



土木研究所資料 第七一六号

FEM電子計算プログラム使用説明書

昭和四十七年三月

建設省土木研究所

土木研究所資料 第716号

FEM電子計算プログラム使用説明書 —応力解析，浸透流解析関係—

昭和47年3月

建設省土木研究所

目 次

ま え が き

1. プログラム内容, 及び使用法説明	1
1-1 二次元弾性計算 No.1 プログラム	3
1-1-1 プログラム能力概要	3
1-1-2 計算式概説	3
1-1-3 入力データシート作成法	4
1-1-4 出力データの見方	8
1-2 二次元弾性計算 No.2 プログラム	15
1-2-1 プログラム能力概要	15
1-2-2 計算式概説	15
1-2-3 入力データシート作成法	15
1-2-4 出力データの見方	17
1-3 異方性岩盤塑性計算プログラム	21
1-3-1 プログラム能力概要	21
1-3-2 計算式概説	21
1-3-3 入力データシート作成法	22
1-3-4 出力データの見方	26
1-4 直交異方性弾塑性プログラム	29
1-4-1 プログラム能力概要	29
1-4-2 計算式概説	29
1-4-3 入力データシート作成法	30
1-4-4 出力データの見方	30
1-5 三次元弾性プログラム	34
1-5-1 プログラム能力概要	34
1-5-2 計算式概説	34
1-5-3 入力データシート作成法	36
1-5-4 出力データの見方	39
1-6 二次元浸透流計算プログラム	44
1-6-1 プログラムの概要	44
1-6-2 データ入力様式	45
1-6-3 入力方法	45
1-6-4 計算例	49
1-6-5 出力説明	49

1-7	三次元浸透流計算プログラム	53
1-7-1	プログラムの概要	53
1-7-2	データ入力様式	53
1-7-3	入力方法	53
1-7-4	計算例	58
1-7-5	出力説明	58
1-8	非定常浸透流計算プログラム	64
1-8-1	プログラムの概要	64
1-8-2	データ入力様式	64
1-8-3	入力方法	64
1-8-4	計算例	68
2.	有限要素法一般論	73
2-1	有限要素法基礎原理	75
2-2	計算式の誘導方法と計算手順	76
2-3	有限要素法の特長	80
2-4	有限要素計算の精度と合理的使用法	81
3.	参考資料	87
3-1	有限要素法に用いられる連立方程式の解法	89
3-1-1	有限要素法における連立方程式の型	89
3-1-2	CRAMER の公式による解法	90
3-1-3	消去法 (Sweep-Out Method) による解法	90
3-1-4	Gauss Seider 法による解法	91
3-1-5	Conjugate Gradient Method (共役傾斜法CG法)	92
3-1-6	構造物の計算に最適な方法の検討	93
3-1-7	構造物をUnitに分けて解く方法	94
3-2	塑性体の応力～ひずみマトリックスの誘導法	99
3-3	点安全率の考え方と適用法	101
3-3-1	はじめに	101
3-3-2	理論概説	101
3-3-3	岩盤の安定性の検討への適用法	103

ま え が き

土木研究所のダム構造研究室ではダム基礎の合理的設計法および処理方法の研究の一環として岩盤の応力解析法、浸透流解析法の研究を行なっているが、その際、近年急速に発展してきた有限要素法を用いた応力計算、浸透流計算の電子計算プログラムを多数開発してきた。

これらのプログラムの中には異方性岩盤弾塑性計算プログラムのように岩盤の解析研究専用に使われたものもあるが、弾性応力計算、定常浸透流計算プログラムのように手法が確立された大型の汎用プログラムもかなりあるので、このたび、これらのプログラムの内容及び使用法を公開し、各分野で広く実用に供せられんことを期待することになり、本資料を作成した。

本資料はプログラムの内容、使用法説明（１章）、有限要素法一般論（２章）、参考資料（３章）からなっている。

FEMに関するかなりの知識経験を有し、プログラムの使用法だけを知りたい方は１章だけ読めれば充分と思われるが、有限要素法に初めて取組まれる方は２章の基本原則、精度の特性等について一通り目を通してから１章に移られた方が良いでしょう。３章は参考資料であるので特に興味を持たれた方に見てもらえば良い性質のものである。

なおプログラミングの際の計算仕様、プログラムリスト等は量も多いし、計算を行なうに際しては直接関係もないので割愛したが、詳しく知りたい方は土木研究所ダム構造研究室、若しくは著者等に問合わせられたい。

本書に紹介したプログラムはいずれも超大型の計算機を必要とするため、IBMシステム360モデル75電子計算機用に作成されている。従って計算作業はIBMに依頼して行なうことになるが、詳しくは土木研究所ダム構造研究室に問合わせられたい。

本プログラムを作成するに当って、弾塑性問題の計算式の誘導に際して東京大学生産技術研究所山田嘉昭教授から多大な御教示をいただいた。

また、大渡ダム工事事務所、大雪ダム建設事務所、白川ダム工事事務所、その他多くの機関から御援助を頂いた。

プログラミング作業は日本IBM株式会社の篠原寿一（弾性関係）、大阿久昌彦（弾塑性関係）、熊谷厚生（浸透流関係）の諸氏が担当された。

上記関係諸氏に深く感謝する次第である。

昭和47年3月

ダム構造研究室長	飯田隆一
同 研究員	小林茂敏
(前) 同	
(現) 橋梁研究室研究員	朝倉肇
ダム構造研究室研究員	原田譲二

1. プログラム内容, 及び使用法説明



1-1 二次元弾性計算No.1 プログラム

1-1-1 プログラム能力概要

- (1) 本プログラムは二次元平板(面内荷重)の弾性計算を行なうものである。
- (2) 平面歪, 平面応力の両計算が行なえる。
- (3) 等方性及び直交異方性弾性体の計算が行なえる。
- (4) 使用出来る要素は三角形, 四角形(辺が座標軸に平行であること), 及び六角形(辺上に節点を有する三角形も含む)である。
- (5) 自重の計算も, 単位重量を入力するだけで行なうことができる。
- (6) 計算可能な節点数は1,000点まで, 連立方程式はunit分割法によって解いている。
- (7) 節点に加わる荷重のほか, 変位量を指定して応力計算を行なうこともできる。
- (8) 弾性係数の組合せは10種類までできる。
- (9) 荷重の組合せは5種類まで可能である。
- (10) 出力は節点変位, 節点反力, 要素ひずみ, 要素応力, 節点応力等である。
- (11) 計算結果は図化することが出来る。(主応力図, 要素分割の状況)。
- (12) 計算時間は1 unit 当り 50 秒程度である。

1-1-2 計算式概説

本プログラムの要素剛性マトリクスは応力パターンを設定して誘導している。詳しくは別の資料(注1.2)を参照されたい。ここでは応力パターンだけ記しておく。

三角形要素

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-1)$$

四角形要素

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-2)$$

但し $a \dots\dots x$ 軸に平行な辺長
 $b \dots\dots y$ 軸に平行な辺長

六角形要素

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-3)$$

注1) 土木技術資料 11-2 弾性問題における数値解法〔Ⅱ〕 飯田隆一 小林茂敏

2) 土木研究所資料 340号 「弾塑性問題における有限要素法」 飯田隆一 小林茂敏

自重計算は三角形要素の場合は要素面積 $\times \frac{1}{3} \times$ 単位重量，四角形要素の場合は要素面積 $\times \frac{1}{4} \times$ 単位重量の値を，また六角形要素の場合は $(F) = [\int_V (B)^T d_x d_y (A^{-1})] \times [\rho_y^x]$ の値を要素各節点に荷重として自動的に加算するようになっている。

連立方程式は内部コアだけ処理出来ないで，3章1節で述べる unit 分割法によって解いている。この方法によれば構造物をいくつかの unit に分割して計算しなければならないので，入力値には各要素が分割された unit のうちどの unit に属するかを記す必要がある。1 unit に属する節点の数（厳密に言えば，自分と自分よりも前の unit に属する節点数）が50個以内でなければならない。

尚，unit 数は出来るだけ少ない方が計算時間は速い。

固定点，変位を指定された点がある場合には，連立方程式はそれらの点に関する項を除いて元数を減らして解かれている。

節点応力は節点を共有する要素の応力値を平均して求めている。

計算の単位は kg-cm 又は t-m で行なわれるので，どちらかの単位系に統一して入力しなければならない。出力値の単位系は入力値の単位系と一致する。

1-1-3 入力データシート作成法

入力データシートは図-1.2(A)に示すようなものである。

記入すべき文字は指定されたカラムに書かなければならない。

実数は指定された枠内のカラムに納まっていれば小数点の位置はどこにとっても良い。

整数は1の位を指定された枠内の最後のカラムの位置にとらなければならない。

0の値は無記入でも0とみなす。(すべてのプログラムに共通)。

C O N T (文字) :

この行はプロッターに関する情報を入力する。

B (整数) :

{ 0 プロットしない。
1 主応力をプロットする。

C (整数) :

{ 0 主応力値を書かない。
1 主応力値を書き込んでプロットをする。

D (整数) :

{ 0 格子 (element) を記入しない。
1 格子 (element) を記入する。

E (実数) :

主応力の単位値を E 倍 cm で記入する。

F (実数) :

応力値や格子をプロットする際，節点位置の単位長さを F 倍 cm とする。

G_1 (実数) :

座標原点を用紙上で x 方向 (水平右方向) に G_1 cm 移動する。

G_2 (実数) :

原点を用紙上で y 方向 (上方向) に G_2 cm 移動する。

H (整数) :

- { 0 引張り応力を+として計算する。
1 圧縮応力を+として計算する。

I (整数) :

- { 0 大きいプロッター用紙 (75 cm) を用いる。
1 小さいプロッター用紙 (30 cm) を用いる。

主応力をプロットする際は、プロットしたい節点のNODEカードの節点番号の前に必ず 負号を付けなければならない。

A (文字及び数字) :

計算名その他タイトルとして打出したいものを記入する。2 ~ 79 カラムのどの位置に記入してもよいし 2 行にわたってもよい。

P A T E (文字) :

$E N$ (整数) : 弾性係数の組合せの種類 ≤ 10

E_x (実数) : x 方向の弾性係数

E_y (実数) : y 方向の弾性係数

E_z (実数) : z 方向の弾性係数

ν_{xy} (実数) : xy 方向間のポアソン比

ν_{yz} (実数) : yz 方向間の "

ν_{zx} (実数) : zx 方向間の "

G (実数) : xy 方向間のせん断弾性係数

(注) 等方性体であれば $E_x = E_y = E_z$, $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

等方性体で平面応力の計算を行ないたい場合には $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx} = \frac{\nu}{1+\nu}$ とする。

ρ_x (実数) : 要素単位重量

ρ_y (実数) : 要素単位重量 ($\rho_x = \rho_y$)

弾性係数や単位重量の異なる要素を組合せる場合には、各々の組合せについて E_x から ρ_y まで記入する。したがってこのデータの行数は $E N$ 行書かれることになる。

N O D E (文字) 節点数 (整数) :

全節点数を記入する。 ≤ 1000

節点番号 (整数) :

節点の名前 (4000 以内の整数) を記入する。節点名は重複さえしなければ欠番があっても良い。

X座標, Y座標(実数) :

節点の x 座標, y 座標を記入する。

座標回転角 θ (実数) :

その節点だけ座標系を回転したいとき, 旧座標軸からの回転角(反時計方向を+)を記入。

$15^\circ 30'$ は 15.30 のように記入する。

X_θ 方向変位, Y_θ 方向変位(実数) :

X_θ 方向, Y_θ 方向に初期変位を与えるときその値を入れる。

X, Y (整数) :

その点が支点である場合, 固定されている方向に 1 を入れる。X, Y の一方だけが 1 となっている場合はローラーとなり, 両方 1 となっている場合は完全固定となる。

その点がバネ支承の場合には 2 を入れる。

バネ定数は次の行に NODE * (1~5 カラム), 節点番号 (6~9 カラム) X 方向バネ定数 (51~60 カラム), Y 方向バネ定数 (61~70 カラム) を記入する。なおバネ定数とは $K \times \ell$ (K : 単位荷重に対する変位量, ℓ : 節点間隔) と定義する。

NODE データは すべての節点について記入しなければならないので, 節点数に等しい行数となる。また記入順序は, 番号の絶対値の若い順でなければならない。

LMNT (文字) 要素数 (整数) :

全要素数 ≤ 2000

LMNT (文字) 要素番号 (整数) :

要素の名前 (4000 以内の整数) を記入する。要素名は重複さえしなければ欠番があっても良い。

$i \sim n$ (整数) :

要素を構成する節点の番号を図-1.1 に示す順序に従って記入してゆく。三角形は $i \sim k$ 迄, 四角形は $i \sim \ell$ 迄記入すればよい。

四角形の場合, $i \sim j$, $k \sim \ell$ は必ず x 軸に平行, $i \sim k$, $j \sim \ell$ は y 軸に平行でなければならない。

三角形要素の場合 $i \sim j$ が y 軸に平行であってはならない。

P_1 (整数) :

パターン番号, その要素が PATE の所で与えた弾性係数のうち何行目の係数のグループに属するかを記入する。

U (整数) :

ユニット番号, 構造物を 1 ユニット 50 個以内 (境界点も含む) の節点になるようにユニッ

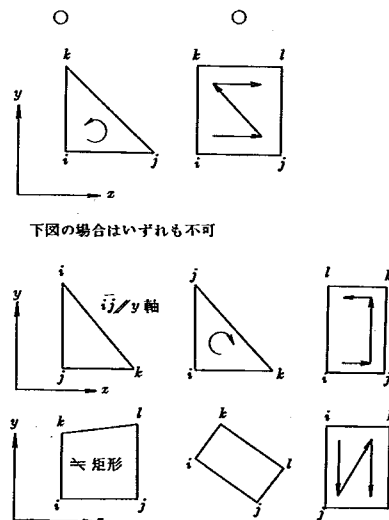


図-1.1

トに分割したとき、どのユニットに属するかを記入する。ユニット番号は続き番号としなければならない。

LMNT データは すべての要素について作らなければならないので要素数に等しい行数となる。
また記入順序は要素番号の若い順とする。

L $\bar{O}$ AD (文字), 荷重種類数 (整数):

荷重の種類の異なる計算を何ケース行なうかを記入する ≤ 5

LDCN (文字), ケース名 (整数):

何番目の荷重ケースかを記入する。

α_x (実数):

x 方向慣性力 (X 軸方向を+) $\rho_x \times \alpha_x$ が X 方向の単位重量となる。

α_y (実数):

y 方向慣性力 (Y 軸方向を+) $\rho_y \times \alpha_y$ が Y 方向の単位重量となる。

重力の方向では $\alpha = 1$, 重力の方向に直交する方向では $\alpha = 0$ となる。地震慣性力が働く方向では地震係数 k を加えた値が α となる。

L $\bar{O}$ AD (文字), 節点番号 (整数):

外荷重の与えられる節点名を記入する。

座標回転角 (実数):

座標軸方向を回転する必要がある節点についてのみ記入, 方法は N $\bar{O}$ DE データの時と同じ。

X_θ 方向荷重, Y_θ 方向荷重 (実数):

節点にかかる各方向の荷重値を記入する。

L $\bar{O}$ AD, 節点番号カードは荷重のかかる節点の数だけ必要である。第 1 のケースについて荷重の記入を終れば LDCN, 荷重ケースを 2 として次のケースの荷重値を同様に記入する。

GO (文字)

END (文字)

1* (文字):

以上の文字はデータの終りの意味であるので必ず記入すること。

そ の 他

応力はプロットするが要素はプロットしないときでも構造物の形だけを記入したいときは N $\bar{O}$ DE 節点数の次の行に構造物の輪郭となる点の名前を 4 カラムおきに整数で記入すればプロッターはその点をたどって行って型を書く。最後に書かれた点は最初に書かれた点に結ばれる。ただしこの行の最初の 4 カラムはたどってゆく点の総数を記入する ≤ 19

データは何行も上の行と同じ数字, 文字が続くことがある。そのようなとき $\downarrow$ で示せば上の行と同じものを下の行にも打つ。

データの記入例を図-1.2 (B), (C) に示す。

1-1-4 出力データの見方

出力データの例を図-1.3に示す。

TWO-DIMENTIONAL ANALYSIS BY F.E.M METHOD 1 :

プログラムの名前

(計算名) : 例では YAHAGIDAM

INPUT DATA :

入力データがそのまま出力される。入力にミスがなかったかどうか、この部分でチェックを行なうことになる。

STRAINS AT THE CENTERS OF ELEMENTS :

要素の重心におけるひずみがユニット順にかつ荷重条件順に出力される。

LMNT : 要素名

E(X) : ϵ_x

E(Y) : ϵ_y

E(XY) : φ_{xy}

STRAINS ON THE CORNERS OF ELEMENTS :

要素の頂点(四, 六角形)におけるひずみ。

LMNT : 要素名

E(X)I : i点における ϵ_x

E(Y)I : i点における ϵ_y

E(XY)I : i点における φ_{xy}

E(X)J : j点における ϵ_x

E(Y)J : j点における ϵ_y

E(XY)J : j点における φ_{xy}

E(X)K : k点における ϵ_x

E(Y)K : k点における ϵ_y

E(XY)K : k点における φ_{xy}

STRESSES AT THE CENTERS OF ELEMENTS :

要素の重心における応力及び主応力値

LMNT : 要素名

S(X) : σ_x

S(Y) : σ_y

T(XY) : τ_{xy}

S1 : 第1主応力

S2 : 第2主応力

DEG : 第1主応力がx軸となす角度(度, 分, 秒, 反時計方向を正とする。)

COORDNATES, FORCES AND DISPLACEMENTS :

座標, 節点荷重, 節点の変位の出力

N O D E : 節点名

X : x 座標

Y : y 座標

F-X : x 方向荷重

F-Y : y 方向荷重

D-X : x 方向変位

D-Y : y 方向変位

Rが付いている点は支点

REACTION FORSES :

支点反力

N O D E : 節点名

R-X : x 軸方向反力

R-Y : y 軸方向反力

STRESSES AT THE NODAL POINTS :

節点のまわりの要素応力を平均して求めた節点応力。

N O D E : 節点名

S (X) : σ_x

S (Y) : σ_y

T (XY) : τ_{xy}

S 1 : 第1主応力

S 2 : 第2主応力

D E G : 第1主応力が x 軸となす角度(度, 分, 秒, 反時計方向を正とする。)

その他, 数字の見方は 1.88989D01とは 1.88989×10^1 という意味である。シングルの計算が行なわれる際には 1.88989E01 のように Dの代わりにEが打たれるが同じ意味である。

OF

图-1.2(A)

IBM DATA SHEET

WRITTEN BY

PAGE / OF

[illegible]

PAGE 2 OF

图 1.2(C)

TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS BY F.E.METHOD 1

YAHAGIDAM JIUBUTU-OURYOKU DATE 1968NEN 7.25 DAM.SEC

INPUT DATA (EXCEPT TITLE)

LOSS 0

PATT 0

55555.6	13888.9	0.0	13888.9	55555.6	0.0	0.0	0.0	20833.3
11111.1	2777.8	0.0	2777.8	11111.1	0.0	0.0	0.0	4166.7
55555.6	13888.9	0.0	13888.9	55555.6	0.0	0.0	0.0	20833.3
11111.1	2777.8	0.0	2777.8	11111.1	0.0	0.0	0.0	4166.7
55555.6	13888.9	0.0	13888.9	55555.6	0.0	0.0	0.0	20833.3
22222.2	55555.6	0.0	55555.6	22222.2	0.0	0.0	0.0	83333.3

NODE 138

NODE 1	8.5	128.3	1	1
NODE 2	25.7	108.0		
NODE 3	25.2	145.0	1	1

STRAINS AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LOAD CONDITION 1

(UNIT 6)

LMNT	E(X)	E(Y)	E(XY)
601	9.286480-05	2.192670-04	5.596430-04
602	4.238020-04	1.393560-04	5.652890-04
603	5.610630-04	4.137160-05	8.003530-04
604	6.674510-04	-3.047400-05	7.175100-04

STRAINS ON THE CORNERS OF ELEMENTS

LOAD CONDITION 1

(UNIT 6)

LMNT	E(X)I	E(Y)I	E(XY)I	E(X)J	E(Y)J	E(XY)J	E(X)K	E(Y)K	E(XY)K
601	9.286480-05	2.192670-04	5.596430-04	9.286480-05	2.192670-04	5.596430-04	9.286480-05	2.192670-04	5.596430-04
602	4.238020-04	1.393560-04	5.652890-04	4.238020-04	1.393560-04	5.652890-04	4.238020-04	1.393560-04	5.652890-04
603	5.610630-04	4.137160-05	8.003530-04	5.610630-04	4.137160-05	8.003530-04	5.610630-04	4.137160-05	8.003530-04
604	6.674510-04	-3.047400-05	7.175100-04	6.674510-04	-3.047400-05	7.175100-04	6.674510-04	-3.047400-05	7.175100-04

STRESSES AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LOAD CONDITION 2

(UNIT 6)

LMNT	S(X)	S(Y)	T(XY)	S1	S2	DEG
601	6.232620 00	1.344300 01	1.099280 01	2.140670 01	-1.731050 00	54 4 43
602	2.588970 01	1.465180 01	1.189940 01	3.343010 01	7.111430 00	32 21 42
603	2.878180 01	1.065400 01	1.680690 01	3.881310 01	6.226610 -01	30 49 52
604	3.580370 01	8.655200 00	1.548360 01	4.282080 01	1.636200 00	24 22 47

☒ - 1.3 (A)

COORDINATES, FORCES AND DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1

NODE	X	Y	F-X	F-Y	DX	DY
1	8.500000 00	1.283000 02	0.0	0.0	0.0	R 0.0
2	2.570000 01	1.080000 02	0.0	0.0	-2.771300-02	1.124890-02
3	2.520000 01	1.450000 02	0.0	0.0	0.0	R 0.0
4	3.000000 01	1.500000 02	0.0	0.0	0.0	R 0.0

REACTION FORCES

LOAD CONDITION 1

NODE	R-X	R-Y
1	5.418140 02R	-4.414810 02R
3	1.988620 02R	-2.460480 02R
4	2.451050 01R	-1.563290 02R
7	2.021850 02R	-2.025730 02R

STRESSES AT THE NODAL POINTS

LOAD CONDITION 1

NODE	S(X)	S(Y)	T(XY)	S1	S2	DEG
1	-2.250240 01	-2.128890 01	1.889890 01	-2.986700 00	-4.080390 01	45 55 12
2	-2.199840 01	-1.844310 01	2.481930 01	-4.662110 00	-4.510360 01	47 2 54
3	-1.035410 01	-7.046380 00	5.305970 00	-3.142480 00	-1.425800 01	53 39 22
4	-4.212000 00	-9.179050 00	7.089040 00	8.159660-01	-1.420700 01	35 20 47

1-2 二次元弾性計算No.2 プログラム

1-2-1 プログラム能力概要

- (1) 本プログラムは二次元平板（面内荷重）の弾性計算を行なう。
- (2) 本プログラムは連立方程式の解法にCG法（詳細は3章1節参照）を用い、内部コアで処理しているので、「二次元弾性No.1」プログラムに比べて計算時間は短かくて済み、unitに分ける必要もない。
- (3) 使用出来る要素は三角形要素だけである。
- (4) 応力の計算の他に点安全率（詳細は3章3節参照）の計算を行ない、プロットする事も可能である。
- (5) 要素の初期応力を入力することも出来る。
- (6) 計算可能な節点数は1000点である。
- (7) 計算時間は100点当たり1分程度である。
- (8) 他の能力は二次元弾性1プログラムとほぼ同じである。

1-2-2 計算式概説

本プログラムに用いる要素剛性マトリクスは2章2節の部分で説明する方法で誘導したものである。

自重計算は要素面積 $\times \frac{1}{3} \times$ 単位重量を要素各節点に荷重として自動的に加算している。

連立方程式は4桁の精度が得られるまで反復計算を行なっている。解法の性質上、ひとつの要素がなるべく番号の近い節点で構成されるように節点名を付けた方が、計算時間は早くなる。そのためには構造物の隅の方から順に節点名をつけてゆくのが良い。また、ひとつの節点を共有する要素が9個以上になってはならない。

入力された初期応力は、計算で得られた応力に加算されて出力される。

点安全率は計算された応力値を用い、3章3節に述べる計算式によって計算を行なっている。

1-2-3 入力データシート作成法

入力データシートは図-1.4に示すようなものである。

二次元弾性No.1プログラムの入力データシートとほぼ同じであるので、そちらを一読されたい。ここでは、異なっている部分についてのみ説明を加える。

CONTデータ

Sを書く部分が追加される。

S（整数）：

- 0 点安全率のプロットはしない。
- {
- 1 点安全率のプロットを行なう。

なお、どの点又は要素について点安全率の計算を行ない、プロットすべきかは、後述する SAFETYFACT の次のカードで指示する。

LMNTデータ

初期応力を入力する部分が追加される。

σ_{x1} (実数) : 要素重心における x 方向初期応力。

σ_{y1} (実数) : " y 方向初期応力。

σ_{z1} (実数) : " z 方向初期応力。

τ_{xy1} (実数) : " 初期せん断応力。

初期応力のない場合は無記入でよい。 z 方向初期応力は平面歪として得られた z 方向応力に加算されるが、二次元弾性問題には特に用いることもないので、一般には入力することはない。

