建設省土木研究所
47.6. 3
図書室

ST－8
ST. Section

土 木 研 究 所 資 料

第743号

自動車の走行荷重と構造物の応答に関する文献調査

昭和47年3月

建設省土木研究所
構造橋梁部　構造研究室

目　次

まえがき 1

要　旨 1

1. 概　説 3

2. 論文抄録 4

3. 結　語 31

あとがき 31

付　録

論文資料 32

No.743

正 誤 表

頁	行	誤	正
6	3	大　略　2.5HZ	大　略　0.064 HZ
8	13	2－1－7 上下振動項	上下振動の項
9	5	強いこと。	強いこと，
10	11	2－1－16 ピストンスピート	ピストンスピード
16	13	2－2－17 10％以上値	10％以上の値
	27	積分することは	積分すること
25	20	3－9 応力頻度係数 振幅頻度係数	応力頻度計数 振幅頻度計数

まえがき

本年度は構造物の動的安全性の研究の下で，文献調査のまとめをおこなった。当研究内容は自動車の走行による構造物の応答と，自動車が構造物に与える外力として大別することができる。　今回の文献調査は，自動車が振動を継続する源である路面の凹凸，路面凹凸による自動車の振動，構造物の応答，実働荷重による疲労，寿命予測を調査範囲とした。

構造研究室長　成田信之
〃　研究員　池村雅司

要　旨

今回の文献調査の範囲は，1. 路面の凹凸およびその測定　2. 路面の凹凸と応答　2－1. 自動車の応答，自動車荷重　2－2. 自動車の振動と構造物の応答　3. 実働荷重による疲労　4. 不規則振動論　とした，これにより今後の問題点は次のようになる。

1. パワースペクトルによる方法では最大値があいまいとなる。
2. 1. を解決するには不規則振動論の zero crossing を利用するか，入力から出力を求めるかの方法が考えられる。
3. 現在までのところ，この種の研究は圧倒的に自動車関係に多く，そのため，着目する周波数範囲に差があり，土木関係においても実験を強化する必要が感じられる。

1. 概　説

新材料の開発および構造解析の進歩により，構造物は近年ますます可撓性をましつつある。従来あまり問題とならなかった荷重の動的影響は，構造物の振動において顕著に表われるようになり，実働荷重によるたわみ制限，疲労の解答を求められるようになった。しかしながら土木関係では実働荷重に影響を与える因子が複雑なため，最近まで簡単な近似で荷重そのものを回避してきた。一方，自動車関係においては，その設計にあたりひじょうに深刻な問題であるため，実働荷重についてかなり真剣に研究がなされた。ここでいう自動車の実働荷重とは凹凸のある路面を自動車が走行するときの自動車に作用する荷重をいう。従って，路面の凹凸の測定，そのパワースペクトルによる整理についても自動車側で始められ，特に，1953年に自動車技術に発表された高橋教授の「路面の性質と自動車の振動をむすぶ一理論」は先駆的なものであった。その後この方法を用い，路面の凹凸のスペクトルとその通過車両の振動スペクトルの関係を取り扱った研究がかなりなされた。最近になり，この方法では *maximum value* が不明確なことから *zero-crossing* の理論を用いた *maximum value* の推定，頻度分析がおこなわれるようになってきた。

一方自動車関係者は路面の形状そのものを取り入れることはおこなっても，その弾性変形を考慮するようなことは必要がなかった。しかし，土木関係者にとってはこれが必要であり，弾性支承された凹凸のある路面を自動車が走行するときの路面側の応答が研究対象となる。これが解明されれば実働荷重下における構造物の疲労，寿命予測との関係もより一層明確になると期待される。この両の問題を積極的に取り扱ったものに，*C. C. Tung* の論文があり，注目される。

次に，今回文献調査をおこなった論文をまとめておく。ここでは次のように4つに大分類をおこなった。

1. 路面の凹凸，*profile*
2. 路面の凹凸と応答
   - 2-1. 自動車の応答
   - 2-2. 構造物の応答
3. 実働荷重による疲労，寿命
4. 不規則振動一般

なお，次2節に，これら論文の抄録を，付録に，これらの代表的と思われる論文を収録した。

2. 論文抄録

1. 路面の凹凸, Profile

1-1. 国枝正春 ; 道路面のおうとつ調査測定法に関する覚書
自動車技術 10 〔6〕 208～211 ('56-6)

実用的な路面おうとつの調査測定法について述べたものである. 次のような方法が代表例として上げられている.

1. 直接路面で測定する方法 ―― 測量
2. 自動車で測定する方法
   1) タイヤの垂直たわみを測定する方法
   2) 車軸の振動を測定する方法
   3) 懸架ばねのたわみを測定する方法
   4) 車体の振動を測定する方法
3. 特別に測定車によって測定する方法

1-2. Ahlborn, G. and Moyer, R. A. ; New developments in BPR roughness indicator and tests on California pavements, H. R. B. Bull. 139, 1～28 ('56)

BPR (Bureau of Public Roads) roughness indicator (1941) を7年間使用した結果の改良点や取り扱い上の注意についてまとめたものである. 1. 測定車輪は smooth tread で, 径は初期の頃 6.00×16 が後期では 6.70×15 となった。タイヤ材質による RI の変化は無視できる. 2. タイヤの非真円度は小さい程よいが, 許容最大値として 0.01 in が考えられる。3. dash pot の oil leakage, leaf spring の ball joint, integrator, 回転計, outtrigger carrier の改良, 製作をおこなった.

この結果改良型測定車で路面の凹凸測定がおこなわれ, その結果が載っている.

1-3. Petrok, B. R. and Tohons, K. L. ; Minnesota modifications to BPR roughness indicator, H. R. B. Bull. 139, 29～34 ('56)

1-2. は California 州道路局における改良点についてのべたものに対して, 本報文は Minnesota 州道路局における BPR roughness indicator の改良

点について述べたものである。

1-4. Press, H., Houbolt, J.C. and Walls, J.H. ; Some measurements and powerspectra of runway roughness, NACA TN 3305 ('56)

1-5. Quinn, B.E. and DeRaries ; Highway characteristics as related to vehicle performance, H.R.B. Bull. 250, 20~39('60)

路面スペクトル $P_x(f)$ と，実験により求めた路面変位と路面への外力の伝達関数 $T_{F/x}(f)$ から路面への外力スペクトル $P_F(f)=P_x(f)\cdot|T_{F/x}(f)|^2$ を求める。本論文は，2-2-17，2-2-19 へと続く研究の第1段階のものである。

1-6. Hveem, F.N. ; Devices for recording and evaluating pavement roughness, H.R.B. Bull. 264, 1~26 ('60)

1960年までに考案された profilometer または roughometer について，総括的なまとめをおこなった。路面の凹凸を正確に測定するための profilometer の精密化と共に，現場技術者にとって取り扱い易い profilometer の開発および standard 型との測定例の比較をおこなった。これにより路面凹凸による道路表面の仕上げ程度，経年変化を監視できるようになった。

1-7. 武田 峻 ; 路面凹凸のモデルによる検討

運輸技術研究所報告 11 [4] 113~120 ('61-5)

滑走路・道路の凹凸機構を簡単な3種類のモデル（舗装路，自地を対象とした路面，非舗装）で代表して，路面凹凸の一般的な特性を検討した。路面スペクトル $[PSD(w)]\propto\Omega^{-m}$ で表わされ，舗装路で $m\doteqdot 2$，砂利道で $m\doteqdot 0\sim 2$，非舗装路 $m\doteqdot 4$ となる。

1-8. Spangler, F.B. and Kelly, W.J. ; Servo-seismic method of measuring road profile, H.R.B. Bull. 328, 33~51('62-1)

GMにおいて開発されたサーボ型の profilometer である。従来の profilo-

meter は不動点をとるためにタンデム型とするか，この点を不明確にしたまゝであったが，当 profilometer はサーボ機構により不動点を有している．この原理図，周波数特性，感度を付図 1，2，3 に示す．周波数特性は大略 2.5 Hz から flat である．

1－9. 兼重一郎 ； 自動車の不規則振動と道路面の特性

自動車技術 21〔4〕334～339（'67-4）

1953年以来路面の凹凸をスペクトル表示することがおこなわれてきた．この間の路面スペクトルのまとめをおこなったものである．

1－10. 得丸，竹内 ； 自動車走行路面の解析， 日本機械学会関西支部（'70-3）

1－11. 森田 敏，田代綾夫 ； 路面プロフィルの研究

自動車技術 24〔4〕362～367（'70-4）

路面の凹凸をパワースペクトル表示する方法はよい方法であるが，解析に要する時間，経済性の面で実用的でないため，次のような特性値 $Pr\,Q=\frac{1}{S}\sum_{1}^{n}Ai\ (mm/m)$，$PN=\frac{1}{2}\frac{n}{S}$（回/m）を導入したところ，図－4に見るようにパワースペクトル表示とよい対応が得られた。なお，$Pr\,Q$ は道路関係で使用されているプロファイルインデックス $Pr\,I$ 全く同じである。前着のバンド幅は一般は 6mm，後着では 48 mm を採用した点だけが異なっている。S＝測定区間長（m），A_i＝ バンド外側のピーク高さ（mm），n＝バンド外側のピーク個数である．なお，路面測定車は全長8.65m の複数輪のある測定車を製作し，使用した。

2. 路面の凹凸と応答

2-1. 自動車の応答

2-1-1. 小林 明 ; 自動車における振動, 自動車技術 5〔1〕24～25, 30; 〔2〕52～54, 44 ; 〔3/4〕84～85 ; 〔5〕118～121 ; 〔7/8〕182～185 ; 〔9〕210～212, 216 ; 〔10〕242～244 ; 〔11〕274～276. 〔12〕300～303 ('51) ; 〔6〕91～95 ('52)

自動車が走行するときの自動車振動について個々の場合について運動方程式から解を求めている。主な場合としては, 単一凸部を通過するとき, 単一凹部を通過するとき(特に自由落下を伴なう場合), 制動時の場合が上げられる。

2-1-2. 高橋安人, 平尾 収, 亘理 厚 ; 自動車の振動台による強制振動について, JSME 55〔403〕517～522 ('52-8)

ドラム式振動台を使用して, トヨペット SDF型車の振動実験をおこなった結果をまとめたものである。この結果2自由度系の強制振動の理論値と実験値がよい対応を示した。

