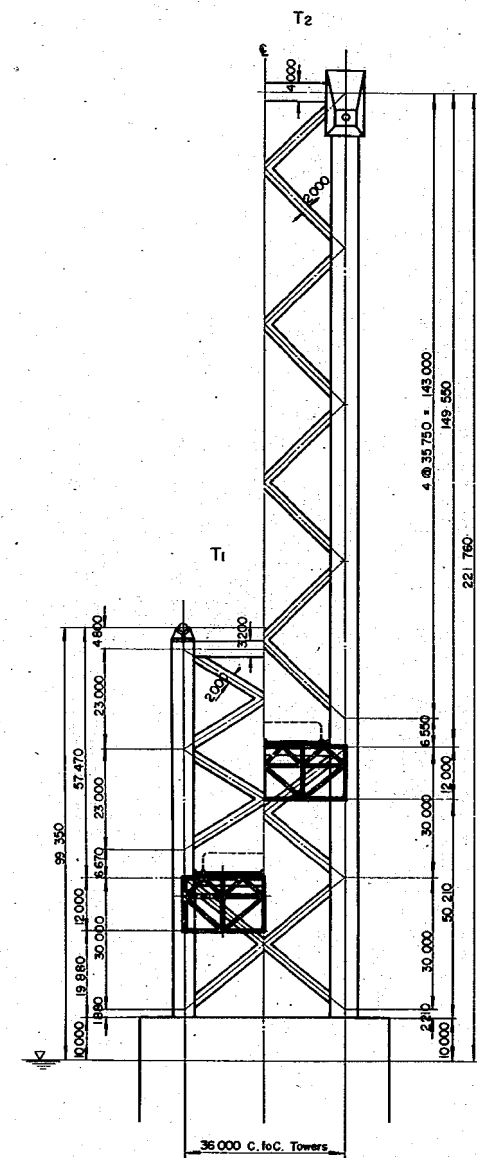
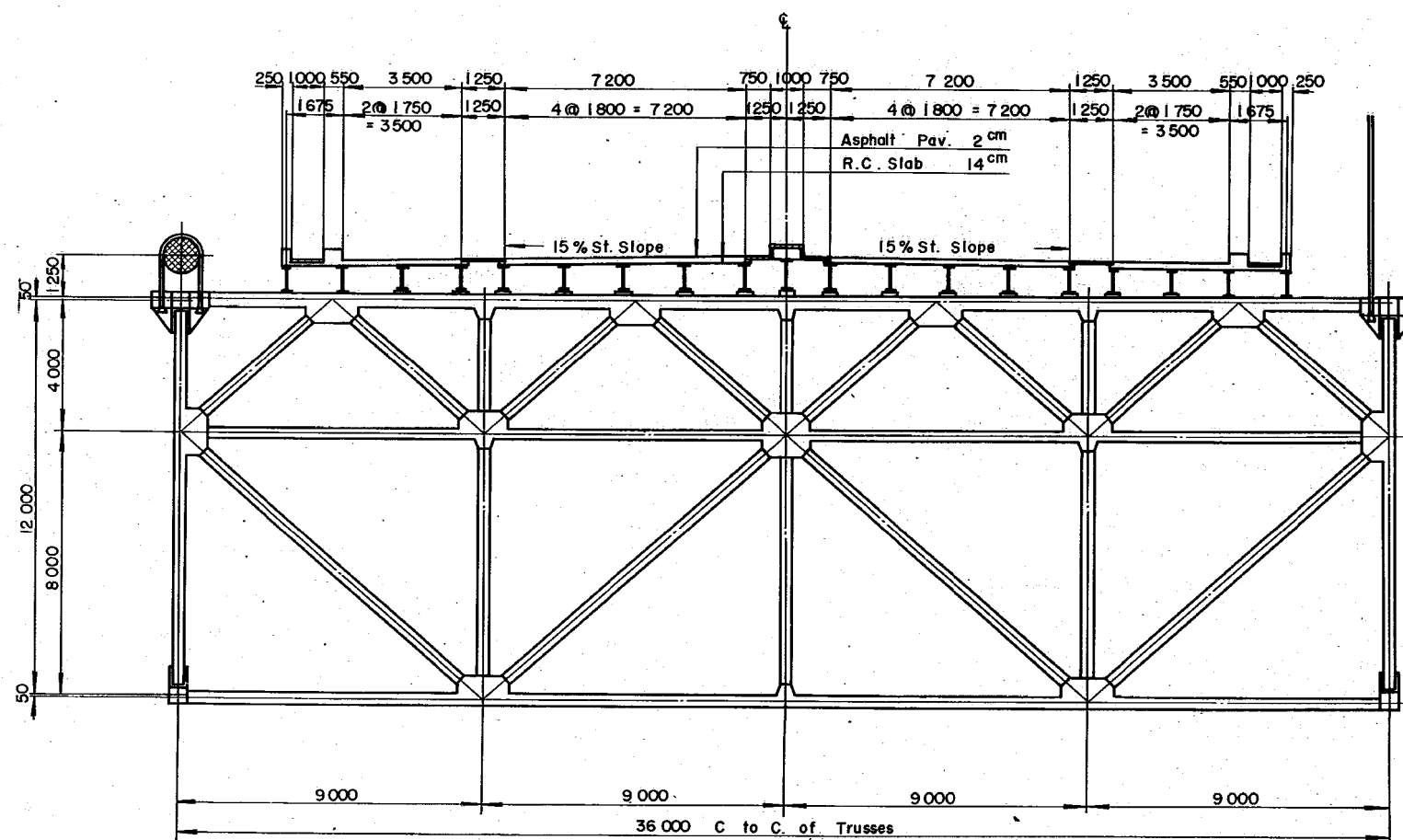
高さ (m)	I _x (m ⁴)	I _y (m ⁴)	A (m ²)
0	14.642	10.761	2.979
23.99	17.024	11.130	3.070
59.74	28.301	15.044	4.170
95.49	39.363	16.978	4.769
131.24	55.449	19.188	5.441
167.79	76.407	21.412	6.117
197.79	83.842	22.112	6.279
200	83.842	22.112	6.279
上部水平材	1.395		0.588
中間水平材	1.776		1.176
斜材	0.292		0.437

副 塔 諸 元

高 さ (m)	I _x (m ⁴)	I _y (m ⁴)	A (m ²)
0	7.588	5.491	2.037
24.600	11.764	6.222	2.301
47.600	23.195	9.193	3.538
34.270	41.011	11.140	4.324
86.150	41.011	11.140	4.324
上部水平材	0.662		0.426
中間水平材	1.444		0.738
斜材			0.348
吊材	1247×4 鋼/cable/1ヶ所		



CROSS SECTION SCALE 1:100



§ 2. 理論的解析

2-1 ま え が き

構造物の固有振動数を求める手法としてはよく知られているように、

- i 微分方程式法 iii エネルギー法
- ii 積分方程式法 iv 有限自由度の discrete な系で近似する方法

があるが、ここではエネルギー式を Ritz の方法で解いて多径間吊橋の撓み振動及び捩り振動の固有振動数を求めてみた。

振動している構造物の運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを V とすると、保存系に対する Hamilton の原理から時刻 t_1 から t_2 までの運動は

line integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

が運動の道すじに対して極値をとる。すなわち、系の運動は時間 t_1 と t_2 を固定したときの変分が零であるような運動である。

$$\therefore \delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

従って上の変分計算を行なうことにより系の運動をあらわす微分方程式が容易に得られる。こうして得られた微分方程式を解けば構造物の固有振動数及び振動モードが求まるが一部の簡単な構造物を除けば、この運動方程式を解くことは容易ではない。このように解を求めるのが非常に面倒な変分問題の近似解法の一つに直接解法がある。

Ritz の方法はこのような直接解法の一つであって、Rayleigh の方法と共に連続体の固有振動数を求める近似解法としてよく知られている。Ritz の方法は汎関数

$$I = \int_a^b L(y) dx$$

の極値を求める代りに、境界条件を満足する y の近似関数

$$y_n = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + \dots\dots\dots + a_n w_n$$

を用いて

$$I = \int_a^b L(y_n) dx$$

が極値になるように n 個のパラメーター $a_1, a_2, \dots, a_n$ を決定する方法で、これによって変分問題は普通の最小問題となり

$$\frac{\partial I(y_n)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

から近似解 y_n が求められる。一般に関数系 $w_1, w_2, \dots, w_n$ を三角関数にとり、 y_n を三角級数で

表わすことが普通に行なわれている。

7-2 撓みの固有振動数の計算

般に構造物の振動解析において厳密な意味での解法は不可能であり、ここでも式の誘導に先立って以下のような仮定によって多径間吊橋を単純化する。

- i 各径間では死荷重は等分布で且つケーブルは完全に可撓とする。従って死荷重平衡時のケーブルの形状は放物線とする。
- ii 死荷重は全てケーブルで受けもたれる。
- iii 補剛桁は水平におかれ各径間での剛性は一定とする。

以上は一般の吊橋解析における仮定であるが、ここではそれ以外に次の仮定を追加する。

- iv タワーは変形しない。従って、ケーブルは塔頂上を滑動して平衡状態となる。
- v 吊橋の運動エネルギーとしては吊橋構造部、ケーブルの撓み振動のみを、ひずみエネルギーとしては撓み変形による主構の曲げひずみエネルギー及びケーブルの伸びによるひずみエネルギーを考慮する。即ち吊材は伸びないものとし、ケーブルと補剛桁の撓み変位は等しいものとする。

結局、多径間吊橋の固有振動数を求めることは系の運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーを計算して式(1)を満足する解を求めることである。

系の振動が微小振幅の調和線型振動と仮定すれば撓み曲線は次のように変数分離ができる。

$$\eta = \eta \sin \omega t$$

関数 $T-V$ は変位 η に関する2次形式であることから式(1)の時間積分は計算が可能で、従って問題は次の積分の極値を求めることに帰着する。

$$I = \int_0^L (T(\eta) - V(\eta)) dx \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

単径間吊橋及び3径間吊橋のRitzの方法による固有振動解析は文献(1)に詳しく説明してある。

それによれば、単径間吊橋の撓み振動における運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーは

$$T = \frac{W}{2g} \omega^2 \int_0^L \eta^2 dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^L \eta'^2 dx - \frac{H\eta}{2} \int_0^L \eta'' \eta dx + \frac{4fh}{\ell^2} \int_0^L \eta dx \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{where } h = \frac{E_c A_c}{L_c} \cdot \frac{8f}{\ell^2} \int_0^L \eta dx \quad \dots\dots\dots (4)$$

この式を5径間吊橋の場合に拡張すると

$$T = \frac{W}{2g} \int_0^L \omega^2 \eta^2 dx + 2 \frac{W_1}{2g} \int_0^{\ell_1} \omega^2 \eta^2 dx + 2 \frac{W_2}{2g} \int_0^{\ell_2} \omega^2 \eta^2 dx \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{EI}{2} \int_0^L \eta'^2 dx - \frac{H_*}{2} \int_0^L \eta'' \eta dx + \frac{4fh}{\ell^2} \int_0^L \eta dx \\
& + 2 \left\{ \frac{EI_1}{2} \int_0^{\ell_1} \eta'^2 dx - \frac{H_*}{2} \int_0^{\ell_1} \eta'' \eta dx + \frac{4f_1 h}{\ell_1^2} \int_0^{\ell_1} \eta dx \right\} \dots\dots\dots (6) \\
& + 2 \left\{ \frac{EI_2}{2} \int_0^{\ell_2} \eta'^2 dx - \frac{H_*}{2} \int_0^{\ell_2} \eta'' \eta dx + \frac{4f_2 h}{\ell_2^2} \int_0^{\ell_2} \eta dx \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{ここに } h = \frac{EcAc}{L_*} \left\{ \frac{8f}{\ell^2} \int_0^L \eta dx + 2 \frac{8f_1}{\ell_1^2} \int_0^{\ell_1} \eta dx + 2 \frac{8f_2}{\ell_2^2} \int_0^{\ell_2} \eta dx \right\} \dots\dots\dots (7)$$

以下の計算においては振動波形を三角級数で近似していることもあって簡単化のために対称振動と逆対称振動に別けて考えるものとする。ここでは逆対称振動はケーブルの伸びを伴なわれないものとし、従って各径間独立に振動するものと仮定する。また対称振動においても高次振動の場合には塔の変形がわずかであまり影響がないと仮定して各径間独立に振動数の計算を行なっている。

i 対称振動

未知関数 η を次のように近似する。

$$\begin{aligned}
\text{main span} \quad \eta &= a_1 \sin \frac{\pi}{\ell} x + a_3 \sin \frac{3\pi}{\ell} x + a_5 \sin \frac{5\pi}{\ell} x \\
\text{side span} \quad \eta &= b_1 \sin \frac{\pi}{\ell_1} x + b_3 \sin \frac{3\pi}{\ell_1} x \dots\dots\dots (8) \\
\text{end span} \quad \eta &= c_1 \sin \frac{\pi}{\ell_2} x,
\end{aligned}$$