計算可能な要素形状は3角形だけであるので要素を構成する節点名は ijk の3個だけである。 ijk の記入順序は必ず反時計方向にまわるように記入してゆけば、 $i \sim j$ は y 軸に平行であってよい。

このプログラムではユニット分けは行なわないので、ユニットの記入は必要ない。

NODEデータ

初期変位のある場合には荷重条件毎に与えるようにしてあるので、NODEデータには変位量の記入をする必要はない。

DESPデータ

節点に初期変位がある場合はLOADデータに続いてDESPデータとして荷重条件毎に与えられる。

DESP(文字) 節点番号(整数) :

初期変位を与えられる節点名を記入する。

座標回転角, X_θ 方向変位, Y_θ 方向変位(実数) :

節点にかかる各方向の変位置を記入する。

DESPカードは荷重条件毎に初期変位のある節点の数だけ必要である。ある荷重条件で初期変位を与えた節点が、他の荷重条件でDESPとして記入されなかった場合記入されなかった荷重条件の計算においてはその点は固定点として計算される。

初期変位を与えられることがある点に対しては、NODEデータにおける固定条件は変位の与えられる方向に対して必ず1としておかなければならない。

SAFETYFACTカード

各荷重条件について得られた応力値を用いて点安全率の計算を行なう場合に記入する。

SAFETYFACT(文字) :

NODE(又はLMNT)(文字), 節点(又は要素名)(整数) :

計算を行なう節点又は要素名

τ_o : 粘着力。

f : 摩擦係数。

Deg : すべりの方向を指定するとき、その角度。

α 軸より反時計方向を+とし、 $45^{\circ}30'$ は 45.3 のように記入する。記入をしなれば、最も安全率の小さい方向について計算を行なう。

L (整数) :

- 0 ……強度安全率の式によって計算を行なう。
- {
- 1 ……荷重安全率の式によって計算を行なう。

P (整数) :

- 0 ……点安全率のプロットを行なう。
- {
- 1 ……点安全率のプロットは行なわない。

1 個の点について各荷重条件共、最大 3 種類まで係数を変えて点安全率の計算を行なうことが出来る。その場合、2 番目以後の計算については *NODE*、節点名又は要素名は書かなくとも良い。なお、ある荷重条件について、書き込む係数の種類はどの点も同じ数にしなければならない。

1-2-4 出力データの見方

出力データの例を図-1.5に示す。

SAFETYFACT の項以外は、二次元弾性 1 のプログラムの出力とほぼ同じであるので説明を略す。

SAFETYFACT :

点安全率の計算結果を示す。

NODE (又は *LMNT*) : 節点 (又は要素) 名

TO : 入力された純剪断強度あるいは粘着力 τ_0

TAN F : 入力された摩擦係数 $\tan \phi$

S (又は *L*) : 強度安全率 (又は荷重安全率) のサイン

N : 安全率

THETA 1, *THETA 2* :

最も安全率の小さい方向は 2 方向求まる。(3 章 3 節参照) 各々の方向が α 軸となす角度 (反時計方向を正)。又すべり方向を指定したときには *THETA 1* には指定されたすべり方向、*THETA 2* にはすべり方向を指定した事を示す * が打たれる。

TAU : すべり方向における剪断応力 (τ)

SIGMA : すべり方向に垂直な直応力 (σ)

点安全率の計算結果がプロットされるときは、すべりの方向を指定された場合には 1 本の線が、すべりの方向が指定されないときは 2 本の線が、指定した節点又は要素の重心に書かれる。どの線によってどちらの方向にすべるかは、力の流れ具合、安全率の分布等を参考にしながら判断しなければならない。

IBM DATA SHEET

PROBLEM 二次元弾性計算 No.2

WRITTEN BY

PAGE OF

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80						
1	CONT				B				C				D				E				F				G1				G2				H1				I				S																																													
2	計算名																																																																																					
3																																																																																						
4	PATEIN																																																																																					
5	EX				EY				EZ				Vxy				Vyz				Vzx				G				Px				Py																																																					
6																																																																																						
7																																																																																						
8	NODE		節点数																																																																																			
9	NODE		節点番号		X座標				Y座標				座標回転角θ												X				Y																																																									
10																																																																																						
11	LMNT		要素数																																																																																			
12	LMNT		要素番号		L		J		K						P				σ _{xi}		σ _{yi}		σ _{zi}		τ _{xyi}																																																													
13																																																																																						
14	LOAD		力-又数																																																																																			
15	LOAD		力-又名		α _x		α _y																																																																															
16	LOAD		節点番号						座標回転角φ				Xφ方向荷重				Yφ方向荷重																																																																					
17																																																																																						
18	DESP		節点番号										Xφ方向変位				Yφ方向変位																																																																					
19																																																																																						
20	SAFETYFACT																																																																																					
21	NODE		節点名		Zc		f		Deg		L		P		Zc		f		Deg		L		P		Zc		f		Deg		L		P																																																					
22	(又は LMNT 要素名)																																																																																					
23																																																																																						
24	GO																																																																																					
25	END																																																																																					

 TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (ELASTIC) BY F.E.METHOD 2

ODD DAM GANBAN

 ***** INPUT DATA (EXCEPT TITLE) *****

STRAINS AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LMNT	E(X)	E(Y)	E(XY)
1	-0.57687E-05	-0.43629E-05	0.70513E-05
2	-0.10484E-04	-0.10691E-04	0.86003E-05
3	-0.57687E-05	-0.92414E-05	0.13894E-04

STRESSES AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LMNT	S(X)	S(Y)	S(Z)	T(XY)	S1	S2	DEG
1	-0.19054E 02	-0.16125E 02	-0.70358E 01	0.73454E 01	-0.10100E 02	-0.25079E 02	50 38 14
2	-0.36545E 02	-0.76976E 02	-0.14704E 02	0.89589E 01	-0.27749E 02	-0.45722E 02	44 18 38
3	-0.22442E 02	-0.29677E 02	-0.19424E 02	0.14474E 02	-0.11140E 02	-0.40978E 02	37 59 1

FORCES AND DISPLACEMENTS

NODE	F-X	F-Y	DX	DY
1	0.69810E 02	-0.15317E 03	0.37305E-01	-0.85855E-01
2	0.47128E 03	-0.47400E 03	0.37084E-01	-0.85754E-01
3	0.27600E 02	-0.46000E 03	0.36975E-01	-0.85846E-01

REACTION FORCES

NODE	R-X	R-Y
27	0.74655E 03	-0.48000E 04
54	-0.16877E 03	0.25798E-05

図-1.5(A)

STRESSES AT THE NODAL POINTS

NODE	S(X)	S(Y)	T(XY)	S1	S2	DEG
1	-C.19054E 02	-0.16125E 02	0.73454E 01	-0.10100E 02	-0.25079E 02	50 38 14
2	-C.26014E 02	-0.27593E 02	0.10259E 02	-0.16513E 02	-0.37093E 02	42 47 58
3	-0.26748E 02	-0.30707E 02	0.18168E 02	-0.10452E 02	-0.47003E 02	41 53 28
4	-C.44089E C2	-0.50216E 02	0.87536E 01	-0.37878E 02	-0.56426E 02	35 21 20

SAFETYFACT

						* INDICATES -					
						THETA IS FROM INPUT					
						THETA1	THETA2	TAU	SIGMA		
NODE	1	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.20809E 01	1 0 0	*	0.73920E 01	-0.16382E 02		
NODE	2	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.26356E 01	1 0 0	*	0.10226E 02	-0.27950E 02		
NODE	3	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.16777E 01	1 0 0	*	0.18088E 02	-0.31340E 02		
NODE	4	0.10000E 01	0.10000E 01	L	0.16903E 01	1 0 0	*	0.86414E 01	-0.50519E 02		
NODE	5	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.21896E 01	1 0 0	*	0.21962E 02	-0.49088E 02		
NODE	6	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.13931E 01	1 0 0	*	0.44161E 02	-0.62521E 02		
NODE	7	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.38349E 01	1 0 0	*	0.22317E 02	-0.86585E 02		
NODE	8	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.36128E 01	1 0 0	*	0.20497E 02	-0.70951E 02		
NODE	9	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.16596E 01	1 0 0	*	0.41847E 02	-0.70451E 02		
NODE	10	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.11359E 01	-1 9 0	*	0.75895E 02	-0.87209E 02		
NODE	10	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.11359E 01	-1 9 0	*	0.75895E 02	-0.87209E 02		
NODE	11	0.10000E 01	0.10000E 01	L	0.72619E 02	1 0 0	*	0.42277E 02	-0.95428E 02		
NODE	11	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.22335E 01	1 0 0	*	0.42277E 02	-0.95428E 02		
NODE	12	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.38703E 01	1 0 0	*	0.30544E 02	-0.11921E 03		
NODE	12	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.38703E 01	1 0 0	*	0.30544E 02	-0.11921E 03		
NODE	12	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.38703E 01	1 0 0	*	0.30544E 02	-0.11921E 03		
NODE	13	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.44154E 01	1 0 0	*	0.26242E 02	-0.11687E 03		
NODE	13	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.44154E 01	1 0 0	*	0.26242E 02	-0.11687E 03		
NODE	14	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.30423E 01	1 0 0	*	0.31516E 02	-0.96880E 02		
NODE	14	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.30423E 01	1 0 0	*	0.31516E 02	-0.96880E 02		
LMNT	15	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.14452E 01	1 0 0	*	0.52842E 02	-0.77385E 02		
LMNT	15	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.14452E 01	1 0 0	*	0.52842E 02	-0.77385E 02		
LMNT	15	0.10000E 01	0.10000E 01	L	0.77817E 02	65 42 58	20 42 58	-0.37542E 02	-0.10976E 03		
LMNT	16	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.17776E 01	1 0 0	*	0.61691E 02	-0.11066E 03		
LMNT	17	0.10000E 01	0.10000E 01	L	0.46035E 02	1 0 0	*	0.12117E 03	-0.10592E 03		
LMNT	18	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.25949E 01	1 0 0	*	0.39001E 02	-0.10220E 03		
LMNT	20	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.24171E 01	1 0 0	*	0.61788E 02	-0.15035E 03		
LMNT	20	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.24171E 01	43 51 4	8 33 14	-0.46332E 02	-0.16469E 03		
LMNT	21	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.42206E 01	1 0 0	*	0.33663E 02	-0.14308E 03		
LMNT	22	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.28192E 01	1 0 0	*	0.49218E 02	-0.13976E 03		
LMNT	23	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.55521E 01	1 0 0	*	0.23287E 02	-0.13029E 03		
LMNT	24	0.10000E 01	0.10000E 01	S	-0.21407E 01	1 0 0	*	0.33191E 02	-0.72053E 02		

1-3 異方性岩盤塑性計算プログラム

1-3-1 プログラム能力概要

- (1) 本プログラムは二次元平板（面内荷重，平面歪）の弾塑性計算を行なうものである。
- (2) 本プログラムは二次元弾性計算 No.2 プログラムを母体とし，キレツ性岩盤解析の研究用に作られたものであるので使用に当っては土木研究所資料 525号 注1 を参照するか，土木研究所ダム構造研究室に問い合わせられたい。
- (3) 降伏条件式はクーロンの式を基本とするものである。
- (4) 粘着力，摩擦係数がひずみ硬化，劣化をする場合も扱える。
- (5) 降伏後の応力とひずみの関係は，降伏後の応力増分は降伏条件を満足するように生ずることから決めている。
- (6) すべりの生ずる方向は，卓越したすべり易い方向があるものと仮定し，これを要素毎に2方向まで入力出来る。
- (7) 荷重が除荷される場合，反復される場合も取扱え，出力は最終状態だけでなく，中間ステップの値も打出す。
- (8) 使用要素は3角形要素だけで計算可能な節点数は約1000点である。
- (9) プロットは行なえない
- (10) 荷重条件は1種類だけであり，初期変位は入力できない。
- (11) 計算時間は100点程度の大きさで1ステップ30秒程度である。

1-3-2 計算式概説

有限要素法による塑性計算の原理は荷重漸増法（荷重を $\frac{1}{N}$ ずつ加え各ステップの応力増分を加え合わせてゆく）を用いている。各ステップの応力計算は2次元弾性計算No.2プログラムと基本的に同じものである。

降伏条件式は次のようなものを用いている。

$$f_x = |\tau_{xy}| - \sigma_x \{1 + C_{x3}(\epsilon_{s1}) + C_{x4}(\epsilon_{s1})^{C_{x5}}\} \tan \phi_x - \{C_{x0} + C_{x1} \cdot \sec \phi_x \cdot \epsilon_{s1}^{C_{x2}}\} \dots (1.4)$$

$$f_y = |\tau_{xy}| - \sigma_y \{1 + C_{y3}(\epsilon_{s2}) + C_{y4}(\epsilon_{s2})^{C_{y5}}\} \tan \phi_y - \{C_{y0} + C_{y1} \cdot \sec \phi_y \cdot \epsilon_{s2}^{C_{y2}}\} \dots (1.5)$$

$C_{x1} \sim C_{x5}$, $C_{y1} \sim C_{y5}$, ϕ_x , ϕ_y は入力値であるのでこれらの値を適当に選ぶことによりクーロンの式と同じにすることも可能である。降伏条件は各要素共 f_1 , f_2 の二つの式によって判定を行ない，先に降伏した方向にすべるものとして計算を続ける。すべりの方向が x 軸， y 軸に平行でない場合には，入力されたすべりの方向に応力値を変換し同式により検討を行なう。

なお式で ϵ_{s1} , ϵ_{s2} とは $f d\lambda (= |\tau_{xy}| \because d\tau_{xy} = \frac{\partial f}{\partial |\tau_{xy}|} d\lambda = \pm d\lambda)$ のことである。

注) 不連続体の非弾性的挙動に対する力学的解析の一試み 飯田隆一 小林茂敏 土研資料第525号

降伏後の塑性ひずみの増分は塑性ポテンシャルを用いて次式によって求めている。

$$d\epsilon_x^P = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_x} d\lambda \dots\dots (1.6)$$

$$d\epsilon_y^P = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \sigma_y} d\lambda \dots\dots (1.7)$$

$$d\gamma_{xy}^P = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \tau_{xy}} d\lambda \dots\dots (1.8)$$

(但し $d\epsilon_x^P$ 等は塑性ひずみ増分)

これらの関係を満足させるために用いた降伏後の $[D]$ マトリクスの誘導方法、結果については参考のために 3 章 2 節で述べておく。

すべりの方向を一方向に限定したいときは他の方向の降伏条件はいちじるしく大きくしておけば良い。

降伏した岩盤が再び、締固まって前と異なった強度で挙動するような場合も取扱えるように降伏条件は各方向共、2 種類まで入れられるようにしてある。つまり要素は弾性→塑性(第 1 の降伏条件)→弾性→塑性(第 2 の降伏条件)に状態が移行する場合も計算が行なえる。最初の塑性から弾性に移行する条件はひずみ量で規定し、値は入力値として与える。このような移行過程を経たくないときは弾性にもどる場合の条件をきびしくすればよい。

応力値が前のステップの増分から考えて次のステップでは明らかに塑性に入ると見なされ、現在のステップでは塑性ではないが塑性として扱った方が誤差が少なそうと見なせるときは、降伏条件を完全に越えなくとも降伏をさせるようにも考えてある。

塑性領域に入って 1 ステップにおける変位の増加量がある値よりも大きいときには自動的にステップ巾を $\frac{1}{2}$ に細かく切るようにもしてある。

要素の初期条件としては、応力、ひずみ、塑性に達しているかどうか等を与えることが出来、降伏の判定は、入力値と計算値との和を用いて行なわれるようになっている。又塑性論に基づき、 $d\lambda < 0$ の要素は弾性として計算をやりなおすように作られてあるので、除荷時の場合、大部分の要素は弾性として挙動することになる。

なお本プログラムでは圧縮応力、ひずみを正としている。

1-3-3 入力データシート作成法

入力データシートは図-1.6 に示すようなものである。

弾性計算用プログラムの入力法と同じ部分もかなりあるので、ここでは特に弾性計算プログラムと異なっている部分だけ述べる。

本計算は結果のプロットは行なわない。よって CONT カードは必要ない。

PATX (文字) :

以下に続くカードは x 軸に直交する方向 (y 軸方向) のすべりに対する諸係数を支えるパターンカードである。カードの行数は PATE に指定した数と同じにしなければならない。又 LMNT カードの中でどのパターンを使用するかを指定するが、その順序は PATE, PATX, PATY 共

IBM DATA SHEET

PROBLEM 異方性岩盤塑性計算

WRITTEN BY

PAGE

OF

No.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80																																																																															
1	ISW																																																																															
2	計算名																																																																															
3																																																																																
4	PA:TE:EW 最大10桁																																																																															
5	E _x E _y E _z γ _{xy} γ _{yz} γ _{zx} G P _x P _y																																																																															
6																																																																																
7	PA:TX:																																																																															
8	tan φ _x C _{x0} C _{x1} C _{x2} C _{x3} C _{x4} C _{x5} xE ₀ xγ _{xy0} θ°																																																																															
9																																																																																
10	PA:TY:																																																																															
11	tan φ _y C _{y0} C _{y1} C _{y2} C _{y3} C _{y4} C _{y5} yE ₀ yγ _{xy0} θ°																																																																															
12																																																																																
13	NODE 節点数																																																																															
14	NODE 節点番号 X座標 Y座標 座標回転角 X Y																																																																															
15																																																																																
16	LMNT 要素数																																																																															
17	LMNT 要素番号 L d k CH3 E _{x1} E _{y1} P ₁ P ₂ σ _{x1} σ _{y1} σ _{z1} τ _{xy1}																																																																															
18																																																																																
19																																																																																
20	CHECK γ _{xy} γ _{yz} γ _{zx} γ _s β MAX ITR γ ₀																																																																															
21	LOAD 荷重番号 X ₀ : 方向外力 Y ₀ : 方向外力																																																																															
22																																																																																
23	G ₀																																																																															
24	END																																																																															
25	/*																																																																															

共通なので、PATEと同じ対応で並べておく必要がある。

$\tan \phi_x$ (実数) :

x 軸に直交する方向のすべりに対する摩擦係数。収縮性の降伏をするときには負とする。

$C_{x0} \sim C_{x5}$ (実数) :

x 軸に直交する方向のすべりに対する降伏条件式の諸係数。

$x\epsilon_0$ (実数) :

塑性に入った要素が締めめられて再び弾性にもどる場合の条件、 ϵ_x が $x\epsilon_0$ 以上になったとき再び弾性となる。

$x\gamma_{xy0}$ (実数) :

塑性に入った要素が締めめられて再び弾性になる場合の条件、 γ_{xy} が $x\gamma_{xy0}$ 以上になったとき再び弾性となる。 $x\epsilon_0$, $x\gamma_{xy0}$ の優先順位は、応力値が先に達した方の条件式にしたがうものとする。

θ'' (実数) :

卓越したすべりの方向が x 軸に垂直 (y 軸方向) でないとき、その角度を (y 軸から反時計方向に正とし角度を度・分で) 記入する。

PATY (文字) :

以下に続くカードは y 軸に直交する方向 (x 軸方向) のすべりに対する諸係数を与えるものである。カードの枚数、配列順序は PATE, PATX のカードと同じでなければならない。

$\tan \phi_y$ (実数) :

y 軸に直交する方向のすべりに対する摩擦係数。収縮性の降伏をするときには負とする。

$C_{y0} \sim C_{y5}$ (実数) :

y 軸に直交する方向のすべりに対する降伏条件式の諸係数。

$y\epsilon_0$, $y\gamma_{xy0}$ (実数) :

$\epsilon_y > y\epsilon_0$ 又は $\gamma_{xy} > y\gamma_{xy0}$ となったとき再び弾性として計算を進める。

θ' (実数) :

卓越したすべりの方向が y 軸に垂直 (x 軸方向) でないとき、その角度を (x 軸から反時計方向に正とし、角度を度・分で) 記入する。

NODE, LMNT データの大部分の記入は弾性計算の場合と同じである。

CH3 (整数) : 初期の塑性状態を記入する。

- | | | |
|---|---|-----------------------|
| { | 0 | 最初の状態がおし固めの生じない状態である。 |
| | 2 | " おし固められつつある状態。 |
| | 3 | " おし固まってしまって弾性領域にある。 |
| | 4 | " 第2の降伏条件に基づく塑性状態。 |

なお x 方向に垂直な方向のすべりの初期状態は3桁目に記入する。

ϵ_{x1} (実数) :

x 軸方向の初期ひずみ値、 ϵ_x を記入する。(無ければ無記入)。

ϵ_{yl} (実数) :

y 軸方向の初期ひずみ値, ϵ_y を記入する。

P_1 (整数) :

各要素のパターン番号

P_2 (整数) :

各要素の第 2 のパターン番号 (一度降伏した後, 第 2 の降伏条件にしたがう場合, その係数をあらわすパターンカードの入力順位)。

$\sigma_x \sim \tau_{xy}$ (実数) :

初期応力の値を記入する。(無ければ無記入)。

CHECK (文字) :

η_N (整数) :

最大荷重を載荷するのに何ステップに分けて載荷するかを記入する。一般には 10 ~ 20 ステップ。

η_1 (実数) :

許容歪度 最大ひずみ値が入力された値以上になったら, ステップ巾を $\frac{1}{2}$ に細かくする。

η_s (実数) :

$\left\{ \begin{array}{l} 1.0 \text{ 最大荷重まで} / \\ 2.0 \text{ } 0 \rightarrow \text{最大荷重} \rightarrow 0 \quad \wedge \\ 3.0 \text{ } 0 \rightarrow \text{最大荷重} \rightarrow 0 \rightarrow \text{最大荷重} \quad \wedge \vee \end{array} \right.$

β (整数) :

1 を記入すれば引張り主応力が生じた要素はただちに塑性として扱う。

MAXITR (整数) :

$d\lambda < 0$ のときその要素を弾性として計算のやり直しをしなければならないが, 何回やり直すかを記入, 普通は 1 又は 0 とする。

η_6 (実数) :

連立方程式の計算の精度を記入する。

$1 \text{ E} - 8$ とすれば 4 桁, $1 \text{ E} - 12$ とすれば 6 桁程度の精度が得られる。一般には 4 桁程度の精度が得られれば充分である。

LOAD (文字), 節点名 (整数) :

外荷重の与えられる節点名を記入する。なお荷重条件は 1 回の計算で 1 ケースしか与えられないので注意を要する。したがって LDCN カードを必要とせず, 荷重の加わっている節点名だけを記入すればよい。

G0 (文字) :

END (文字) :

/* (記号) :

以上の文字はデータの終りを意味するので必ず記入しなければならない。

1-3-4 出力データの見方

出力データ例を図-1.7に示す。ステップ計算であるので各ステップにおける計算結果を出力する。

NO. OF ITERATION= :

何ステップ目の計算結果を示すかを示す。

T_1 : 最大荷重に対する現在のステップの荷重の大きさの割合。

T : 1 のとき、予定していたステップの細かさ。

0.5 のとき、予定していたステップより2倍の細かいステップで計算をしている。

LMNT : 要素名

CH3 : 塑性に関する情報

1桁及び3桁の数字が0のときは弾性か塑性でも $d\lambda \geq 0$, 1のときは $d\lambda < 0$ 。

1桁は y 軸に直角方向のすべりに対する情報。

3桁は x 軸に直角方向のすべりに対する情報。

2桁及び4桁の数字が0及び3のときは弾性。

1のときはパターン P_1 の降伏条件による塑性。

4のときはパターン P_2 の降伏条件による塑性。

DRAMD 1, DRAMD 2 : $d\lambda_1, d\lambda_2$

C11D ~ C34D :

応力とひずみの関係を示すDマトリクスの成分の値。

ESE :

弾性ひずみエネルギーの値(単位面積当り)

ETOU :

せん断弾性ひずみエネルギーの値(単位面積当り)

$$E_{S1} : \int d\lambda_1 = \int |d_1 \gamma_{xy}^P| = \int \frac{\partial f_1}{\partial \tau_{xy}} d\lambda_1$$

$$E_{S2} : \int d\lambda_2 = \int |d_2 \gamma_{xy}^P| = \int \frac{\partial f_2}{\partial \tau_{xy}} d\lambda_2$$

$$E_{B1} : -\frac{1}{3} \int \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_x} d\lambda_1$$

$$E_{B2} : -\frac{1}{3} \int \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_y} d\lambda_2$$