2-1-3. 高橋安人 ; 路面の性質と自動車の振動をむすぶ一理論 自動車技術 7〔12〕286～290 ('53-11/12)

従来確定論的取り扱いでおこなってきた路面の形状をパワースペクトル表示することを提案したものである。この論文は以後ひじょうに大きな影響を与えた。

2-1-4. 松平 精, 松井 哲, 藤田料平 ; 自動車のばね, オイルダンパおよびタイヤが乗心地に及ぼす影響, JSME 57〔424〕316～320 ('54-5)

2-1-5. *Hopkins, R.C. and Boswell, H.H. ; Method for measuring load transfer through vehicle tires to the load surface. H.R.B. 36th Ann. Meet. 240～252 ('57)*

タイヤが路面に作用する力を記録するため, 1. タイヤ圧の変化による方法, 2. *Axle housing* の歪を利用する方法, 3. タイヤの外壁の変形を利用する方

法を採用し，基準ゲージとして路面に輪重計を設置して，3の方法による結果と比較した。この結果1による方法が最もよい結果を示した。

2-1-6. 武田 峻；路面の凹凸と自動車の振動の相関について

自動車技術 12 [12] 484～487 ('58-12)

一般調和解析の手法により，路面の凹凸特性と自動車の構造諸元から路面走行時の自動車の振動・乗心地，走行荷重を与える式を導いた。さらに自動車の寿命推定の一方法を提示した。たゞし，これらの結論にはいくつかの仮定があり，そのうち路面凹凸の定常確率過程化，力学系の線形化，車体の剛体化の仮定は今後の検討を要する。また，路面凹凸の測定，実車走行試験による検討を行なう必要がある。

2-1-7. 平尾 収，近藤政市，亘理 厚，山本峰雄；理論自動車工学，

山海堂，236～264 ('58)

上下振動項が参考になる。エネルギー法により運動方程式を誘導し，ラプラス変換し，変換後の式で，4自由度系が近似的に2自由度系に置き換えうることを示している。

2-1-8. 武田 峻；路面走行時の自動車の振動

運輸技術研究所報告 8 [6] 1～16 ('59-1)

2-1-6.は本報告をもとに要点のみを報告したものであり，本論文がoriginalである。

2-1-9 武田 峻；航空機走行荷重の解析

運輸技術研究所報告 10 [5] 1～44 ('60-7)

航空機が凹凸のある滑走路を走行する場合の航空機の受ける荷重（走行荷重）について，パワースペクトルを用いて解析をおこなった。宇都宮飛行場の滑走路の凹凸を測定した結果，そのパワースペクトル $PSD(\Omega)=\frac{a}{\beta^2+\Omega^2}\ mm^2/rad\cdot m^{-1}$，$a=19$，$\beta^2=0\sim0.03$，$\Omega=\frac{2\pi}{L}$，$L$：波長(m)で表わされた．数値計算と走行実験の結果，この方法は走行荷重の算定に実用しうることが判った。

2-1-10. Svenson, O., 橋倉訳 ; 車輪と路面の間に作用する動的な力とその路面荷重に対する影響, 自動車技術 14 [7] 288～293 ('60-7)

路面荷重の側から自動車の動特性の検討をおこなった。垂直力のみでなく, 横方向の力についても検討をおこなっている。実験はリム応力を測定する方法によった。この結果, タイヤバネ定数の小さいこと, 車軸ダンパの強いこと。ばね下質量の小さいことにより動的荷重の軽減を計りうることを示した。

2-1-11. 兼重一郎 ; パワースペクトル解析の自動車への応用, いすゞ技報 No.33 ('60)

パワースペクトルの解説と, 路面凹凸スペクトルを実車走行により求めた。自動車の伝達関数 $\Gamma(f)$ はドラム式加振台により実験により求め, 凹凸のある路面を走行したときの自動車の振動を $S(f)$ とし, 路面スペクトル $P(f)$ を $P(f)=S(f)/\Gamma(f)$, $P(f)=P(\lambda)/V$, $f=V\lambda$ から求めた。また, 一般に $P(f)=C\lambda^{-n}$ の形をとりうること, C, n は路面による常数であることが分った。

2-1-12. Kaneshiga, I. ; Measurement of power spectra of vehicle vibration and vehicle road roughness, Pro. 10th NCTAM ('60)

2-1-11 と同内容である。

2-1-13. 武田 峻 ; 航空機の走行中の振動に対する脚の非線型緩衝特性の影響について, 運輸技術研究所報告 11 [4] 121～141 ('61-5)

緩衝器の非線型特性を等価線型化方式を利用して振動解析をおこない, 緩衝器の非線型特性の影響を調査した。等価線型化された運動方程式の数値計算とアナログ計算機による計算結果を対比して, 等価線型化することによるパワースペクトル上の差異はほとんどないといってよいという結果をえた。

2-1-14 武田 峻 ; 走行時の自動車の振動荷重, 自動車技術 15 [6] 253～255 ('61-6)

2-1-13 をまとめたものである。

2-1-15. 橋倉，杉本 ； 自動車の振動測定，機械試験所報告〔45〕1～33（'61）

本論文は自動車が受けるランダム振動の測定，計測装置の開発に始まり，路面凹凸測定，各種自動車振動，乗心地評価の範囲を含む。とくに路面凹凸測定は，バンパーに付けた容量変化型と，長周期振子型の2種のものを採用した。

2-1-16. 岩崎芳夫，千島和夫 ； アナログ計算機を使用した四輪車の上下振動に関する解析，自動車技術 16〔4〕172～177（'62-4）

2-1-7. の運動方程式に前，後車輪の粘性項を付け加えた基礎式を低速度型アナコンにより解を求めた。入力として，ステップ波形，正弦波形を使用し，過渡振動，強制振動を求めた。非線型アブソーバーを等価線型アブソーバーに置き換えることによる差についても演算をおこない，前輪のばね上加速度共振特性に差を生ずること，ピストンスピートの遅い範囲では問題があることが分かった。

2-1-17. 兼重一郎，藤原 清 ； アナログコリレーターによる走行時振動のパワースペクトル解析例，自動車技術 17〔8〕490～496（'63-8）

凹凸のある路面を自動車が走行したときにえられる記録からパワースペクトルを求めるのに，相関々数までをアナログで処理し，このフーリエ変換をディジタルで処理してパワースペクトルを求めた結果比較的安価に迅速にパワースペクトルを求めることができた。

2-1-18. 千島和夫，山本五十六 ； アナコンによる2自由度系の上下振動について，自動車技術 17〔8〕525～533（'63-8）

自動車の上下振動に関して，振動諸元を種々変化させたときの，ばね上共振点加速度，共振点相対速度について，線型2自由度系でアナコンにより解を求め，設計データの提供をはかった。

2-1-19. 川合平夫 ； 自動車の走行荷重に関する実験解析

自動車技術会 S38春季学術講演会（'63）

実走行における荷重応力履歴は，全体として非定常であるが，局部的には定常と見なし，定常過程の和として表わすことができると考える。この考えに依って，走行実験によるデータの頻度分析をおこなった。

2-1-20. 兼重一郎 ; 自動車走行時振動のパワースペクトル解析

自動車技術 18 〔4〕 261～267 ('64-4)

路面の凹凸は，2-1-11.の方法により $P(f)=c\lambda^{-m}$ と表わす。エンジンマウントの変化による振動を調べるため，エンジンを含む3自由度系の伝達関数をアナコンにより計算をおこない，路面凹凸スペクトルと伝達関数から自動車振動を計算した。これによりえた結果とベルギアン路における実験は，概ね一致した傾向となることが分かった。

2-1-21. 川合平夫，森崎健二 ; 自動車に対する路面の凹凸の影響についての一考察，自動車技術会 S39秋季学術講演会 ('64)

高速道路など良好な舗装路を走行する自動車の振動のうち，路面凹凸に直結した振動がどの程度であるかを，パワースペクトル，クロススペクトルを用いて解析をおこなった，

2-1-22. 川合平夫 ; 自動車の走行荷重に関する実験解析

自動車技術 18 〔11〕 836～840 ('64-11)

2-1-19.で述べた方法を裏付けるため頻度計を製作し，一般道路を走行し，データを集めた。この結果，実用走行時の荷重頻度は数個のガウス形分布のある割り合いで加え合せたもので表わしうることが分かった。

2-1-23. 川合平夫，森崎健二 ; 自動車の走行時の振動についての一考察

自動車技術 18 〔11〕 841～845 ('64-11)

2-1-21.を発展させ，まとめたものである。この結果，車体中央床上では，良好な舗装路で $\sigma_z/\sigma_y \doteqdot 0.35$，中程度の舗装路で $(\sigma_z/\sigma_y)_{v=60} \doteqdot 0.70$，かなりいたんだ舗装路で $(\sigma_z/\sigma_y)_{v=60} \doteqdot 0.98$ となることが分かった。良好な舗装路での乗心地改善は，路面凹凸入力だけでなく，他の振動源例えばエンジンを含めて考える必要があることが分かる。なお，σ_z，σ_y はそれぞれ路面の凹凸に起因する振動の r.m.s.，自動車の振動の r.m.s. である。

2-1-24. 川合，森崎 ; 自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性

三菱重工技報 2 〔2〕 20～28 ('65)

2-1-23.の継続である。2-1-23の実験データは岡崎の自社テストコースでおこなわれたものであるが，本報文は，名神高速道路，谷田部の自動車研究所高速周回路においておこなわれた実験をまとめたものである。

2-1-25. 得丸，芝川 ； 不規則な道路凹凸による自動車振動の多入力系としての解析， JSME 44期全国大会 No. 158 ('66)

2-1-26. Engels. F. : Vibration in vehicles and methods of investigation them, PIME 182 part 3B ('67/'68)

2-1-27. Robson, J. D. ; Deductions from the spectra of vehicle response due to road profile excitation, J. Sound Vib. 7 [2] ('68-3)

2-1-28. Hoppe, C. H. ; Design for rough terrain enviroment, Paper SAE No. 680098 ('68)

2-1-29. 樋口健二，音田 稔，福岡紀章 ； スペクトルによる自動車の上下振動特性の解析， 自動車技術 S44春季学術講演会 ('69)