式(8)を式(5),(6),(7)に代入すると

$$T = \frac{\pi^4}{4\ell} \frac{W\ell^2}{\pi^2 g} \omega^2 (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2) + \frac{2\pi^4}{4\ell_1} \frac{W_1 \ell_1^2}{\pi^2 g} \omega^2 (b_1^2 + b_3^2) + \frac{2\pi^4}{4\ell_2} \frac{W_2 \ell_2^2}{\pi^2 g} \omega^2 c_1^2 \dots (9)$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{\pi^4}{4\ell} \left\{ \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} (a_1^2 + 81a_3^2 + 625a_5^2) - H_* (a_1^2 + 9a_3^2 + 25a_5^2) + \frac{32fh}{\pi^3} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5}) \right. \\
& + 2 \frac{\pi^2 EI_1}{\ell_1^2} (b_1^2 + 81b_3^2) - 2H_* (b_1^2 + 9b_3^2) + 2 \frac{32f_1 h}{\pi^3} (b_1 + \frac{b_3}{3}) \\
& \left. + 2 \frac{\pi^2 EI_2}{\ell_2^2} c_1^2 - 2H_* c_1 + 2 \frac{32f_2 h}{\pi^3} c_1 \right\} \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

$$h = \frac{E_* Ac}{L_*} \left\{ \frac{16f}{\pi \ell} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5}) + 2 \frac{16f_1}{\pi \ell_1} (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2 \frac{16f_2}{\pi \ell_2} c_1 \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \ell_1 / \ell, & \alpha_2 &= \ell_2 / \ell \\
\beta_1 &= w_1 / w, & \beta_2 &= w_2 / w \\
r_1 &= I_1 / I, & r_2 &= I_2 / I \\
f_1 &= \alpha_1^2 \beta_1 f & f_2 &= \alpha_2^2 \beta_2 f
\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}
 T - V = & \frac{\pi^4}{4\ell} \left[s\omega^2 \{ (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2) + 2\alpha_1\beta_1 (b_1^2 + b_3^2) + 2\alpha_2\beta_2 c_1^2 \} \right. \\
 & - \lambda (a_1^2 + 81a_3^2 + 625a_5^2 + \frac{2r_1}{\alpha_1^3} (b_1^2 + 81b_3^2) + \frac{2r_2}{\alpha_2^3} c_1^2) \dots\dots\dots (12) \\
 & + H_* (a_1^2 + 9a_3^2 + 25a_5^2 + \frac{2}{\alpha_1} (b_1^2 + 9b_3^2) + \frac{2}{\alpha_2} c_1^2) \\
 & \left. + \frac{k}{p} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) \right]
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{W\ell^2}{9\pi^2}, & \lambda &= \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \\
 K &= \frac{32f}{\pi^3} & P &= \frac{\pi\ell}{16f} \cdot \frac{L_*}{E_* A_*}
 \end{aligned}$$

$T - V =$ 最小の条件から、パラメータ $a_1, a_3, a_5, b_1, b_3, c_1$ で上式を偏微分した方程式は零にならなければならない。このことから次の6つの連立方程式が求まる。

$$\begin{aligned}
 A_1 a_1 - \frac{K}{P} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0 \\
 A_3 a_3 - \frac{K}{3P} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0 \\
 A_5 a_5 - \frac{K}{5P} (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0 \dots\dots\dots (13) \\
 B_1 b_1 - \frac{K}{P} \alpha_1^2 \beta_1 (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0 \\
 B_3 b_3 - \frac{K}{3P} \alpha_1^2 \beta_1 (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0 \\
 C_1 c_1 - \frac{K}{P} \alpha_2^2 \beta_2 (a_1 + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} + 2\alpha_1\beta_1 (b_1 + \frac{b_3}{3}) + 2\alpha_2\beta_2 c_1) &= 0
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 A_1 &= s\omega^2 - \lambda - H_* & B_1 &= \alpha_1^2 \beta_1 s\omega^2 - \frac{r_1}{\alpha_1^2} \lambda - H_* \\
 A_3 &= s\omega^2 - 81\lambda - 9H_* & B_3 &= \alpha_1^2 \beta_1 s\omega^2 - \frac{81r_1}{\alpha_1^2} \lambda - 9H_* \\
 A_5 &= s\omega^2 - 625\lambda - 25H_* & C_1 &= \alpha_1^2 \beta_2 s\omega^2 - \frac{r_2}{\alpha_2^2} \lambda - H_*
 \end{aligned}$$

パラメータ $a_1, a_2, \dots, c_2$ は常に零となることはないから結局、次の振動数方程式が成立する。

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega^2 - 3 - H_1 - \frac{K}{P} \cdot \frac{K}{3P} & & -\frac{K}{5P} & & -\frac{K}{P} 2\alpha_1\beta_1 & & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1\beta_2 \\
-\frac{K}{3P} & \omega^2 - 81I - 9H_1 - \frac{K}{9P} & -\frac{K}{15P} & & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1\beta_1 & & -\frac{K}{9P} 2\alpha_1\beta_2 \\
-\frac{K}{5P} & -\frac{K}{15P} & \omega^2 - 625I - 25H_1 - \frac{K}{25P} & & -\frac{K}{5P} 2\alpha_1\beta_1 & & -\frac{K}{15P} 2\alpha_1\beta_2 \\
-\frac{K}{P} \alpha_1^2\beta_1 & -\frac{K}{3P} \alpha_1^2\beta_1 & -\frac{K}{5P} \alpha_1^2\beta_1 & \alpha_1\beta_1 \omega^2 - \frac{I_1}{\alpha_1^2} I - H_1 - \frac{K}{P} 2\alpha_1^2\beta_1^2 & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1^2\beta_1^2 & & -\frac{K}{P} 2\alpha_1^2\beta_1\alpha_2\beta_2 \\
-\frac{K}{3P} \alpha_1^2\beta_1 & -\frac{K}{9P} \alpha_1^2\beta_1 & -\frac{K}{15P} \alpha_1^2\beta_1 & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1^2\beta_1^2 & \alpha_1^2\beta_1 \omega^2 - \frac{81I}{\alpha_1^2} I - 9H_1 - \frac{K}{9P} 2\alpha_1^2\beta_1^2 & & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1^2\beta_1\alpha_2\beta_2 \\
-\frac{K}{P} \alpha_1^2\beta_2 & -\frac{K}{3P} \alpha_1^2\beta_2 & -\frac{K}{5P} \alpha_1^2\beta_2 & -\frac{K}{P} 2\alpha_1\beta_1\alpha_2^2\beta_2 & -\frac{K}{3P} 2\alpha_1\beta_1\alpha_2^2\beta_2 & \alpha_2^2\beta_2 \omega^2 - \frac{I_2}{\alpha_2^2} I - H_2 - \frac{K}{P} 2\alpha_2^2\beta_2^2 &
\end{array} \quad (14)$$

またパラメーター $a_1, \dots, c_1$ の間には次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{A_1}{3A_3} a_1 & a_5 &= \frac{A_1}{5A_5} a_1 \\
b_1 &= \alpha_1^2 \beta_1 \frac{A_1}{B_1} a_1 & b_3 &= \alpha_1^2 \beta_1 \frac{A_1}{3B_1} a_1 & \dots & \\
c_1 &= \alpha_2^2 \beta_2 \frac{A_1}{C_1} a_1
\end{aligned} \quad (15)$$

式(14)から対称振動における固有振動数が、式(15)から規準振動形が計算できる。

II 逆対称振動

main span における逆対称振動波形を

$$\eta = a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (16)$$

とおけば、ケーブル張力に変化がないと云う仮定から

$$T - V = \frac{W}{2g} \omega^2 \int_0^\ell \eta^2 dx - \frac{EI}{2} \int_0^\ell \eta''^2 dx - \frac{H_1}{2} \int_0^\ell \eta'^2 dx \quad (17)$$

(16)式を(17)式に代入すれば

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell} \left\{ \frac{g}{W} \left(EI \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + H_1 \right) \right\}^{1/2} \quad (18)$$

式(18)から各次数に対応する固有振動数が求まる。

side span 及び end span における逆対称振動も振動モードを

$$\begin{aligned}
\eta &= b_n \sin \frac{n\pi}{\ell_1} x \quad (\text{for side span}) \\
\eta &= c_n \sin \frac{n\pi}{\ell_2} x \quad (\text{for end span})
\end{aligned} \quad (19)$$

とおけば main span と同様に

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell_1} \left\{ \frac{g}{w_1} \left(EI_1 \left(\frac{n\pi}{\ell_1} \right)^2 + H_w \right) \right\}^{1/2} \text{ (for side span)}$$

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell_2} \left\{ \frac{g}{w_2} \left(EI_2 \left(\frac{n\pi}{\ell_2} \right)^2 + H_w \right) \right\}^{1/2} \text{ (for end span)}$$

2-3 捩り振動の固有振動数の計算

捩り振動の固有振動数の計算にあたっては撓み振動の場合と同様の仮定が成立するものとする。

単径間吊橋の運動エネルギー及びひずみエネルギーは次式であらわされる。

$$T = \frac{\mathfrak{M}}{2} \omega^2 \int_0^{\ell} \varphi^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ EC_w \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx + \left(GK + \frac{H_w b^2}{4} \right) \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx + \frac{4f bh}{\ell^2} \int_0^{\ell} \varphi dx \right\}$$

$$\text{ここに } h = \frac{E_c A_c}{L_s} - \frac{8f}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{b}{2} \varphi dx$$

この式を5径間吊橋の場合に拡張すると

$$T = \frac{\mathfrak{M}}{2} \omega^2 \int_0^{\ell} \varphi^2 dx + \frac{2\mathfrak{M}}{2} \omega^2 \int_0^{\ell_1} \varphi^2 dx + \frac{2\mathfrak{M}}{2} \omega^2 \int_0^{\ell_2} \varphi^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ EC_w \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx + \left(GK + \frac{H_w b^2}{4} \right) \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx + \frac{45bh}{\ell_1^2} \int_0^{\ell} \varphi dx \right\}$$

$$+ \left\{ EC_{w1} \int_0^{\ell_1} \varphi'^2 dx + \left(GK_1 + \frac{H_{w1} b^2}{4} \right) \int_0^{\ell_1} \varphi'^2 dx + \frac{4f_1 bh}{\ell_1^2} \int_0^{\ell_1} \varphi dx \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$+ \left\{ EC_{w2} \int_0^{\ell_2} \varphi'^2 dx + \left(GK_2 + \frac{H_{w2} b^2}{4} \right) \int_0^{\ell_2} \varphi'^2 dx + \frac{4f_2 bh}{\ell_2^2} \int_0^{\ell_2} \varphi dx \right\}$$

$$\text{ここに } h = \frac{E_c A_c}{L_s} \left\{ \frac{8f}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{b}{2} \varphi dx + 2 \frac{8f_1}{\ell_1^2} \int_0^{\ell_1} \frac{b}{2} \varphi dx + 2 \frac{8f_2}{\ell_2^2} \int_0^{\ell_2} \frac{b}{2} \varphi dx \right\}$$

撓み振動の場合と同様に対称振動と逆対称振動を別けて計算するものとする。

1 対称振動

補剛桁及びケーブルの振動変位を次のように仮定する。

中央径間に対して

$$\varphi = a_1 \sin \frac{\pi}{\ell} x + a_3 \sin \frac{3\pi}{\ell} x \dots\dots\dots (22.1)$$

側径間に対して

$$\varphi = b_1 \sin \frac{\pi}{\ell_1} x + b_3 \sin \frac{3\pi}{\ell_1} x \dots\dots\dots (22.2)$$

端径間に対して

$$\varphi = c_1 \sin \frac{\pi}{\ell_2} x \quad \dots\dots\dots (22.3)$$

式(22)を(21)に代入すると

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{\ell}{2} \omega^2 (a_1^2 + a_3^2) + 2 \frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{\ell_1}{2} \omega^2 (b_1^2 + b_2^2) + 2 \frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{\ell_2}{2} \omega^2 c_1^2 \\ V &= \frac{\pi^4}{\ell^4} \left[EC \frac{\ell}{2} (a_1^2 + 81a_3^2) + 2EC \frac{\ell_1}{2} (b_1^2 + 81b_2^2) + 2EC \frac{\ell_2}{2} c_1^2 \right] \\ &+ \frac{\pi^2}{\ell^2} \left[\left(GK + \frac{H_* b^2}{4} \right) \frac{\ell}{2} (a_1^2 + 9a_3^2) + 2 \left(GK_1 + \frac{H_* b^2}{4} \right) \frac{\ell_1}{2} (b_1^2 + 9b_2^2) \right. \\ &+ 2 \left(GK_2 + \frac{H_* b^2}{4} \right) \frac{\ell_2}{2} c_1^2 \left. \right] + \frac{2\ell}{\pi} \left[\frac{4fb}{\ell^2} h \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) + 2 \frac{4f_1 b}{\ell_1^2} h \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) \right. \\ &+ 2 \frac{4f_2 b}{\ell_2^2} h c_1 \left. \right] \\ h &= \frac{EcAc}{L_E} \frac{b}{2} \left[\frac{16f}{\pi \ell} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) + 2 \frac{16f_1}{\pi \ell_1} \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2 \frac{16f_2}{\pi \ell_2} c_1 \right] \end{aligned} \quad \dots (23)$$