他の出力の表示は二次元弾性No.1の場合と同じである。

各ステップの出力の最後にCG法による連立方程式の計算の反復数と収束度が表示される。

TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (PLASTIC) BY F.E. METHOD 2

SENDAN TEST NOCH1

***** INPUT DATA (EXCEPT TITLE) *****

NO. OF ITERATION= 3 T1 0.30000E 00 T= 0.10003E 01

LMNT	CH3	DRAM01 C330	DRAM02 C140	C110 C240	C120 C340	C130 ESE	C220 EYU	C230
1	3030	0.0 0.83333E 06	0.0 0.27778E 06	0.11111E 07 0.27778E 06	0.27778E 06 0.0	0.0 0.21648E-04	0.11111E 07 0.17417E-04	0.0
2	3030	0.0 0.83333E 06	0.0 0.27778E 06	0.11111E 07 0.27778E 06	0.27778E 06 0.0	0.0 0.11699E-05	0.11111E 07 0.26544E-06	0.0
3	3030	0.0 0.83333E 06	0.0 0.27778E 06	0.11111E 07 0.27778E 06	0.27778E 06 0.0	0.0 0.82714E-04	0.11111E 07 0.75132E-04	0.0

STRAINS AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LMNT	E(X)	E(Y)	E(XY)	ES1	ES2	ES3	EB1	EB2
1	-0.43940E-05	0.67788E-06	-0.91433E-05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.29446E-06	-0.20297E-05	-0.11288E-05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-0.48710E-05	-0.20241E-05	-0.18990E-04	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

STRESSES AT THE CENTERS OF ELEMENTS

LMNT	S(X)	S(Y)	S(Z)	T(XY)	S1	S2	S3
1	-0.46940E 01	-0.46737E 00	-0.10323E 01	-0.76194E 01	0.59264E 01	-0.10498E 02	-52 45 3
2	-0.23661E 00	-0.21734E 01	-0.48200E 00	-0.94064E 00	0.14503E 00	-0.25550E 01	-22 5 1
4	-0.59745E 01	-0.36021E 01	-0.19153E 01	-0.15825E 02	0.11081E 02	-0.20658E 02	-47 8 36

COORDINATES, FORCES AND DISPLACEMENTS

NODE	F-X	F-Y	DX	DY
1	0.12500E 02	0.0	0.27241E-02	0.13823E-02
2	0.25000E 02	0.0	0.27235E-02	0.45387E-03
3	0.25000E 02	0.0	0.27275E-02	-0.45918E-03

REACTION FORCES

NODE	R-X	R-Y
9	-0.16064E 02	-0.24513E 02
10	-0.15273E 02	-0.22286E 01
11	-0.20002E 02	0.29477E 01
12	-0.87006E 01	0.23797E 02

STRESSES AT THE NODAL POINTS

NODE	S(X)	S(Y)	T(XY)	S1	S2	DEG
1	-0.24653E 01	-0.13204E 01	-0.42800E 01	0.24253E 01	-0.62110E 01	-48 48 32
2	-0.33237E 01	-0.10369E 01	-0.97561E 01	0.76426E 01	-0.12003E 02	-48 20 32

□- 1.7(B)

1-4 直交異方性弾塑性プログラム

1-4-1 プログラム能力概要

- (1) 本プログラムは二次元平板(面内荷重, 平面歪)の弾塑性計算を行なうものである。
- (2) 本プログラムは土ダムやロックフィルダムの堤体の応力解析の研究用に作られたものである
ので, 使用に当っては, 土木研究所資料 525号を参照するか, 土木研究所フィルタイプダ
ム研究室に問合せられたい。
- (3) 降伏条件は Mises の降伏条件式を基本とするものであるが, 歪硬化, 劣化が生ずる場合も
取扱えるようになっている。
- (4) 降伏後の応力とひずみの関係は, 降伏後の応力増分は降伏条件式を満足しながら生ずること
から決めている。
- (5) 荷重が除荷される場合, 反復される場合も取扱え, 中間ステップの計算値も出力される。
- (6) 使用要素は 3 角形要素だけで, 計算可能な節点数は約 1000 点である。
- (7) 荷重条件は一種類だけ, 初期変位は入力出来ない。
- (8) 計算時間は 100 点程度の大きさで 1 ステップ 30 秒程度である。

1-4-2 計算式概説

有限要素法による塑性計算の原理は直交異方性岩盤プログラムの場合と同様, 荷重漸増法を用い
ている。各ステップの応力計算は二次元弾性計算 No.2 プログラムと同じものである。

降伏条件式は次のようなものを用いている。

$$f = J_2' \frac{1}{m} - H_2 \times (b_1 \sigma_x + b_2 \sigma_y - (b_1 + b_2) \sigma_z + 3b\sigma) - H_4 \dots\dots (1-6)$$

$$\text{但し } J_2' = \frac{1}{2} (a_{11} \sigma_x^2 + a_{22} \sigma_y^2 + a_{33} \sigma_z^2) + a_{66} \tau_{xy}^2 + a_{12} \sigma_x' \cdot \sigma_y' + a_{23} \sigma_y' \cdot \sigma_z' + a_{31} \sigma_z' \cdot \sigma_x'$$

$$H_2 = n_{f1} + n_{f2} \varepsilon_B^{nf3} + n_{f4} \varepsilon_s^{nf5} + n_{f6} \varepsilon^{nf7} \varepsilon_B + n_{f8} \varepsilon^{nf9} \varepsilon_s \dots\dots (1-7)$$

$$H_4 = n_{C1} + n_{C2} \varepsilon_B^{nC3} + n_{C4} \varepsilon_s^{nC5} + n_{C6} \varepsilon^{nC7} \varepsilon_B + n_{C8} \varepsilon^{nC9} \varepsilon_s \dots\dots (1-8)$$

但し

$$\varepsilon_B = \varepsilon_x^P + \varepsilon_y^P + \varepsilon_z^P, \quad 3\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \sigma_x' = \sigma_x - \sigma \text{ 等}$$

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3} [(\varepsilon_x^P)^2 + (\varepsilon_y^P)^2 + (\varepsilon_z^P)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^P)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^P)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{zx}^P)^2]}^{\frac{1}{2}} \dots\dots (1-9)$$

ε, σ は圧縮を正とする。

これらの係数のうち, $m, b_1, b_2, b, a_{11} \sim a_{66}, n_{f1} \sim n_{f9}, n_{C1} \sim n_{C9}$ はすべて入力値として与
えるものである。

降伏条件式をこのように複雑にしたのはプログラムに汎用性を与えるためである。たとえば
Mises の降伏条件に従う等方性体の計算をしようとする場合には

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{66} = 1.0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n_{C1} = K$$

他の係数をすべて 0 とすれば

$$f = \left\{ \frac{1}{2} (\sigma'_x{}^2 + \sigma'_y{}^2 + \sigma'_z{}^2 + 2 \tau_{xy}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} - K \cdots \cdots (1-10)$$

となって目的が達せられる。

降伏後の塑性ひずみの増分は塑性ポテンシャルを用いて次式によって求められている。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^P &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda \\ d\epsilon_y^P &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\lambda \\ d\gamma_{xy}^P &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\lambda \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1-11)$$

(但し $d\epsilon_x^P$ 等は塑性ひずみ増分)

これらの関係を満足させるために用いた降伏後の〔D〕マトリクス誘導方法については参考のために附録で述べておく。

降伏条件は一個の要素で 2 種類まで使えるようになっているので、降伏した岩盤が締固まって前と異なる強度で挙動するような場合も取扱える。この場合、第 1 の降伏条件による塑性から弾性に移行する条件は ϵ_B^P 又は ϵ_S^P がある値 (入力値) に達したときである。

要素応力の第 2 主応力 (圧縮を+として) がある値 C_0 (入力値) に達すると、ただちに第 2 の降伏条件によって降伏を判定するようになっている。これは土のようなもので、引張り応力に対しては強度が著しく小さいものに適用される。

要素の初期条件としては、応力、ひずみ、塑性に達しているかどうか等を与えることが出来、降伏の判定は、入力値と計算値との和を用いて行なわれるようになっている。又、塑性論に基づき、 $d\lambda < 0$ の要素は弾性として計算をやりなおすように作られてあるので、除荷時の場合、大部分の要素は弾性として挙動することになる。

1-4-3 入力データシート作成法

入力データシートは図-1.8 に示すようなものである。

直交異方性岩盤計算用のプログラムとかなり類似部分があるので使用に当ってはそちらも参照されたい。ここでは異なっている部分だけを主として述べることにする。

本計算のデータは汎用性のためパターンの種類が非常に多い。しかしながら極く特殊な問題でないかぎり大部分の係数は 0 となる。ただしある行の係数が全部 0 であるからといってそのカードを廃止することは出来ない。PATE, PATP, PATB, PATF, PATC カードはすべて同じ枚数だけなければならない。ある要素がどのパターンを用いるかは LMNT カードの P_1, P_2 に記入される値によって決まる。例えば P_1 が 2 であれば、その要素は PATE~PATC のどのカードも 2 枚目に記された値を係数とすることになる。

要素の降伏条件を 1 種類だけにしたいときは、 $P_1 = P_2$ とし、かつ $\epsilon_B^P, \epsilon_S^P$ を充分大きな値としておけばよい。

PATP~PATC のカードに記入する諸係数は、計算式の所で述べた降伏条件式をあらわす諸

係数と一致する。

${}^0\varepsilon_S, {}^0\varepsilon_B$ (実数) :

第1の塑性状態は $\varepsilon_S > {}^0\varepsilon_S$ になるか又は $\varepsilon_B > {}^0\varepsilon_B$ になったときに弾性体にもどる。

C_0 (実数) :

要素の第2主応力(圧縮応力を+として)が C_0 以下になるとその要素はただちに降伏し、 P_2 のパターンの降伏条件に従って挙動する。この係数は引張り応力に対して強度の小さい材料の研究に用いられるものである。このような条件を考慮しないときは C_0 を記入せず、CHECKカードの β の項を0としておけばよい。

LMNTデータ

CH3 (整数) :

要素が弾性から出発しないとき初期値を記入する。

無記入 弾性状態

- | | | |
|---|---|-------------|
| { | 2 | 第1の塑性状態 |
| | 3 | 第1の塑性後の弾性状態 |
| | 4 | 第2の塑性状態 |

$\varepsilon_S, \varepsilon_B$ (実数) :

$\varepsilon_S, \varepsilon_B$ (定義は計算式の所で説明済)の初期値がある場合には、その値を記入する。

1-4-4 出力データの見方

出力データの形式は異方性岩盤塑性プログラムの場合とほとんど同じであるので図と説明は割愛する。

IBM DATA SHEET

PROBLEM 直交異方性弾塑性計算

WRITTEN BY

PAGE / OF

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80										
1	ISW																																																																																									
2	計算名																																																																																									
3	PATE																																									$\left\{ \begin{array}{l} \text{ISW}=1 \text{ かつ } \text{check Print} \text{ かつ } \\ \text{ISW}=2 \text{ かつ } \text{no check Print} \end{array} \right\}$																																								$\left\{ \begin{array}{l} \text{ISW}=1 \text{ かつ } \text{no check Print} \\ \text{ISW}=2 \text{ かつ } \text{check Print} \end{array} \right\}$								
4	PATEIN																																																																																									
5	EX	XY	EZ	YX	YZ	YZ	G	Px	Py																																																																																	
6																																																																																										
7	PATP																																																																																									
8	Q11	Q12	Q13	Q21	Q22	Q23	Q33	Q66																																																																																		
9																																																																																										
10	PATB																																																																																									
11	E	b1	b2	C0	OE5	OE8	m																																																																																			
12																																																																																										
13	PATF																																																																																									
14	nf1	nf2	nf3	nf4	nf5	nf6	nf7	nf8	nf9																																																																																	
15																																																																																										
16	PATC																																																																																									
17	nc1	nc2	nc3	nc4	nc5	nc6	nc7	nc8	nc9																																																																																	
18																																																																																										
19	NODE																																																																																									
20	NODE	X座標	Y座標	座標回転角																																																																																						
21																																																																																										
22	LMNT																																																																																									
23	LMNT	L	J	K	CH3(m)	E21	E31	P1	P2	U	Ox1	Ox1	Gx1	Txy1																																																																												
24																																																																																										
25																																																																																										

図-1.8(A)

IBM DATA SHEET

PROBLEM 直交異方性弾塑性計算

WRITTEN BY

PAGE 2 OF

[illegible]

1-5 三次元弾性プログラム

1-5-1 プログラム能力概要

- (1) 本プログラムは三次元弾性体の計算を行なう。
- (2) 等方性弾性体だけでなく直交異方性体の計算も行なえる。
- (3) 使用可能要素は四面体要素及び六面体要素である。
- (4) 計算可能な節点数は2000個までである。
- (5) 連立方程式は unit 分割法を用い、1 unit に用いられる節点は50個迄可能である。
- (6) 比重を与えるだけで自重の計算が可能である。
- (7) 荷重の組合せは5種類まで可能である。
- (8) 節点の変位量を指定しての応力計算も可能である。
- (9) 節点にバネ定数を指定することも可能である。
- (10) 出力は節点変位、節点反力、要素ひずみ、要素応力、節点応力等である。
- (11) 計算時間は1 unit 当り50秒程度である。

1-5-2 計算式概説

本プログラムの要素剛性は線形分布をする変位をパターンとして誘導している。したがって四面体要素の中では応力値は一定である。2章2節で説明する主なマトリクスについてその内容を示せば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 [U] &= \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_\ell \\ v_\ell \\ w_\ell \end{bmatrix} \quad \dots (1-12) \\
 [A] &= \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & z_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & z_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_\ell & y_\ell & z_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_\ell & y_\ell & z_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix} \quad \dots (1-13) \\
 [\alpha] &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad \dots (1-14)
 \end{aligned}$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad \dots (1-15) \quad \dots (1-16) \quad \dots (1-17)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad \dots (1-18)$$

自重（慣性力）は（加速度）×（比重）×（要素体積）の値を4等分して要素各節点に加えている。

バネのある節点は要素剛性に入力したバネ定数を加えたものを節点の剛性としている。（ただし、 $K = \frac{P}{\delta} \cdot \Delta S$ （ ΔS :その節点の勢力の及ぶ面積）

主応力の計算は次式により求めている。

$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ の3根のうち、大きい順に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とする。ただし、

$$\alpha = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\beta = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad \dots (1-19)$$

$$\gamma = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2$$

主応力が各座標軸となす各度は次式で求めている。

$i = 1, 2, 3$, について

$$\cos \theta_{zi} = \frac{\sqrt{\{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i)\}^2}}{\sqrt{\{\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i)\}^2 + \{\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy} \cdot \tau_{yz}\}^2 + \{\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i) - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}\}^2}}$$

$$\cos \theta_{yi} = \left(\frac{\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i) - \tau_{xy} \tau_{zx}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i)} \right) \cos \theta_{zi}$$

$$\cos \theta_{xi} = \left(\frac{\tau_{zx}(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy} \tau_{yz}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i)} \right) \cos \theta_{zi} \quad \dots (1-20)$$

六面体要素が入力された場合、計算機はこれを自動的に5個の四面体要素に分割する。分割の方法には2種類あるが、そのどちらをとるかは入力で指定する。（入力説明参照）。出力は5個に分けた個々の要素の応力値が打出される。

1-5-3 入力データシート作成法

入力データシートは図-1.11に示すようなものである。

計算名(文字又は数字の組合せ)：

計算名を記入する。1行で書ききれない場合は2行にわたっても良い。

FEM3(文字)：

三次元計算のデータであることを示す。

PATT(文字) パターン数(整数 ≤ 10)：

パターンの種類の総数を記入する。

$C_{11} \sim C_{66}$ (実数)：

[D]マトリクスの成分をそのまま記入する。弾性定数 E 、ポアソン比 ν の等方性体の場合には、

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = \frac{E \cdot \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{他の係数は0とする。}$$

$\rho_x \sim \rho_y$ (実数)：

要素の単位重量($\rho_x = \rho_y = \rho_z$)

パターンカードは7枚をもって1組とする。したがってパターンの種類が3であれば、これら7枚の組合せを3種類記入することになる。

NODE(文字) 節点数(整数)：

総節点数(≤ 2000)を記入する。

NODE(文字) 節点番号(整数)；X座標 $\sim$ Z座標(実数)：

節点名及びそのXYZ座標を記入する。節点名は続き番号でなく、欠番が有っても良いが、必ず小さい順に記入してゆくこと。

座標系は必ず右手座標系とすること。

X方向変位 $\sim$ Z方向変位(実数)，X，Y，Z，(整数)：

その点が支点の場合にはX，Y，Z，に方向に応じて1を入れる。コロの場合は動かない方向にだけ1を入れる。初期変位を与える場合は、さらに各方向の変位を記入する。

その点がバネ支持の場合にはその支点のX，Y，Zの相当する方向に1の代わりに2を入れる。さらにNODE，節点名を書いたカードをもう1枚用意し，X方向バネ定数(41 $\sim$ 50カラム)，Y方向バネ定数(51 $\sim$ 60カラム)，Z方向バネ定数(61 $\sim$ 70カラム)を記入する。

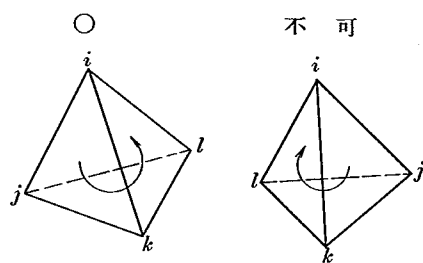
LMNT(文字) 要素数(整数)：

用いている要素の総数 < 3000 。

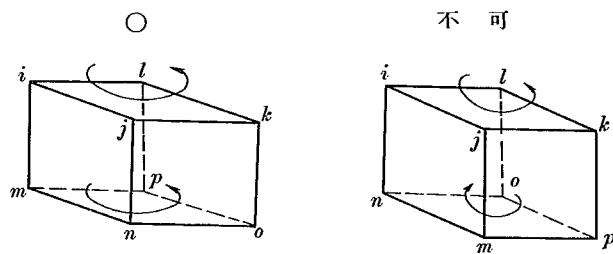
LMNT(文字) 要素番号(整数) $i \sim p$ (整数)：

要素名及び要素を構成する節点名を記入する。要素名は4000以下であれば続き番号でなくともよい。ただし、記入順序はユニット番号(後述)の小さい順でかつ同一ユニットの中では要素番号の小さい順に記入しなければならない。

ijk のつけ方は、四面体要素では図-1.9に示すように、 i 点から見たとき jk 点が反時計



图—1.9



图—1.10

方向にまわるように記入すること。六面体要素では $ijkl, mnop$, が図-1.10 で示すように反時計方向にまわるようにすること。

六面体要素は計算機の中で自動的に5個の四面体要素に分割している。分割の方法は図-1.11に示すように A, B の2通りある。 DIA に1を入れると A に分割, 何も記入しなければ B の分割を行なう。ある4点が2つの要素の境界にあるとき, 4点が平面上にある場合は問題がないが, 平面にないときは2つの要素は対角線を同じ方向にとっていないと境界面で要素間にすき間が出来たり, 重なり合っていたりすることになるので, よく注意して要素の分割法を考えること。さらに六面体要素は反対側の面の対角線の入り方は必ず逆方向に変わっていることに注意すること。

P_1 (整数):

パターン番号すなわち, 7枚1組で入れた $PATT$ データの何番目の組の係数を用いるかを記入する。

U (整数):

ユニット番号つまりその要素はどのユニットに属するかを記入する。

ユニットは最大50個まで使用出来る。

1ユニットの中の要素は最大60個まで用いることが出来る。6面体要素は要素数5とする。計算時間を早くするためにはユニット数は出来るだけ少ない方がよい。そのためには1ユニットの要素数を出来るだけ多くするとよい。

同一ユニットに属する節点数の制約は自分よりも前のユニットと共有する節点及び自分以外のユニットとは接しない節点の計が50個以内であることが必要。

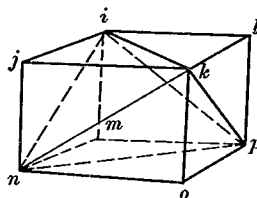
$LOAD$ (文字) 荷重種類数 (整数 ≤ 5):

$LDCN$ (文字) 荷重種類番号 (整数):

荷重種類毎に1から順にこのカードを作り, 以下にその荷重条件における荷重を記入してゆく。
 X 方向慣性力 $\sim Z$ 方向慣性力 (実数):

その荷重条件では自重又は慣性力を考えるときに記入する。単位は重力と同じものを1とする。例えば X 方向に自重, Y 方向に $k \cdot G$ の地震加速度が働くときは, X 方向慣性力 $= 1.0$, Y 方向慣性力 $= k$ (実数) である。

$DIA=1$ のとき



$DIA=0$ のとき

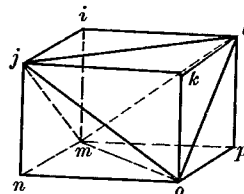


図-1.11

LOAD (文字) 節点番号 (整数) X方向荷重～Z方向荷重 (実数) :

各荷重種類毎に載荷されている節点名と荷重の各方向成分を記入する。符号は座標軸の方向を向いているものを正とする。

GO :

END (又は RESTERT) :

/* :

1-5-4 出力データの見方

出力データの例を図-1.13に示す。

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS :

次の行に計算名として入力データに記入した名前がそのまま出力される。

INPUT DATA (EXCEPT TITLE) :

入力データがそのまま打出される。入力ミスがなかったかどうかは、この出力をチェックすればわかる。

STRAINS AT THE ELEMENTS :

要素のひずみ値が荷重条件毎に出力される。

ELEMENT NODE :

要素の名前が打たれる。ただし六面体要素は5ヶの四面体要素から出来ているから各々の値を知るためにサフィクスを付けている。-5の値は六面体の最も中心部に分割される四面体要素である。

最初から四面体として入力された要素は要素名に-5が付いて1行だけで打出されるから区別が付く。

E-X : ϵ_x

E-Y : ϵ_y

E-Z : ϵ_z

G-XY : φ_{xy}

G-YZ : φ_{yz}

G-ZX : φ_{zx}

STRESSES AT THE ELEMENTS :

要素応力の出力、要素名の表示法はひずみと同じ

SIG-X : σ_x

SIG-Y : σ_y

SIG-Z : σ_z

TAU-XY : τ_{xy}

TAU-YZ : τ_{yz}

TAU-ZX : τ_{zx}

COORDINATES, FORCES AND DEFLECTIONS :

座標, 節点荷重, 節点変位の出力。

NODE : 節点名

X~Z : 節点の X, Y, Z, 各座標値

F-X, F-Y, F-Z : 節点の X, Y, Z 各方向荷重量

D-X, D-Y, D-Z : 節点の X, Y, Z 各方向変位量

STRESSES AT THE NODAL POINTS :

節点を共有する要素の応力値を平均して得た節点応力値

NODE : 節点名

S(X) : σ_x

S(Y) : σ_y

S(Z) : σ_z

T(XY) : τ_{xy}

T(YZ) : τ_{yz}

T(ZX) : τ_{zx}

PRINCIPAL STRESSES AT THE NODAL POINTS :

節点における主応力値及びその方向

NODE : 節点名

S1, S2, S3 : 第1主応力, 第2主応力, 第3主応力。

D1X : 第1主応力が x 軸となす角度 (度, 分)。

D1Y : " y "

D1Z : " z "

D2X : 第2主応力が x 軸となす角度 (度, 分)。

D2Y : " y "

D2Z : " z "

D3X : 第3主応力が x 軸となす角度 (度, 分)。

D3Y : " y "

D3Z : " z "

IBM DATA SHEET

PROBLEM 三次元弾性計算

WRITTEN BY

PAGE

OF

No.																																																																																
1	ISW																																																																															
2	計算名																																																																															
3	FEMS																																																																															
4	PATTEN																																																																															
5	C_{11} C_{12} C_{13} C_{14} C_{15} C_{16}																																																																															
6	C_{21} C_{22} C_{23} C_{24} C_{25} C_{26}																																																																															
7	C_{31} C_{32} C_{33} C_{34} C_{35} C_{36}																																																																															
8	C_{41} C_{42} C_{43} C_{44} C_{45} C_{46}																																																																															
9	C_{51} C_{52} C_{53} C_{54} C_{55} C_{56}																																																																															
10	C_{61} C_{62} C_{63} C_{64} C_{65} C_{66}																																																																															
11	P_x P_y P_z																																																																															
12																																																																																
13	NODE 節点数																																																																															
14	NODE 節点番号 X座標 Y座標 Z座標 X方向変位 Y方向変位 Z方向変位 X Y Z																																																																															
15																																																																																
16	LMNT 要素数																																																																															
17	LMNT 要素番号 i j k l m n o p P _i U _i																																																																															
18																																																																																
19	LOAD 荷重種類数5																																																																															
20	LOCN N-スロ 荷重のX方向倍率 Y方向倍率 Z方向倍率																																																																															
21	LOAD 節点番号 X方向荷重 Y方向荷重 Z方向荷重																																																																															
22																																																																																
23	GO																																																																															
24	END																																																																															
25	/*																																																																															

 THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS BY F.E. METHOD

3DI MENTION HARGE MODEL DAMKUZU 1970 1 10

 INPUT DATA (EXCEPT TITLE) *****

FEM3

PATT 1

12000	4000	4000			
4000	12000	4000			
4000	4000	12000			
			4000		
				4000	
					4000

			+2.0		
NODE	96				
NODE	1	0	0	0.25	1 1
NODE	2	0	0	0.50	1 1
NODE	3	0	0	1.00	1 1

STRAINS AT THE ELEMENTS

UNIT NUMBER 16

LOAD CONDITION 1

ELEMENT	NODE	E-X	E-Y	E-Z	G-XY	G-YZ	G-ZX
582-1		-0.66317E-02	-0.44119E-03	0.13957E-02	-0.47798E-03	-0.45017E-04	0.47844E-03
582-2		-0.64444E-02	-0.42181E-03	0.13690E-02	-0.37857E-03	-0.35103E-09	-0.51727E-03

STRESSES AT THE ELEMENTS

UNIT NUMBER 12

LOAD CONDITION 2

ELEMENT	NODE	SIG-X	SIG-Y	SIG-Z	TAU-XY	TAU-YZ	TAU-ZX
406-5		-0.73025E 02	-0.11509E 03	0.77263E 01	0.95333E 02	0.94661E 01	-0.14622E 02
407-5		-0.71726E 02	-0.11401E 03	0.68823E 01	0.94367E 02	0.42435E 01	-0.10118E 02

☒- 1.13(A)

COORDINATES, FORCES* AND DEFLECTIONS

LOAD CONDITION 2

NODE	X	Y	Z	F-X	F-Y	F-Z	D-X	D-Y	D-Z
1	0.9600E 02	0.3200E 02	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.72442E 00	0.25728E-01	0.0
2	0.9600E 02	0.3520E 02	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.72185E 00	0.25715E-01	0.0

STRESSES AT THE NODAL POINTS

LOAD CONDITION 1

NODE	S(X)	S(Y)	S(Z)	T(XY)	T(YZ)	T(ZX)
50	-0.29077E 02	-0.34257E 02	-0.36178E 01	0.23266E 02	-0.86220E 00	0.19333E 01
51	-0.33015E 02	-0.37559E 02	-0.23404E 01	0.31408E 02	-0.13562E 01	0.17612E 01

PRINCIPAL STRESSES* AT THE NODAL POINTS

LOAD CONDITION 1

NODE	S1	S2	S3	D1X	D1Y	D1Z	D2X	D2Y	D2Z	D3X	D3Y	D3Z
78	0.64348E 01	-0.75932E 01	-0.16560E 03	60 38	54 15	49 41	67 30	61 20	37 50	86 33	80 52	9 45
79	-0.45207E 01	-0.65728E 01	-0.12465E 03	100 38	98 39	12 47	101 43	100 5	15 34	92 3	85 41	4 46

1-6 二次元浸透流計算プログラム

1-6-1 プログラムの概要

浸透流は土木構造物の解析においていろいろな形で問題となるが、一般にダルシーの法則が成り立つものとしてラプラスの方程式の調和関数による数値解析、電気相似法や粘性相似法等の模型実験などで検討されてきた。ところが、ラプラスの方程式による解法においては境界条件が単純で等質体の場合を除いてはそれらを満足する調和関数を求めることが困難であり、また、模型実験は多大な費用や日時を要し技術的困難も伴う。そこで、近年電子計算機の発達により有効な解析手段として広く用いられるようになってきた有限要素法を浸透流の問題に適用する試みが多く、多くの研究者によってなされてきた。^{1), 2), 3), 4)}

当研究室においてもダムの解析において生じる広汎な浸透流の問題を解析するために従来の浸透流に関する考え方に検討を加え非常定浸透流、ダルシーの法則に従わない浸透流等についても解析できる有限要素法電子計算プログラムを作製した。

有限要素法で解析する際には相似法における模型の作製にかかわるものとしてその対象を表現するデータを入力しなければならない。すなわち、その形状およびそれを構成する物質の物理定数が必要である。浸透流の場合は一般に物理定数としては透水係数と空隙率がわかればよいわけであるが、上記のプログラムは異方性を考慮してあるので、透水係数として主軸の方向における透水係数およびその方向、空隙率として体積空隙率に加えて各方向における面積空隙率を現地のデータから決定する必要がある。実際問題として現地で得られるルジオン値等のデータからこれらの数値を決定するためには更に十分な考察が必要であろう。

模型の作製にあたるパターン、節点、要素データの決定がなされれば載荷条件にあたる水圧条

(脚注)

- 1) O.C. Zienkiewicz, P. Mayer and Y.K. Cheung :
"Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements"
ASCE, Vol 92, EM1, Feb 1966
- 2) R.L. Taylor and C.B. Brown : Darcy Flow
Solutions with Free Surface.
ASCE, Vol 93, HY2, March 1967
- 3) W.D. Liam Finn : "Finite Element Analysis
of Seepage through Dams
ASCE, Vol 93, SM6, NOV, 1967
- 4) R.E. Volker : "Nonlinear Flow in Porous Media
by Finite Elements"
ASCE, Vol 94, HY6, NOV, 1969

件, ポテンシャルデータ等を与える。

本プログラムは浸透流の二次元解析を行なうものであり要素の透水係数の変更による浸潤面の大まかな追跡およびダルシーの法則に従わない浸透流についても解析可能である。

理論的説明は土木研究所資料第 558 号に示す。

1-6-2 データ入力様式

図-1.14 (A)(B)に示す。

1-6-3 入力方法

入力データ作製方法について順次説明を行なう。

(1) CONT

(A) 浸潤面を追跡する際、繰返計算ごとの中間結果の P, R のプリントをさせる場合は 1, させない場合はブランク。

(B) CG法における残差ベクトルの 2 乗和を指示する。ブランクの場合は 1.0×10^{-14} がとられる。

(C) プログラムチェック用。通常ブランク。

(2) 計算名称

アルファベットの太文字で書く。

計算名称カードの終りを示すサインとして行を変えて PATT を書く。

(3) PATT

N は、透水係数の異なる岩盤からなる場合その種類数。最大 10 種類とする。

k_{11} , k_{22} は主軸に関する見かけの透水係数で cm/sec で与える。等方性の場合は $k_{11} = k_{22}$ 。

α は k_{11} を与える透水係数の主軸と x 軸の正方向とのなす角度で反時計回りを正とする。

$10^\circ 30'$ は 10.5 で与える。

γ , β_{11} , β_{22} は体積空隙率および各主軸に関する空隙率で等方性の場合は $\gamma = \beta_{11} = \beta_{22}$ 。

k_1 , k_2 , k_3 , λ_1 , λ_2 , λ_3 , q_1 , q_2 , q_3 , は流速が大きくてダルシーの法則に従わない浸透流の解析を行なう際に必要な係数で、これらについては土研資料に述べてある。ダルシーの法則に従う一般的な浸透流の解析を行なう場合は、これらの欄は空欄としておけばよい。

(4) NODE

節点数は最大 400, 節点番号は小さい順に並べ 999 番までの数字を用いてよい。座標は右手系にとり単位はメートルで入れる。座標原点は適当な場所にとればよい。

(5) LMNT

要素数は最大 660 個。番号のつけ方は節点の場合と同じ。 i , j , k は反時計回りにつける。パターン番号は PATT データの何番目の行のパターンかを書く。

PROBLEM 二次元浸透流計算

PAGE 1 / OF 1

图-1.14(A)

PROBLEM 二次元漫透流計算

WRITTEN BY

PAGE 2 OF

[illegible]

(6) 水圧条件

PP 水圧条件数。たとえば、ダム の浸透流の計算で種々の水位について行なうような場合そのケース数を書く。最大10。

PRES 水圧が既知の境界について水圧をメートルで与える。水圧を入力しない境界は不透水という条件になる。節点番号は小さい順に入れる。水圧データ数は最大100。

浸潤面を追跡する場合は仮定された浸潤面上の節点の30カラムにサイン1をたてる。

RINT 流出入量が既知の場合、節点流量に換算して m^3/sec で与える。流入を正、流出を負とする。

PEND 水圧データカードの終りを示す。

(7) POTTE

重力を考慮する一般の場合は $G=1$ として、ポテンシャル $h=P+Z$ の Z を計算するために必要な節点データを与えた座標軸と基準水平線との関係を与える。

ZEROはこの基準水平線と座標原点との距離、 θ はこの直線と x 軸とのなす角度で基準水平線から反時計まわりを正とする。

$Z = x \sin \theta + y \cos \theta - \text{ZERO}$ で表わされる。

ZEROはメートル、 θ は α と同様に表わす。

たとえば、ダム基礎の浸透流の計算をする場合は、ダム基盤を基準水平線として考えればよく、この基準水平線が $ax+by=c$ という式で表わされれば、

$$\text{ZERO} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

となる。

図-1.15のような場合は、 $\text{ZERO}=C$ 、 $\theta=0$ となる。重力を考えない場合は $G=0$ とし他はblankでよい。

(8) REPE

これは、浸潤面を有する場合やダルシーの法則に従わない浸透流の解析を行なう場合にのみ必要で一般の場合は空欄でよい。

F.S. 浸潤面を求める場合はサイン1をたてる。

R₁ 浸潤面を求める場合の繰返し計算上限回数。

K.E. 運動エネルギーを考慮する場合はサイン1

をたてる。

R₂ 運動エネルギーを考慮する場合の繰返し計算上限回数、最大10。

ϵ 浸潤面を $P=0$ 法で追跡する場合の収束判定値。

K.C. 運動エネルギーを考慮する際の繰返し計算ごとの h の誤差の最大値。

(9) GO

データのチェックのみ行なう場合は不要。

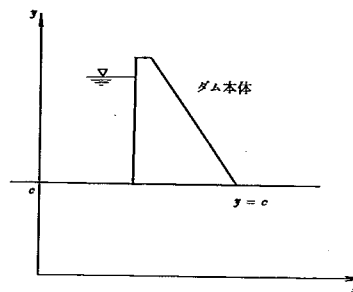


図-1.15

(10) END

1 ケース分のデータの構成は計算名称カードから $G\bar{O}$ カードまでで、ケース数が複数の場合は各ケースの間に RESTART カードを挿入。最後のケースの終りには END カードが必要。

1-6-4 計算例

図-1.16 に示す様な堤体の浸潤面を求める場合について具体的に述べてみる。

堤体材料は等方性で透水係数が 10^{-3} cm/sec 、体積空隙率 0.4 とする。

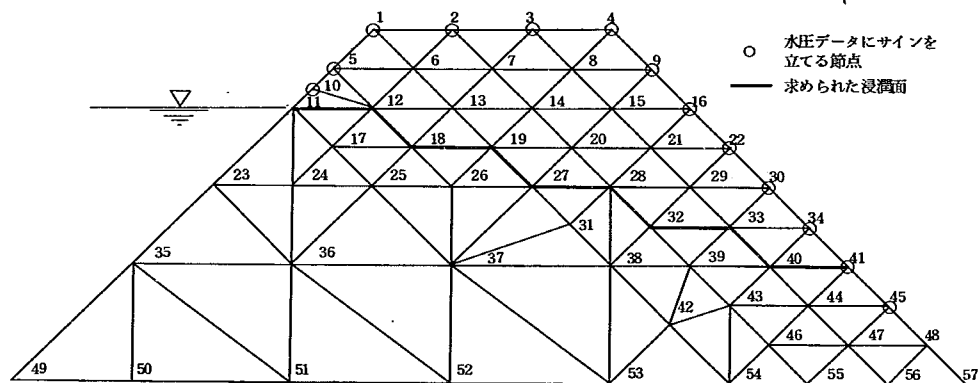


図-1.16

(1) 透水係数パターンの作製

等方性であるから k_{11} , k_{22} に 10^{-3} , γ , β_{11} , β_{22} に 0.4 を入れその他はblankでよい。

(2) 水圧条件

仮定された浸潤面である○印をつけた節点については 30 カラム目にサインをたてる。節点 48, 57 についてはサインをたててもさしつかえないが、明らかに流出点となるから $P=0$ としてサインをたてない方が繰返し回数が少くなり好ましい。

(3) $P\bar{O}TE$

重力を考慮するから $G=1$ 。ポテンシャル 0 面は $y=0$ 面と一致しているから $ZER\bar{O}=0$ 。
 $\theta=0$ 。

(4) $REPE$

浸潤面を追跡するから $F.S=1$ 。この程度の要素分けの場合は上限繰返し回数として $R=10$ を与えておく。その他はblankでよい。

1-6-5 出力の説明

(1) 入力データ

(2) 計算結果

Hはポテンシャル, Pは水圧, Rは流出入量で, 正が流入, 負が流出を表わす。B(X), B(Y)は動水勾配を物体力と考えて節点力に換算して表わしたもので, 要素分けが同じなら応力計算においてそのまま節点力として用いられる。

VP(X), VP(Y), VP(XY), DEGPは節点における見かけの流速およびその方向で, 一般に浸透流速として扱われているのはこの値である。VPR(X), VPR(Y), VPR(XY), DEGPRは見かけの流速をそれぞれの方向の面積空隙率で割って求めた実流速およびその方向。

VE(X), VE(Y), VE(XY), DEGEは要素内の見かけの流速およびその方向。VER(X), VER(Y), VER(XY), DEGRは要素内の実流速およびその方向。

単位は, 流速は cm/sec , H, Pはメートル, Rは m^3/sec , B(X), B(Y)は ton である。角度は x 軸の正方向から反時計まわりに度, 分で表わしてある。

(3) PURSUIT OF FREE SURFACE

浸潤面の位置を表わす結果

THE NUMBER OF ITERATION 浸潤面が求まるまでの繰返し計算回数。

THE NUMBER OF CHANGED LASTLY 安定した解が求まれば0。

ELEMENT NO. 浸潤面より上の要素の番号。

NODAL POINT NO. 浸潤面上の節点の番号。

(4) CONVERGENCE OF C.G. METHOD

各繰返し計算における誤差の2乗和。

最後に浸潤面追跡過程を表わす。KBJ は透水係数変更作業数。

TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS OF SEEPAGE FLOW BY F.E.METHOD

FREE SURFACE IN THE DAISETSU-DAM NODE=203 6/04,*70 1 2

INPUT DATA (EXCEPT TITLE)

INTERMEDIATE RESULT --H,P,R

PRESSURE CONDITION 1

ITER. NO. 0

NODE	H	P	R
1	7.6587E 01	-5.4133E 00	0.0
2	7.6818E 01	-6.8248E-01	0.0
3	7.6575E 01	-9.2519E-01	0.0

COORDINATES,H,P,R,BODY FORCES AT THE NODES

PRESSURE CONDITION 1

NODE	X	Y	H	P	R(*E-2)	B(X)	B(Y)
1	2.3500E 01	8.2000E 01	0.0	-8.2000E 01	0.0	0.0	0.0
2	2.1500E 01	7.7500E 01	0.0	-7.7500E 01	0.0	0.0	0.0
3	2.3500E 01	7.7500E 01	0.0	-7.7500E 01	0.0	0.0	0.0

THE SPEED OF A CURRENT AT THE ELEMENTS

PRESSURE CONDITION 1

LMNT	VE(X)	VE(Y)	VE(XY)	DEGE	VER(X)	VER(Y)	VER(XY)	DEGER
1	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0
2	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0
3	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0

THE SPEED OF A CURRENT AT THE NODES

PRESSURE CONDITION 1

NODE	VP(X)	VP(Y)	VP(XY)	DEGD	VPR(X)	VPR(Y)	VPR(XY)	DEGPR
1	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0
2	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0
3	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0 0

PARSUIT OF FREE SURFACE

PRESSURE CONDITION 1

THE NUMBER OF ITERATION = 15

THE NUMBER OF CHANGED LASTLY = 10

ELEMENT NO.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

CONVERGENCE OF C.G.METHOD

M=	R=
89	0.775910D-14
63	0.918415D-14
61	0.570855D-14

ITERATION NO.=	1	KBJ=	999								
	1	2	3	4	5	6	8	10	11	12	
	13	14	22	201	202	206	230	231	232		

☒-1.17(B)

1-7 三次元浸透流計算プログラム

1-7-1 プログラムの概要

本プログラムは浸透流の三次元解析を行なうものであり要素の透水係数の変更による浸潤面の大きな追跡も可能である。

1-7-2 データ入力様式

図-1.18 (A), (B)に示す。

1-7-3 入力方法

(1) CONT

(D)再分割した要素の流速をプリントさせる場合は1, させない場合はブランク, その他は1-6のプログラムと同じ。

(2) 計算名称

アルファベットの太文字で記し, 終りに行をかえて FES 3 を付す。

(3) PATT

一般に透水係数は主軸に関する値 k_{11}, k_{22}, k_{33} およびその各々の主軸の方向余弦 (λ_1, μ_1, ν_1) (λ_2, μ_2, ν_2) 面積空隙率 $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ および体積空隙率 γ が解っているものとする。

$t_{xx}, t_{yy}, \dots, t_{yz}$ は次式で示す摩擦抵抗力和流速の関係を表わすマトリックスの各成分で

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \gamma \rho g \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$t_{xx} = \lambda_1^2 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \lambda_2^2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \lambda_3^2 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

$$t_{yy} = \mu_1^2 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \mu_2^2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \mu_3^2 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

$$t_{zz} = \nu_1^2 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \nu_2^2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \nu_3^2 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

$$t_{xy} = \lambda_1 \mu_1 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \lambda_2 \mu_2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \lambda_3 \mu_3 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

$$t_{xz} = \lambda_1 \nu_1 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \lambda_2 \nu_2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \lambda_3 \nu_3 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

$$t_{yz} = \mu_1 \nu_1 \frac{\beta_{11}}{\gamma} \frac{1}{k_{11}} + \mu_2 \nu_2 \frac{\beta_{22}}{\gamma} \frac{1}{k_{22}} + \mu_3 \nu_3 \frac{\beta_{33}}{\gamma} \frac{1}{k_{33}}$$

等方性の場合は $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$

$$t_{xx} = \frac{\gamma}{k} \quad t_{yy} = \frac{\gamma}{k} \quad t_{zz} = \frac{\gamma}{k} \quad t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0$$

PROBLEM 三次元浸透流計算

WRITTEN BY

PAGE / OF

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80										
1	CONT										A										B										C										D																																																	
2																																																																																										
3	計算名称																																																																																									
4																																																																																										
5	FESS																																																																																									
6																																																																																										
7	PART N																																																																																									
8																																																																																										
9	txx										txy										tzz										txy										txz										tyz										} N 枚																													
10																																																																																										
11																																																																																										
12	γ										β_x										β_y										β_z										} N 枚																																																	
13																																																																																										
14																																																																																										
15																																																																																										
16	MODE										節点数																																																																															
17																																																																																										
18	MODE 要素番号										X座標										Y座標										Z座標																																																											
19																																																																																										
20																																																																																										
21	LMNT										要素数																																																																															
22																																																																																										
23	LMNT 要素番号										i										j										k										l										m										n										o										p									
24																																																																																										
25																																																																																										

图-1.18(A)

PROBLEM 三次元浸透流計算

WRITTEN BY

PAGE 2 OF

[illegible]

面積空隙率の計算

$$\beta_x = |\lambda_1| \beta_{11} + |\mu_1| \beta_{22} + |\nu_1| \beta_{33}$$

$$\beta_y = |\lambda_2| \beta_{11} + |\mu_2| \beta_{22} + |\nu_2| \beta_{33}$$

$$\beta_z = |\lambda_3| \beta_{11} + |\mu_3| \beta_{22} + |\nu_3| \beta_{33}$$

等方性の場合 $\beta_x = \beta_y = \beta_z = r$

(4) NÖDE

節点数は最大 500, 節点番号は小さい順に並べ 999 までの数字を用いてよい。座標は右手系にとり単位はメートルで入れる。

(5) LMNT

要素は四面体, 三角柱, 六面体で入力し, その最大数は 500 とする。三角柱, 六面体は以下のように再分割し, 分割後の四面体の数は最大 2,000。1 点に集まる分割後の四面体の数は最大 40, *non-zero matrix element* の数は最大 24 になるように分割する。これらの条件は通常な分割なら満足されるが, これらの条件を満足しない場合は以下に示す再分割を見てチェックし修正しなければならない。

パターン番号は PATT データの何行目のパターンかを書く。

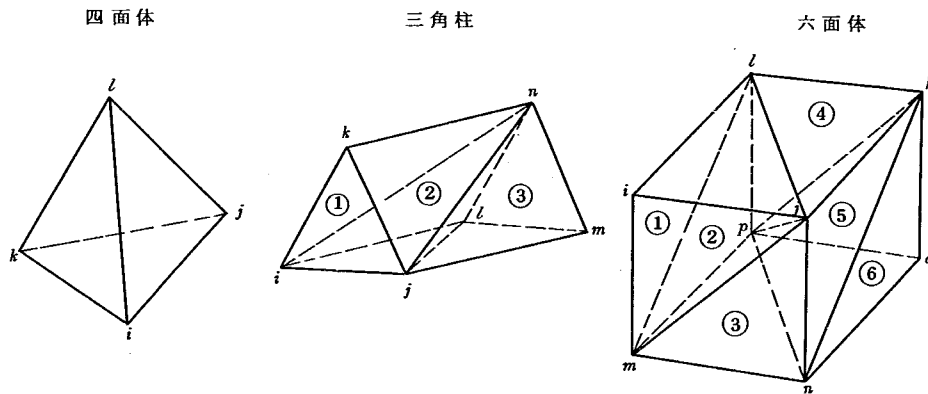


図- 1.19

1. 四面体

節点の並べ方は最後に付す節点から見て反時計まわりとする。たとえば図- 1.19 のように l から見て反時計まわりになるように $i j k l$ の順に並べる。

2. 三角柱

端面に向かって (どちらの面からでも可) 反時計まわりに $i j k$ と付し, それに対応する頂角に $l m n$ と付す。いずれの辺も平行である必要はない。再分割は図- 1.19 のように行ない, (1) $j k n i$ (2) $j n l i$ (3) $j l n m$ とならべる。

3. 六面体

任意の面に向って反時計まわりに $i j k l$ と付し それに対応する頂角に $m n o p$ と付す。

再分割は図-1.19 のように行ない

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| (1) $m j l i$ | (2) $m p l j$ | (3) $m n p j$ |
| (4) $l p k j$ | (5) $k p n j$ | (6) $k n p o$ |

再分割後は分割前の要素番号を 10 倍したものに上記の番号を加えて その四面体の要素番号とする。

(6) 水圧条件

PP 水圧条件数, 同一の要素データで何ケースかの水圧条件を与える時, そのケース数を与える。

PRES 各ケースについてまずそのケースの水圧データの数を示し以下に節点番号, 水頭 (単位メートル) を示す。浸潤面を追跡する場合は仮定した浸潤面上の節点の 30 カラムにサイン 1 をたてる。

水圧データのない境界面は不透水として扱われる。

RINT 流入 (出) 量データ

特殊なケースではあるが流入 (出) 量が既知の場合について計算する時に用いる。単位は m^3/sec で入れる。

PEND 水圧データの終りを示すカード

(7) POTTE

重力を考慮する一般の場合は $G=1$ としてポテンシャル $h=P+Z$ の Z を計算するために必要なデータで節点データを与えた座標軸と基準水平面との関係を与える。

ZERO はこの基準水平面と座標原点との距離, λ, μ, ν , はこの平面の法線の方法余弦。

節点データの座標に対してポテンシャル 0 の平面が $Ax+B.y+C.z=D$ で与えられたとすると

$$ZERO = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

たとえば, $Z=0$ 面でポテンシャル 0 平面なら $A=0, B=0, D=0$, であるから, $\lambda=0, \mu=0, \nu=1, ZERO=0$ である。重力を考慮しない場合は $G=0$ とし, 他はblankでよい。

(8) REPE

F.S 浸潤面を追跡する場合は 1, 追跡しない場合は 0 とする。

R1 浸潤面追跡の際の繰返し計算上限回数。

GO END については前記プログラムと同じ。

1-7-4 計算例

図-1.20 (A), (B), (C) に示す様な堤体の浸潤面を求める場合について具体的に述べてみる。破線部分は入力データを減らすために最初から省略した。

堤体材料は等方性で透水係数が 10^{-3} cm/sec, 体積空隙率 0.4 とする。

(1) 透水係数パターンの作製

等方性の場合

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = \frac{r}{k} = 4 \times 10^2, \quad t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0$$

$$r = \beta_x = \beta_y = \beta_z = 0.4$$

(2) 水圧条件

水圧は水のたまっている上流境界面にのみ与え、丸印をつけた 4~18, 34, 35, 36 97, 98, 99 には 30 カラム目に仮定された浸潤面としてのサイン 1 をたてる。109, 110, 111, 136, 137, 138 にもサインをたててもさしつかえないが、明らかな流出点についてはその水圧、この場合は $P=0$ を与えサインをたてない方が繰返し計算回数が少なくなり好ましい。RINT は入力しないから、blank でよい。