2-1-30. 金丸伸二，吉田 寛 ； 懸架系の振動特性と問題点
自動車技術 23 [8] 768～789 ('69)
ロードノイズと懸架系の振動特性について述べたものであるが，懸架系の値の取り方が参考になる。

2-1-31. Robson, J. D. and Dodds, C.J. ; The response of vehicle components to random road-surface undulations. FISITA ('70)

2-2. 構造物の応答

2-2-1. 物部長穂 ; 橋桁の振動並びにその衝撃作用との関係について
JSCE 10 〔1〕 ('23-2)
走行荷重のために生ずる周期的外力(機関車の counter weight による外力を想定)と橋の固有振動との関係式を算出し, 荷重による桁の振動の累積により衝撃作用の極大値を算出した。本方法の計算値と実験値の比較をおこなった。

2-2-2. 松村孫治 ; 自動車の路面に及ぼす衝撃に関する研究
土木試験所報告 〔26〕 141~160 ; 〔27〕 95~135 ('34)
自動車を2自由度系で表わし, 路面をフーリエ級数で表示して, これから自動車の路面に及ぼす衝撃を計算した。計算値はアメリカ道路局においてなされた実験値と比較対応させ, よい近似であることを示した。なお, 路面は単一三角形と単一矩形凸部で表わされ, この障害物通過時の衝撃を求めたものである。

2-2-3. Steuding, H. ; Die Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten, Ing. Arch. 5 〔 〕 275~305 ('34)

2-2-4. Schallenkamp, A. ; Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten, Ing. Arch. 8 〔 〕 182~198 ('37)

2-2-5. 小沢久太郎 ; 本邦鋼道路橋衝撃係数に関する一考察
土木試験所 〔39〕 51~62 ('37)
一自由度系で表わした自動車が橋面上を平滑走行するときの橋のたわみの最大

値と静たわみの比で衝撃係数を規定し，衝撃係数について次式の提案をおこなった。

$i = 0.11 + \frac{2.6}{l-5.6} \leq 0.4$　本式による値は，大正15年制定の値より $l =$ 25～75m で小さくなる。

2-2-6. Klöppel, K. and Lie, K.H.; Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken, Ing. Arch. 13 [ ] ('42)

2-2-7. 三瀬幸三郎，国井修二郎；走行荷重による橋桁の強制振動論 九州大学弾性工学研究所報告 1-1 ('43)

2-2-8. Hillerborg, A.; Dynamic influences of running loads on simply supported girders, Int. Strc. Eng. Bridge Build. Roy. Inst. Tech., Stockholm, Sweden ('51)

2-2-9. Tung, T.P., Goodman, L.E., Chen, T.Y. and Newmark, N.M.; Highway bridge impact problems, H.R.B. Bull. 124, 111～134 ('56)

Illinois 大学において現在までにおこなわれた上記の理論的，実験的研究をまとめたものである。解析モデルは　1. バネなし mass が平滑走行する場合　2. 初期振動なしの状態でバネのある一自由系が走行する場合　3. 初期振動のある状態で，バネのある一自由系が走行する場合がらなる。実験結果と計算結果は曲げモーメントについていえば十分な対応を示した。

2-2-10. Scheffey, C.F.; Dynamic load analysis and design of highway bridges, H.R.B. Bull. 124, 16～32 ('56)

活荷重の動的影響を　1. 平滑走行による効果，2. 橋面の凹凸による効果，3. 擬似共振現象による効果に分け，主に，1について理論的検討を加えた。この結果と現場実験結果の対応をおこなった。

2-2-11. Brückmann, B.; Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads, Prel. publ. 5th Cong. IABSE, 181~198 ('56)

機関車荷重による応答をトラス橋について解析した。

2-2-12. Thesis, A. and Wen ; Dynamic behavior of simple span highway bridge traversed by two-axle vehicle, Univ. Ill., Civil Eng., Studies SRS No. 142 ('57)

2-2-13. Biggs, J. M., Suer, H. S. and Louw, J. M. ; Vibration of simple-span highway bridges, Pro. ASCE 83 [ST 2] 1186-1~32 ('57)

自動車系を一自由度系，桁の中央部を一自由度系として，スパン中央の応答について述べた。解析は 2-2-8 の式をさらに単純化したものを使用した。解析解は，模型実験，現場実験の結果と対比されている。この結果，自動車の動的影響のうちで，桁進入時の振動が最も大きく，橋面の凹凸は影響が小さいとしている。

2-2-14. 小西，山田，篠塚，小堀 ; 橋の衝撃係数に関する確率論的一考察，Trans. JSCE [62] 1~5 ('59)

橋に作用する動的荷重の位相が at random であるという仮定のもとに，位相を確率変数として，確率論的考察をおこない，桁の動的倍率がスパン長と共に変化することを明らかにした。

2-2-15. Vellozzi, J. W. ; Transverse vibrations of a single-span suspension bridge under a moving constant force or a moving pulsating force, Ph. D. dissertation, Polytech. Inst. ('61)

2-2-16. Gesund, H. and Young, D. ; Dynamic response of beams to moving loads, Publ. IABSE, 95～110 ('61)

運動方程式には，桁の慣性だけでなく，走行荷重の遠心力の項を考えに入れ，差分法を使って，解はIBM 650で求めた。この結果，高次振動を省略すると危険な場合があること，タンデム荷重による動的効果は，単一荷重のそれより大きくなる場合があることを示した。

2-2-17. Quinn, B. E. and Van Wyk, R. ; A method for introducing dynamic vehicle loads into design of highways, H. R. B. Pro. 40th Ann. Meet., 111～124 ('61)

1-5をまとめたものである。さらに，$T_{F/X}(f)$ の伝達関数を求めるための実験としては正弦波入力より衝撃入力によって行なった方がより現実的であること，スペクトルから求められる値はr. m. s.値であり，極大値でなく，この点についてさらに検討の必要があること，r. m. s.値で静荷重の10%以上値をえたことが示されている。

2-2-18. Wen, R.K. and Veletsos, A. S. ; Dynamic behavior of simple-span highway bridges, H. R. B. Bull. 315, 1～26, ('62)

自動車を前，後輪にバネを有する2自由度系で表わし，この自動車が，凹凸のある橋面上を走行するときの振動を解析した。なお，自動車が橋に進入したとき，すでに橋が振動していたときの影響についても取り扱った。

2-2-19. Quinn, B. E. and Thompson, D. R ; Effect of pavement condition on dynamic vehicle reactions, H. R. B. Bull. 328, 24～32 ('62. 1)

2-2-17. に関連した論文である。自動車が路面へ及ぼす力のスペクトル $P_F(f)$ を求めるため，路面スペクトル $P_H(f)$ を測量結果から計算し，路面凹凸と路面へ及ぼす力の伝達関数 $F/X(f)$ から $P_F(f) = P_H(f) \cdot |F/X(f)|^2$ で $P_F(f)$ を求めた。$F/X(f)$ は自動車の振動実験から求めた。$P_F(f)$ を積分することはよりr. m. s. を求めr. m. s. ―― 速度の関係を図にした。この手法の check の

ためにタイヤ圧力による実験をおこなった。

2-2-20. Fenves, S.J., Veletsos, A.S. and Siesis, C.P.; Dynamic studies of the AASHO road test bridges, H.R.B. Special Rep. 73 ('62)

2-2-21. 平井一男；種々の移動荷重を受けるはり構造の基礎方程式とその応用, Trans. JSCE [90] 29～34 ('63-2)

梁構造を多質点系に分割し，この多質点系に移動荷重が作用するときの運動方程式を連立微分方程式の形で導いた。速度を変化しながら移動する荷重の動たわみを求め，加速度の大きさが衝撃係数に与える影響について数値計算をおこなった。

2-2-22. 大地羊三；鉄道橋の衝撃係数，鉄技研報告 [370] ('63)

2-2-23. Walker, W.H. and Veletsos, A.S.; Response of simple-span highway bridges to moving vehicle, Str. Res. Scr. No. 272, Univ. Ill. ('63)

2-2-24. 平井 敦，伊藤 学；長径間吊橋の衝撃について，第10回橋梁構造工学研究発表会，115～125 ('63)

2-2-25. Hirai, A. and Ito, M; Impact on long-span suspension bridges, Pro. Symp. on high-rise and long-span structures, Japan, Soc. Promotion of Science ('64)

長大吊橋が高速走行する列車荷重により誘起される上下振動について解析をおこなった。

2-2-26. 山田善一，小堀為雄 ； ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究， Trans. JSCE [119] 1～8 ('65-7)

バネとダッシュポットをもつ一自由度系で自動車を表わし，この自動車荷重列の台数，間隔分布はポアソン分布，重量分布は 7：3 の双峰性正規分布とし，荷重列が凹凸のない橋面上をたわみ曲線に従って，滑らかに走行したときのたわみ応答から衝撃係数を算出した。

2-2-27. Varney, R.F. and Galambos, C.F. ; Field dynamic loading studies of highways bridges in the U.S., 1948－1965, H.R.B. Rec. 76, 285～305 ('65)

1948～1965 に U.S. でおこなわれた現場振動実験について，その実験内容，構造形式をまとめたもので，橋梁設計者，研究者へのデータの提供を目的とする。橋梁形式は単純，連続，片持ちタイプで，材質は鋼，コンクリート，その他のものを包含している。

2-2-28. 山田，小堀 ； 自動車走行中の振動特性が橋梁の衝撃係数に与える影響について， 土木学会 20 回年次学術講演会，I－29， ('65)

2-2-29. Hirai, A. and Ito, M. ; Dynamic effects produced by trains upon suspension bridge, Proc. Int. Symp. on suspension bridge, Lisbon ('66)

2-2-25. と同内容

2-2-30. 平井 敦，伊藤 学 ； 走行荷重による吊橋の振動

土木学会 22 回年次学術講演会， I 141 ('67-5)

2-2-25. で誘導した結果の妥当性を調べるため模型実験をおこない，その結果について述べた。この結果，走行速度が 200 km/h 以下ならば振動は小さいことが分った，なお，2-2-25 と 2-2-30 を集大成したものが 2-2-37 である，

2-2-31. Lin, Y. K. ; Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw-Hill Book Co., 332~337 ('67)

2-2-32. 山田善一, 小堀為雄, 中村幾雄 ; 不規則振動論による道路橋の動的応答, 土木学会22回年次学術講演会, I-148 ('67-5)

自動車と橋を等価な3自由度系で表わし, この系の路面スペクトルの伝達関数を運動方程式から求め, 路面スペクトルとして $c\lambda^{-n}$ を入力したときの橋の応答スペクトルを求めた. さらにこれをもとに複数の自動車による応答スペクトルからr.m.s.値を使って, 衝撃係数として $i=6/\ell<0.4$ を提案した.