T-Vが極値をとるための条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial (T-V)}{\partial a_i} &= 0 \quad i = 1, 3 \\ \frac{\partial (T-V)}{\partial b_i} &= 0 \quad i = 1, 3 \quad \dots\dots\dots (24) \\ \frac{\partial (T-V)}{\partial c_i} &= 0 \quad i = 1 \end{aligned}$$

であるから、この6ヶの条件式から次の振動数方程式が求まる。

$$\begin{aligned} (s\omega^2 - A - R)a_1 - K \left\{ a_1 + \frac{a_3}{3} + 2\alpha_1 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2\alpha_2 c_1 \right\} &= 0 \\ (s\omega^2 - 81A - 9R)a_3 - \frac{K}{3} \left\{ a_1 + \frac{a_3}{3} + 2\alpha_1 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2\alpha_2 c_1 \right\} &= 0 \\ \left(\alpha_1 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_1^3} - \frac{R}{\alpha_1} \right) b_1 - \alpha_1 K \left\{ a_1 + \frac{a_3}{3} + 2\alpha_1 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2\alpha_2 c_1 \right\} &= 0 \quad \dots\dots\dots (25) \\ \left(\alpha_1 s\omega^2 - \frac{81A}{\alpha_1^3} - \frac{9R}{\alpha_1} \right) b_3 - \frac{\alpha_1 K}{3} \left\{ a_1 + \frac{a_3}{3} + 2\alpha_1 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2\alpha_2 c_1 \right\} &= 0 \\ \left(\alpha_2 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_2^3} - \frac{R}{\alpha_2} \right) c_1 - \alpha_2 K \left\{ a_1 + \frac{a_3}{3} + 2\alpha_1 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) + 2\alpha_2 c_1 \right\} &= 0 \end{aligned}$$

ここに

$$K = \frac{EcAc}{L_E} \frac{64f^2 b^2}{\pi^2 \ell^2}$$

$$R = \left(E\beta bd + \frac{H_* b^2}{4} \right) \frac{\pi^2}{2\ell}$$

$$A = EY \frac{\pi^4}{2\ell^3}$$

$$s = \frac{\mathfrak{M} \ell}{4}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{g} \left(r_s^2 w_s + \frac{b^2}{4} w_c \right)$$

$$\varphi = I_v \varepsilon_v^2 + I_h \varepsilon_h^2$$

$$\varepsilon_v = \frac{b}{2} - \frac{\mu_v}{A_v} \beta d$$

$$\varepsilon_h = \frac{d}{2} - \frac{\mu_h}{A_h} \beta b$$

$$\beta = \frac{bd}{\frac{\mu_v d^2}{A_v} + \frac{\mu_h b^2}{A_h}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\ell_1}{\ell} \quad \alpha_2 = \frac{\ell_2}{\ell}$$

$$\mu_v = \frac{1}{\sin^2 r \cdot \cos r}$$

$$\mu_h = \frac{1}{2 \sin^2 r \cdot \cos r}$$

$s\omega^2 - A - R - K, \quad \frac{K}{3},$	$2\alpha_1 K,$	$\frac{2}{3}\alpha_1 K,$	$2\alpha_2 K,$	
$\frac{K}{3},$	$s\omega^2 - 81A - 9R - \frac{K}{9}, \quad \frac{2}{3}\alpha_1 K,$	$\frac{2}{9}\alpha_1 K,$	$\frac{2}{3}\alpha_2 K,$	
$\alpha_1 K,$	$\frac{\alpha_1}{3} K,$	$\alpha_1 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_1^3} - \frac{R}{\alpha_1} - 2\alpha_1^2 K, \quad \frac{2}{3}\alpha_1^2 K,$	$2\alpha_1 \alpha_2 K,$	$= 0$
$\frac{1}{3}\alpha_1 K,$	$\frac{1}{9}\alpha_1 K,$	$\frac{2}{3}\alpha_1^2 K,$	$\alpha_1 s\omega^2 - \frac{81A}{\alpha_1^3} - \frac{9R}{\alpha_1} - \frac{2}{9}\alpha_1^2 K, \quad \frac{2}{3}\alpha_1 \alpha_2 K,$	(26)
$\alpha_2 K,$	$\frac{1}{3}\alpha_2 K,$	$2\alpha_1 \alpha_2 K,$	$\frac{2}{3}\alpha_1 \alpha_2 K,$	$\alpha_2 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_2^3} - \frac{R}{\alpha_2} - 2\alpha_2^2 K$

またパラメータ $a_1, \dots, c_1$ の間には次の関係式が成立する。

$$a_3 = \frac{A}{3B} a_1 \quad b_1 = \alpha_1 \frac{A}{C} a_1 \quad b_3 = \alpha_1 \frac{A}{3D} a_1 \quad c_1 = \alpha_2 \frac{A}{E} \dots\dots\dots (27)$$

ここに

$$A = s\omega^2 - A - R \quad B = s\omega^2 - 81A - 9R \quad C = \alpha_1 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_1^3} - \frac{R}{\alpha_1}$$

$$D = \alpha_1 s\omega^2 - \frac{81A}{\alpha_1^3} - \frac{9R}{\alpha_1} \quad E = \alpha_2 s\omega^2 - \frac{A}{\alpha_2^3} - \frac{R}{\alpha_2}$$

式(26), (27)から, それぞれ対称振動における固有振動数及び規準振動形が計算できる。

ii 逆対称振動

main span における逆対称振動

$$\eta = a_n \sin^2 \frac{2n\pi}{\ell} x \quad (n = 1, 2, \dots\dots) \dots\dots\dots (28)$$

とおけばケーブル張力に変化がないと云う仮定から

$$T - V = \frac{\mathfrak{M}}{2} \omega^2 \int_0^{\ell} \varphi^2 dx - \frac{EC_v}{2} \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx - \frac{1}{2} \left(GK + \frac{H_v b^2}{4} \right) \int_0^{\ell} \varphi'^2 dx \dots\dots\dots (29)$$

式(28)と(29)から

$$\omega = \sqrt{\frac{(2n)^2}{s} \{ (2n)^2 A + R \}} \quad (n = 1, 2, \dots\dots)$$

側径間, 端径間についても同様に計算できるが, ここでは省略する。

2-4 数 値 計 算

上で求めた理論式によって5径間吊橋の固有振動数及び振動モードを図-2に示す。

なお、計算に使用した振動解析のプログラムを巻末に記す。

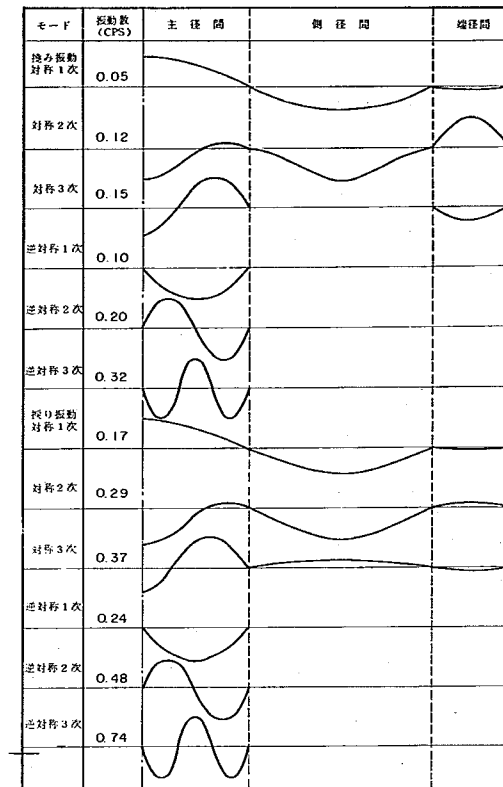


図-2 五径間吊橋 (L=1500)
の固有振動数及振動モード

§ 3. 模 型 実 験

3-1 ま え が き

構造物の振動特性を調べるには実物について振動実験を行なうのが一番確実な方法であるが、土木構造物は一般に規模が大きく実物試験は非常に不経済であり、特に計画中の構造物については実物大の試験は不可能であり、従ってこのような構造物の振動特性、特に固有振動数と振動波形については縮尺模型を使って実験的に確かめるのが最も経済的かつ確実な方法とされている。そこで前章で導いた理論式の正確さの確認を振動模型実験の結果と対比してみた。模型実験はもちろん振動特性を明らかにする目的でつくられたものであるが、一応模型の剛性の検定もかねて静的な載荷実験も行なったので、これもあわせて以下に報告する。

3-2 相似則と模型

3-2-1 概 要

模型実験に用いる模型はその挙動を測定することによって原型の性状をある精度内で測定できるように設計しなければならない。この場合、模型の寸法と形状は原型のそれによって決定されるが、この関係を示すのが相似則である。本調査の主目的が吊橋の動特性を明らかにすることから模型は原型と振動波形が相似になるように設計した。幸いにして吊橋の振動方程式（ここでは文献(2)の式を採用した）はすでに求められているから模型の振動方程式が原型のそれと相似になるように模型の断面諸元を定めればよいことになる。従って吊橋の振動方程式を無次元化してその無次元方程式の係数が原型と等しくなるよう模型を設計した。

3-3-2 記 号

文中に用いた記号を以下に記す。

記 号	単 位
ℓ : 代 表 長	m
f : 垂 距	m
h : 吊材の長さ	m
b : 主 構 間 隔	m
η : 吊構造部の鉛直変位	m
ξ_r, ξ_ℓ : ケーブルの鉛直変位 (r, ℓ は右ケーブル, 左ケーブルの意)	m
ξ_r, ξ_ℓ : ケーブルの水平変位 (r, ℓ は右ケーブル, 左ケーブルの意)	m
φ : 吊構造部の捩れ角	rad
A : 補剛トラス弦材の断面積	$m^2/chord$
A_c : ケーブルの断面積	$m^2/cable$

A_r :	吊構造部の換算断面積	m^2/bridge
A_b :	吊材の断面積	$m^2/\text{panel}/\text{cable}$
I :	補剛トラスの断面2次モーメント	m^4/cable
I_p :	補剛トラスの断面極2次モーメント	m^4/bridge
I_r :	吊構造部の換算断面極2次モーメント	m^4/bridge
E, E_r, E_b :	補剛トラス, ケーブル, 吊材の弾性係数	t/m^2
W_r :	吊構造部の重量	$\text{ton}/m/\text{bridge}$
W_c :	ケーブルの重量	$\text{ton}/m/\text{cable}$
H_w :	ケーブルの死荷重による張力の水平成分	ton/cable
P_0 :	吊材の初期張力	ton/hanger
g :	重力の加速度	m/sec^2

3-2-3 無次元振動方程式

吊橋の振動方程式で与えられる。この式の誘導は文献(2)に詳しいのでここでは省略する。なお、我々が吊橋の空力安定性に関連して問題にするのは主として吊橋の鉛直振動と捩れ振動なので、ここでは捩れと鉛直振動について振動方程式を相似させるものとする。

$$\begin{aligned} \frac{W_r}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + E_b A_b \frac{2\eta - \xi_r - \xi_1}{h} &= 0 \\ \frac{W_r}{g} \frac{I_p}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + E_b A_b \frac{b^2 \varphi}{2h} + E_b A_b \frac{b}{2h} (\xi_r - \xi_1) &= 0 \\ \frac{W_c}{g} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right) \right\} - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \xi_r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right\} - E_b A_b \frac{\eta - \frac{b}{2} \varphi - \xi_r}{h} &= 0 \\ \frac{W_c}{g} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) \right\} - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right\} - E_b A_b \frac{\eta + \frac{b}{2} \varphi - \xi_1}{h} &= 0 \\ \frac{W_c}{g} \frac{\partial^2 \zeta_r}{\partial t^2} - E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \zeta_r}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right\} - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta_r}{\partial x} \right) \right\} + \frac{P_0}{h} \zeta_r &= 0 \\ \frac{W_c}{g} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} - E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right\} - H_w \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) \right\} + \frac{P_0}{h} \zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

上式を無次元化するために次のような無次元量を考える。

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{\ell}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\ell}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\ell}, \quad \bar{\xi}_r = \frac{\xi_r}{\ell}, \quad \bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{\ell}, \quad \bar{\zeta}_r = \frac{\zeta_r}{\ell}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{\zeta_1}{\ell}, \quad \alpha = \frac{A}{\ell^2}, \quad \alpha_c = \frac{A_c}{\ell^2}, \quad \alpha_r = \frac{A_r}{\ell^2}, \\ \alpha_b &= \frac{A_b}{\ell^2}, \quad \beta = \frac{I}{\ell^4}, \quad \beta_p = \frac{I_p}{\ell^4}, \quad \beta_r = \frac{I_r}{\ell^4}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\ell}, \quad \tau = \frac{ct}{\ell}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad r_c c^2 = \frac{E_c}{\rho}, \\ r_r c^2 &= \frac{G}{\rho}, \quad r_b c^2 = \frac{E_b}{\rho}, \quad k = \frac{g \cdot \ell}{c^2} \end{aligned}$$