(3) POTE

1-7-3, (7) に示した例と同じである。

(4) REPE

浸潤面の追跡を行なうから $F.S = 1$ 。繰返し上限値は要素分けが比較的粗いから $R_1 = 10$ を入れておく。

1-7-5 出力説明

(1) 入力データ

(2) 計算結果

前記プログラムと同様であるが、VP は節点の見かけの流速、VE は入力した要素内の再分割された四面体の見かけの流速の平均値。

(3) PURSUIT OF FREE SURFACE

浸潤面の位置を表わす結果

THE NUMBER OF ITERATION 浸潤面追跡計算の繰返し回数

THE NUMBER OF CHANGED LASTLY 安定した解が求まれば 0。

DIVIDED ELEMENT NO. 浸潤面より上にある再分割された要素の番号

NODAL POINT NO. 浸潤面上の節点の番号

最後にどのような過程で解が求まったかが示してある。

図-1.21, 1.22 (A), (B), (C) はこの結果を表したものである。丸をつけた節点が浸潤面上の点としてアウトプットされている点であり、実線がそれらの点における水圧をもとに修正して求めた浸潤面である。Ⅱ, Ⅲ断面では浸潤面と離れたところの点がアウトプットされているが、これは再分割のためであり、アウトプットされた点を結んだ線が必ずしも真の浸潤面に近いも

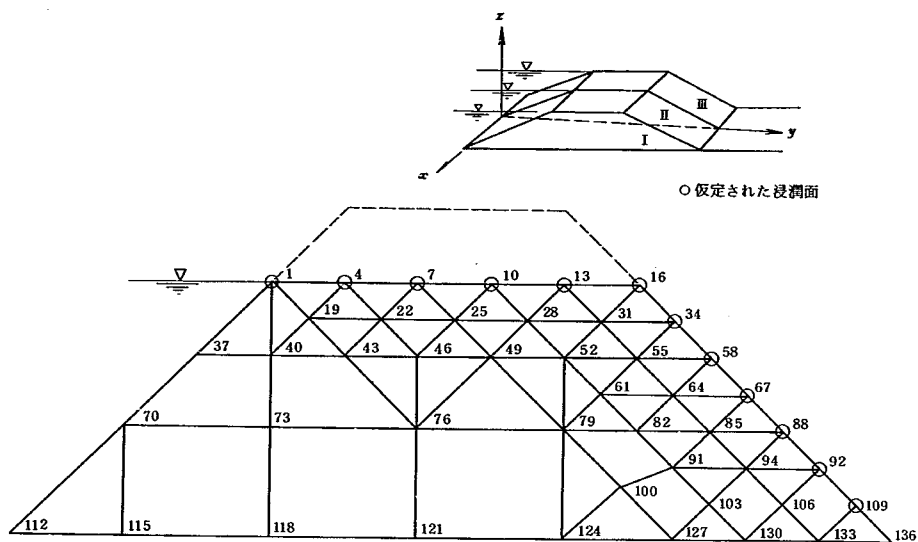


図-1.20(A) 断面 I

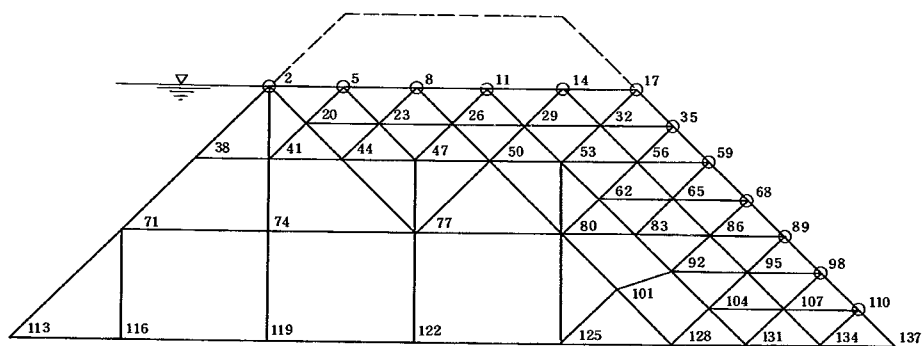


図-1.20(B) 断面 II

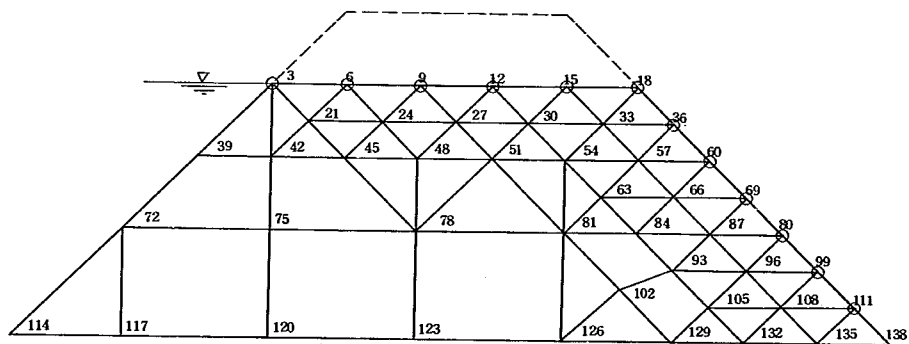


図-1.20(C) 断面 III

のでないことに注意を要する。

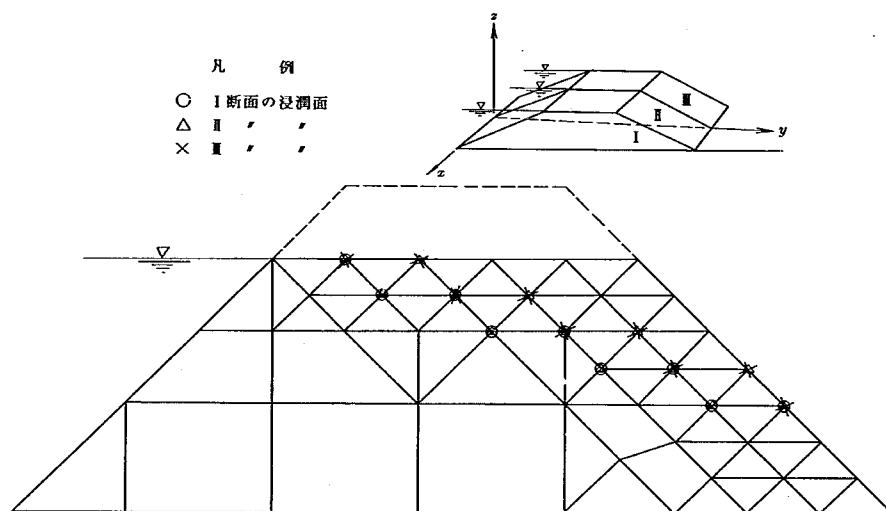


図- 1.21

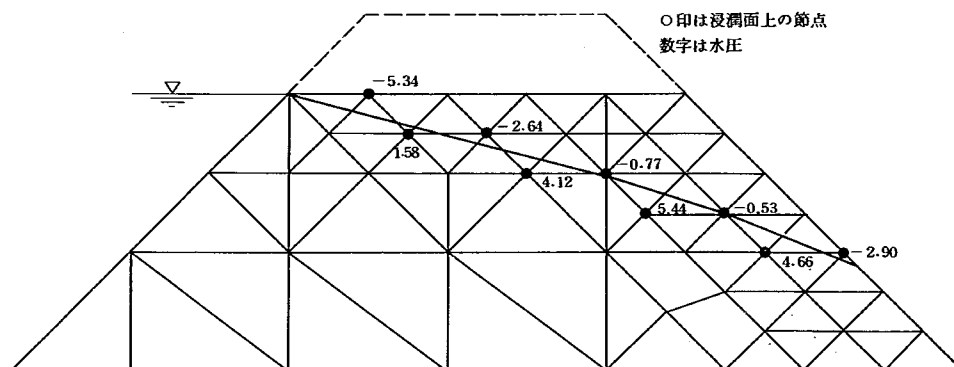


図-1.22(A) 断面 I

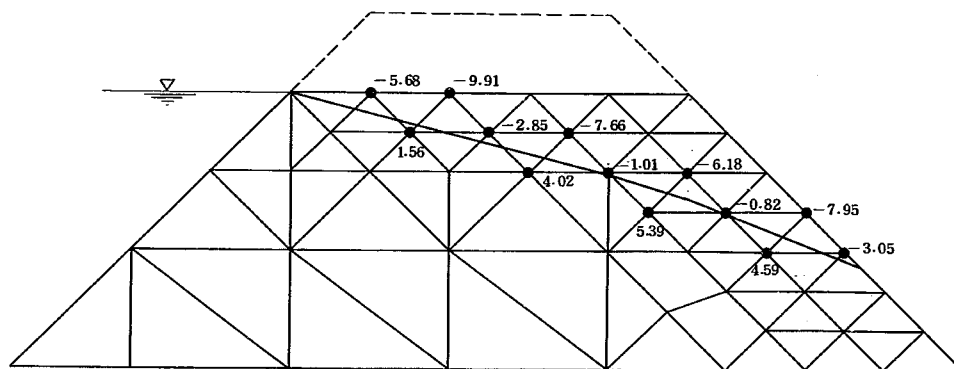


図-1.22(B) 断面 II

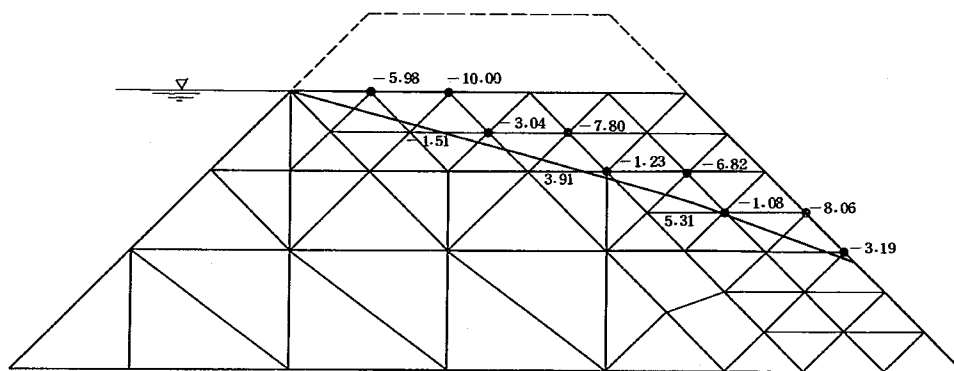


図-1.22(C) 断面 III

 THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF SEEPAGE FLOW BY F.E. METHOD

THREE DIMENTIONAL FLOW CHECK DATA NO 2

 INPUT DATA (EXCEPT TITLE)

CONVERGENCE OF C.G. METHOD

M= R=
 0 0.171742D-05
 1 0.563169D-06

COORDINATES, H, P, R

PRESSURE CONDITION 1

ITER. NO. 0

NODE	X	Y	Z	H	P	R
1	0.0	-1.0000E 00	6.0000E 00	0.0	0.0	-5.000E-07
2	0.0	0.0	6.0000E 00	0.0	0.0	-5.000E-07

COORDINATES, H, P, R, BODY FORCES AT THE NODAL POINTS

PRESSURE CONDITION 1

ITER. NO. 0

NODE	X	Y	Z	H	P	R	B(X)	B(Y)	B(Z)
1	0.0	-1.0000E 00	6.0000E 00	0.0	0.0	-5.000E-07	8.333E-02	0.0	8.333E-02
2	0.0	0.0	6.0000E 00	0.0	0.0	-5.000E-07	1.667E-01	0.0	1.667E-01

THE SPEED OF A SEEPAGE FLOW AT THE NODAL POINTS

PRESSURE CONDITION 1

ITER. NO 0

NODE	VP(X)	VP(Y)	VP(Z)	VP	DEGP(X)	DEGP(Y)	DEGP(Z)
1	1.000E-04	0.0	1.000E-04	1.414E-04	45 0	90 0	45 0
2	1.000E-04	0.0	1.000E-04	1.414E-04	45 0	90 0	45 0

THE SPEED OF A SEEPAGE FLOW AT THE ELEMENTS

PRESSURE CONDITION 1

ITER. NO. 0

LMNT	VE(X)	VE(Y)	VE(Z)	VE	DEGE(X)	DEGE(Y)	DEGE(Z)
1	1.000E-04	0.0	1.000E-04	1.414E-04	45 0	90 0	45 0
2	1.019E-04	-9.588E-07	9.810E-05	1.414E-04	43 54	-89 36	46 5

图- 1.23(A)

PARSUIT OF FREE SERFACE

PRESSURE CONDITION 1

END

ITERATION NO.= 1-----LMNT-----										
31	32	41	42	51	52	53	61	62	63	
71	72	73	81	82	83	91	92	93	101	
102	103	171	172	191	192	211	212	221	222	
631	632	641	642	651	652	653	661	662	663	
671	672	673	681	682	683	691	692	693	701	
702	703	781	782	801	802	821	822	831	832	
-----NODE-----										
4	5	6	8	9	22	23	25	26	27	
28	29	30	31	32	33	35	36	49	50	
52	53	55	56	58	59	60				

图-1.23(B)

1-8 非定常浸透流計算プログラム

1-8-1 プログラムの概要

本プログラムが前記二次元解析プログラムと本質的に異なる点は、浸潤面における条件式を考へることにより浸潤面上の節点の流出入量に新たな解釈を加え水位の変化する場合の浸潤面の追跡を可能にしたことである。これに加えて前記プログラムの改良として節点を移動することによる浸潤面の厳密な追跡、ブロック分けすることによる透水係数が急変する堤体の浸潤面追跡、および剛性マトリックスに少し手を加えることによる軸対称問題の解析等をも行なえるようにした。理論的説明は土木研究所報告 142 号の 1 に示す。

1-8-2 データ入力様式

図-1.24 (A),(B)に示す。

1-8-3 入力方法

入力方法は前記二次元解析プログラムに準ずる点が多いが、上述した相違により入力方法が変わった部分についてのみ以下に述べる。

(1) REPE

$F.S=0$ は 1.6 のプログラムと同じ浸潤面のない定常問題。

$F.S=1$ は 1.6 のプログラムと同じ方法による浸潤面の追跡。

$F.S=2$ は節点を移動する方法による浸潤面の追跡。

$F.S=3, 4, 5$ は非定常問題を行なう場合。

非定常問題の等価節点流量 $[Q]$ は次式で表わされる。

$$[Q] = [K][H] + [F] \frac{\partial}{\partial t} [H] + [P] \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

$F.S=3$ は右辺の第一項の節点のポテンシャルのみを考慮した場合

$F.S=4$ は右辺の第二項の節点のポテンシャルの時間的変化までを考慮した場合

$F.S=5$ は右辺の第三項の節点の加速度の影響までを加味した場合

についての解析を行なう。

R_1 は $F.S=1, 2$ 法における各ブロックに対する繰返し計算上限回数。

R_2 は $F.S=1, 2$ 法における全繰返し計算上限回数。

1 ブロックの場合は $R_1 = R_2$ である。

e $F.S=2$ 法におけるポテンシャル h の誤差の上限値。

S 軸対称問題の場合はサイン 1 をたてる。

(2) POTE

$F.S=2, 3, 4, 5$ の場合は $\theta=0$ で入力すること。

PROBLEM 非定常浸透流計算

WRITTEN BY

PAGE / OF

[illegible]

PROBLEM. 非定常浸透流計算

PAGE 2 OF _____

No.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80																																																				
1	LMN:TH		要素数																																																		
2																																																					
3	BL:K		元番号		要素数																																			ブロック数が必要													
4																																																					
5	LMNT		要素番号		i		j		k				パターン番号																																								
6	(																																																				
7																																																					
8	PP				水圧条件数																																			水圧条件数が必要													
9																																																					
10	PRCN				水圧条件番号																																																
11																																																					
12	PRESH				水圧データ数																																																
13																																																					
14	PRES		節点番号		P (水頭)																																																
15																																																					
16																																																					
17	WLT:V				時間のステップ		変動量				アウトプット指示																																										
18																																																					
19																																																					
20	R:INT				流入(入)量データ数																																																
21																																																					
22	R:INT		節点番号		流出(入)量																																																
23																																																					
24	GO																																																				
25	END																																																				

(3) PATT

ち、 ξ は $F.S = 4, 5$ の計算に必要な浸透水及び透水層の圧縮率で m^2/ton で入力する。

(4) NODE

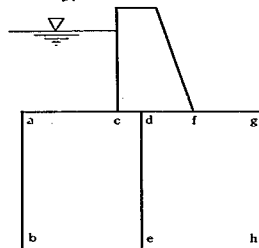
節点数は1ブロックに最大400、総数は最大1,000である。ブロック分けを行なった場合は境界上の節点についてどのブロックに属するかのサインを、節点を移動して浸潤面を追跡する場合は可動点と固定点のサインをたてる必要がある。

以下に $F.S = 0 \sim 5$ 法のサインのたて方について順次具体的に説明する。

1. $F.S = 0$ 法

これは従来と同じ浸潤面のない定常問題を行なう場合であるが、図-1.25のようにブロック分けすることにより節点数が非常に多い場合でも計算できる。

F.S.=0法



カラム 辺	38	40
a c	1	1
d e	1	2
f g	2	

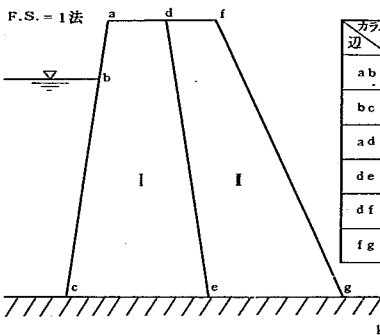
(サインをたてない境界面上の節点是不透水として扱われる)

図-1.25

2. $F.S = 1$ 法

これは従来と同じ方法で透水係数を変更することにより大まかに浸潤面を求める方法である。上流より下流の方が透水係数大きい場合は、図-1.26のようにブロック分けを行なう。

F.S.=1法



カラム 辺	38	40
a b	1	1
b c	1	1
a d	1	
d e	1	2
d f	2	
f g	2	

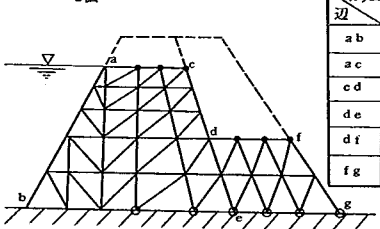
$k_x < k_y$

図-1.26

3. $F.S = 2$ 法

$F.S = 1$ 法で示したようなケースについて節点を移動して厳密に浸潤面を求めようとする場合は、図-1.27のようにあらかじめ $c d$ のように段をつけて要素分けをしておく必要があり、 $c d$ 間には少なくとも2節点を設ける。節点番号は計算例で示すように上流から下流に向かって順番につける。

F.S.=2法



カラム 辺	38	40
a b	1	1
a c	1	
c d	1	
d e	1	2
d f	2	
f g	2	

● 48カラムにサイン1
○ 50カラムにサイン2
(点dにはサインをたてない)

図-1.27

4. $F.S = 3, 4, 5$ 法

$F.S = 3, 4, 5$ 法を行なう場合はあらかじめ、 $F.S = 2$ 法により浸潤面を求めてから非定常計算に入る。 $F.S = 2$ 法と同様に要素分けする必要がある場合は

水面下の部分についても可動点と固定点を設けておく必要がある。水位を上昇させる場合は水位上昇後、上流面にぶつかる可能性のある可動点には38および40カラムにサイン1をたてる。また節点是对应する可動点と固定点を結ぶ直線上を移動するので可動点と固定点を結ぶ直線が可動点の上限値以下で交差してはならない。

(5) BOUN

$F.S = 2 \sim 5$ 法で可動点のサインをたてた節点についてその y 座標の上限値を与える。

この上限値とは浸潤面が物理的にそれより上がり得ない高さで、対応する可動点と固定点を結んだ点が堤体表面と交わる点の y 座標および最高水位を考えれば良い。

具体的には計算例に示す。

(6) 要素データ

LMNTH 要素の総数。最大1500。

BLÖK 最初にブロックナンバー、次にそのブロック内の要素数。最大5ブロック。

(7) 水圧データ

PP 水圧条件数

PRCN 何ケース目の水圧データかの番号。

WLT V 非定常問題の場合水位の変動を入力する。時間は分、変動量はメートルで与え、

上昇を正、下降を負とする。40カラムにはその時の計算結果をアウトプットさせたいときサイン1をたてる。サインをたてない場合は可動点の x 、 y 座標のみアウトプットする。

1-8-4 計算例

要素分けおよび節点データの作り方が少し複雑なので $F.S$ 2法と $F.S$ 3法について具体例を示す。

(1) $F.S$ 2法

図-1.28に示すような堤体の浸潤面を厳密に求める場合。

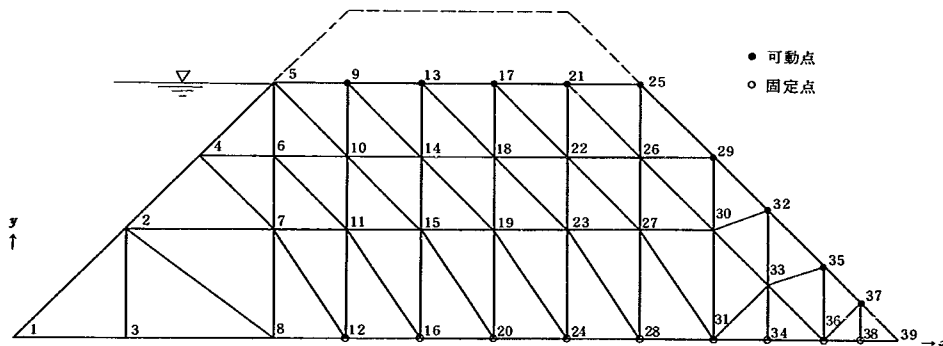


図-1.28

1. 要素分けおよびナンバリング

図に示すように浸潤面を仮定し（BOUNデータと固定点の間ならどこでもよい）浸潤面上の節点に可動点のサインをたてそれに対応する点に固定点のサインをたてる。

節点番号は可動点と固定点の対応が決まれば図に示すように小さい番号順に並べ固定点のつぎには必ず次の可動点が続くものとする。

2. BOUNデータ

可動点についてその上限値を与えるわけであるが、この場合は可動点を上流面水位および下流面上にとってあるので、節点の y 座標をそのまま与えればよい。

3. アウトプット説明

前記1-6の二次元解析プログラムの場合とほとんど同じである。節点に関する計算結果の x, y 座標は節点移動後の座標で最後にMOVを付した節点が浸潤面の位置を表わす。

また、ポテンシャルの結果として最大値に対する割合を%で表示しておいた。

(2) F.S 3法

図-1.29に示すような堤体で、最初水位 H で定常状態にあったものが水位が H' まで上昇する場合。

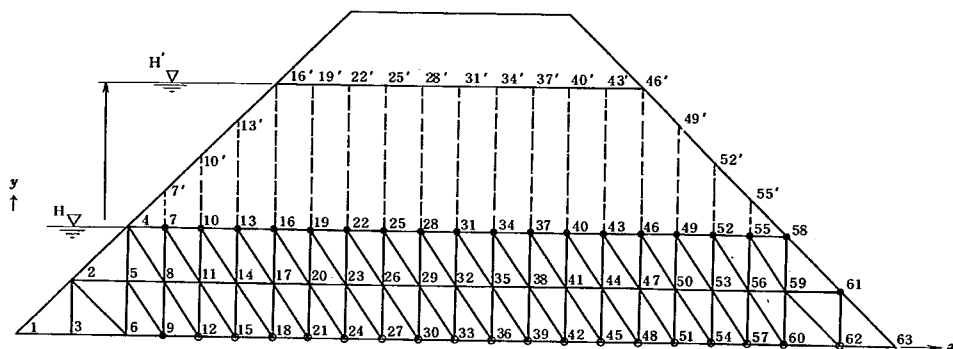


図-1.29

1. 要素分けおよびナンバリング

図-1に示すように水位 H での浸潤面を求めるためにF.S 2法と同様に要素分けおよびナンバリングを行なう。

水位上昇後上流面に達する可能性のある節点7, 10, 13, 16, については38および40カラムにサイン1をたてておく。

2. BOUNデータ

可動点の上限値としては対応する可動点と固定点を結んだ直線（破線）が堤体表面あるいは最高水位と交わる点、すなわち $'$ を付した点の y 座標を与える。また、この破線がこれらの上限値以下で交わるような要素分けをしてはならない。

3. アウトプット説明

まず、*F.S* 2 法による結果をアウトプットし、ついで *WLT V* の各ステップについてサインをたてないものについては可動点のみの x, y 座標を、サインをたてたものについては、*F.S* 法と同様に計算結果をアウトプットする。

```

*****
*
* TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS OF TIME DEPENDENT SEEPAGE FLOW
*
* BY FINITE ELEMENT METHOD
*
* VO MO OCT 1970
*
*****