2-2-33. 伊藤文人, 松浦章夫 ; 鉄道橋のボギー車走行による動的応答, 土木学会22回年次学術講演会, I-152 ('67-5)

けた—2軸ボギー車系の動的応答を求める基礎微分方程式を誘導した. この結果, 式は係数の変化する多元連立微分方程式となり, ミルンの方法を利用して数値計算をおこなった.

2-2-34. Tung, C.C. ; Random response of highway bridges to vehicle loads, ASCE 93 [EM5] 79~94 ('67)

自動車荷重列の台数分布をポアソン分布とし, 重量, 速度は一定とする. この自動車荷重列による橋の応答の確率密度関数を解析的に求めた.

2-2-35. Walker, W. H. ; Invristigation of dynamic in highway bridge, 1st Proc. Rep. Dep. Civil Eng., Univ. Ill. Urbana ('67-10)

2-2-36. 山田善一, 小堀為雄 ; 活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数—に関する考察, Trans. JSCE [148] ('67-12)

2-2-32をまとめたものである。

2-2-37. 伊藤 学 ; 走行荷重に対する吊橋の動的応答と衝撃
Trans. JSCE ('68-1)
2-2-25, 2-2-30 を集大成したものである。

2-2-38. Fiyba, L. ; Non-stationary vibrations of bridge under random moving load, Final Publ. 8th Cong. IABSE, 1223~1236 ('68)
非定常ガウス分布をなす荷重による単純げたのたわみ応答を解析した。短スパンについては集中荷重とし，長スパンについては分布荷重とした。この結果，前者においては走行速度の増大により応答は小さくなり，後者においては，限界速度に接近すると応答は大きくなることを示した。

2-2-39. 小堀為雄，鈴木 治 ; タイヤチェーンを付けた自動車によるけたの振動に関する一考察, 土木学会23回年次学術講演会，469~472('68-10)
タイヤチェーンによる凹凸を路面凹凸に置き換えて，この路面凹凸入力に対するけたの振動を取り扱った。この結果，床板，床組に及ぼす影響が大きく，衝撃係数で0.7位となる場合のあることを示した。

2-2-40. 松浦章夫 ; 鉄道橋の衝撃係数が車両の初期振動により受ける影響の実験, 土木学会23回年次学術講演会，479~480 ('68-10)
車両の初期振動が衝撃係数に与える影響を調べるため，第一段階として模型によりこれをおこない，初期振動を理論式への初期条件として取り入れたときの計算値と，実測値の比較をおこなった。この結果，理論式が妥当であることが分った。

2-2-41. Potter, J.F. ; Dynamic impact pressures generated under roads by sprung and unsprung vehicles, PRL Rep. LR. 137 ('68)

2-2-42. 後藤尚男，亀田弘行 ; 構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について ——定常入力に対する過渡解——, 土木学会23回年次学

術講演会，361～364　('68-10)

本法の特長は，各時刻間における応答量の相関の影響をできるだけ考慮するようにしていることにある。ここでは線型1自由度系の過渡応答について述べた，

2-2-43. 山田善一，竹宮宏和；不規則外力による多自由度系の応答
土木学会 23回年次学術講演会，359～360　('68-10)

不規則振動論を通じて，固有振動モード間の位相差が系応答にどの程度の効果を及ぼすかを固有振動数と減衰定数の関係において明らかにした。応答スペクトルの r.m.s.評価の適用範囲について検討した。

2-2-44. Stanisic, M.M.；任意の数の移動集中荷重を受けるはりの応答
J. Franklin Inst. 289 [2] 115～123　('69-1)

2-2-45. Novak, M.E., Heins, C.P. Jr. and Looney, C.T.G.; Induced dynamic strains in bridge structures due to random truck loadings, Pro. Rep. Study of effects of new vehicle weight law on structures, Civil Eng. Dep., Univ. Maryland ('69-2)

2-2-46. Tung, C.C.; Response of highway bridges to renewal traffic loads, Pro. ASCE 95 [EM1] 41～57 ('69-2)

2-2-34の方法を拡張したものである。通過車両の型式，重量，速度は一定であるのは，前と同じであるが，台数分布に加えて，車頭間隔分布を導入して，解析をおこなった。

2-2-47. 貞　升；ダンプトラックの走行時におけるタイヤの接地圧力の測定，
土木技術 ___ [　]　('69-2)

2-2-48. Skeer, M.H. ; 移動荷重による励起を受ける系の動的応答
J. Franklin Inst. 287 〔4〕 319～331 ('69-4)

2-2-49. Chandrasekaran, A.R. ; Live load effect on dynamic response of structures, Proc. ASCE 95 〔ST4〕 649～660 ('69-4)

応答の活荷重による影響を2自由度系で検討をおこなった。減衰項は，粘性減衰と，クーロン減衰の両者を対象とした。

2-2-50. Werner, J.P., Heins, C.P. Jr. and Looney, C.T.G. ; Induced bridge loads and moments during a ten year period, Pro. Rep., Study of effect of new vehicle weight law on structures. Civil Eng. Dep., Univ. Maryland ('69-6)

2-2-51. Final report of the investigation of impact on highway bridges. Eng. Exp. Sta., Univ. Ill., PB189908 ('69-6)

2-2-52. 松浦章夫 ; 車両走行による鉄道橋の動的応答の基本式
鉄技研 〔691〕 1～21 ('69-7)

2-2-53. 佐藤吉彦 ; 軌道高低狂いの特性と輪重変動
土木学会 24 回年次学術講演会，299～300 ('69-9)

2-2-54. 亀田弘行 ; 構造物の不規則振動に関する一考察 ―応答が一定レベルを越える回数の確率分布，土木学会 24 回年次学術講演会，205～208 ('69-9)

実働荷重による疲労において問題となる頻度について。一定振幅を越える頻度の確率分布について述べたものである。本法を線形1自由度系に応用したときの計算結果が示されている。

2-2-55. Sanders, N.W.; Load distribution in steel railway bridges. Pro ASCE 95 [ST 12] 2763~2781 ('69-12)
鉄道橋の荷重分布を直交異方性板理論を用いて、解析した。

2-2-56. 島田静雄 ; 相関解析手法による構造物の振動解析
Proc. JSCE [174] 11~23 ('70-2)
地盤、構造物系を2質点系と考えたとき、1質点系の特性の測定結果の重ね合せが可能であることを示した。

2-2-57. 平島政治 ; 荷重及び車頭間隔が不規則な分布をなす道路橋の応答解析,
土木学会 25回年次学術講演会, 471~474 ('70-11)
荷重及び車頭間隔が不規則分布するとして、道路橋のタワミを多入力系として求めた。2-2-26を拡張したものということができる。

2-2-58. 小西, 白石, 北川, 角田 ; 走行荷重による長大吊橋の動的応答,
土木学会 25回年次学術講演会, 481~482 ('70-11)
Schallenkampの方法と、Looneyの方法を用いて平滑走行による効果を求め、たわみの衝撃係数の形で整理した。結果は、平井・伊藤が得た結果とほぼ同様な形となっている。

3. 実働荷重による疲労及び破壊

3-1. Rice, J.R., Beer, F.P. and Paris, P.C.; On the prediction of some random loading characteristics relevant to fatigue, 2nd Int. Conf. on Acoustical fatigue ('64-4)

3-2. Fisher, J.W.; Fatigue life of bridge beams subjected to controlled truck traffic, Prel. Publ. 7th Cong. IABSE, 497~510 ('64)

AASHO ROAD TESTの疲労試験と，小試片による室内疲労実験の結果の対比をおこない，室内実験結果を現場へいかに反影させるか検討をおこなった，整理はS-N曲線によった。

3-3. Shinozuka, M.; Probability of structural failure under random loading, Proc. ASCE 90 [EM 5] P.147~170 ('64-10)

3-4. Roberts, J.B.; 非定常ランダム荷重のもとでの構造物の疲れ，
J. Mech. Eng. Sci., 8 [4] 392~405 ('66)

非定常ランダムプロセスが単位時間当たりある応力レベルと正の傾きをもって交わる数の平均値 ν_α^+ から，ある時刻までの被害の平均値が求められる。ν_α^+ にS.O. Riceが示した式を用い，ランダムプロセスおよびその時間微分とが二変量正規分布に従うと仮定し，被害が1になるとき破壊すると考えれば，疲れ寿命の平均値が求められる。定常ランダムプロセスの場合には，この平均値はすでに求められた結果と一致する。

3-5. McMillan, J.C. and Pelloux, R.M.N.; プログラムおよびランダム荷重のもとでの疲れき裂の進展，ASTM STP415, 505~535 ('67)

中央に切欠きを有する2024-T3Al合金板における疲れき裂進展速度と機構におよぼす最大応力，応力振幅および応力変動の影響を電子 fractography により調べられた。

3-6. Lardner, R.W.; ランダム疲れ理論，J. Mech. Phys. Solids 15 [3] 205~221 ('67)

広帯域ランダム荷重のもとでの疲れ過程が考えられている。疲れ被害が繰返し数ではなく，時刻tに関する連続関数であると考え，単位時間当りの被害関数を仮定し，振動数，応力波形，応力履歴の影響を無視する。ランダム応力プロセスが正規分布をなし，定常である場合について，時刻tまでに破壊しない確率が計算されている。また，一定振幅の疲れ試験における破断までの繰り返し数は，この方法により十分推定できるという結論を与えている。

3-7. Cudney, G. R. ; The effect of loading on bridge life, Michigan department of State Highways, Research Rep. No. R-638 ('68-1)

3-8. 青山成恒，伊藤三史 ； プログラム荷重による疲労寿命の評価
自動車技術 23〔2〕131～135 ('69-2)

調質したSCM4の平滑および切欠試験片を用い，二重多重重複荷重，正弦波状変動荷重によるプログラム疲れ試験時の寿命を調査した。プログラム中の荷重振幅はすべて定荷重疲れ試験における耐久限度以上，破断までの荷重変動サイクル数は3～6である。この種の変動荷重下の寿命は，寿命の分散幅を考慮すれば，近似的に定荷重下の寿命からマイナー則によって評価しうる。