上位の無次元量を用いて無次元化した式は以下の通りである。

$$\alpha_c \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{r_b \alpha_b}{\bar{h}} (2\bar{\eta} - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) = 0$$

$$\beta_c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - r_c \beta_c \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \bar{x}^4} + r_b \alpha_b \frac{\bar{b}}{\bar{h}} \varphi + r_b \alpha_b \frac{\bar{b}}{\bar{h}} (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) = 0$$

$$\alpha_c \frac{\partial^2 \bar{\xi}_1}{\partial \tau^2} + r_c \alpha_c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} \right) \right\} - \frac{k(\alpha + 2\alpha_c)}{8\bar{f}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} \right\}$$

$$- r_b \alpha_b \frac{\bar{\eta} - \frac{\bar{d}}{2} \varphi - \bar{\xi}_1}{\bar{h}} = 0$$

$$\alpha_c \frac{\partial^2 \bar{\xi}_2}{\partial \tau^2} + r_c \alpha_c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} \right) \right\} - \frac{k(\alpha + 2\alpha_c)}{8\bar{f}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} \right\}$$

$$- r_b \alpha_b \frac{\bar{\eta} + \frac{\bar{b}}{2} \varphi - \bar{\xi}_1}{\bar{h}} = 0$$

$$\alpha_c \frac{\partial^2 \bar{\xi}_1}{\partial \tau^2} - r_c \alpha_c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} \right\} - \frac{k(\alpha + 2\alpha_c)}{8\bar{f}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \bar{x}} \right\} + k\alpha \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{h}} = 0$$

$$\alpha_c \frac{\partial^2 \bar{\xi}_2}{\partial \tau^2} - r_c \alpha_c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} \right\} - \frac{k(\alpha + 2\alpha_c)}{8\bar{f}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \bar{x}} \right\} + k\alpha \frac{\bar{\xi}_2}{\bar{h}} = 0$$

3-2-4 相似関係

上記微分方程式の係数が模型と原型で等しいことから模型の寸法、形状等は直ちに定まるが、実際に我々が模型を設計する場合に入手しうる材料の規格及び物理定数がこの関係を完全に満たすことはほとんど不可能である。

例えばケーブルとして用いるピアノ線は市販の寸法で規定されるし、その他各材料の弾性係数もそれぞれ固有のものであって任意のものを選ぶことができない。そこでこのような材料の制約により導入される定数 m (slicing factor という) を導入すれば模型の縮尺を n として模型と原型は次の関係を満足しなければならない。

径 間 長 $\ell_p / \ell_m = n$

主 桁 間 隔 $b_p / b_m = n$

ケーブルの鉛直撓み $\xi_p / \xi_m = n$

補剛桁の撓れ角 $\varphi_p / \varphi_m = 1$

ケーブルの断面積 $A_{cp} / A_{cm} = n^2 m \frac{E_{cm}}{E_{cp}}$

補剛桁の断面 2 次モーメント $I_p / I_m = n^4 m \frac{E_m}{E_p}$

重力の加速度 $g_p / g_m = 1$

時 間 $T_p / T_m = \sqrt{n}$

垂 距 $f_p / f_m = n$

補剛桁の鉛直撓み $\eta_p / \eta_m = n$

ケーブルの水平変位 $\zeta_p / \zeta_m = n$

補剛桁の断面積 $A_p / A_m = n^2 m \frac{E_m}{E_p}$

$$\begin{array}{ll} \text{吊材の断面積} & A_{hp}/A_{hm} = n^2 m \frac{E_{hm}}{E_{hp}} \quad \text{質 量} \quad \rho_p/\rho_m = 1 \\ \text{補剛桁の回転 2 次} & I_{pp}/I_{pm} = n^4 m \frac{E_m}{E_p} \\ \text{モーメント} & \end{array}$$

ここに添字 p は原型, m は模型の意味である。

以上は吊構造部及びケーブルに関する相似関係であり主塔については別の考え方をした。耐風安定性の面からは吊橋の振動は比較的 low 次のもので問題になり、このような場合、主塔に 2 次以上の振動波形が現われることは考えられないので主塔は鉛直振動及び捩れ振動に対しても質量のないバネでおきかえて考えた。この考え方の妥当性については多少問題もあろうが大きな誤差の因になるものではないと考えて採用した。この考え方を採用すれば主塔のバネ定数だけを原型のそれと相似させればよく質量分布等を考慮する必要がないから原型のような変断面の塔柱をそのまま模型化する必要はないので、B. Birdsall の考え方により変断面塔柱を等断面塔柱におきかえ模型化した。

換算断面 2 次モーメントの求め方は文献⁽³⁾に詳しいが左図のような変断面塔項の換算断面 2 次モーメント IT_r は

$$IT_r = \frac{1}{\sum_0^h \frac{x_a^3 - x_{a-1}^3}{I_a}}$$

この換算断面 2 次モーメントを用いた力に対する変形の比を等しくするように模型化した場合は以下のことを要求される。

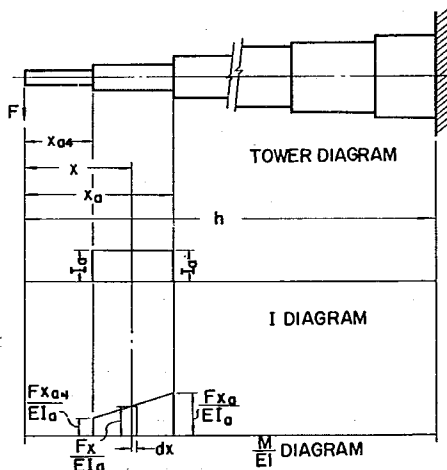
$$(EIT_r)_p / (EIT_r)_m = n^4 \cdot m$$

3 径間吊橋の捩れ振動を考える場合、主塔の捩れ剛性は無視できない量ではあるが捩れ剛性、曲げ剛性を両方満足する模型を設計することは非常に難しいし、又主塔の捩れ剛性を正確に算出する

ことに問題があるため主塔の模型化に際しては曲げ剛性のみを相似させた。

3-2-5 模型の断面諸元

模型は本州・四国連絡橋 5 径間吊橋概略設計案を原型として設計した。原型の断面諸元、模型に要求される理論値、及び実際に模型に採用した値を表-1 に示す。但し slicing factor m は模型の主ケーブルに直径 1.8 mm のピアノ線を採用したことから 3.019 と決めた。



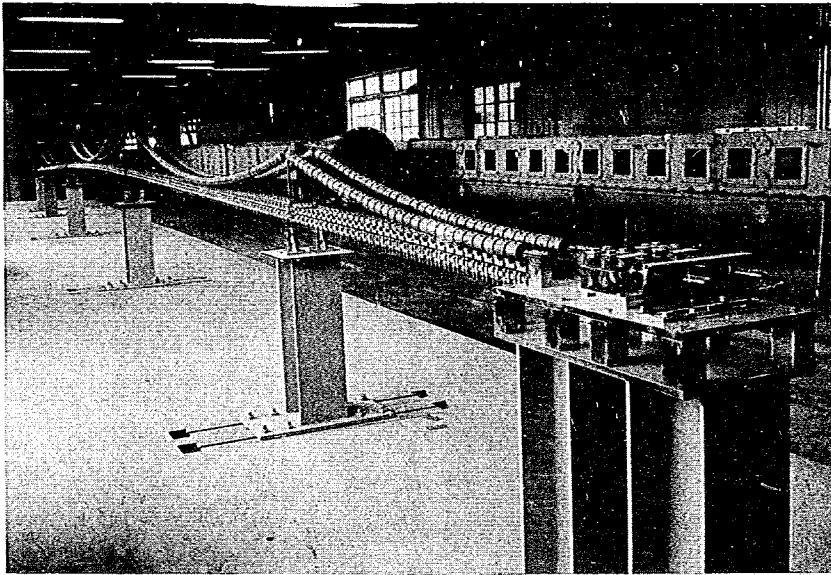
変断面主塔

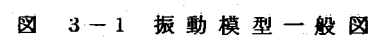
表 - 1 模 型 の 断 面 諸 元

	試 算 設 計	模 型 の 理 論 値	模 型 の 採 用 値
主 径 間 長	1,500 m	500 cm	500 cm
側 径 間 長	1,250 m	416.7 cm	416.7 cm
端 径 間 長	500 m	166.7 cm	166.7 cm
主 径 間 垂 距	136,364 m	45.5 cm	45.5 cm
側 径 間 垂 距	94,697 m	31.6 cm	31.6 cm
端 径 間 垂 距	15,152 m	5.1 cm	5.1 cm
補剛桁断面2次モーメント(鉛直) 主径間	4.613 m ⁴ /bridge	0.0189 cm ⁴ /bridge	0.0221 cm ⁴ /bridge
" 側径間	5.190 m ⁴ /bridge	0.0212 cm ⁴ /bridge	0.0245 cm ⁴ /bridge
" 端径間	5.766 m ⁴ /bridge	0.0236 cm ⁴ /bridge	0.0267 cm ⁴ /bridge
補剛桁断面2次モーメント(水平) 主径間	46.656 m ⁴ /bridge	0.1908 cm ⁴ /bridge	0.2023 cm ⁴ /bridge
" 側径間	41.472 m ⁴ /bridge	0.1696 cm ⁴ /bridge	0.1729 cm ⁴ /bridge
" 端径間	38.880 m ⁴ /bridge	0.1590 cm ⁴ /bridge	0.1636 cm ⁴ /bridge
ケーブル断面積	1.3828 m ² /bridge	0.05 cm ² /bridge	0.05 cm ² /bridge
ケーブル死荷重	12.368 t/m/bridge	137 g/cm/bridge	137 g/cm/bridge
補剛桁死荷重	19.492 t/m/bridge	215 g/cm/bridge	215 g/cm/bridge
ハンガー断面積	4988 mm ² /cable/1ヶ所	0.0122 mm ² /cable/1ヶ所	0.0314 mm ² /cable/1ヶ所
補剛桁の回転2次モーメント	6286 tm ² /m/bridge	7.714 Kg·cm/cm/bridge	7.714 Kg·cm/cm/bridge
主 塔 塔 高	211.76 m	706 mm	706 mm
副 塔 塔 高	89.37 m	298 mm	298 mm
主塔断面2次モーメント(塔頂橋軸)	14.642 m ⁴ /shaft	0.2068 cm ⁴ /shaft	0.2058 cm ⁴ /shaft
" (塔底橋軸)	83.342 m ⁴ /shaft		
副塔断面2次モーメント(塔頂橋軸)	7.588 m ⁴ /shaft	0.0817 cm ⁴ /shaft	0.0817 cm ⁴ /shaft
" (塔底橋軸)	41.011 m ⁴ /shaft		
補剛桁の弾性係数	2.1×10 ⁶ Kg/cm ²	2.1×10 ⁶ Kg/cm ²	2.1×10 ⁶ Kg/cm ²
ケーブルの弾性係数	2.0×10 ⁶ Kg/cm ²	2.0×10 ⁶ Kg/cm ²	2.0×10 ⁶ Kg/cm ²
ハンガーの弾性係数	1.4×10 ⁶ Kg/cm ²	2.0×10 ⁶ Kg/cm ²	2.0×10 ⁶ Kg/cm ²