```

```

*****
* INPUT DATA LIST
*
*****

```

```

***** CONVERGENCE OF C.G.METHOD M,F = 48 2.205330E-13
***** CONVERGENCE OF C.G.METHOD M,F = 47 7.597306E-13

```

INTERMEDIATE RESULT --COORDINATES H,P,R		PRESSURE CONDITION		1	ITER. TL.	1	BLOCK	1	WLTV	1	PAGE	1
NODE	X	Y	H	P	R							
1	0.0000E+00	0.0000E+00	8.6000E+01	8.6000E+01	9.5367E-09							
2	1.5000E+01	5.0000E+00	8.6000E+01	8.1000E+01	1.7166E-C7							

```

*****
* RESULTS OF LAST ANALYSES (F.S. 2)
*
*****

```

F.S. TYPE	3	*****	*****
NUM. BLOCK	1	*****	*****
NUM. PATTERN	1	*****	*****
NUM. NODE	142	*****	*****
NUM. ELEMENT	224	*****	*****
NUM. PRES_CN	1	*****	*****
ITER. BLOCK	1	*****	*****
ITER. TOTAL	3	*****	*****
ITER. F.S.	3	*****	*****
ITER. F.S.S	0	*****	*****
STAB. F.S.	1	*****	*****
STAB. ACCS	0	*****	*****
STAB. H (P)	1	*****	*****

```

*****
** WLTV 1 TIME 0 MIN **
*****

```

**** COORDINATES,H,P,R,BODY FORCES AT THE NODAL POINTS ****										
PRES_CN 1										
PAGE 11										
NODE	SN	X	Y	H	H(%)	P	R	B(X)	B(Y)	M/F
1	11	0.0000E+00	0.0000E+00	8.6000E+01	100.0	8.6000E+01	1.907E-08	1.221E-04	-2.848E-04	
2	11	1.5000E+01	5.0000E+00	8.6000E+01	100.0	8.1000E+01	3.910E-07	7.324E-04	-1.628E-03	

**** THE SPEED OF A SEEPAGE FLOW AT THE NODAL POINTS ****										
PRES_CN 1										
PAGE 14										
NODE	VP(X)	VP(Y)	VP(XY)	DEGD	VPR(X)	VPR(Y)	VPR(XY)	DEGPR		
1	9.766E-07	-2.279E-06	2.479E-06	-66 48	3.255E-06	-7.595E-06	8.264E-06	-66 48		
2	1.465E-06	-2.930E-06	3.275E-06	-63 26	4.883E-06	-9.766E-06	1.092E-05	-63 26		

**** THE SPEED OF A SEEPAGE FLOW AT THE ELEMENTS ****										
PRES_CN 1										
PAGE 17										
LMNT	VE(X)	VE(Y)	VE(XY)	DEGE	VER(X)	VER(Y)	VER(XY)	DEGER		
1	9.766E-07	-2.279E-06	2.479E-06	-66 48	3.255E-06	-7.595E-06	8.264E-06	-66 48		
2	1.465E-06	-4.232E-06	4.478E-06	-70 54	4.883E-06	-1.411E-05	1.493E-05	-70 54		

INTERMEDIATE RESULT --COORDINATES,H,P,R										
PRESSURE CONDITION 1 ITER. TL. 4 BLOCK 1 WLTV 1										
PAGE 22										
NODE	X	Y	H	P	R					
1	0.0000E+00	0.0000E+00	8.4000E+01	8.4000E+01	0.0000E+00					
2	1.5000E+01	5.0000E+00	8.4000E+01	7.9000E+01	9.5367E-09					

----- COORDINATE OF MOVE NODAL POINT -----										
PRESSURE CONDITION 1 (WLTV = 1)										
PAGE 25										
NODE	Y / X									
42	60.0000	49	62.5000	52	65.0000	60	67.5000	64	70.0000	73
	180.0000		186.2500		192.5000		198.7500		205.0000	77
									211.2500	78
										79
										80
										81
										82
										83
										84
										85
										86
										87
										88
										89
										90
										91
										92
										93
										94
										95
										96
										97
										98
										99
										100

2. 有限要素法一般論



2-1 有限要素法基礎原理

有限要素法 (Finite Element Method 略して F.E.M) は最初航空工学の分野で機体の応力解析を行なうために研究され始めたものであるが、1960年代に入り、R・W・Clough, O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung等が有限要素法として解析の体系をまとめるに至り、次第に注目されるようになってきたものである。またそのころから電子計算機がめざましい発達をなし、膨大な計算も容易に行なえるようになったので、最近では土木、機械、造船等あらゆる分野で盛んに用いられるようになってきている。

有限要素法の根本をなす考えは、すべての構造物は無数の要素 (Element) の集合であり、それぞれの要素は節点 (Nodal Point) で結合されて連続性を保っているということである。

二次元の問題を例にすれば、図-2.1に示すようなダム の応力解析を行なう場合、図-2.2に示すように、このダムは節点で結合された三角形又は四角形の要素で出来ていると考えるのである。

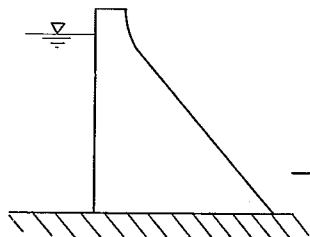


図-2.1

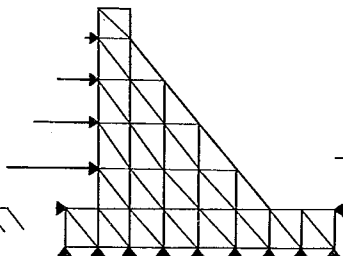


図-2.2

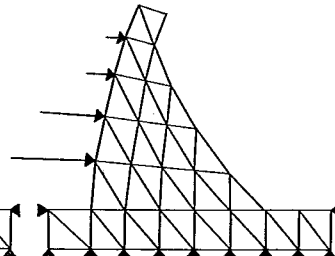


図-2.3

一方、個々の要素は、要素が独立した1個の三角形又は四角形の弾性体である場合に、その節点にかかる力と各節点に生ずる変位の関係は一般式の形で得られている。(要素の剛性マトリクス、たわみ性マトリクス等と呼ばれているものである。)

しかし求めたいものは、これらの要素がくっつき合って図-2.2に示すような構造物の形をなし、一部の節点に荷重が作用した時に、個々の節点はどうか動く(変形する)かということである。そのためには、連続体であるから隣り合った節点は構造物が変形した後も図-2.3に示すようにくっつき合っているということに着目する。つまり、個々の要素について得られた要素の節点の力と変位の関係式を、隣り合った節点はくっつき合っているという条件で整理をすると節点にかかる力と変位の関係式が節点の数だけ(正確に言えば二次元では各節点共 x 方向、 y 方向の変位があるから $2 \times$ 節点数となる)作られることになる。

この条件式を連立方程式で解けば(実際には何百元もの連立一次方程式になるので電子計算機を用いないと不可能であるが)構造物として一体となっているときの各節点の変位を求めることが出来る。

個々の要素は内部に生ずる応力やひずみと要素節点の変位との間に成りたつ関係式が求められているので、上記計算で各節点の変位が求まりしさえすれば、それに基づいて各要素に生ずる応力も計算出来る。

以上が有限要素法による解法概念であるが、実際に計算を実行する場合は、これらの手順を電算プログラムとして計算機に覚え込ませておくので、データとして各節点の座標、要素の構成、荷重等を与えてやりさえすれば、各節点の変位、要素応力値等がむずかしい計算式に頭を悩まされることなく求めることが出来るようになっている。

2-2 計算式の誘導方法と計算手順

有限要素法による応力計算は次のような順序で行なわれてゆく。

- (1) 個々の要素について、その形状に応じた節点変位と荷重の関係式(剛性マトリクス)を作る。
- (2) 構造物として要素が組合わさった状態における変位と荷重の関係式(集積マトリクス)を作る。
- (3) (2)の関係式を解いて構造物の各節点の変位を求める。
- (4) (3)の変位結果に基づき、個々の要素に生ずるひずみを求める。
- (5) (4)のひずみに基づき、個々の要素に生ずる応力を求める。

次にこれらの計算に用いられる計算式の誘導法を説明する。

なおこの説明を理解するためには弾性論とマトリクス計算に関する極く基本的な性質を思いおこしていたゞく必要がある。また、説明を簡単にするために二次元弾性計算の場合について述べる。

三角形要素を用いる場合、要素の中の変位の分布は3-1式のように二次式であらわされるものと考ええる。

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

ただし u : x 方向変位, v : y 方向変位

このように考える理由は、三角形には節点の数が3個あり、各節点共 x , y の方向に変位するから、決めるべき条件数として計6個の値がある(自由度が6)ためである。

要素の有する3個の節点に図-2.4に示すように i, j, k という名前を付けると、各節点の変位は各節点の座標を用いて(2-2)式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\ v_k &= \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

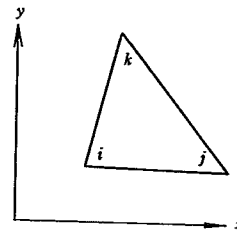


図-2.4

これをマトリクスの形であらわせば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2-2')$$

(x_i とは i 点の x 座標の意味である)。

また簡単化のためにこれを (2-3) 式のように示すことにする。

$$[u] = [A] \times [\alpha] \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

なお (2-3) 式は

$$[\alpha] = [A]^{-1} \times [u] \quad \dots\dots\dots (2-4)$$

とも書ける。 $[A]^{-1}$ とは $[A]$ マトリクスの逆マトリクスのことである。

次にひずみは適合条件から (2-5) 式によって定義される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2-5)$$

u, v に (2-1) 式を代入すると (2-6) 式のようにになる。

$$\epsilon_x = \alpha_2 \quad \epsilon_y = \alpha_6 \quad \varphi_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad \dots\dots\dots (2-6)$$

これをマトリクスで表わせば (2-7) 式のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \varphi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2-7)$$

簡単化のためにこれを (2-8) 式のように示す。

$$[\epsilon] = [B] \times [\alpha] \quad \dots\dots\dots (2-8)$$

ひずみと応力の間には (2-9) 式のような Hooke の法則がある。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \epsilon_y \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \epsilon_x + \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_y \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{xy} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2-9)$$

これもマトリクスであらわせば (2-10) 式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \varphi_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2-10)$$

簡易化のためこれを(2-11)式のように記す。

$$[\sigma] = [D] \cdot [\epsilon] \quad \dots\dots\dots (2-11)$$

要素の各節点に力のかかっている状態で、各節点に仮想の変位をさせたときになす仮想仕事量は、節点の力とそれに対応する節点の仮想変位の積の和に等しい(仮想仕事の現理)。また応力が σ の要素内で ϵ の仮想ひずみを生じさせた場合、この要素の内部における仮想仕事量は応力 σ と対応するひずみ ϵ の積を要素の内部全体にわたって積分したものに等しい。

要素の外部から与えられた仮想仕事量は要素内部に生ずる仮想仕事量に等しい。

以上の関係を式であらわせば(2-12)式のようになる。

$$[\bar{U}]^T \cdot [F] = \int_V [\bar{\epsilon}]^T \cdot [\sigma] dV \quad \dots\dots\dots (2-12)$$

ここに $[U]^T$ 等の T はマトリクスの転置を意味する。

$[\bar{\epsilon}]$ 等の $-$ は仮想であることを意味する。

また $[F]$ とは要素の各節点にかかる力、 F_{xi} , F_{yi} , F_{xj} ... F_{yk} を

$$[F] = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ \vdots \\ F_{yk} \end{Bmatrix} \text{と表わしたものである。}$$

(2-12)式の右辺に(2-4, 8, 11)式を代入すると(2-13)式のようになる。

$$\begin{aligned} [\bar{U}]^T [F] &= \int_V [\bar{\epsilon}]^T [D]^T [\epsilon] dV \\ &= \int_V [\bar{a}]^T [B]^T [D]^T [B] [a] dV \\ &= \int_V [\bar{U}]^T [A]^{-1T} [B]^T [D]^T [B] [A]^{-1} [U] dV \quad \dots\dots\dots (2-13) \end{aligned}$$

$[U]$, $[A]$, $[B]$, $[D]$ はいずれも x , y の関数でないので(2-13)式の積分記号は外に出すことが出来、(2-14)式のようになる。

$$= \int_V dV \cdot [\bar{U}]^T [A]^{-1T} [B]^T [D]^T [B] [A]^{-1} [U] dV \quad \dots\dots\dots (2-14)$$

$\int_V dV$ は $\triangle i, j, k$ の面積 $\times$ 厚さとなる。

$$(14) \text{式は簡単化すれば } [F] = [K] \times [U] \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

とも書ける。但し $[K] = \int_V dV [A]^{-1T} [B]^T [D]^T [B] [A]^{-1}$

$[K]$ は剛性マトリクスと称されるもので、三角形要素の場合6行6列のマトリクスとなる。(2-15)式から明らかなように、このマトリクスは要素の節点にかかる力とそれによって生ずる変位の関係を示す一般式を示すものである。

次に(2)で述べた構造物全体の変位と力の関係を示すマトリクス(集積マトリクス)の作り方を述べる。

わかり易くするために図-2.5のような例を用いて説明する。

要素①の i 点は構造物の節点としては2, j 点は3, k 点は1となっている。したがって要素①の $[F]$, $[K]$, $[U]$ の各々のマトリク

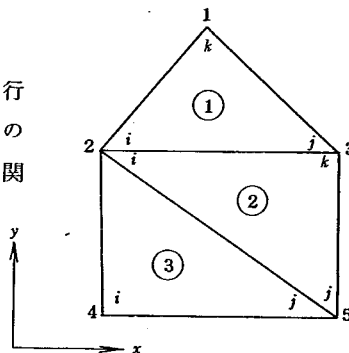


図-2.5

スの成分と構造物全体につけられた節点の名前との対応は次のようになっている。

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \\ F_{x3}^1 \\ F_{y3}^1 \\ F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x2u2}^1 & K_{x2v2}^1 & K_{x2u3}^1 & K_{x2v3}^1 & K_{x2u1}^1 & K_{x2v1}^1 \\ K_{y2u2}^1 & K_{y2v2}^1 & K_{y2u3}^1 & K_{y2v3}^1 & K_{y2u1}^1 & K_{y2v1}^1 \\ K_{x3u2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{y3u2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{x1u2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{y1u2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

F^1, K^1 等の 1 は要素①という意味である。

・は書くのを省略してある。

これらの要素マトリクスは要素の数だけ（例では 3 個）出来る。

構造物全体の節点数は 5 個あるので、その力と変位の関係を示すマトリクス（集積マトリクス）は 10 行 10 列となる。そして節点力と変位との対応は次式のようにになっている。

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \vdots \\ F_{x5} \\ F_{y5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1u1} & K_{x1v1} & K_{x1u2} & \cdots & K_{x1v5} \\ K_{y1u1} & K_{y1v1} & K_{y1u2} & \cdots & K_{y1v5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{y5u1} & K_{y5v1} & \cdots & \cdots & K_{y5v5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad \text{略して } F = [K] \times [r] \quad \cdots (2-16)$$

集積マトリクス $[K]$ の成分は要素の剛性マトリクスの成分のサフィックスの同じものを加え合わせて作られるものである。図-2.5 の例では $K_{x1u1} = K_{x1u1}^1$, $K_{x2u2} = K_{x2u2}^1 + K_{x2u2}^2 + K_{x2u2}^3$ また K_{x1u5} のように、どの要素の剛性マトリクスの成分にもそのようなサフィックスの付くものがないような成分、別の言い方をすれば剛性マトリクスの成分を集積マトリクスの相当する所に次々に加えていった場合、1 回も値が入らなかった集積マトリクスの成分は値が 0 となる。

(2-16) 式で既知となるものは集積マトリクス $[K]$ と荷重マトリクス $[F]$ （各節点に加わる外力）であり、求めなければならないのは各節点の変位 $[r]$ であるので、そのためには $[K]$ の逆マトリクス $[K]^{-1}$ を求めて

$$[r] = [K]^{-1} [F] \quad \cdots (2-17)$$

とするか又は (2-16) 式のままの形で連立方程式を解くかによって $[r]$ を求めなければならない。

この連立方程式は二次元では節点数の 2 倍の未知数があり、有限要素法の計算を行なってゆく過程において最も多大な記憶量と計算量を有するところである。精度の高い複雑な計算が廉価で行なえるかどうかは、この連立方程式の解き方の良否で決まるといっても過言ではなく、盛んに研究もされている。ただし有限要素法の解法の説明としては多少逸れるので、このことについては参考資料 3 章 1 節で詳しく述べることにして先に進むことにする。

このようにして変位が求まった後、要素に生ずる応力を求める手順は、 $[\tau]$ によって各節点の変位が得られれば各要素の節点の変位 $[u]$ もわかるはずである（ τ の値の中から該当節点の値を拾いだしてくればよい）から、(2-4)、(2-8)式に基づいて

$$[\epsilon] = [B] \times [A]^{-1} \times [u] \quad \dots\dots\dots (2-18)$$

からまず要素に生ずるひずみを求める。次に(2-12)式により、 $[\sigma] = [D] \times [\epsilon]$ として要素に生ずる応力を求める。

以上が有限要素の解法の手順と計算式の誘導法である。

2-3 有限要素法の特長

有限要素法が盛んに用いられるようになってきたのは、次に述べるような多くの利点を有するからである。

（弾性方程式の解析解を得て行なう計算方法に比べて）

- (1) どんな形状の弾性体についても計算が行なえる。
- (2) 異なる弾性係数の材料が組合わさった構造物の計算も容易。
- (3) 解を得るのに特に高度の数学的知識を必要としない。

（弾性材料を用いる模型実験に比べて）

- (1) 模型の製作、測定等の高度の技術や高価な装置を必要としない。
- (2) 模型材料を必要としない。
- (3) 極めて短期間に解が得られる。
- (4) 費用が安い。

しかし、有限要素法には、その実用性が決定的に否定されるものではないが、次のような欠点もあることを使用に際しては考慮しておく必要がある。

- (1) 近似解であるから正しい弾性解に基づく計算に比べれば精度は落ちる。特に要素が粗いほど精度は下がり、極端な応力集中等はあらわしにくい。（精度については次節で述べる。）
- (2) 計算精度を把握したり、必要精度に見合った要素分割の細かさを決めるためにはやゝ経験を要する。
- (3) 三次元計算等では複雑な形で、ある程度高精度の計算を行なうとすれば、現時点ではまだかなりの多額の計算費を要する。

2-4 有限要素計算の精度と合理的使用法

有限要素法による計算結果を用いる場合に注意すべきことは、この計算は一種の近似計算であるということである。勿論、合理的な使い方をすれば実用上支障のないようにその精度はいくらでも高められる性質のものであるが、高精度＝労力と計算費の増加ともなるので、利用者はその精度の特長というものを常に頭の中に入れて、最小限の労力で必要な精度の計算値を得るように努力すべきである。電子計算機を用いる計算では一般に6桁程度の数値となって結果が出力されるので、ともすると答の精度もその程度に高いものであろうと錯覚されがちであるが、たいへんな誤りである。

そこで本章では有限要素法による計算の精度についてやや詳しく述べることにする。

有限要素法による計算に誤差が生ずる原因としては次のようなものが挙げられる。

- (1) 連続した物体を単純な応力分布(若しくは一定の応力値)をした要素の集まりであるとモデル化すること。
- (2) 莫大な量の数値計算を行なう際に連立方程式の近似解を行ったり、桁落ちが生じたりする。またその誤差がどの程度になるかどうかは次のような条件で決まってくる。
- (3) 要素内の応力分布の形式の仮定の仕方。
- (4) 要素分割の細かさ。
- (5) 応力分布の複雑さ。
- (6) 要素の形状
- (7) 計算を実施するときの桁数

各項について具体的に説明を加えよう。まず(1)、(3)、(4)、(5)が精度に影響を及ぼす理由は、2章2節で述べたように有限要素法では分割された要素の中の応力の値を一定の値としている。したがって実際には図-2.6の実線で示されたような応力分布をしている区間を5個の要素で分割したと仮定すると、各要素の応力値は、それを図中に柱状に示したような値として解を得ることになるので、部分的には実際の応力と異なった値となることが明らか

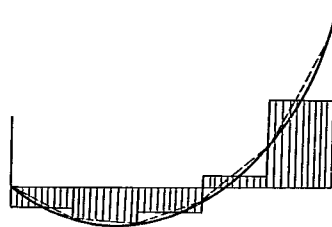


図-2.6

であろう。したがって誤差を小さくするには分割を細かくしてゆけば良いことも簡単に理解出来よう。また分割された区間の応力分布(実線)が一定値に近いものであれば、分割はかなり粗くとも部分的な誤差はそれほど大きくはならず、逆に応力分布が複雑に、しかも急変していれば、分割が相当細かくても誤差が大きいことも特に説明を加えずとも理解出来よう。

なお三角形要素では要素内の応力は一定としたけれども要素の中でも応力値はたとえば $\sigma_x = ax + by + c$ のような形で直線的に変化出来るようなもので考えれば実線で示された応力値を点線で示した折線で追うことになり少ない要素でも精度は著しく改善されることが考えられる。しかし、要素の中の応力分布を複雑に変化出来るようにするためには、要素の有する自由度も増やしてやら

なければならない。たとえば $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ をすべて x, y の次の関数として分布させるためには節点を 6 個有する要素（六角形か辺の中点に節点を有する要素図-2.7）が必要である。本書に収録されているプログラムのうち、「二次元弾性1」プログラムはこのような要素の使用も可能であるが、このような要素は節点の荷重に対する重みの問題等、正しく用いるためには注意しなければならない事項もあるので、極端な応力集中を問題とする場合とか、どうしても少ない要素で精度を上げたい場合以外は三角形や四角形等の単純な要素で細かく分ける方が無難であると筆者等は考えている。

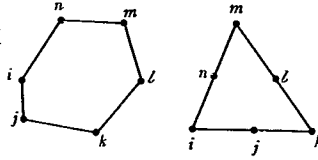


図-2.7

(6)は三角形要素だけを用いる場合でも正三角形に近い要素とか直角三角形要素、あるいはその向きや細長さ等によって、同じ数の要素に分割しても答に $\dot{\kappa}$ せがあるということである。詳しくは後述するチェック計算の例で説明する。

数値計算は本書で説明するプログラムについてはいずれも有効数字8桁、連立方程式を解く部分では16桁で実行している。したがって数値計算の精度は少なくとも6桁は保証出来、(1)の原因による誤差に比べて著しく小さく、まったく問題ない。CG法による連立方程式の解法は近似法であるが、必要な精度の範囲まで精度を得るように反復修正を行なわせているので4~6桁程度の精度は問題なく得られる。

次に精度に関して実際にチェック計算を行なってみた例を述べよう。

チェック計算を行なう構造物として、図-2.8のような三角形断面を用い、これを169個の三角形要素に分割し、その先端A点に集中荷重が載荷された場合と、側面に水圧荷重が載荷された場合について計算を行ってみた。このようなものをチェックに用いた理由は比較するのに用いる正確な理論解が得られていること、一水平断面における要素数が下にゆくにつれて多くなり、分割数と精度との関係が1回の計算でよくわかること等の理由のためである。

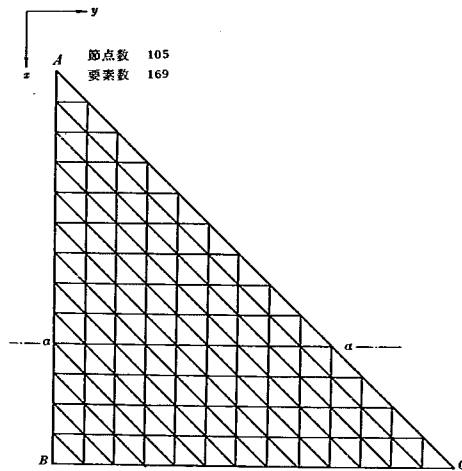


図-2.8

図-2.9は図-2.8の構造物の側面に水圧荷重を作用させたとき、 $a-a'$ 断面の上下の要素について計算されたせん断応力と理論解とを比較したもので、上段の図は $\triangle$ 形の要素だけを比べ、下段は ∇ 形の要素だけを比べたものである。

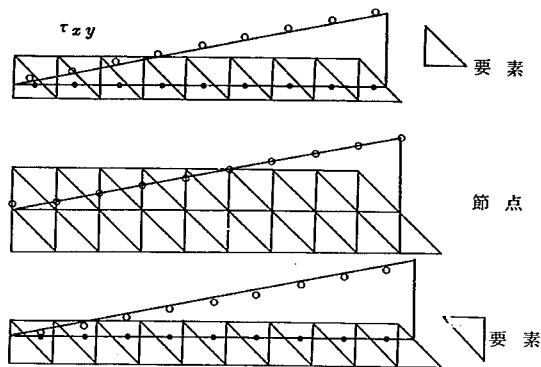
$\triangle$ 形の要素はいずれも理論解よりも大きな値を示しているのに対し、 ∇ 形の要素はいずれも理論解よりも小さい値を示しており、明らかに要素の形によって計算値に $\dot{\kappa}$ せがあることがわかる。こ