3-9. 伊藤文人 ； 実働荷重による鉄道橋の疲労被害推定，
鉄技研報告〔676〕1～29 ('69-4)

実働応力を計算により求め，疲労寿命をマイナー則またはコルテンドラン則により，応力頻度係数は振幅範囲係数法を用いて，等価繰返し数，等価応力を求めた。これにより電車荷重は疲労に対して不利であることなどがわかった。

3-10. 神原広司，戸川達夫 ； 路面負荷と部材寿命に関する評価法，
自動車技術 23〔10〕1062～1066 ('69)

自動車部材の走行寿命を推定するため，応力の頻度分布を解析に便利なワイブル分布関数におきかえ，さらにS-N曲線を材料の疲れ強さで無次元化して，部材，路面ごとに異なる計算を汎用性あるものにした。この結果，分布の形状パラメータ

$-m$ と材料の強さによるパラメーターαから計算チャートで寿命推定が可能となり，目標寿命に対する許容応力の算定，寿命にもとづいた路面，走行条件などの評価が容易となった。

3-11. Tung, C.C. ; *Life expectancy of highway bridges to vehicle loads.* Proc. ASCE 95 〔EM 6〕 1417～1428 ('69-12)

通過車両をポアソン分布とし，2-2-46 により応答を求める。この応答の単位時間当りのピーク頻度とマイナー則を使用して，寿命の推定をおこなった。

3-12. 山田敏郎 ; 疲れ被害法則の展望，JSME 73 〔621〕 1333～1340 ('70-10)

現在までに提唱された種々の疲れ被害法則と寿命推定法についてまとめた。現在までに提唱された疲れ被害法として 1. 直線被害法則 2. 疲れ度を応力と繰返し数の関数とした法則 3. Gatts の方法 4. き裂の伝ぱによる疲れ被害法則 5. き裂の発生とき裂の進展過程に分けて導かれた法則 6. 応力繰返し中の塑性ひずみから導かれた法則 7. 実働応力波の r.m.s. による法則 8. 確率論による法則

3-13. 星野次郎 ; 実働応力と実働荷重およびその因子

JSME 73 〔621〕 1341～1349 ('70-10)

実働外力と実働応力の関係を結ぶ因子について，筆者がこれまで経験した実験をもとにしてまとめた。因子の影響は次のように定義する。〔実働応力〕＝〔影響因子〕×〔実働外力〕 1. 構造物の形状による影響因子 2. 構造物の固有振動応答による影響因子 3. 応力波形の変調による影響因子 4. 制御系の応答による影響因子 以上の4点について記述した。

3-14. 中村 宏 ; 実働荷重疲れ実験の総括，JIME 73 〔621〕 1350～1358 ('70-10)

小試験片を使って，現在までにおこなわれた実働荷重疲れ試験をまとめた。

3-15. 菊川 真，城野政弘，溝口孝遠 ; ランダム荷重による疲れ寿命へのパワースペクトルの影響について，JSME 73 〔621〕 1359～1367 ('70-10)

広帯域ランダム 荷重を経過ひん度分布の等しい正負対称形のランダム荷重に置

き換え，狭帯域対称ランダム荷重試験または振幅変動プログラム試験で疲れ寿命 T_0 を求める。不規則さの影響，平均応力の影響に対する修正係数 K_T，K_m を計算で求め，T_0，K_T，K_m から寿命 $T = T_0/K_T K_m$ を求める方法を考え，K_T，K_m の計算をおこなった。

3-16. 河本 実，石川 浩；新しく試作した機械的方法によるランダム疲れ試験機と試験結果，JSME 73〔621〕1367～1374 ('70-10)

電気－油圧式の疲れ試験機は高価であるため，簡単に使用するには難点がある。これと代る機械的ランダム疲れ試験機を製作し，これによる試験結果について述べた。機構は，質量の異なる種々の大きさの鋼球を任意の割合いで混合し，これを順次連続的に落下衝突させ，衝突エネルギーをレバーを介して試験片に与えるものである。

3-17. 中沢 一；実働荷重のもとにおける疲れき裂の進展

JSME 73〔621〕1418～1425 ('70-10)

実働荷重のもとにおける累積疲れ被害と疲れき裂の挙動について現在までの研究をまとめた。ランダム荷重によるき裂進展速度と等価なプログラム荷重の形は，漸増急減形といえること，MCPC法によるプログラム荷重によるき裂進展速度は，ランダム荷重によるもの、50～70％といえる。いずれにしろ手法的に確立されていないといいうる。

3-18. 北川 茂；実働荷重における金属の疲れ破面

JSME 73〔621〕1426～1433 ('70-10)

変動荷重周期と striation 幅変化の周期とが1対1に対応することを，Al，Mn 青銅，軟鋼についておこなった実験の電子顕微鏡写真を使って示した。

3-19. 竹内和之；航空機の実働荷重と疲れ設計

JSME 73〔621〕1434～1438 ('70-10)

航空機の疲れ設計は1954年のコメット機の事故に始まった，本報告は構造の疲れ設計が最も重視される輸送機に関して，疲れに関係する荷重（突風荷重，操だ荷重，G-A-G荷重），設計の方針，試験について述べた。寿命推定法は，修正 Miner

則を利用する。

3-20. 岸本秀弘 ； 自動車の疲れ設計, JSME 73 〔621〕 1444~1447 ('70-10)

3-21. 兼重一郎 ； 自動車の耐久走行試験と不規則振動
JSME 73 〔621〕 1448~1451 ('70-10)

3-22. 望月澄男 ； 自動車の不規則振動による疲れ解析
JSME 73 〔621〕 1439~1443 ('70-10)
路面の凹凸によって自動車に生ずる振動応力の解析と Corten-Dolan 則を用いて，疲れ強さを評価するための換算応力について述べた。さらにカウント方法について，Rice の式は大きい応力の発生回数を少なく見積ることが多いことを示した。

4. 不規則振動一般

4-1. Rice, S.O. ; Mathematical analysis of random noise. Selected papers on noise and stochastic process, N. Wax ed, Dover, N.Y. ('54)

4-2. Goudman, T.P. and Reswick, J.B. ; Determination of system characteristics from normal operating records, Trans. ASME ('56)

4-3. Solodovnikor, V.V. ; Introduction to the statistical dynamics of automatic control systems, Eng. Trans. ed. J.B. Thomas and L.A. Jadeh, Dover, N.Y. ('60)

4-4. Leoin, M.J. ; Optimum estimation of impulse response in the presence of noise, IRE Trans. on circuit theory ('60)

4-5. Caughey, T.K. and Stumpf, H.J. ; Transient response of a dynamic system under random excitation, J. App. Mech. 28, 563～566 ('61)

任意の入力スペクトル形に対する1自由度系の過渡応答について述べた。本法を強震をうける構造物の応答に適用してみた。

4-6. Rice, S.O. and Beer, F.P. ; First-occurrence time of high-level crossings in a continuous random process, J. Acoust. Soc. Am., 323～335 ('65. 4)

4-7. Shinozuka, M.; On the two-sided barrier problem, J. App. Probability 2 [2] ('65-6)

4-8. Lin, Y.K.; Nonstationary excitation and response in linear systems treated as sequences of random pulses, J. Acoust. Soc. Am. 38, 453~460 ('65)

4-9. 赤池弘次; 不規則振動のスペクトル解析についての二, 三の覚え書き, JSME 不規則振動研究分科会報告書 ('66)

4-10. Shinozuka, M. and Sato, Y.; Simulation of nonstationary random process, Proc. ASCE 93 [EM1] 11~40 ('67-2)

4-11. Unger, E.E.; 振動系の統計的エネルギー解析, Trans. ASME 89 [B4] 626~632 ('67-11)
本論文は統計的エネルギー解析法を一般的に解説したものである.

4-12. 磯部 孝; 相関関数およびスペクトル ── その測定と応用, 東大出版会 ('68)

4-13. 赤池弘次; 不規則振動のスペクトル解析, 数理統計研究所

4-14. 伊藤 学, 伯野元彦; 不規則な現象の解析, JSCE 55 [2] 108~113 ('70-2)

4-15. 柴田 碧; 不規則現象, JSME 73 [621] 1391~1400 ('70-10)

4-16. 山川新二; 不規則波の処理と累積ひん度, JSME 73 [621] 1401~1410 ('70-10)

3. 結　語

路面の凹凸により自動車が振動を持続し，この状態で橋梁を通過するときの橋梁の応答および疲労を解明するために，これまでにこれらに関連してなされた研究の文献調査をおこなった。この結果，次のことがいえる。

1. 路面の凹凸と自動車の振動に関しては，スペクトル解析，頻度解析がかなりおこなわれ，過去のデータの蓄積がある．最近の傾向は，自動車の実働荷重による疲労の問題に主力が移されつゝある。
2. 自動車の振動と橋梁の応答については，スペクトル解析，頻度解析の歴史は新しく，実働荷重の実態そのものゝ把握が遅れているため，実働荷重の疲労の問題まで進むに至っていない。
3. 自動車の振動と路面荷重については，我国においてほとんどおこなわれなかったといってよい程研究が少ないが，アメリカにおいては一応の成果を上げている．

このような実状から，土木側から見たこれら問題の取り組みが必要であると痛感される。

あとがき

路面凹凸の不規則入力と自動車の走行荷重，構造物の応答に関連する研究の文献調査をおこなった。このまとめにより，この研究の現状を把握することができると思われる。なお，重要な論文と思われるものでも，入手できなかったものについては，抄録を省略した。