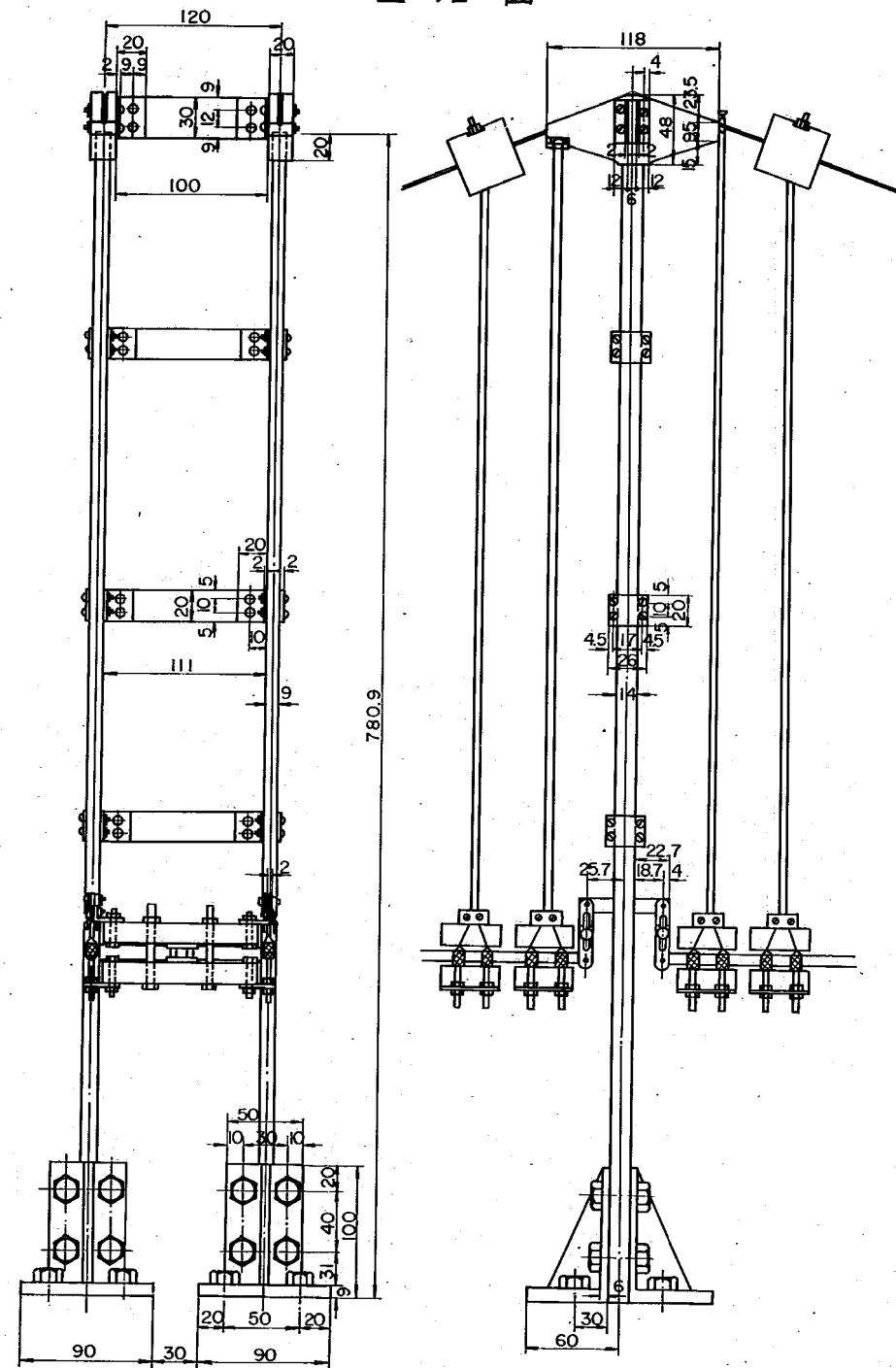
3-2-6 模 型

模型の形状を図3-1～3-5に示す(写真-1)。使用材料は応力部材にSS41, 附加重錘には真鍮を使用した。主塔は振り剛性に関する相似及び質量に関する相似は無視して橋軸方向の曲げ剛性だけを相似させた。しかし補剛桁については鉛直曲げ, 水平曲げ及び振り剛性に関して実橋と相似条件が満足するように断面を選んである。





主塔図



副塔図

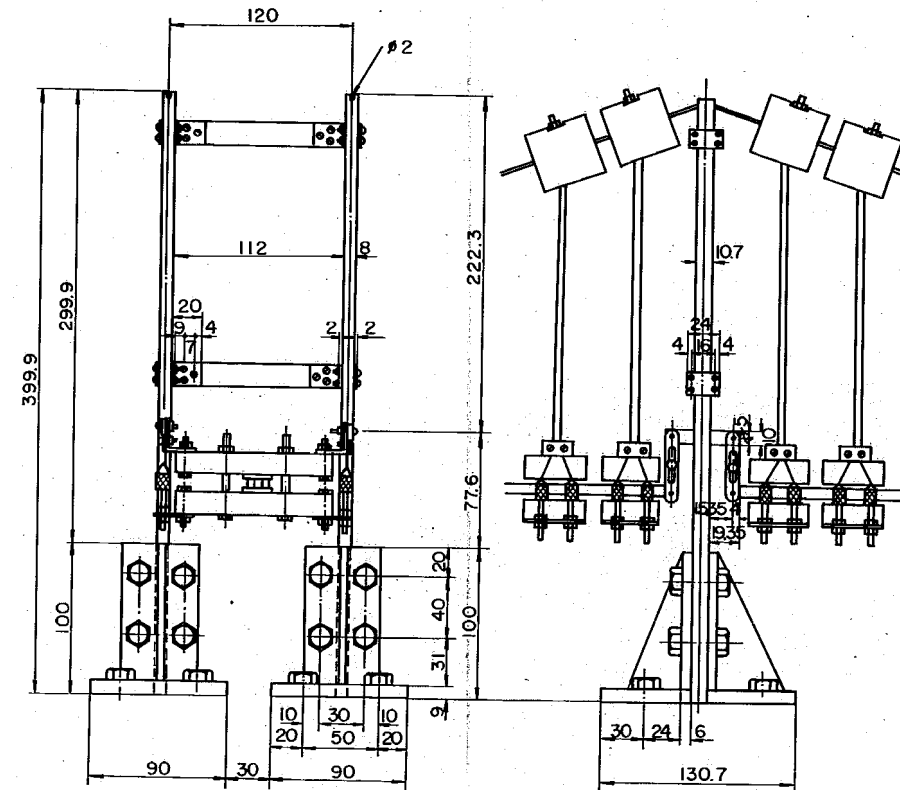
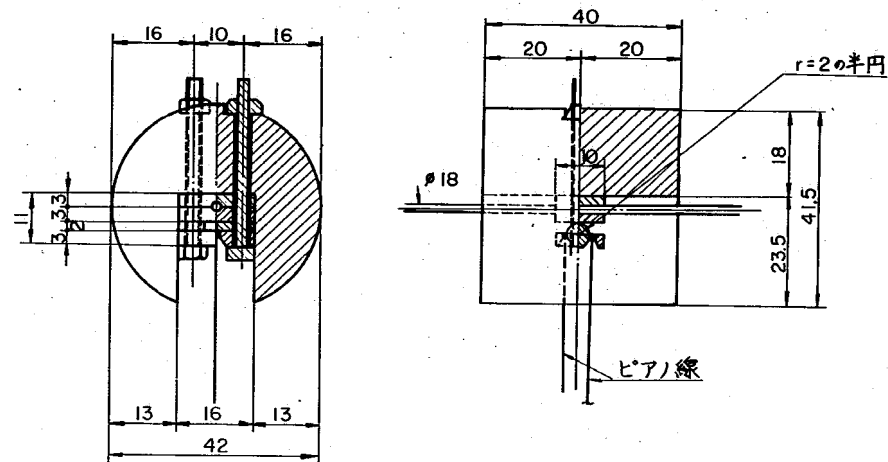
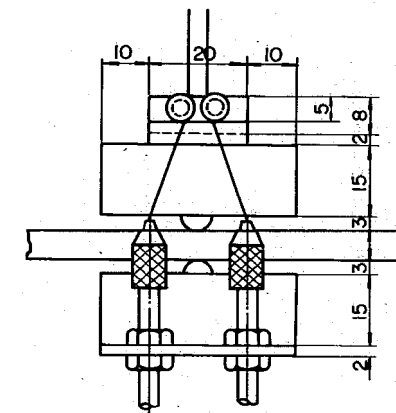
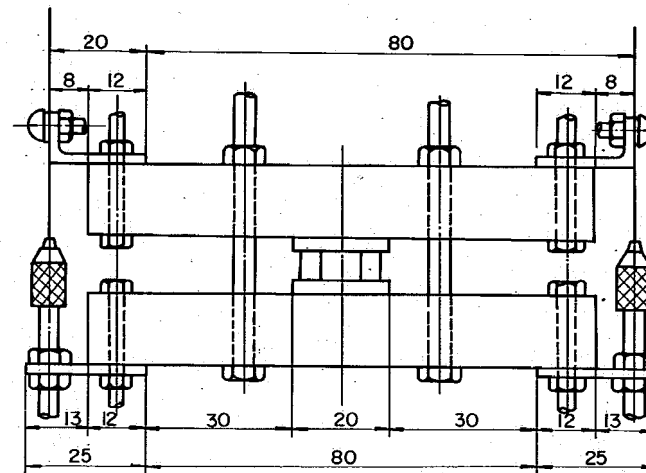


図 3-2 主塔及び副塔

ケーブル重錘断面図



補剛桁重錘



ケーブルと補剛桁

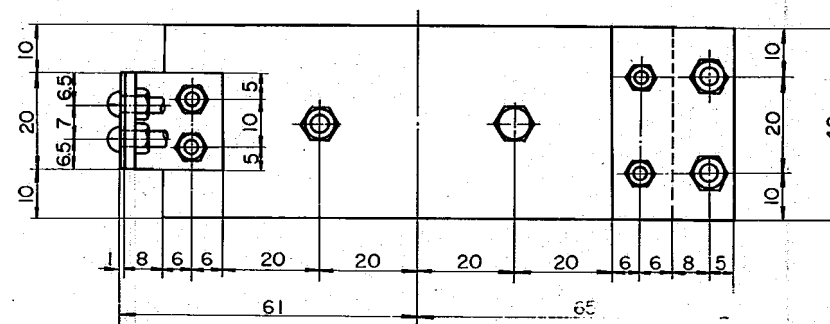
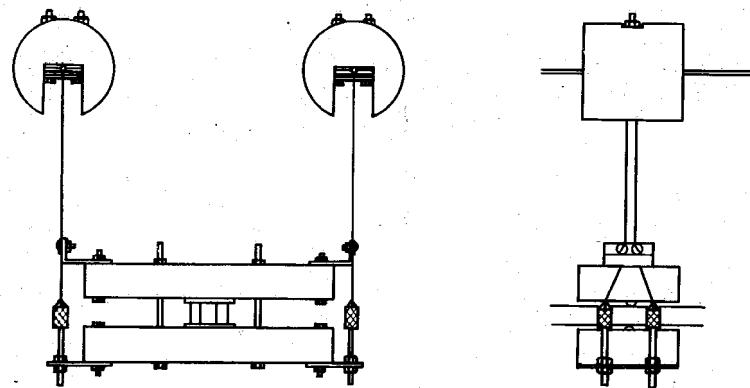