のような形によるくせは応力分布が曲線的な分布をするときには相当大きくなり図—2.9に示した例ではその最大値は $\alpha-\alpha$ 断面における最大応力の $\pm 15\%$ にも達している。ただし、この種の要素の形状による誤差は、計算された要素の応力値をそのまま用いずに、ある節点のまわりをとり囲む要素の応力値を平均して節点の応力値として理論値と比較すると、図—2.9、2.10の中央に示したように、要素値の場合に比べてずっと精度が良くなる。このような方法によって精度が改善される理由としては、節点のまわりには各種の形の要素が存在しており、それらの値を平均することにより、要素の形によるくせが相殺されるためであると考えられる。

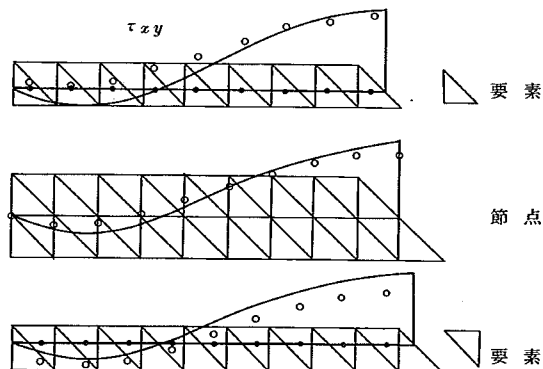
このような要素の形によるくせは要素の形が極端に細長くなったりすると特に著しくなると考えられるので、そのような要素は出来るだけ用いない方がよいといえよう。また応力値は節点値を用いた方が精度は良いことを考えて、本書で述べるプログラムはいずれも節点応力も出力するようにしてある。

図—2.11、2.12はこの計算例について節点応力 σ_x の水平方向の分布を頂点に近い所から順にプロットして比較したものである。頂点に近い部分で断面を2区間に分けたところでは図—2.11の例では最大応力の50%にも達している。また $\alpha-\alpha$ 断面のようにその区間を9区間に分けた部分では最大の誤差を示すところでも10%以内の誤差に納まっている。

このように分割を細かくすると精度は良くなることは定性的にいえるが、どの程度に分けると誤差の範囲が定量的に何%かと問われると、残念ながら正確には答えられない。応力分布の変化の度合等から推定して判断するより仕方がない。図—2.12は水圧荷重により直線的な応力分布をする例であるが、かなり粗い分割でも充分な精度が得られている。一般に言えることは応力分布が急変



図—2.9 要素値と節点値(水圧荷重)



図—2.10 要素値と節点値(集中荷重)

する所や、特に高精度の解を得たい所は特に要素分割を細かくした方が良いということで、その程度を決めるに当っては計算チェック例等を参考にして経験を積むことが必要であろう。図-2.13は同じ荷重条件について四角形要素を用いて計算をした例であるが図-2.11に比べてやゝ精度が良いことが言える。これは四角形要素は応力パターンとして次のようなものを用いているためである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_1 + a_2 y \\ \sigma_y &= a_3 + a_4 x \\ \tau_{xy} &= a_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-19)$$

すなわち四角形要素は三角形要素に比べて自由度が大きいので、要素内で応力分布を変化させることが出来るために、要素内で応力値を一定とした三角形要素に比べて精度が良いのである。ただし τ_{xy} についてはどちらの要素も一定値であるから、その精度はたいして変わらない。

六角形要素又は中点に節点に中点を有する要素では、前述したようにさらに自由度が多くなり応力分布の自由度も増すので少ない要素でも精度が良くなることを図-2.14～図-2.16に示す。

以上、有限要素法による計算に誤差の生ずる原因を述べたが、これらの特性を考え有限要素法の合理的な使用法についてその要点をまとめる。

- (1) 高精度の解を得たい部分は特に細かく分割する。

細かく分けるほど精度が上がるが、計算する構造物を一様に細かく分けるのは不経済であり、応力値の急変する所、特に高精度で解を得たい所だけを細かくするのが良い。

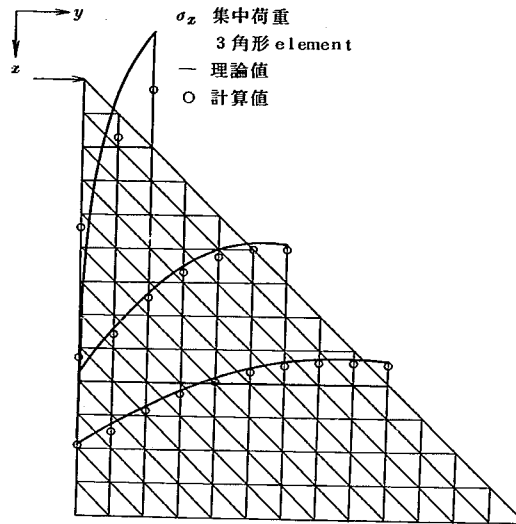


図-2.11 計算結果(集中荷重 σ_x)

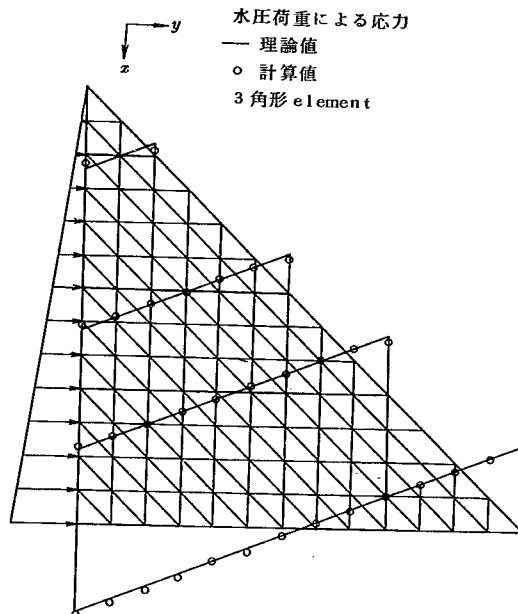


図-2.12 計算結果(水圧荷重 σ_x)

- (2) 応力値を節点応力値を用いた方が精度が良い。

ただし構造物の表面とか材料の性質が異なる境界面についてはこのようなことは言えないので要注意。

- (3) 極端に細長い要素は出来るだけ避ける。

- (4) 要素は三角形、四角形、六角形の順に精度が良くなってゆく。

したがって極端な応力集中を問題にするときや、少ない要素で精度を上げたいときには、このような要素を用いるのが良い。しかし三角形、四角形の要素は使い方も平易で計算時間も早いので、このような単純な形の要素で細かく分割して計算した方が無難である。

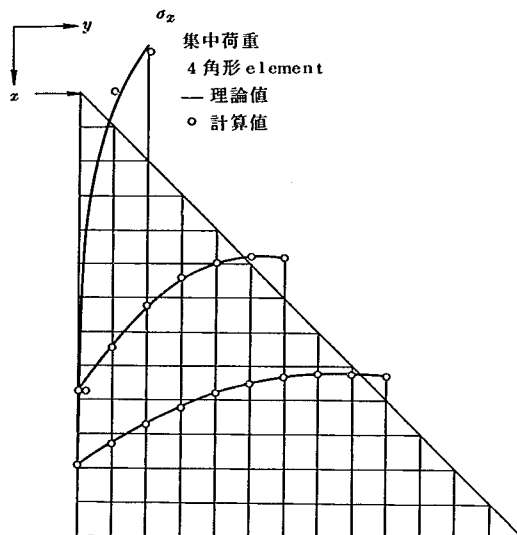


図-2.13 四角形要素を用いた解 (σ_x)

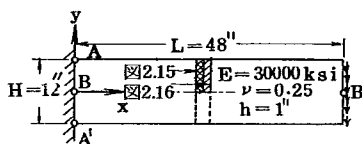


図-2.14 Beam and Load System

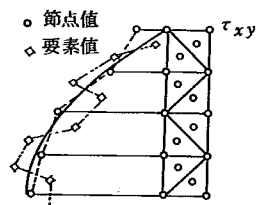


図-2.15 3 角形要素による計算値

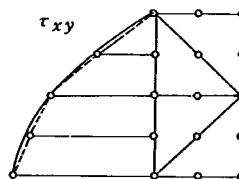


図-2.16 中点3 角形による計算値

最後に要素分割の一例を図-2.17に示す。

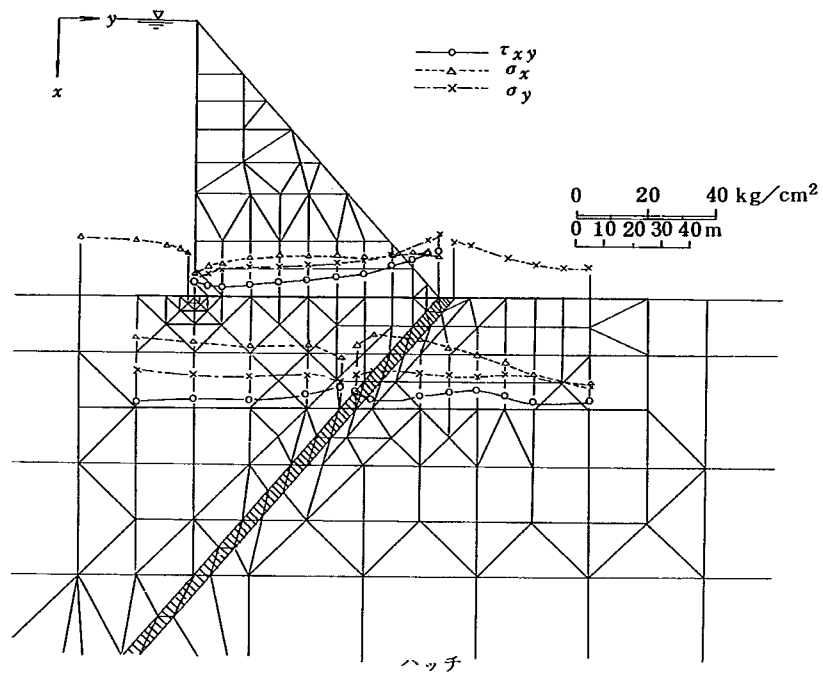


図-2.17 FEMによる計算例

3. 参 考 資 料



3-1 有限要素法に用いられる連立方程式の解法

3-1-1 有限要素法に用いられる連立方程式の型

連立方程式の型は一般に次のような型となる。

$$\left[\begin{array}{l} K_{11}x_1 + K_{12}x_2 + \dots + K_{1n}x_n = R_1 \\ K_{21}x_1 + K_{22}x_2 + \dots + K_{2n}x_n = R_2 \\ \dots\dots\dots \\ K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + \dots + K_{nn}x_n = R_n \end{array} \right] \dots\dots\dots (3-1)$$

マトリックスの計算では

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nn}b_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

という約束があるので(3-1)式を(3-2)式で書くと(3-3)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

(3-3)式は簡単に(3-3')式のように書く。

$$[K] \cdot [x] = [R] \quad \dots\dots\dots (3-3')$$

有限要素法では $[R]$ は荷重ベクトル，つまり節点に与えられる外力で既知の値である。

$[K]$ は剛性マトリックスと称されこれも既知のマトリックスである。

$[x]$ は変位ベクトルと称され各節点の変位を節点順にならべられたものであるが、求める未知量となる。

従って $[x]$ を求めるには $[K]$ の逆マトリクス $[K]^{-1}$ を求めて

$$[x] = [K]^{-1} \cdot [R] \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

として直接乗算によって求めるか、(3-1)式の型の連立方程式によって求めるかしなければならない。しかし、 $[K]^{-1}$ を求めるには(3-1)式の操作の連立式を解く操作を何回か実施することに帰すので、形の上では(3-4)式を書くが、実際には(3-1)式を実施することになる。

剛性マトリクス $[K]$ には次のような特長がある。

- (1) 成分 ($K_{11}, \dots, K_{nn}$ 等) は 0 であるものが非常に多く, しかも ≈ 0 成分は対角線上に近い所に分布する。
- (2) 対称マトリクスである。
- (3) 対角線要素は必ず ≈ 1 である。

従って (1), (2), (3) の性質を上手に用いることが比較的小容量の計算機で、大規模な連立方程式を解くかぎとなる。

3-1-2 CRAMERの公式による解法

方法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (3-5)$$

のとき $x_n = |B|_n / |A| \quad \cdots \cdots (3-6)$

ただし $|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$|B|_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & R_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & R_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ つまり A の n 列を $[R]$ でおきかえたもの。

等によって得られる。

これは連立方程式の解法としてよくでてくるものであるが実際には次のような欠点を有するので実用性はまずない。

欠点

$|A|$ 、 $|B|$ 等の行列式の値を (未知数の数 + 1) 個求める必要があるが、この計算が膨大で (例えば 10 元の連立方程式を解くのに約 3.6×10^8 回の乗算を要し、(注、森口繁一による) 乗算の速度を 10^{-6} sec/回としても約 10 分かかることになる)。実用性はほとんどない。

3-1-3 消去法 (Sweep Out Method) による解法

方法

係数マトリクスのある行を a 倍しても右辺の同じ行を a 倍すれば式は成立する。

係数マトリクスのある行と行を差引きしても右辺の同じ行を差引きすれば式は成立する。

以上の性質を利用して係数マトリクスと右辺のベクトルを同事に加減乗除を行ない、係数マトリクスを

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$ のような単位マトリクスの形にする。

そのとき右辺のベクトルが $\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ になっていたとすれば $X_1 \cdots X_n$ が求められる解である。

なぜならば、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{故に } x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 \quad \cdots \quad x_n = X_n$$

例によって解いてみる。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

(1)行 $\div 2$, (2)行 $-(1)$ 行 $\times 3/2$, (3)行 $-(1)$ 行 $\times 4/2$ を行なう。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0.5 & -4 \\ 0 & -3 & 22 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots \cdots (1)' \\ \cdots \cdots (2)' \\ \cdots \cdots (3)' \end{matrix}$$

(2)' $\div 0.5$ (1)' $-(2)'\times 1.5/0.5$ (3)' $-(2)'\times (-)3/0.5$ を行なう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots \cdots (1)'' \\ \cdots \cdots (2)'' \\ \cdots \cdots (3)'' \end{matrix}$$

(3)'' $\div (-)2$, (1)'' $-(3)''\times 14/(-)2$, (2)'' $-(3)''\times (-)8/(-)2$ を行なう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{答} \quad x_1 = (-)13, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 2$$

利点

係数マトリクス $|K|$ が $\infty 0$ であるかぎり、真の解(但し、桁落ちによる誤差はあるが)が常に得られる。

欠点

剛性マトリクスには零要素が多いという特長が生かせない。従って記憶量が多くなり、内部コアで処理出来る元数が100元~200元が限度である。(例えば、200元の問題を解くには、 200×201 の係数が必要であり、さらに答のマトリクスも入れると40.4 Kワード以上の記憶量を必要とする。現在、日本ではこれだけの記憶量を有する電子計算機は、かなり大型に属する。

3-1-4 Gauss Seider法による解法

方法

$$K_{11}x_1 + K_{12}x_2 \cdots \cdots K_{1n}x_n = R_1, \quad K_{21}x_1 + K_{22}x_2 \cdots \cdots K_{2n}x_n = R_2, \quad \cdots \cdots$$

$$\therefore x_1 = (R_1 - \sum_{i=2}^n K_{1i}x_i) / K_{11} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$x_2 = (R_2 - x_1 \cdot K_{21} - \sum_{i=3}^n K_{2i}x_i) / K_{22} \quad \cdots \cdots (2)$$

同様に

$$x_m = (R_m - \sum_{i=1}^{m-1} K_{mi} x_i - \sum_{i=m+1}^n K_{mi} x_i) / K_{mm} \dots\dots\dots (3)$$

最初は $x_1 \sim x_n = 0$ としておき、

まず(1)式で x_1 を求める。次にこの x_1 を用いて(2)式で x_2 を求める。以下(3)の式で $x_1 \sim x_n$ を求める。これらの値は真の解ではないが最初 $x_1 \sim x_n = 0$ としたときよりも真に近い。次に今求めた $x_1 \sim x_n$ を最初の値として(3)式で $x_1 \sim x_m$ を再び求めなおすとさらに真の値に近くなる。これを何回も反復していくうちに真の値にいくらかでも近づいていく。

利点

○係数 $[K]$ は最後まで不変であるから、 ≈ 0 のものだけ記憶しておけばよい。従って ≈ 0 要素の少ない構造物の計算では非常に有利である。

(例えば二次元計算では1行に ≈ 0 要素がせいぜい20個以下であるから、100節点200元の計算で必要な記憶量は 200×20 、その他に同数程度の記憶を必要としても8Kすなわち、消去法の $1/5$ 程度のコア容量で済む)。

○計算方法が極めて簡単である。

欠点

○答が常に得られるとは限らない。反復を相当多くしても真の解に近づかないものや、発散してしまうこともある。

○収束の度合をチェックしておかないと解の精度の目目が付かない。

(収束性については、二次元問題の場合、節点の配列を出来るだけ節点番号の近い節点が近くに集まるようにしてデータを作成すれば、元数の3倍程度の反復で3桁以上の精度は得られるようである。)

○対角線要素が零のとき、並び変えをしないと計算出来ない。(このような事態は弾性計算では生じない。)

3-1-5 Conjugate Gradients Method (共役傾斜法, CG法)

考え方

最初に適当に解を仮定し、試算を反復し真の解に近づけていくという点で、Gauss-Seiderの方法と同様であるが、反復を進めるに当たり、その回の解を用いて計算した誤差関数(解が真に近づくほど零に近くなるような関数で定義される。)が、最小になるように次のステップの解を考える方法である。収束方法が合理的である為、 n 元の計算では理論上、 n 回の反復で真の解が得られる。

計算方法

$[K][x] = [R]$ となるような真の解 $[x]$ を求めるとする。

i 回目の近似解を x_i とし、残差 $x - x_i = \delta_i$ とする。

誤差関数は $f(x_i) = [x - x_i]^T \cdot [K] \cdot [x - x_i]$ と定義する。

但し、 β_i とは、 x_i という解を P_i だけ修正したとき、 $f(x_{i+1})$ が最小となるような係数で

証明は略すが $[P_i]^T \cdot [\delta_i] / [P_i]^T \cdot [A] \cdot [P_i]$ となる。

P_i は i より前の各ステップの残差を用いて、 $P_i = \delta_i + \alpha_{i-1} \delta_{i-1} + \alpha_{i-2} \delta_{i-2} \cdots \alpha_0 \delta_0$ の形であらわされるものを考える。

証明は略すが、(1)式によって求めた $x_i + 1$ の誤差関数 $f(x_i + 1)$ を最小にするように $\alpha_{i-1} \cdots \alpha_0$ を求めると $|\delta_i|^2 / |\delta_{i-1}|^2$, $|\delta_i|^2 / |\delta_0|^2$ となる。よって $P_i = \delta_i + |\delta_i|^2 \cdot \delta_{i-1} / |\delta_{i-1}|^2 + \cdots |\delta_i|^2 \cdot \delta_0 / |\delta_0|^2 = \delta_i + |\delta_i|^2 \cdot P_{i-1} / |\delta_{i-1}|^2$
又このように P_i が定義されると $[P_i]^T \cdot [\delta_i] = [\delta_i]^2$ となる。

以上から $i + 1$ ステップにおける実際の計算は次のことを行なえばよい。

(1) $[x_{i+1}] = [x_i] + \beta_i \cdot [P_i]$ の計算

(2) $[\delta_{i+1}] = [\delta_i] - \beta_i [K] \cdot [P_i]$ の計算

次のステップの計算のために

(3) $[P_{i+1}] = [\delta_{i+1}] + |\delta_{i+1}|^2 \cdot [P_i] / |\delta_i|^2$ の計算

(4) $\beta_{i+1} = |\delta_{i+1}|^2 / [P_{i+1}]^T \cdot [K] \cdot [P_{i+1}]$ の計算

但し、第1回目の計算では、

$$[x_0] = [0], [\delta_0] = [R], [P_0] = [\delta_0] \quad \beta_0 = |\delta_0|^2 / ([P_0]^T [K] [P_0])$$

として次のステップへ出発する。但し、 $|\delta|^2$ 等はベクトル δ の各成分の2乗の和等の意味である。

利点

○係数は $[K]$ は不変であるから、 ≈ 0 要素だけの記憶でよい。

○ n 回の反復で収束する。

○収束速度がCG法に比べて早い。

○対角線要素が零であっても良い。

欠点

○CG法に比べて計算式が複雑で1回の反復に必要な計算量も多くなる(約2倍強)。

○収束しない場合がある(正しい原因不明)。

3-1-6 構造物の計算に最適な方法の検討

n 元の計算、1節点に関する節点最大10個の場合について計算量(乗算、除算回数)、必要なコア量を各方法について比較する。(i は反復数)

	消 去 法	Gauss Seider	C G 法
計 算 法	$(n+1)/n \div \frac{1}{2} n^3$	$(20+1) n i = 21 n i$	$(n+20n+n+3n+21n+2) i \div 46 n i$
コア量	$n(n+1) \div n^2$	$(2+40) n = 42 n$	$43 n + 3 \div 43 n$

Gauss Seider法で3桁の精度を得るには $i = 2 \sim 3 n$ 程度、CG法では $i = 0.6 n$ 程度で4桁の精度が得られるようである。消去法は計算時間、コア量共、反復法に劣る Gauss Seider、CG法では特に優劣つけにくい、CG法の方が同じ精度を得るのに計算時間が2倍程度早い。よ

ってCG法が3種の中で最も適した方法と言えよう。

3-1-7 構造物をUnitに分けて解く方法

大規模な連立方程式の解法としてIBMが立体ラーメンの解析プログラム(FRAN)に採用しているUnit分割法は構造物の特性をうまく利用したユニークな方法であるのでその概念を次に紹介しておく。1章で説明したプログラムの中では二次元弾性No.1, 三次元弾性の各プログラムがこの方法により連立方程式を解いている。この解法の発想は、大きな構造物をいくつかの部分に分割して解くことが出来れば全体を一度に解くよりも記憶容量が少なくてすむということにある。例えば千個の未知数を有する連立方程式を解くには少くとも 1000^2 個の記憶容量は必要であるが、これを百個の未知数を有する連立方程式10個に分割して解くことができれば必要な記憶容量は $10 \times 100^2 = 10^5$ となり前者の $1/10$ で済むことになる。しからば連続した構造物に対し部分的に分割した解を得ることができるであろうか。それには切取った構造物の境界における力と変位が連続体のそれと同じであれば切取った構造物の内部の応力分布は変わらないことに着目すればよい。また、境界における力の和はそこに作用する外荷重に等しいことと境界における変位はどちらのunitも同じであることに着目すれば境界における変位、荷重も得ることができる。

unit分割法はこれらのことを巧みに利用しているが、図-3.1に示すような分割例について具体的に解いてみる。

要素I, II, IIIをunit1, 要素IV, V, VI, VIIをunit2, 要素VI, IX, Xをunit3とする。

各unitに含まれる節点を次の4種類に分けることができる。

分類1. そのunitだけに属し、他のunitと共通しないもの。例10。

2. そのunitより前の番号のunitと共通するもの。例unit2における6。

3. そのunitより前のunitとそれより後のunitとに共通するもの。例7。

4. それより後のunitだけに共通するもの。例unit2における11。

以上の分類に従って図-3.1の節点を分類すれば次表のようになる。

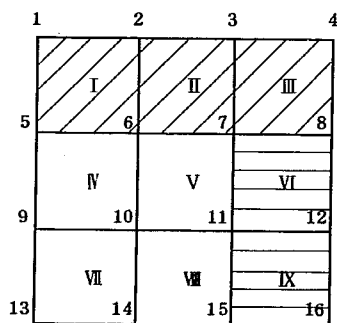


図-3.1 分割例

unit 類	1	2	3	4
1	1, 2, 3, 4			5, 6, 7, 8
2	9, 10, 13, 14	5, 6	7 (8)	11, 15
3	12, 16	7, 8, 11, 15		

節点に作用する力を $P^{N,U}$ (但し N :節点番号, U :unit番号)によって示し、節点変位を D_N (但し N :節点番号)、各unitにおける剛性マトリクスの要素を $K_U^{D,P}$ (但し D,P は行、列、 U は

unit 番号) によって示せば

$$\begin{bmatrix} K_1^{11} & K_1^{72} & \cdots & K_1^{18} \\ K_1^{21} & K_1^{22} & \cdots & K_1^{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1^{81} & K_1^{82} & \cdots & K_1^{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{11} \\ P^{21} \\ \vdots \\ P^{81} \end{bmatrix} \quad (\text{Unit 1})$$