また，時間的余裕が十分なく，不十分なものとなった。

付　録　　論　文　資　料

1. 路面の凹凸, Profile

1−1	国枝正春	道路面のおうとつ調査測定法に関する覚書	自動車技術 10 〔6〕 208~211 ('56、6)
1−2	Ahlborn, G and Moyer, R.A.	New developments in BPR roughness indicator and tests on California pavements	Highway research board Bull 139, P.1~28 ('56)
1−3	Petrok, B.R. and Tohons, K.L.	Minnesota modifications to BPR roughness indicator	Highway research board Bull 139, P.29~34 ('56)
1−4	Press, H. Houbolt, J.C. and Walls, J.H.	Some measurements and power-spectra of runway roughness.	NACA TN. 3305 ('56)
1−5	Quinn, B.E. and T. W. De Rories	Highway characteristics as related to vehicle performance	Highway research board Bull 250 P.20~39 ('60)
1−6	Hveem, F. N.	Devices for recording and evaluating pavement roughness	Highway research board Bull 264 P.1~26 ('60)
1−7	武田　峻	路面凹凸のモデルによる検討	運輸技術研究所報告 11 〔4〕 113~120 ('61·5)
1−8	Spangler, E.B. and Kelly, W.J.	Servo-seismic method of measuring road profile	Highway research board Bull 328, P.33~51 ('62·1)
1−9	兼重一郎	自動車の不規則振動と道路面の特性	自動車技術 21 〔4〕 334~339 ('67·4)
1−10	得丸, 竹内	自動車走行路面の解析	日本機械学会関西支部 ('70·3)
1−11	森田　敏, 田代綾夫	路面プロフィルの研究	自動車技術 24 〔4〕 362~367 ('70·4)

2. 路面の凹凸と応答

2-1 自動車の応答

2-1-1	小林 明	自動車における振動	自動車技術 5〔1〕24~25, 30; 〔2〕52~54, 44; 〔3/4〕84~85; 〔5〕118~121; 〔7/8〕182~185; 〔9〕210~212; 216; 〔10〕242~244; 〔11〕274~276; 〔12〕300~303 ('51), 〔6〕91~95 ('52)
2-1-2	高橋安人, 平尾 収, 亘理 厚	自動車の試験台による強制振動について	JSME 55〔403〕517~522 ('52-8)
2-1-3	高橋安人	路面の性質と自動車の振動をむすぶ一理論	自動車技術 1〔12〕286~290 ('53-11/12)
2-1-4	松平 精, 松井 哲, 藤田料平	自動車のばね, オイルダンパおよびタイヤが乗心地に及ぼす影響	JSME 57〔424〕316~320 ('54-5)
2-1-5	Hopkins, R.C. and Boswell, H.H.	Methods for measuring load transfer through vehicle tires to the load surface	H.R.B. 36th Ann. Mect. P.240~252 ('57)
2-1-6	武田 峻	路面の凹凸と自動車の振動の相関について	自動車技術 12〔12〕484~487 ('58-12)
2-1-7	平尾 収, 近藤政市 亘理 厚, 山本峰雄	理論自動車工学	山海堂, P.236~264 ('58)
2-1-8	武田 峻	路面走行時の自動車の振動	運輸技術研究所報告 8〔6〕1~16 ('59-1)
2-1-9	武田 峻	航空機走行荷重の解析	運輸技術研究所報告 10〔5〕1~44 ('60-7)

2-1-10	Svenson, O；橋倉訳	車輪と路面の間に作用する動的な力とその路面荷重に対する影響	自動車技術 14 〔7〕 288～293 ('60-7)
2-1-11	兼重一郎	パワースペクトル解析の自動車への応用	いすゞ技報 No.33 ('60)
2-1-12	Kaneshige, I.	Mesearment of power spectra of vehicle vibration and vehicle road roughness	Pro. 10th N.C.T.A.M. ('60)
2-1-13	武田 峻	航空機の走行中の振動に対する脚の非線型緩衝特性の影響について	運輸技術研究所報告 11 〔4〕 121～141 ('61-5)
2-1-14	武田 峻	走行時の自動車の振動荷重	自動車技術 15 〔6〕 253～255 ('61-6)
2-1-15	橋倉, 杉本	自動車の振動測定	機械試験所報告 〔45〕 P.1～33 ('61)
2-1-16	岩崎茂夫, 千島和夫	アナログ計算機を使用した四輪車の上下振動に関する解析	自動車技術 16 〔4〕 172～177 ('62-4)
2-1-17	兼重一郎, 藤原 清	アナログコリレーターによる走行時振動のパワースペクトル解析例	自動車技術 17 〔8〕 490～496 ('63-8)
2-1-18	千島和夫, 山本五十六	アナコンによる2自由度系の上下振動について	自動車技術 17 〔8〕 525～533 ('63-8)
2-1-19	川合平夫	自動車の走行荷重に関する実験解析	自動車技術会 S.38 春季学術講演会 ('63)
2-1-20	兼重一郎	自動車走行時振動のパワースペクトル解析	自動車技術 18 〔4〕 261～267 ('64-4)

2-1

2-1-21	川合平夫，森崎健二	自動車の振動に対する路面の凹凸の影響についての一考察	自動車技術会 S.39 秋季学術講演会 ('64)
2-1-22	川合平夫	自動車の走行荷重に関する実験解析	自動車技術 18 〔11〕 836～840 ('64-11)
2-1-23	川合平夫，森崎健二	自動車の走行時の振動についての一考察	自動車技術 18 〔11〕 841～845 ('64-11)
2-1-24	川合，森崎	自動車走行路面の性質と振動衆心地への関連性	三菱重工技報 2 〔2〕 20～28 ('65)
2-1-25	得丸，芝川	不規則な道路凹凸による自動車振動の多入力系としての解析	日本機械学会 44期全国大会 No. 158 ('66)
2-1-26	Engels, F.	Vibrations in vehicle and methods of investigating them	PIME 182 part 3B. ('67/'68)
2-1-27	Robson, J. D.	Deductions from the spectra of vehicle response due to road profile excitation	J. Sound Vib. 7 〔2〕 ('68-3)
2-1-28	Hoppe, C. H.	Design for rough terrain enviroment	Paper SAE No. 680098 ('68)
2-1-29	樋口健二，音田 稔，福岡紀幸	スペクトルによる自動車の上下振動特性の解析	自動車技術 S.44春季学術講演会 ('69)
2-1-30	金丸伸二，吉田 寛	懸架系の振動特性と問題点	自動車技術 23 〔8〕 768～789 ('69)
2-1-31	Robson, J. D. and Dodds, C. J.	The response of vehicle components to random road-surface undulations	FISITA ('70)

2-2 走行車両，構造物の応答 ——衝撃係数を含む——

2-2-1	物部長穂	橋桁の振動並びにその衝撃作用との関係について	JSCE 10〔1〕('23-2)
2-2-2	松村孫治	自動車の路面に及ぼす衝撃に関する研究	土木試験所報告 26, P.141～160 ('34) 27, P.95～135 ('34)
2-2-3	Steuding, H.	Die Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten	Ingenieur-Archiv 5 275～305 ('34)
2-2-4	Schallenkamp, A.	Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten	Ingenieur-Archiv 8 182～198 ('37)
2-2-5	小沢久太郎	本邦鋼道路橋衝撃係数に関する一考察	土木試験所報告〔39〕 51～62 ('37)
2-2-6	Klöppel, K. and Lie, K.H.	Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken	Ing. Archiv 13 ('42)
2-2-7	三瀬幸三郎，国井修二郎	走行荷重による橋桁の強制振動論	九州大学弾性工学研究所報告 1-1 ('43)
2-2-8	Hillerborg, A.	Dynamics influences of running loads on simply supported girders	Int. Strc. Eng. Bridge Build. Roy. Inst. Tech., Stockholm, Sweden ('51)
2-2-9	Tung, T.P., Goodman, L.E., Chen, T.Y. and Newmark, N.M.	Highway-bridge impact problems	Highway research board Bull. 124, P.111～134 ('56)
2-2-10	Scheffey, C.F.	Dynamic load analysis and design of highway bridges	Highway research board Bull. 124, P.16～32 ('56)

2-2-11	Brückmann, B	Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads	Prel. publ. 5th. Cong. IABSE, P.181~198 ('56)
2-2-12	Thesis, A. and Wen	Dynamic behavior of simple span highway bridge traversed by two-axle vehicle	Univ. Illinois, Civil Eng., Studies SRS. No. 142, ('57)
2-2-13	Biggs, J.M. and Suer, H. S.	Vibration of simple-span highway bridges	Pro. ASCE 83 [ST_2] 1186-1~32 ('57)
2-2-14	小西, 山田, 篠塚, 小堀	橋の衝撃係数に関する確率論的一考察	Trans. JSCE [62] 1~5 ('59)
2-2-15	Vellozzi, J. W.	Transverse vibratons of a single-span suspension bridge under a moving constant force or a moving pulsating force	Ph. D. Dissert, Polytech. Ind. ('61)
2-2-16	Gesund, H. and Young, D.	Dynamic response of beams to moving loads	Publ. IABSE, P. 95~110 ('61)
2-2-17	Quinn, B. E. and Van Wyk, R.	A method for introducing dynamic vehicle loads in to design of highways	Highway research board Proc. 40th Ann. Mut. 111~124 ('61)
2-2-18	Wen, R.K. and Veletsos, A. S.	Dynamic behavier of simple-span highway bridges	Highway research board Bull. 315 P.1~26 ('62)
2-2-19	Quinn, B.E. and Thompson, D. R.	Effect of pavement condition on dynamic vehicle reactions	Highway research board Bull. 328 P.24~32 ('62-1)
2-2-20	Fenves, S.J., Veletsos, A.S., and Siesis. C.P.	Dynamic studies of the AASHO road test bridges	Highway research board special report 73. ('62)

2-2-21	平井一男	種々の移動荷重を受けるはり構造の基礎方程式とその応用	Trans. JSCE [90] 29~34 ('63-2)
2-2-22	大地羊三	鉄道橋の衝撃係数	鉄技研報告 [370] ('63)
2-2-23	Walker, W.H. and Veletsos, A.S.	Response of simple-span highway bridges to moving vehicle	Str. Res. Ser. No. 272 Univ. Illinois ('63)
2-2-24	平井 敦, 伊藤 学	長径間吊橋の衝撃について	第10回橋梁構造工学研究発表会 P.115~125 ('63)
2-2-25	Hirai, A. and Ito, M.	Impact on long-span suspension bridges	Pro. Symp. on high-rise and long-span structures, Japan, Soc. Promotion of Scienc ('64)
2-2-26	山田善一, 小堀為雄	ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究	Trans. JSCE [119] 1~8 ('65-7)
2-2-27	Varney, R.F. and Galambos, C.F.	Field dynamic loading studies of highways bridges in the U.S., 1948-1965	Highway research board Record [76] P.285~305 ('65)
2-2-28	山田, 小堀	自動車走行中の振動特性が橋梁の衝撃係数に与える影響について	土木学会20回年次学術講演会 I-29 ('65)
2-2-29	Hirai, A. and Ito, M.	Dynamic effects produced by trains upon suspention bridge	Proc. Int. Symp. on susp. bridges, Lisbon ('66)
2-2-30	平井 敦, 伊藤 学	走行荷重による吊橋の振動	土木学会22回年次学術講演会 I-141 ('67-5)
2-2-31	Lin, Y.K.	Probabilistic theory of structural dynamics	McGraw-Hill Book Co., N.Y. P.332~337 ('67)