図 3-3 アンカー

アンカーと補剛桁

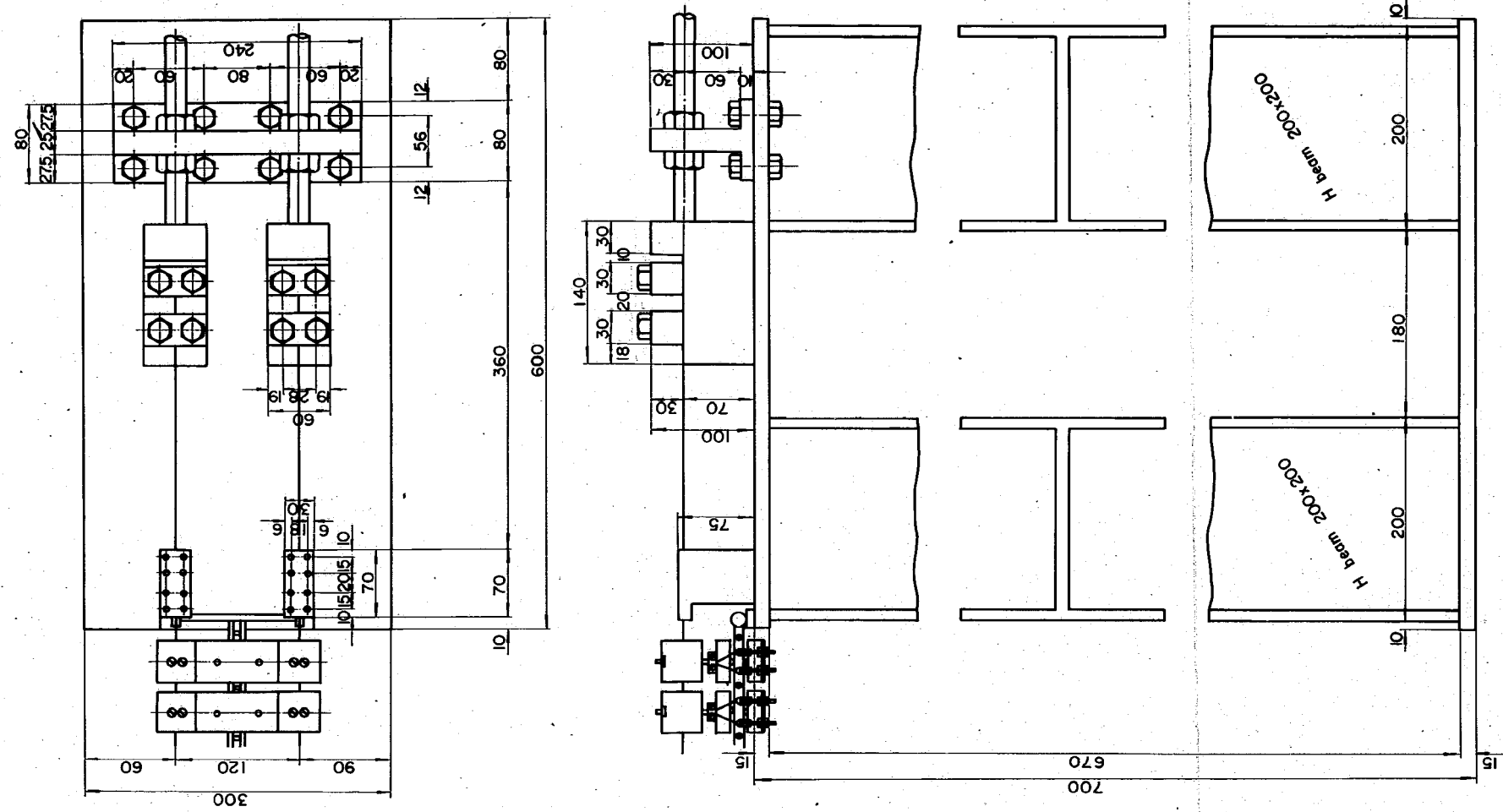
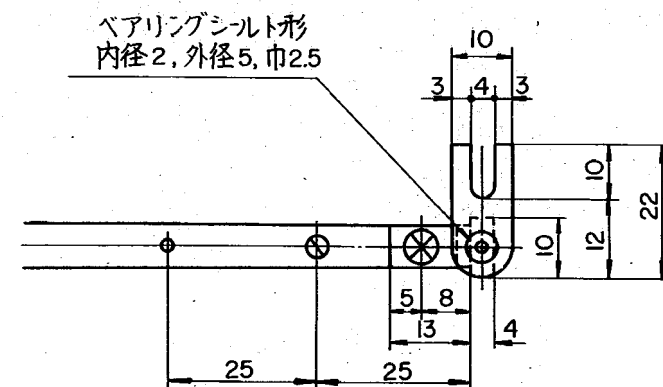
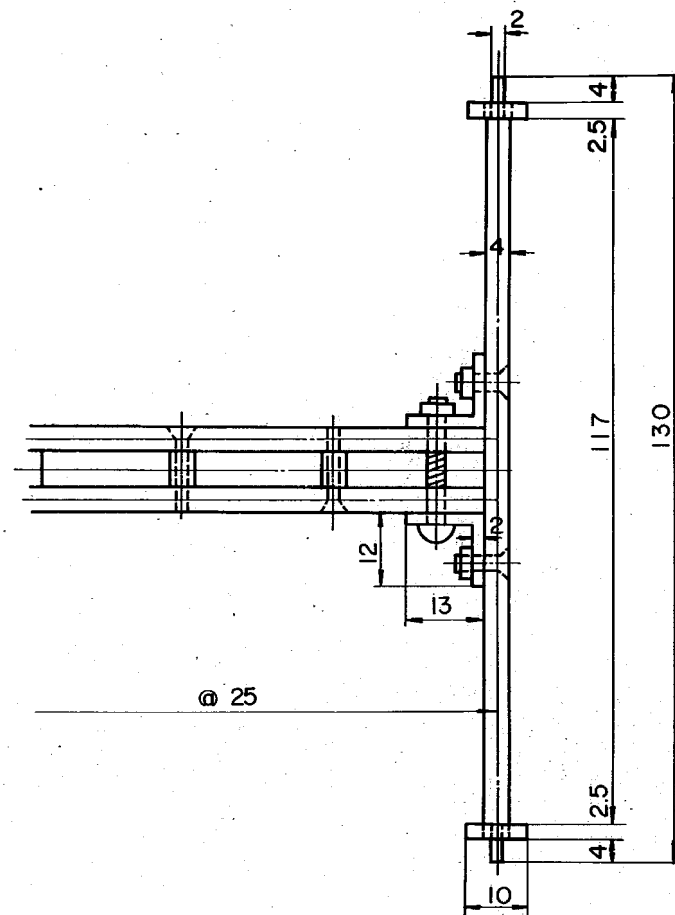
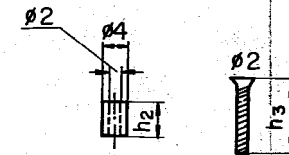
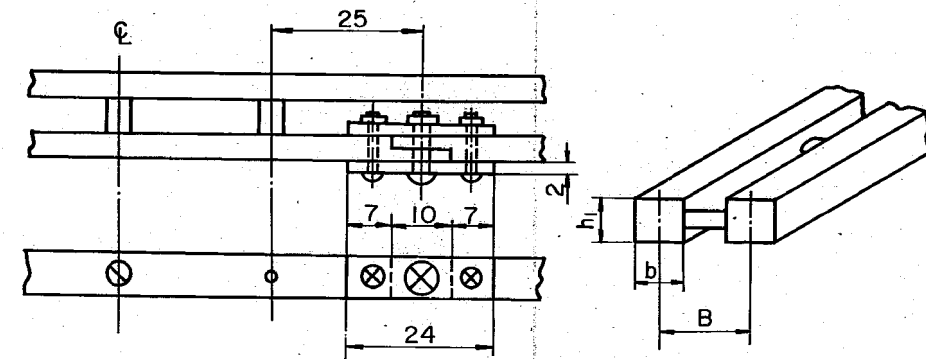


図 3-4 補剛桁

補剛桁



継手



	径間長 (mm)	h_1	b	B	h_2	h_3	数量
中央径間	5 000	6.3	4.4	11.45	7.05	13.65	1組
側径間	4 167	6.7	4.2	10.7	6.5	12.8	2組
端径間	1 667	7.0	4.1	10.3	6.2	12.4	2組

図 3-5 附加重錘

3-3 実験方法

3-3-1 静的荷重試験

静的荷重試験は図-4に示すようにCaseの荷重状態について重錘によって荷重し、そのときの補剛桁の撓み、塔頂の変位、補剛桁の曲げモーメントを測定した。なお補剛桁の撓みは差動トランスとレベルで、塔頂の変位は差動トランスで、また補剛桁の曲げモーメントは電気抵抗線歪計で測定した。

3-3-2 動的試験

動的試験は補剛桁に電磁型の加振器をとりつけて強制加振し、吊橋の応答を差動トランスでとらえて振動性状を調べた。なお加振器は模型との相互干渉を防ぐために弱いバネを介してとりつけた。

実験は加振器の加振周波数を漸変させて模型の応答からまず模型の固有振動数をもとめ、各々の固有振動数が明らかになったところで固有振動数で励振して振動モードを側定した。

静荷重実験の荷重条件

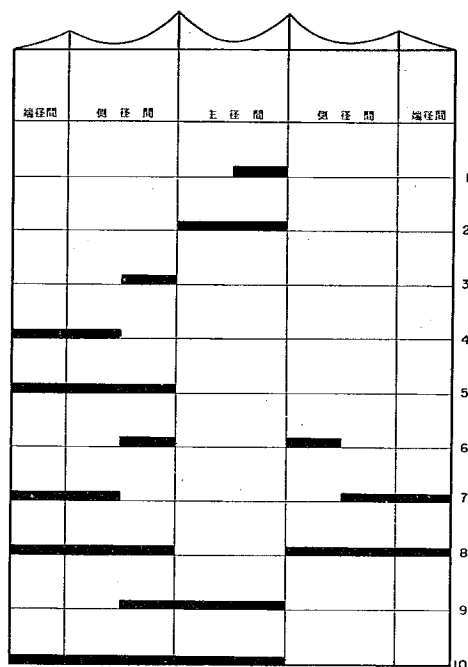


図-4 静的荷重試験の荷重条件

3-4 実験結果

3-4-1 静的荷重試験結果

静的荷重試験の結果を図5-1~5-10に示す。実験に用いた荷重々重としては実橋相当で 8.016 t/m/bridge の分銅を 5 cm 毎に吊り下げた。なお図中にある理論値は stainman の式を5径間吊橋に拡張したものがすでにプログラムされていたのでこの結果を模型に換算したものである。この実験値は2, 3の場合をのぞいてよく理論値と一致している。実験値は計算値に較べ値が多少小さい。これは stainman の式で主塔の剛性と考慮していないためと思われる。このことは主塔の剛性を考慮した福田の式と stainman の式の計算結果でも対比が可能で両者の計算結果は福田の式からの計算結果は主塔の剛性によって多少異なるが stainman の式の値より5~10%の主径間の撓みが少ない(測径間については撓みの計算値がない)。このような点からみて模型はかなり正確に実橋を相似しているものと思われる。