(但し, 実際には D, P は各々
2 個ずつの要素を持ち, K は
4 つの要素を持つ)。

等の連立方程式が 3 組できることになる。

unit 1 について $P^{11}, P^{21}, P^{31}, P^{41}$ を $P^{A1}, P^{51}, P^{61}, P^{71}, P^{81}$ を P^{B1}

D_1, D_2, D_3, D_4 を $D^{A1}, D_5, D_6, D_7, D_8$ を D^{B1}

とおくと unit 1 は次のように書ける。(次の一般式の $N-1$)

$$\begin{bmatrix} K_N^{AA} & K_N^{AB} \\ K_N^{BA} & K_N^{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^{AN} \\ D^{BN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{AN} \\ P^{BN} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (3-6)$$

$$\text{よって } K_N^{AA} D^{AN} + K_N^{AB} D^{BN} = P^{AN} \quad \therefore D^{AN} = (K_N^{AA})^{-1} P^{AN} - (K_N^{AA})^{-1} K_N^{AB} D^{BN} \quad \cdots \cdots \cdots (3-7)$$

$$K_N^{BA} D^{AN} + K_N^{BB} D^{BN} = P^{BN} \quad \text{に (3-7) を代入し}$$

$$[K_N^{BB} - K_N^{BA} (K_N^{AA})^{-1} K_N^{AB}] D^{BN} = P^{BN} - K_N^{BA} (K_N^{AA})^{-1} P^{AN} \quad \cdots \cdots \cdots (3-8)$$

(3-8) の P^{A1} は既知であるが P^{B1} は未知であるので D^{B1} は求まらない。

D, P を更に細かく分解すると

$$D^{B1} = \begin{bmatrix} D^{31} \\ D^{41} \end{bmatrix} \quad (D^{31} \text{ は unit 1 で類 3 に属する節点の変位})$$

$$P^{B1} = \begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} \quad (P^{31} \text{ は unit 1 で類 3 に作用する力})$$

次に unit 2 も同様に書くと

$$\begin{bmatrix} K_2^{11} & K_2^{12} & K_2^{13} & K_2^{14} \\ K_2^{21} & K_2^{22} & K_2^{23} & K_2^{24} \\ K_2^{31} & K_2^{32} & K_2^{33} & K_2^{34} \\ K_2^{41} & K_2^{42} & K_2^{43} & K_2^{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^{12} \\ D^{22} \\ D^{32} \\ D^{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{12} \\ P^{22} \\ P^{32} \\ P^{42} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (3-9)$$

ところが

$$\begin{bmatrix} D^{31} \\ D^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D^{22} \\ D^{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

であり, unit の境界の節点変位は互いに等しいから

$$\begin{bmatrix} D^{31} \\ D^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{22} \\ D^{32} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (3-10) \quad (\text{重要})$$

(3-8) 式を次のように書き直す

$$\begin{bmatrix} K_{1R}^{33} & K_{1R}^{34} \\ K_{1R}^{43} & K_{1R}^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{31} \\ D^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} = \begin{bmatrix} K_{1R}^{33} & K_{1R}^{34} \\ K_{1R}^{43} & K_{1R}^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{22} \\ D^{32} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (3-11)$$

但し $\begin{bmatrix} K_{1R}^{33} & K_{1R}^{34} \\ K_{1R}^{43} & K_{1R}^{44} \end{bmatrix} = K_1^{BB} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} K_1^{AB}$

(3-11) 式を (3-9) 式に加える。

$$\begin{bmatrix} K_2^{11} & K_2^{12} & K_2^{13} & K_2^{14} \\ K_2^{21} & K_2^{22} + K_{1R}^{33} & K_2^{23} + K_{1R}^{34} & K_2^{24} \\ K_2^{31} & K_2^{32} + K_{1R}^{43} & K_2^{33} + K_{1R}^{44} & K_2^{34} \\ K_2^{41} & K_2^{42} & K_2^{43} & K_2^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{12} \\ D^{22} \\ D^{32} \\ D^{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{12} \\ P^{22} \\ P^{32} \\ P^{42} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} \right\} \quad \dots\dots (3-12)$$

P^{12} は unit 2 だけに属する節点の外力であるから既知。

$$\begin{bmatrix} P^{22} \\ \vdots \\ P^{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{5,2} \\ P^{6,2} \\ \vdots \\ P^{7,2} \\ P^{8,2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P^{31} \\ \vdots \\ P^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{5,1} \\ P^{6,1} \\ \vdots \\ P^{7,1} \\ P^{8,1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-13)$$

で節点において P^{ij} は unit に作用する力であり P^{1n} 以外は未知であるが $\{P^{5,2} + P^{5,1} = P_5, P^{6,2} + P^{6,1} = P_6\}$ は節点に作用する外力で既知である。従って P^{22} は単独ではその値はわからないが、

(3-12) 式の型にすると、その右辺の値は $\begin{bmatrix} P^{12} \\ P^{22} \end{bmatrix}$ の節点に相当する部分だけ得られるようになる。

(3-12) 式を $\begin{bmatrix} K_2^{AA} & K_2^{AB} \\ K_2^{BA} & K_2^{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^{A2} \\ D^{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{A2} \\ P^{B2} \end{bmatrix}$ とおけば unit 2 について作った (3-6)

式の P^{AN} の項が既知となったことになる。

次に、unit 3 を考える。unit 3 についても (3-9) 式と同様な式を書けば、

$$\begin{bmatrix} K_3^{11} & K_3^{12} & K_3^{13} & K_3^{14} \\ K_3^{21} & K_3^{22} & K_3^{23} & K_3^{24} \\ K_3^{31} & K_3^{32} & K_3^{33} & K_3^{34} \\ K_3^{41} & K_3^{42} & K_3^{43} & K_3^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{13} \\ D^{23} \\ D^{33} \\ D^{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{13} \\ P^{23} \\ P^{33} \\ P^{43} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-14)$$

(3-10) 式と同様に

$$\begin{bmatrix} D^{32} \\ D^{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{23} \\ D^{33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-14')$$

(3-8) 式と同じ操作を (3-12) 式に施せば

$$\begin{bmatrix} K_2^{33} + K_{1R}^{44} & K_2^{34} \\ K_2^{43} & K_2^{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_2^{31} & K_2^{32} + K_{1R}^{43} \\ K_2^{41} & K_2^{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2^{11} & K_2^{12} \\ K_2^{21} & K_2^{22} + K_{1R}^{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_2^{13} & K_2^{14} \\ K_2^{23} + K_{1R}^{34} & K_2^{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{32} \\ D^{42} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} P^{32} \\ P^{42} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} \right\} \quad (\text{の } P^{32} \text{ と節点番号の重複する部分})$$

$$-\begin{bmatrix} K_2^{31} & K_2^{32} + K_{1R}^{43} \\ K_2^{41} & K_2^{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2^{11} & K_2^{12} \\ K_2^{21} & K_2^{22} + K_{1R}^{33} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} P_9 \\ P_{10} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} + [-K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1}] \quad (\text{の } P_5, P_6 \text{ に重複する節点の部分})$$

..... (3-15)

(3-15)式を

$$\begin{bmatrix} K_{2R}^{33} & K_{2R}^{34} \\ K_{2R}^{43} & K_{2R}^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{32} \\ D^{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{32} + [P^{31} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1}] \quad (\text{の } P^{32} \text{ と重複する節点}) \\ P^{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_R^{32} \\ P_R^{42} \end{bmatrix}$$

と書き直して、(3-14)式に加えれば

$$\begin{bmatrix} K_3^{11} & K_3^{12} & K_3^{13} & K_3^{14} \\ K_3^{21} & K_3^{22} + K_{2R}^{33} & K_3^{23} + K_{2R}^{34} & K_3^{24} \\ K_3^{31} & K_3^{32} + K_{2R}^{43} & K_3^{33} + K_{2R}^{44} & K_3^{34} \\ K_3^{41} & K_3^{42} & K_3^{43} & K_3^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{13} \\ D^{23} \\ D^{33} \\ D^{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{13} \\ P^{23} \\ P^{33} \\ P^{43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{32} \\ P^{42} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} \right] \quad (\text{の } P^{32} \text{ と同じ節点の部分}) + \begin{bmatrix} P_R^{32} \\ P_R^{42} \end{bmatrix}$$

P^{13} 既知、今の例では $P^{12,3}, P^{16,3}$

$$\begin{bmatrix} P^{23} \\ P^{43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{32} \\ P^{42} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} P^{31} \\ P^{41} \end{bmatrix} - K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} \right] \quad (\text{の } P^{32} \text{ と同じ節点の部分}) + \begin{bmatrix} P_R^{32} \\ P_R^{42} \end{bmatrix} \quad (\text{の } P^{23} \text{ と同じ節点の部分})$$

今の例では

$$\begin{bmatrix} P^{7,3} \\ P^{8,3} \\ P^{11,3} \\ P^{15,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{7,2} \\ P^{8,2} \\ P^{11,2} \\ P^{15,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{7,1} + P_R^{7,1} \\ P^{8,1} + P_R^{8,1} \end{bmatrix} - (K_1^{BA} (K_1^{AA})^{-1} P^{A1} \text{ の節点 7 と 8 に相当する部分})$$

ところが $P^{7,3} + P^{7,2} + P^{7,1} = P_7$

$$P^{8,3} + P^{8,2} + P^{8,1} = P_8$$

$$P^{11,3} + P^{11,2} = P$$

$$P^{15,3} + P^{15,2} = P$$

であるから既知である。故に unit 3 については P^{A3} の部分は既知となることがわかる。また、unit 3 は最後の unit であることに注目すれば P^{B3} に相当する節点はないはずである。(類 3, 4 に相当する点がない。) 故に (3-7) 式により $D^{A3} = (K_3^{AA})^{-1} P^{A3}$ から直ちに得られる。 D^{33} はその値がないことに注目すれば $[D^{23}]$ は既知となるはずである。よって unit 2 の D^{B2} は知ることができる。

unit 2 について考えると D^{B2}, P^{A2} がわかるので (3-7) 式より D^{A2} がわかる。次に unit 1 について考えると、 D^{B2}, D^{A2} がわかることは $[D^{22}]$ がわかることである。即ち D^{B1} が既知となるはずである。また、 P^{A1} も既知であるから (3-7) 式により D^{A1} が得られる。

以上の結果 全ての点の変位が求まることになる。

これらの操作は手がこんでいるが逆マトリクスを解くことが unit 分割をしない時に比べて非常に小さいもので済むようになる。今の例では接点が 16 個であるから本来ならば $16 \times 2 = 32$ 元のマトリクス計算が必要であったのに対し, unit 分割をすることにより最大 $4 \times 2 = 8$ 元のマトリクス計算で済むようになる。

以上の手順をまとめると

- 1) 構造物を unit 分割する。
- 2) 各 unit に属する節点のクラス分けをする
- 3) 各 unit における $\mathbf{D}$ と $\mathbf{P}$ の関係を示すマトリクスを作る。

$$4) K_n^{BB} - K_n^{BA} (K_n^{AA})^{-1} K_n^{AB}, -K_n^{BA} (K_n^{AA})^{-1} \mathbf{P}^{An} \text{ を作り } \begin{bmatrix} K_{n+1}^{22} & K_{n+1}^{23} \\ K_{n+1}^{32} & K_{n+1}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{2n+1} \\ \mathbf{P}^{3n+1} \end{bmatrix} \text{ に加算し}$$

ていく。

- 5) 以上の手順を最後の unit まで繰返す。
- 6) 最後の unit N から $\mathbf{D}^{BN}, \mathbf{D}^{AN}$ を求める。
- 7) その結果 $\mathbf{D}^{BN-1}$ がわかるので (3-7) 式により $\mathbf{D}^{AN-1}$ を求める。
- 8) 以上の手順を最初の unit まで繰返せば全ての $\mathbf{D}$ が求まる。

3-2 塑性体の応力～ひずみマトリックスの誘導法

降伏後の弾性体の応力～ひずみの関係を示すマトリックスは次のような方法で誘導している。

$f=0$ という降伏条件で降伏したとき満足すべき条件

- (1) 応力の増分は降伏条件を満足しながら生ずる。

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [d\sigma] + \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \right]^T [d\epsilon^P] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.1)$$

- (2) 塑性ひずみ増分は次のような形で生ずる。

$$[d\epsilon^P] = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \cdot d\lambda \quad \dots\dots\dots (3.2.2)$$

- (3) 総ひずみ量は弾性ひずみと塑性ひずみの和である。

$$[d\epsilon] = [d\epsilon^e] + [d\epsilon^P] \quad \dots\dots\dots (3.2.3)$$

- (4) 弾性ひずみと応力との関係はフックの法則に従う。

$$[d\sigma] = [D][d\epsilon^e] \quad \dots\dots\dots (3.2.4)$$

(3.2.4) 式に (3.2.3), (3.2.2) 式を代入すると

$$[d\sigma] = [D][d\epsilon] - [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] d\lambda \quad \dots\dots\dots (3.2.5)$$

(3.2.5), (3.2.2) 式を (3.2.1) 式に代入すると

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D][d\epsilon] - \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] d\lambda + \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] d\lambda = 0$$

$$\therefore d\lambda = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D][d\epsilon]}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \quad \dots\dots\dots (3.2.6)$$

(3.2.6) 式を (3.2.5) 式に代入して

$$\therefore [d\sigma] = \left[[D] - [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D]}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \right] [d\epsilon] \quad \dots\dots (3.2.7)$$

したがって

$$[D^P] = \left[[D] - [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D]}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \right] \quad \dots\dots\dots (3.2.8)$$

が降伏後の応力～ひずみの関係を示すマトリックスとなる。なお $d\lambda$ は塑性論の定義から必ず正でなければならない。負であった場合には、その要素は弾性体であるとして、そのステップの計算を再計算するようにしている。

降伏条件に、ひずみ硬化、劣化のある場合も扱えるように $\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P}$ の項を入れている。硬化、劣化の係数としては、異方性岩盤計算プログラムでは γ_{xy}^P 、直交異方性弾性体計算プログラムでは ϵ_s 、 ϵ_B (定義はプログラム説明参照) の函数を用いている。

異方性岩盤計算プログラムではすべりの方向が2方向あって、両方にすべっている状態もあるこ

とも考え、そのような場合には次のような方法によって誘導した応力～ひずみの関係式を用いている。

応力が $f_1 = 0$ 及び $f_2 = 0$ に達した後は

$$df_1 = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right]^T [d\sigma] - \left[\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right] d\lambda_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.9)$$

$$df_2 = \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right]^T [d\sigma] - \left[\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right] d\lambda_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.10)$$

を満足しなければならない。

$$\text{また } [d\sigma] = [D][d\varepsilon] - [D] \left[\frac{df_1}{d\sigma} \right] d\lambda_1 - [D] \left[\frac{df_2}{d\sigma} \right] d\lambda_2 \quad \dots\dots\dots (3.2.11)$$

である。

(3.2.11) 式を (3.2.9) 及び (3.2.10) 式に代入

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right]^T [D][d\varepsilon] - \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right] d\lambda_1 - \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right] d\lambda_2 &= 0 \\ \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right]^T [D][d\varepsilon] - \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right] d\lambda_1 - \left\{ \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right] \right\} d\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

以上の 2 式の連立方程式を解けば $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ が求まるから、これを

$$d\lambda_1 = [R_1][d\varepsilon], \quad d\lambda_2 = [R_2][d\varepsilon]$$

とおき (R_1 , R_2 は 1 行のベクトル), (3.2.11) 式に代入すれば

$$[d\sigma] = \{ [D] - [D] \left[\frac{df_1}{d\sigma} \right] [R_1] - [D] \left[\frac{df_2}{d\sigma} \right] [R_2] \} [d\varepsilon] \quad \dots\dots\dots (3.2.12)$$

となる。よって

$$[D]^P = \{ [D] - [D] \left[\frac{df_1}{d\sigma} \right] [R_1] - [D] \left[\frac{df_2}{d\sigma} \right] [R_2] \} \quad \dots\dots\dots (2.2.13)$$

が応力～ひずみの関係を示すマトリックスとなる。

これらの計算はすべて三次元応力状態で $[D]^P$ を誘導し、実際の計算は二次元平面歪計算 ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) であることに着目し、必要な項だけを使用している。

3-3 点安全率の考え方と適用法

3-3-1 はじめに

近年基礎岩盤がダムの安定性に大きく影響することが認められてきたが、最近のようにアーチダムが多くなり、また好条件のダムサイトが減ってきたことなどから、ダム基礎岩盤の安定性を検討しなければならないことが非常に多くなってきている。

本研究室では岩盤の安定解析の方法として塑性解析による方法も研究を続けているが、それと平行して以下に述べるような弾性解による応力値を用いてクーロンの式に対する安全率を計算し、安定性を検討する方法も簡易的な方法として実際の問題に多く採用している。

詳細は土木研究所資料第337号^{注1}を参照されたいが、本資料の1章2節で説明した二次元弾性計算No.2プログラムには、この計算を行なうルーチンが付いている。

3-3-2 理論概説

岩盤の破壊については未知な点が多いが、岩盤のせん断破壊強度については、クーロンの式

$$\tau_u = \tau_0 + f\sigma, \quad f = \tan \phi \quad \dots\dots\dots (3.3.1)$$

ここに τ_0 : 純せん断強度

f : 内部摩擦係数

ϕ : 内部摩擦角

τ_u : 破壊時せん断応力

が $\sigma \geq 0$ においては、実用的には成り立つことが認められている。

構造物の破壊を考える場合、主に荷重の評価と材料(自然も含む)の強度の評価の信頼度によって安全率を見込まなければならない。

ダムの基礎岩盤の安定性を考える場合、荷重に対してはかなり厳しい条件で決めてあるので見込まなければならない予裕はあまりないものと考えられる。しかし、岩盤強度の評価に対しては応力の推定の困難さをも含んで現段階ではかなりの予裕を見込まなければならない。したがってダムの基礎岩盤の安全率として見込むべき予裕は、主として岩盤の抵抗強度の形で見込まなければならない。

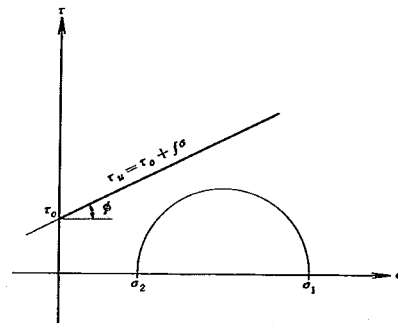


図-3.2 クーロンの式

一般に岩盤の強度としては τ_0 と f をもって表わしているが、(1) τ_0 を $1/n$ に評価して破壊を考える場合と、(2) τ_0 と f を共に $1/n$ に評価して破壊を考える場合、すなわち τ_0 についての n 倍の

注1. 土木研究所資料 第337号 ダム基礎の合理的設計法 石井文雄、飯田隆一、岸本貞男

安全率を考える場合と τ_0 と f 共に n 倍の安全率を考える場合について考えてみよう。

(1)の場合

$$|\tau| = \frac{\tau_0}{n} + f\sigma \quad \dots\dots\dots (3.3.2)$$

式(3.3.2)は $n|\tau| = \tau_0 + fn\sigma$ とも書け、この式は、 σ と τ が n 倍になった時破壊することと同義であることがわかる。したがって、この場合の安全率を荷重安全率(N_L)と名付けることとする。

$$N_L = \frac{\tau_0}{|\tau| - f\sigma} \quad \dots\dots\dots (3.3.3)$$

(2)の場合

$$|\tau| = \frac{\tau_0}{n} + \frac{f\sigma}{n} \quad \dots\dots\dots (3.3.4)$$

式(3.3.4)は $n|\tau| = \tau_0 + f\sigma$ とも書け、 τ のみが n 倍になった時に破壊することと同義である。

この場合の安全率を強度安全率(N_S)と名付けることにする。

$$N_S = \frac{\tau_0 + f\sigma}{\tau} \quad \dots\dots\dots (3.3.5)$$

N_L と N_S を比較すると一般に $N_L > N_S$ なる関係がある。 N_L を用いるか N_S を用いるかは、試験によって求めた岩盤の強度定数の傾向から判断すれば良いわけであるが、岩盤の性質があまり確かに把握されない段階においては安全側の値を与える N_S を用いる方が妥当であろう。

さて(3.3.4)式及び(3.3.5)式に出てくる τ , σ の値はすべりの方向をどうとるかによって変わってくる。

すべりの方向が図-3.3に示すように σ_1 の方向から θ 傾いている場合には次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \tau &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \end{aligned} \quad \dots\dots (3.3.6)$$

したがって θ をどの方向に選ぶかによって N の値が変わってくる。 N の値が最も小さくなる方向を最少安全率の方向($\theta_{\min}$)その時の安全率を最小安全率($N_{\min}$)と定義すれば $\frac{\partial N}{\partial \theta} = 0$ となる θ 及びそのときの N の値から $\theta_{\min}$, $N_{\min}$ は求まる。

計算結果は次の様になる。

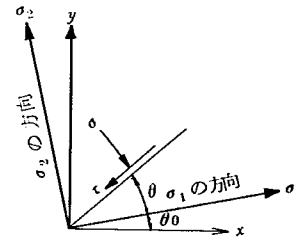


図-3.3 すべり線の方向

荷重安全率のとき

$$N_L = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta - f\{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta\}} \quad \dots\dots\dots (3.3.7)$$

$$N_{L \min} = \frac{\tau_0 \cos \phi}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (3.3.8)$$

$$\theta_{L \min} = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad \text{但し} \quad \phi = \tan^{-1} f$$

強度安全率のとき

$$N_S = \frac{\tau_0 + f\{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta\}}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta} \quad \dots\dots\dots (3.3.9)$$

$$N_{S \min} = \frac{\sqrt{(\tau_0 + f\sigma_1)(\tau_0 + f\sigma_2)}}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad \dots\dots\dots (3.3.10)$$

$$\theta_{L \min} = \pm \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{f}{N_S} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (3.3.11)$$

$\theta_{\min}$ となる方向は2方向得られるが、どちらの方向をとるべきかはすべり方向の全体の流れをみて決めなければならない。

θ は第1主応力からの角度であるが第1主応力の x 軸からの角度を θ_0 とすれば $\theta_0 + \theta$ が x 軸からみた最小すべりの方向となる。

1章2節のプログラムではすべて x 軸からの角度として扱っている。

3-3-3 岩盤の安定性の検討への適用法

岩盤内の応力分布が与えられれば、以上で述べたような方式で断層面の安全率や各点の最小安全率およびその方向を求めることができる。

岩盤内にすべり面が形成される場合には、その付近での安全率が最も低い点を結びながら最もすべり易い方向に伸びていくと考えられるから、各点での最小安全率およびその方向を図面上に記入することにより、すべり面を図解的に求めその安全率を求めることができる。

しかし、不連続面や幅のある弱層などがある場合は、それらの面ですべりが生じ得るから少し検討を要する。

不連続面で破壊が生ずるかどうかは、(3.3.7)、(3.3.9)式において求められる不連続面の方向での安全率と(3.3.8)、(3.3.10)式によって求められる岩盤の最小安全率の大小関係によって決まる。

例えば破砕帯や断層などの様に幅のある弱層がある場合について考えてみよう。

それには図-3.4に示すようなA、B2点について考えれば良い。A点を荷重点寄りによる。

すべりが生ずると考えられる方向は、それぞれ3つつある。すなわち、堅岩内での最小安全率面、弱層内での最小点安全率面および両者の接触面に沿うすべり面である。このいずれかによってその点でのすべり面の方向および点安全率が定まるかということは、すべり面がどちらの方向から弱層に入るか、いいかえると、破壊面と弱層面との交角によって定まる。

堅岩内での最小安全率 N_{SS} 、弱層内での最小安全率 N_{sf} 、両者の接触面でのすべり安全率を N_{SB} とすると

一般に

$$N_{sf} < N_{SB} \quad (\text{弱層と接触面の強度定数を同じとしているのであるから常に成り立つ})$$

$$N_{sf} < N_{SS}$$

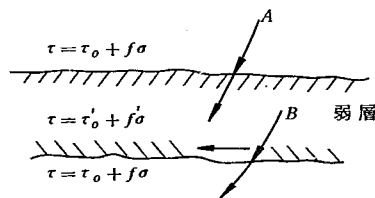


図-3.4 弱層におけるすべりの方向

の関係がある。 $N_{sf} < N_{ss}$ より堅岩内よりのびたすべり面が弱層内に侵入する時には、両者の接触面ですべりが生ずることはない。すべり面の方向は断層内に入れば弱層の最小安全率の方向に変わる。弱層から生じたすべり面が、堅岩に伸びる時には N_{ss} と N_{sb} との大小関係によって決まる。 $N_{sb} < N_{ss}$ なら接触面にすべりが生ずる。このことを弱層面すべりが乗移ったという。以上のことから堅岩からのびた、すべり面が弱層に入る点では乗り移りの検討は不要であり、弱層から堅岩部にのびる点乗り移りの検討を行なえば良いことがわかる。