2-2-32	山田善一，小堀為雄，中村幾雄	不規則振動論による道路橋の動的応答	土木学会22回年次学術講演会 I-148 ('67-5)
2-2-33	伊藤文人，松浦章夫	鉄道橋のボギー車走行による動的応答	土木学会22回年次学術講演会 I-152 ('67-5)
2-2-34	Tung, C.C.	Random response of highway bridges to vehicle loads	ASCE 93 [EM5] 77~94 ('67)
2-2-35	Walker, W.H.	Investigation of dynamic in highway bridge	1st Proc. report Dep. Civil Eng. Univ. Illinois Urbana, Illinois ('67-10)
2-2-36	山田善一，小堀為雄	活荷重に対する道路橋の動的応答 ——衝撃係数—— に関する考察	Trans. JSCE [148] ('67-12)
2-2-37	伊藤 学	走行荷重に対する吊橋の動的応答と衝撃	Trans. JSCE [149] ('68-1)
2-2-38	Fiyba, L.	Non-stationary vibrations of bridge under random moving load	Final Publ. 8th Cong. IABSE P.1223~1236 ('68)
2-2-39	小堀為雄，鈴木 治	タイヤチェーンを付けた自動車によるけたの振動に関する一考察	土木学会23回年次学術講演会 P.469~472 ('68-10)
2-2-40	松浦章夫	鉄道橋の衝撃係数が車両の初期振動により受ける影響の実験	土木学会23回年次学術講演会 P.479~480 次節論文抄録より
2-2-41	Potter, J.F.	Dynamic impact pressures generated under roads by sprung and unsprung vehicles	PRL, report LR.137 ('68)

2-2-42	後藤尚男，亀田弘行	構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について —— 定常入力に対する過渡解 ——	土木学会23回年次学術講演会 361~364 ('68-10)
2-2-43	山田善一，竹宮宏和	不規則外力による多自由度系の応答	土木学会23回年次学術講演会 359~360 ('68-10)
2-2-44	Stanisie, M.M.	任意の数の移動集中荷重を受けるはりの応答	J. Franklin Inst. 289 [2] 115~123 ('69-1)
2-2-45	Novak, M.E., Heins, C.P. Jr. and Looney, C.T.G.	Induced dynamic strains in bridge structures due to random truck loadings	Pro. report, Study of effects of new vehicle weight law on structures, Civil Eng. Dep., Univ. Maryland, College Park, Maryland ('69-2)
2-2-46	Tung, C.C.	Response of highway bridges to renewal traffic loads	Prs. ASCE 95 [EM1] 41~57 ('69-2)
2-2-47	貞　升	ダンプトラックの走行時におけるタイヤの接地圧力の測定	土木技術 ('69-2)
2-2-48	Skeer, M.H.	移動荷重による励起を受ける系の動的応答	J. Franklin Institute 287 [4] 319~331 ('69-4)
2-2-49	Chandrasekaran, A.R	Live load effect on dynamic response of structures	Proc. ASCE 95 [ST4] 649~660 ('69-4)
2-2-50	Werner, J.D., Heins, C.P. Jr., and Looney, C.T.G.	Induced bridge loads and moments during a ten year period	Pro. report, Study of effect of new vehicle weight law on structures, Civil Eng. Dep., Univ. Maryland ('69-6)

2-2-51		*Final report of the Investigation of impact on highway bridges*	*Eng. Exp. Sta. Univ. Ill., PB 189908* (*'69-6*)
2-2-52	松浦章夫	車両走行による鉄道橋の動的応答の基本式	鉄技研〔691〕1-21 (*'69-7*)
2-2-53	佐藤吉彦	軌道高低狂いの特性と輪重変動	土木学会24回年次学術講演会 *P.229~300* (*'69-9*)
2-2-54	亀田弘行	構造物の不規則振動に関する一考察 —— 応答が一定レベルを越える回数の確率分布 ——	土木学会24回年次学術講演会 *P.205~208* (*'69-9*)
2-2-55	*Sanders, N.W.*	*Load distribution in steel railway bridges*	*Pro. ASCE 95* 〔ST 12〕 *2763~2781* (*'69-12*)
2-2-56	島田静雄	相関解析手法による構造物の振動解析	*Proc. JSCE* 〔174〕 *P.11~23* (*'70-2*)
2-2-57	平島政治	荷重及び車頭間隔が不規則な分布をなす道路橋の応答解析	土木学会25回年次学術講演会471~474 (*'70-11*)
2-2-58	小西一郎，白石成人，北川貴一，角田尚志	走行荷重による長大吊橋の動的応答	土木学会25回年次学術講演会 *P.481~482* (*'70-11*)

3. 実働荷重による疲労及び破壊

3-1	Rice, J.R., Beer, F. P., and Paris, P.C.	On the prediction of some random loading characteristics relevant to fatigue	2nd International Cong. on Acoustical fatigue, ('64-4)
3-2	Fisher, J.W.	Fatigue life of bridge beams subjected to contorolled truck traffic	Prel. Publ. 7th Cong. IABSE P.497~510 ('64)
3-3	Shinozuka, M.	Probability of structural failure under random loading	Proc. ASCE 90 [EM5] P.147~170 ('64-10)
3-4	Roberts, J.B.	非定常ランダム荷重のもとでの構造物の疲れ	J. Mech. Eng. Sci. 8 [4] 392~405 ('66)
3-5	McMillan, J.C. and Pelloux, R.M.N.	プログラムおよびランダム荷重のもとで疲れき裂の進展	ASTM STP 415, 505~535 ('67)
3-6	Lardner, R.W.	ランダム疲れ理論	J. Mech. Phys. Solids 15 [3] 205~221 ('67)
3-7	Cudney, G.R.	The effect of loading on bridge life, Michigan department of State Highways	Research report No. R-638, ('68-1)
3-8	青山成恒, 伊藤三史	プログラム荷動による疲労寿命の評価	自動車技術 23 [2] 131~135 ('69-2)
3-9	伊藤文人	実働荷重による鉄道橋の疲労被害推定	鉄技研報告 [676] 1~29 ('69-4)
3-10	神原広司, 戸川達夫	路面負荷と部材寿命に関する評価法	自動車技術 23 [10] 1062~1066 ('69)

3-11	Tung, C. C.	Life expectancy of highway bridges to vehicle loads	Proc. ASCE 95 [EM6] 1411~1428 ('69-12)
3-12	山田嘉郎	疲れ被害法則の展望	JSME 73 [621] 1333~1340 ('70-10)
3-13	星野次郎	実働応力と実働荷重およびその因子	JSME 73 [621] 1341~1349 ('70-10)
3-14	中村 宏	実験荷重疲れ実験の総括	JSME 73 [621] 1350~1358 ('70-10)
3-15	菊川 真, 城野政弘, 溝口孝遠	ランダム荷重による疲れ寿命へのパワースペクトルの影響について	JSME 73 [621] 1359~1367 ('70-10)
3-16	河本 実, 石川 浩	新しく試作した機械的方法によるランダム疲れ試験機と試験結果	JSME 73 [621] 1367~1374 ('70-10)
3-17	中沢 一	実働荷重のもとにおける疲れき裂の進展	JSME 73 [621] 1418~1425 ('70-10)
3-18	北川 茂	実働荷重における金属の疲れ破面	JSME 73 [621] 1426~1433 ('70-10)
3-19	竹内和之	航空機の実働荷重と疲れ設計	JSME 73 [621] 1434~1438 ('70-10)
3-20	岸本秀弘	自動車の疲れ設計	JSME 73 [621] 1444~1447 ('70-10)
3-21	兼重一郎	自動車の耐久走行試験と不規則振動	JSME 73 [621] 1448~1451 ('70-10)
3-22	望月澄男	自動車の不規則振動による疲れ解析	JSME 73 [621] 1439~1443 ('70-10)

4. 不規則振動論

4-1	Rice, S.O.	Mathematical analysis of random noise	Selected papers on noise and stochastic process, N. Wax. ed., Dove, New York, P. 190 ('54)
4-2	Goudman, T.P. and Reswick, J.B.	Determination of system characteristics from normal operating records	Trans. ASME ('56)
4-3	Solodovnikov, V.V.	Introduction to the statistical dynamics of automatic control systems	Eng. Trans. ed. J.B. Thomas and L.A. Jadeh, Dover. Publ., N.Y., P.98 ('60)
4-4	Leoin, M.J.	Optimum estination of impulse response in the presence of noise	IRE Trans. on circuit theory ('60)
4-5	Caughey, T.K. and Stumpf, H.J.	Transient response of a dynamic system under random excitation	J. App. Mech., 28 563~566 ('61)
4-6	Rice, S.O. and Beer, F.P.	First-occurrence time of high-level crossings in a continuos random process	J. Acoust. Soc. Am., 323~335 ('65-4)
4-7	Shinozuka, M.	On the two-sided barrier problem	J. App. Probability 2 [2] ('65-6)
4-8	Lin, Y.K.	Nonstationary excitation and response in linear systems treated as seguences of random pulses	J. Acoust. Soc. Am. 38 453~460 ('65)

4-9	赤池弘次	不規則振動のスペクトル解析についてのニ，三の覚え書き	JSMC 不規則振動研究分科会報告書（'66）
4-10	Shinozuka, M. and Sato, Y.	Simulation of nonstationary random process	Proc. ASCE 93 [EM 1] 11～40 ('67-2)
4-11	Unger, E.E.	振動系の統計的エネルギー解析	Trans. ASME, 89 [B4] 626～632 ('67-11)
4-12	磯部 孝	相関関数およびスペクトル—— その測定と応用	東大出版会 ('68)
4-13	赤池弘次	不規則振動のスペクトル解析	数理統計研究所
4-14	伊藤 学，伯野元彦	不規則な現象の解析	JSCE 55 [2] 108～113 ('70-2)
4-15	柴田 碧	不規則現象	JSME 73 [621] 1391～1400 ('70-10)
4-16	山川新二	不規則波の処理と累積ひん度	JSME 73 [621] 1401～1410 ('70-10)