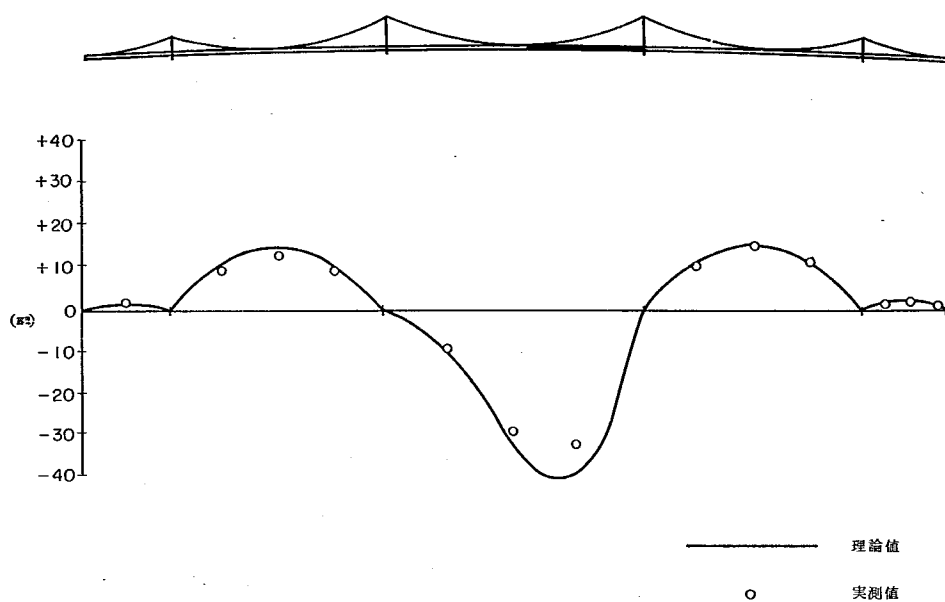


图 5 - 1 静的载荷试验结果

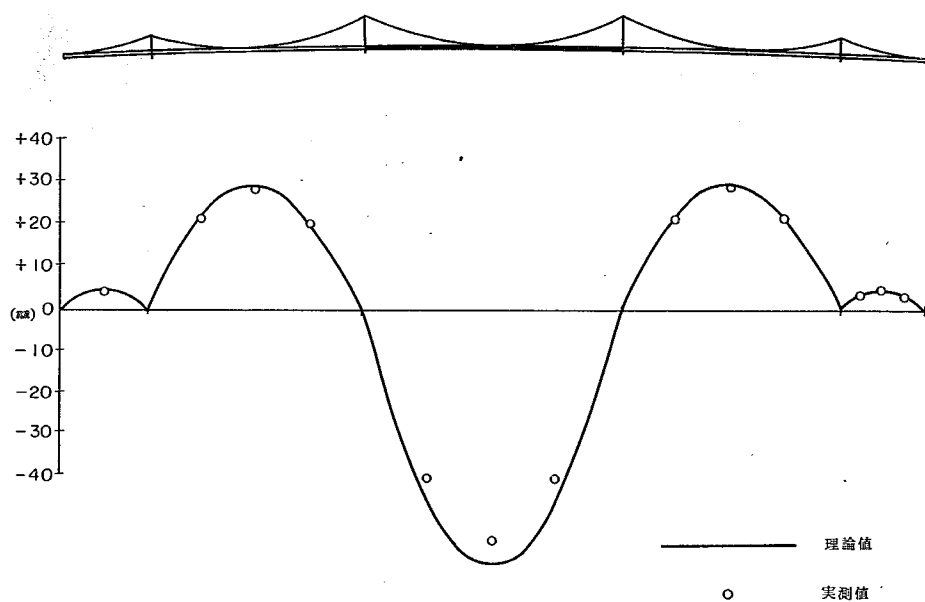


图 5 - 2

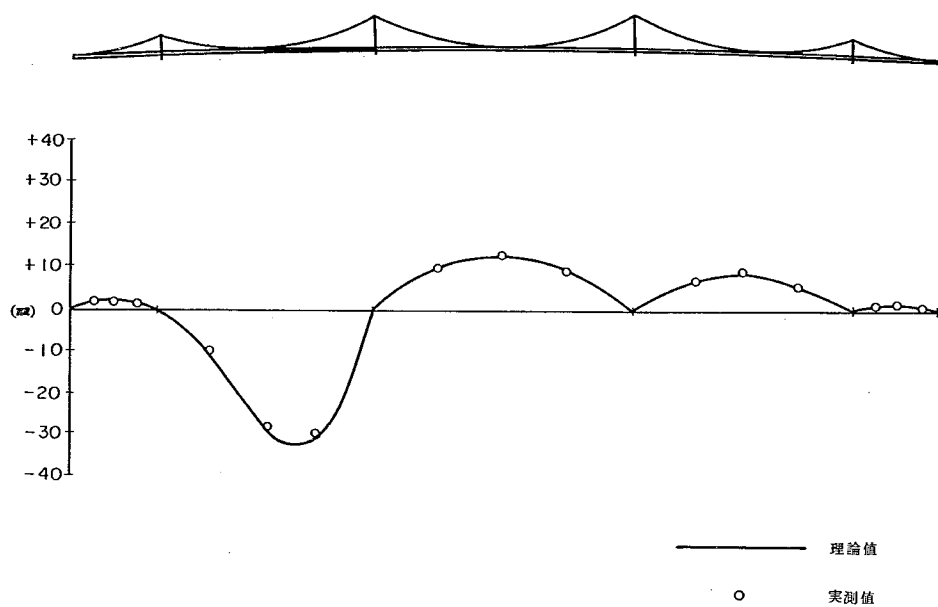


図 5 - 3

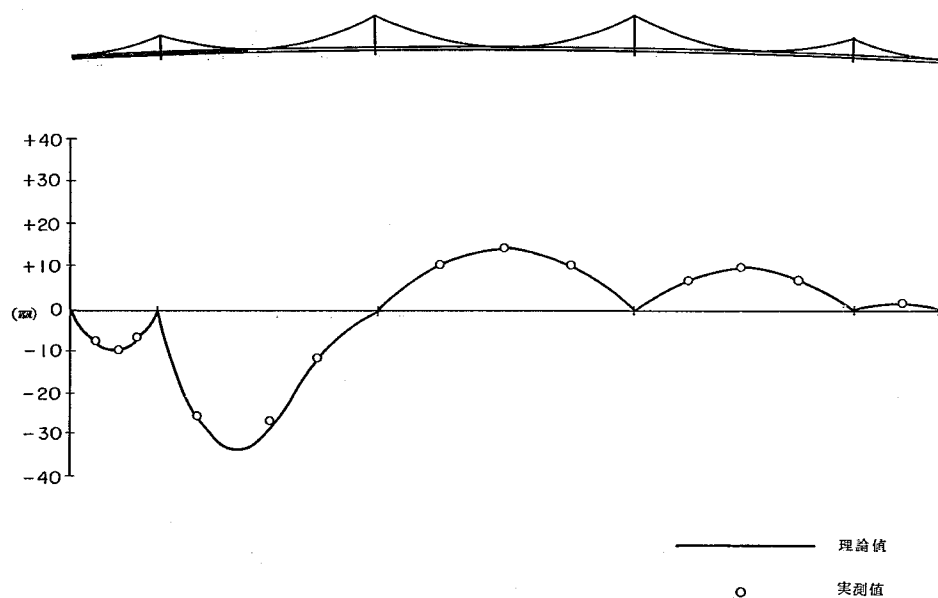


図 5 - 4

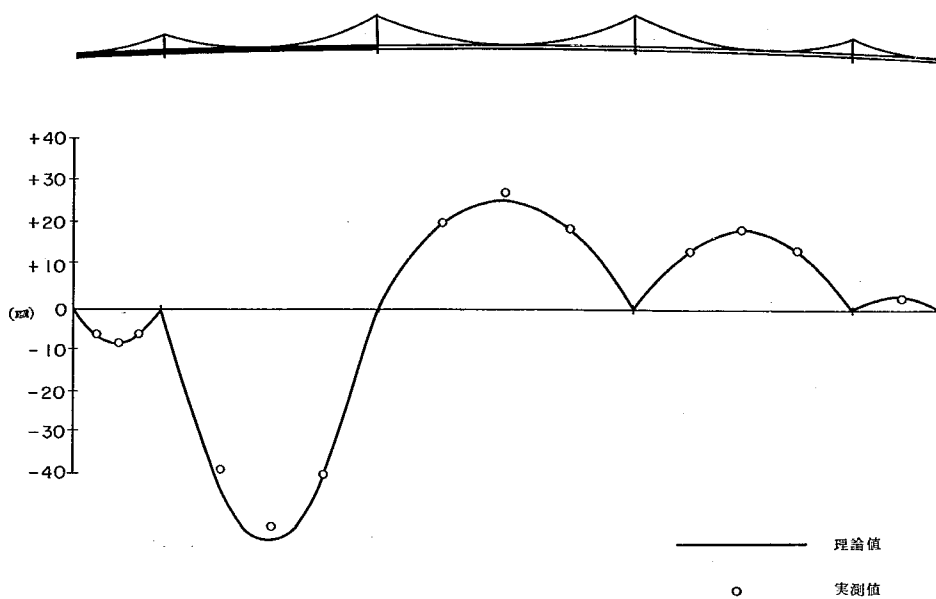


图 5 - 5

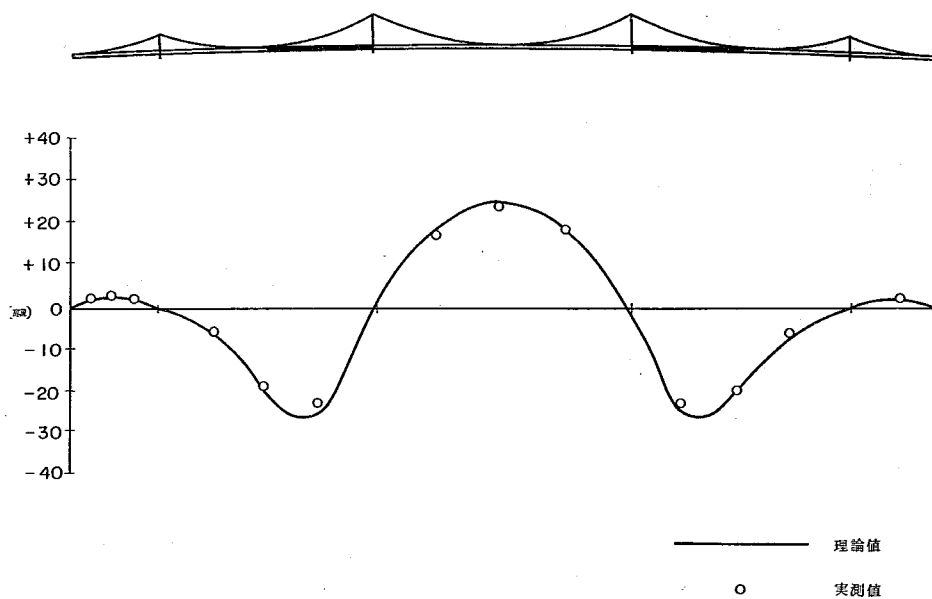


图 5 - 6

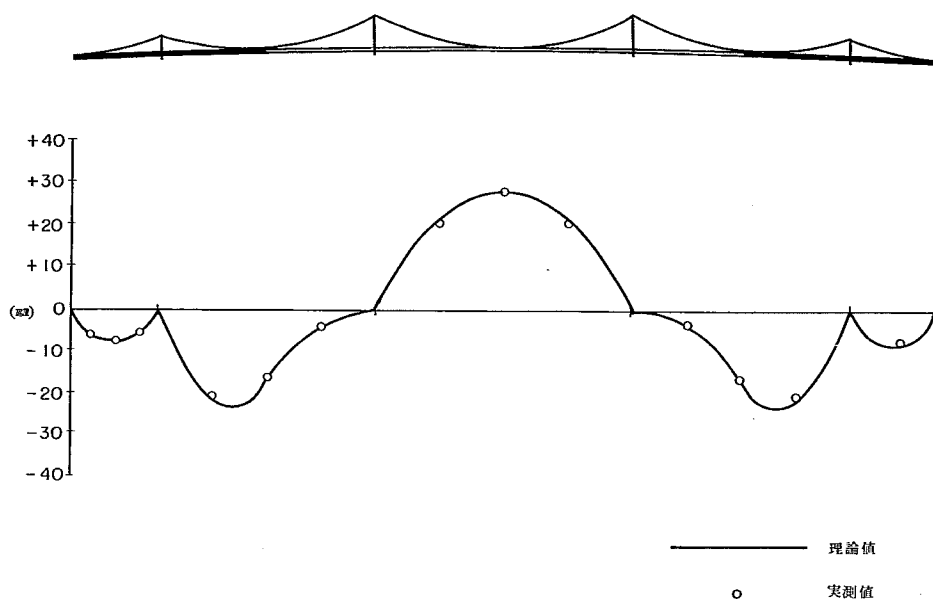


図 5 - 7

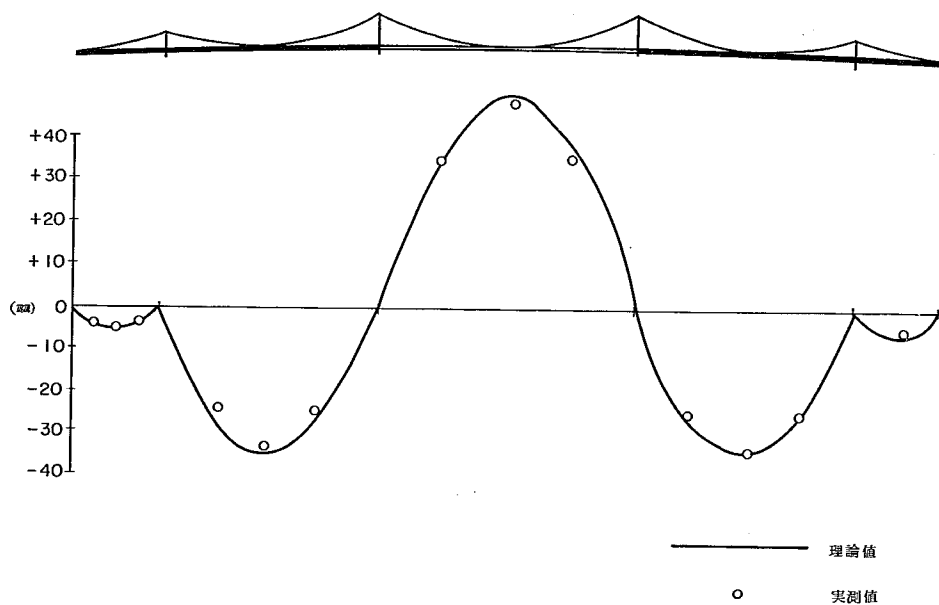


図 5 - 8

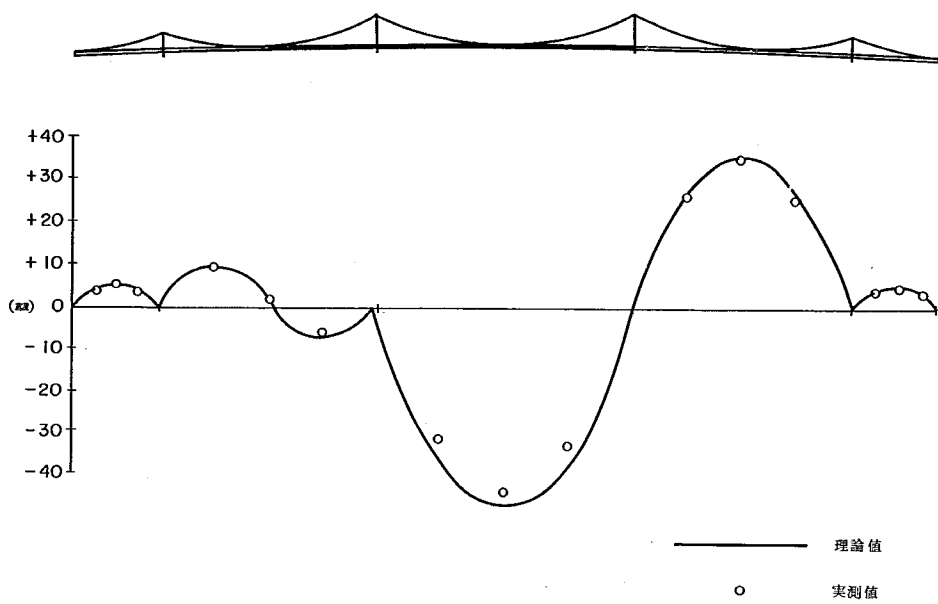


图 5 - 9

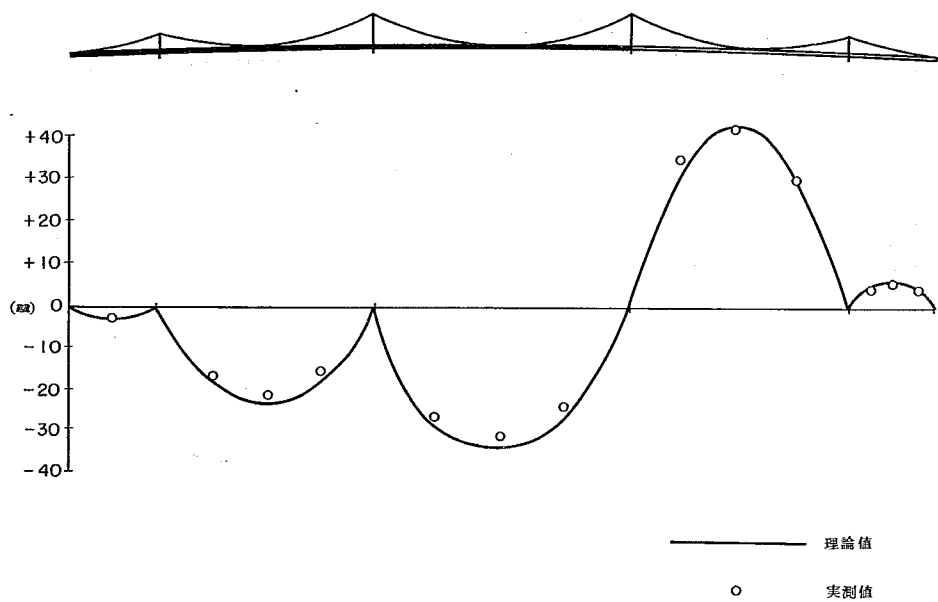


图 5 - 10

3-4-2 動的試験

動的試験から求められた固有振動数を理論計算値と対比し表-2に示した。また振動モードを図0-1~6-6に示す。この結果からみて撓み振動に関しては実験値は理論値と非常によい一致を示していると言えよう。また振り振動については多少の差異が認められるがこの原因としては、振り加振するために模型に種々の附属装置がとりつけられているがこれが模型に計算値以上の回転慣性を附加しているためと思われる。

表-2 5径間模型の固有振動数

振動モード			実験値		実験値の実橋換算値		理論値	
			振動数	周期	振動数	周期	振動数	周期
鉛直撓み	対称	1次	0.92 %	1.09 S	0.05 %	20.00 S	0.05 %	19.50 S
		2次	2.15	0.47	0.12	8.34	0.12	8.12
		3次	2.56	0.39	0.15	6.67	0.15	6.83
	逆対称	1次	1.65	0.61	0.10	10.00	0.10	10.42
		2次	3.50	0.28	0.20	5.00	0.20	5.02
		3次	5.49	0.18	0.32	3.13	0.32	3.17
振り	対称	1次	2.87	0.35	0.16	6.35	0.17	5.95
		2次	4.71	0.21	0.27	3.70	0.29	3.48
		3次					0.37	2.68
	逆対称	1次	3.60	0.28	0.21	4.76	0.24	4.17
		2次					0.48	2.06
		3次					0.74	1.36

この実験に先立って行なわれた予備実験で測定値が実験値と大きく異なるため検討してみたところ附属装置の質量分布の影響と言うことが明白になりこの影響をなるべく小さくするように努力したが実験上、完全にこの影響をなくすることができないのでこのような結果になったものと思はれる。なお図に対称2次の振動モードを示していないのは振動が非常に不安定でモードの測定ができなかったためである。

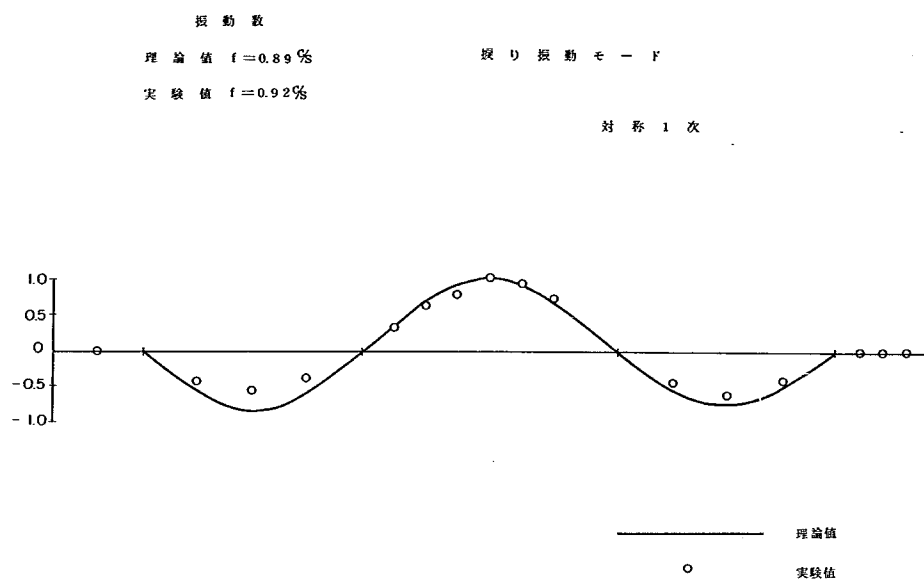


図 6-1 対称 1 次撓み振動の振動モード

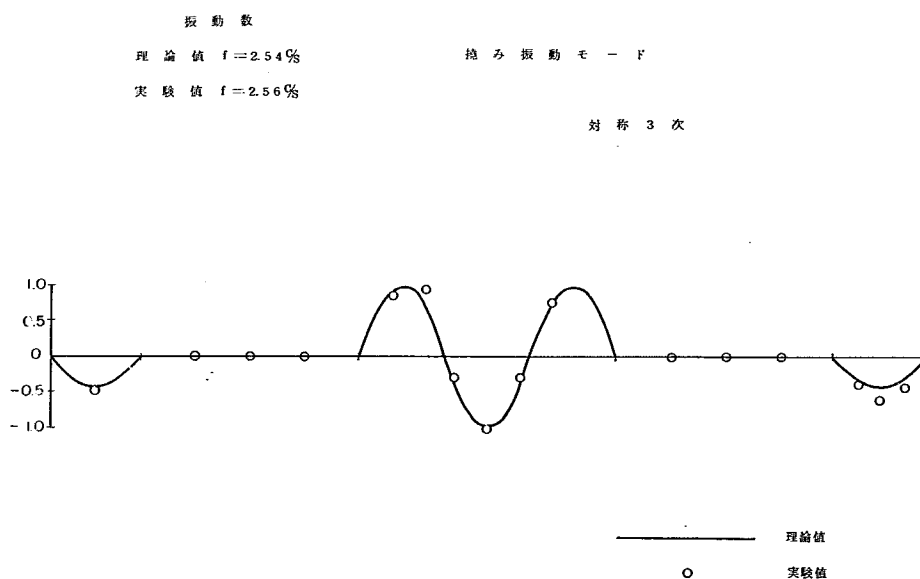


図 6-2 対称 3 次撓み振物の振動モード

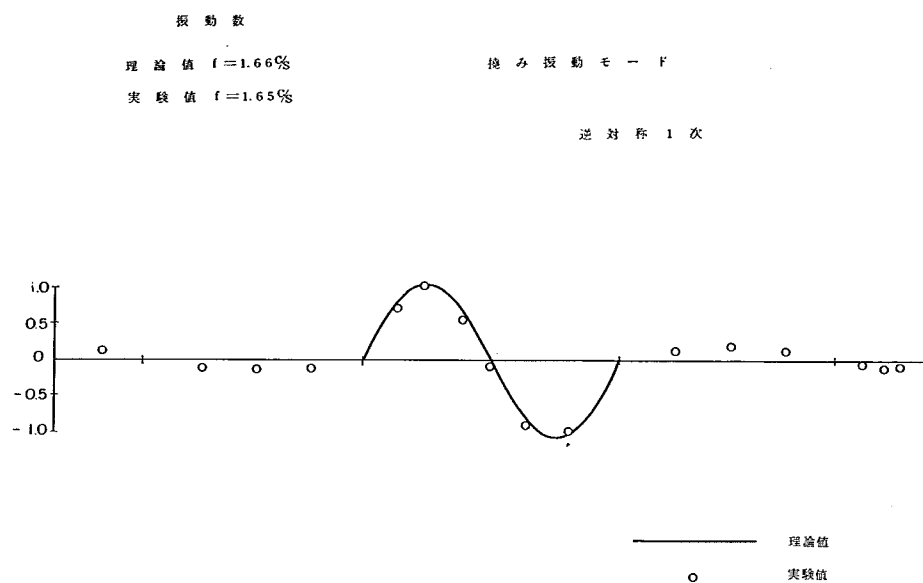


図 6-3 逆対称 1 次撓み振動の振動モード

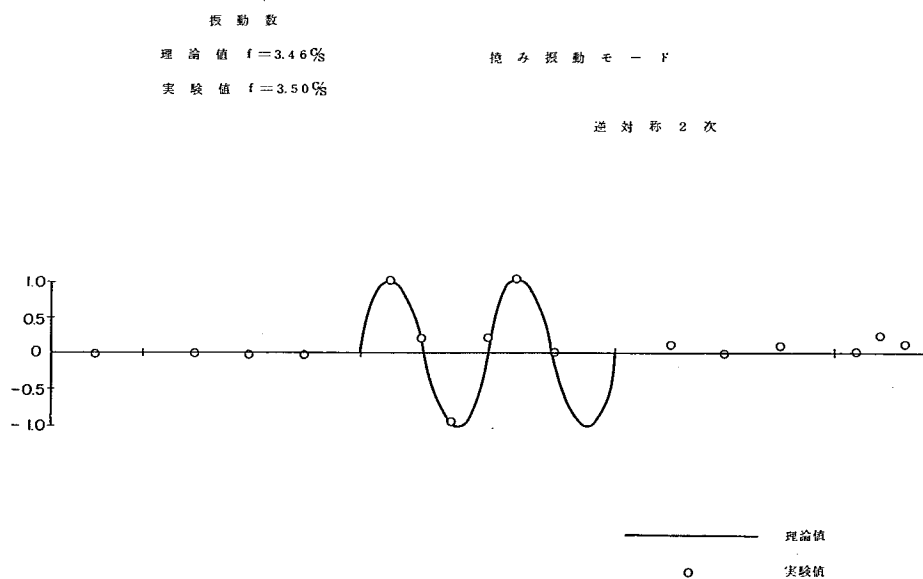


図 6-4 逆対称 2 次撓み振動の振動モード

振動数
理論値 $f=2.85\%$
実験値 $f=2.91\%$

対称 1 次

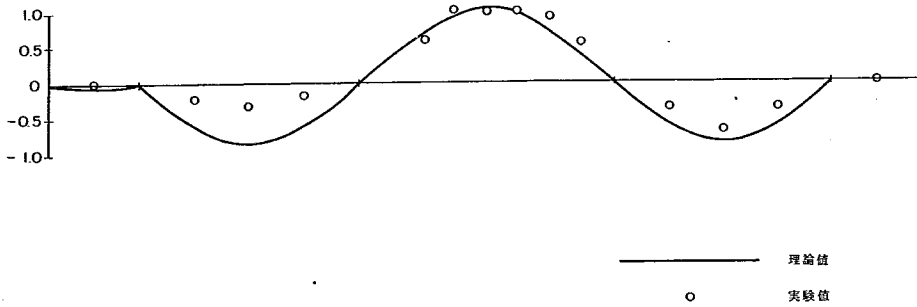


図 6-5 対称 1 次振り振動の振動モード

振動数
理論値 $f=4.06\%$
実験値 $f=3.60\%$

撓み振動モード

逆対称 1 次

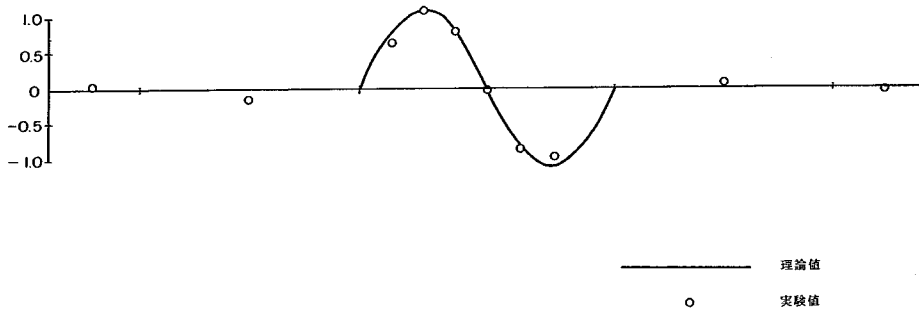


図 6-6 逆対称 1 次振り振動の振動モード

§ 4. 考 察

4-1 模型実験結果に関する考察

模型実験結果の妥当性は模型が実物に対して正しい相似関係を有して十分な精度で製作されているが否かによる。もちろん製作にあたっては寸法重量等について十分な検査を行ない各部品の許容誤差以内におさまっていることは確認したが更に完成後の模型が実橋の力学的性質を十分近似しているかどうかを調べるため静的な載荷試験を行なったがほぼ満足のゆく結果が得られ模型の精度について一応の検証ができた。もちろん静的変形に関する解析式は鉛直撓みと水手撓みについてみらびかれているが今回の実験目的が鉛直撓み振動と捩り振動に関する実験的検証であることから鉛直撓み変形に関する載荷試験を行なった。

模型は製作上の難点及び実物・構造解析が十分でないこと等から塔の質量分布、塔の捩り剛性、主桁の曲げ捩り剛性、吊材長、吊材間隔等に関する相似関係は満足していないが既往の実験例からみてこれらがさほど吊橋の微小振巾の振動特性に影響を与えるとは見はなれないので静的実験の結果等から考えて実験値は大体信頼できるものとする。

4-2 理論式に関する考察

ここで5径間吊橋に拡張したエネルギー法は単往間吊橋及び3径間吊橋の振動解析としては最も一般的なものでも低次の振動数に関する精度については3径間吊橋等ではすでに確認済みである。この式を5径間吊橋に拡張することは理論上は何んら問題がないと思はれるが考えられる唯一の問題点はケーブルの移動に関する約束が多少異なることなどであろう。

・ あとがき

実験結果の説明の箇所でもふれたが計算値と実験値は比較的良好一致しており耐風設計において問題になるような低次の振動数の計算には十分な精度を有することが明らかとなった。ただしこの近似計算法の性質上高次の振動、特に主桁の振動が卓越していない振動に関する解析手法としては全く適していない。従って耐震設計等については別の手法による解法を開発する必要がある。