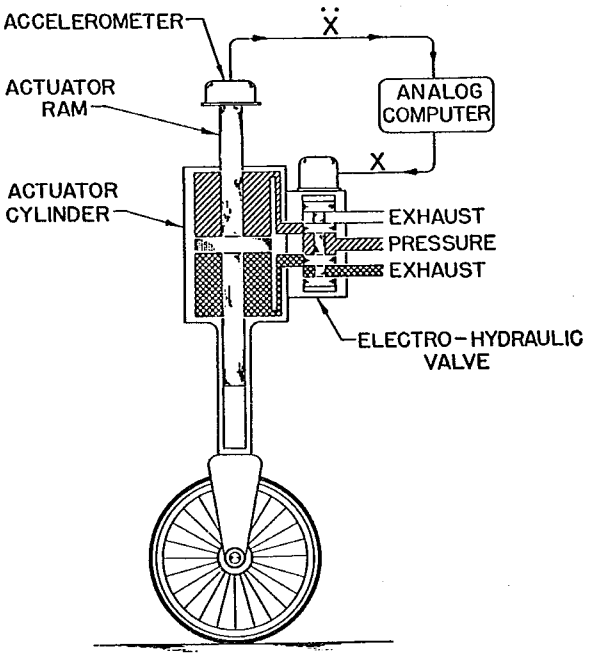


Figure 1　サーボ型profilmeterの模式図

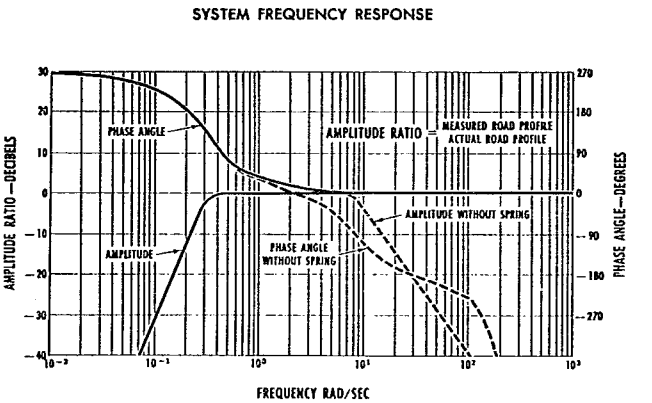


Figure 2　サーボ型profilmeterの周波数特性

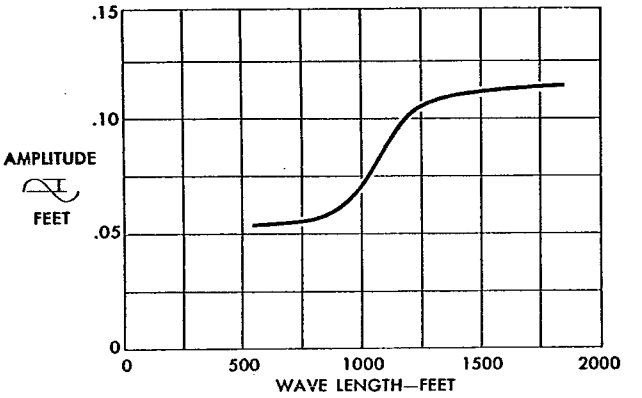


Figure 3 乗用車（100mphのとき）の感度特性

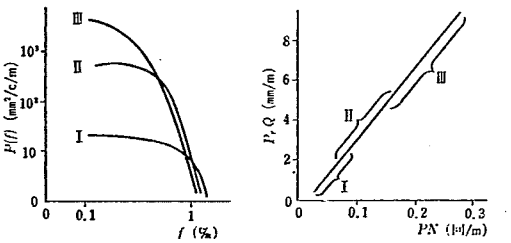


Figure 4 PrQ~PN とパワスペクトルの対応

自動車の走行荷重と構造物の応答に関する
文献調査

土研資料第７４３号
昭４７.３（１９７２）
成田信之，池村雅司

キイワード
自動車，走行荷重，構造物，応答，文献

要旨　橋梁の実働荷重の一つである自動車荷重と構造物の応答に関する文献調査をおこない，研究の現状のまとめと，今後の問題点の摘出をおこなった。付録として主要文献の整理をおこなった。

郵便はがき

十円切手をはって下さい

〒２８０－□□

千葉県千葉市穴川
四丁目十二番五二号

建設省土木研究所
構造研究室　御中

No.

No.

配布先氏名

配布先住所

土木研究所資料第７４３号　　部

上記のとおり受領しました。

所　　属（住所）

氏　名　　印

建設省土木研究所
47.6.3
図書室

ST-9
ST. Section

土 木 研 究 所 資 料

第743号

自動車の走行荷重と構造物の応答に関する文献調査

文　献(I)

昭和47年3月

建 設 省 土 木 研 究 所
構造橋梁部 構造研究室

土木研究所資料　第七四三号　自動車の走行荷重と構造物の応答……文献(I)　昭和四七年三月　建設省土木研究所

New Developments in BPR Roughness Indicator And Tests on California Pavements	Gale Ahlborn, Ralph A. Moyer
Devices for Recording and Evaluating Pavement Roughness	F.N. Hveem
Servo-Seismic Method of Measuring Road Profile	E.B. Spangler, W.J. Kelly
路面のプロフィルの研究	森田　敬 田代綾夫
自動車における振動	小林　明
自動車における振動	小林　明
自動車における振動	小林　明
路面の性質と自動車振動を結ぶ一理論	高橋安人
Methods for Measuring Load Transfer Through Vehicle Tires to the Road Surface	R.C. Hopkins, H.H. Boswell
路面の凹凸と自動車の振動の相関について	武田　峻
路面走行時の自動車の振動	武田　峻
車輪と路面の間に作用する動的な力とその路面荷重に対する影響	橋倉勝巳
Study on Automobile Vibration Environment	Katsumi Hashikura, Tsuyoshi Sugimoto
アナログ計算機を使用した四輪車の上下振動に関する解析	岩崎茂夫 千島和夫
自動車の走行荷重に関する実験解析	川合平夫
自動車走行時振動のパワスペクトル解析	兼重一郎
Schwingungen von Tragern bei bewegten Lasten	A. Schallenkamp
Dynamic Load Analysis and Design of Highway Bridges	C.F. Scheffey

橋の衝撃係数に関する確率論的一考察	小西一郎 山田善一 篠塚正宣 小堀為雄
Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads	Bruno Bruckmann
A Method for Introducing Dynamic Vehicle Loads into Design of Highways	B.E. Quinn, R. Van Wyk

New Developments in BPR Roughness Indicator And Tests on California Pavements

GALE AHLBORN, Junior Research Engineer, and
RALPH A. MOYER, Research Engineer
Institute of Transportation and Traffic Engineering
University of California, Berkeley

Since 1949 extensive use has been made in California of a road roughness indicator built according to plans furnished by the Bureau of Public Roads (BPR) with modifications developed at the University of California. A report of test results in California and of certain modifications in the design and calibration of the roughness indicator was presented at the 1951 annual meeting of the Highway Research Board. The roughness indicator was developed by the Bureau of Public Roads to provide standardizable equipment for measuring road surface roughness. Research with the California unit has continued during the past four years to improve its accuracy and consistency as a standardizable unit and to obtain records of road roughness of thousands of miles of pavements on the state highways, city streets and on bridges in all parts of California.

Tests were conducted to determine the limitations of accuracy provided by the BPR double ball clutch integrator design and also the accuracy of an integrator constructed with a commercially available clutch. Measurements were made to determine the effect of changing the size of the test tire from 6.00 by 16, which is no longer available, to a 6.70 by 15 size tire which is now available. The effects were measured of an improved leaf-spring bearing design and of the use of standard universal joints instead of ball-socket joints in attaching the dashpots to the frame of the trailer.

The effects of varying amounts of out-of-roundness of the test tire were measured on various road sections. It was found that the road roughness index in inches per mile for certain pavements was increased by approximately 50 percent due to an out-of-roundness of 0.05 inches which corresponds to the amount of out-of-roundness frequently observed in measurements of passenger car tires by attendants at tire and wheel alignment shops where tire truing work in done.

To protect the test tire and roughness equipment from damage and excessive wear in moving it from one test section to the next test section, a special outrigger trailer was developed to carry the test trailer in a suspended position by the use of a hoist and special clamping devices. Detailed shop drawings for the outrigger trailer have been prepared.

The results of roughness measurements for all of the major types of pavement surfaces used on state highways, city streets, and on various types of bridge floors are reported, analyzed and correlated with the design features, age of the pavement and construction methods used in building these surfaces.

● RESEARCH dealing with the measurement of road roughness using the Bureau of Public Roads (BPR) roughness indicator with modifications developed at the University of California, has been under way for the past seven years. This research is a part of a general study of road surface properties at the University of California which in addition to road roughness covers such items as skid resistance, road and tire noise, tire wear and tractive resistance. The preliminary phases of this study, including a description of the BPR roughness indicator and certain modifications of this equipment developed at the University of California, were described in papers presented at the Annual Meeting of the Highway Research Board in 1950 and 1951. These papers were published in the Highway Research Board Bulletins 27 and 37.

Measurements of road roughness have been made on many different types of pave-

ments on the major state highways in the eleven state highway districts in California, and on many pavements in California cities and on the major bridges and freeway overpass structures in the San Francisco Bay Area. Repeated measurements were made on selected pavements to provide a record of seasonal and long-term changes in the roughness of these pavements. While a major objective in this study has been to assemble and analyze the roughness measurements on many different pavement types in all parts of California, an important objective has also been the development of testing equipment and of calibration and testing methods which will assure greater consistency and accuracy in the test results than were possible when work on this project was started.

The road roughness tests conducted over a seven year period have demonstrated that the basic design of the BPR roughness indicator is sound and that it provides the simplest and most accurate method to measure road roughness which has been developed to date. The modifications made at the University of California on the BPR design were intended to improve the accuracy and dependability of the equipment, and to make it a standardizable unit as the Bureau of Public Roads intended it to be. The addition of the direct recording oscillograph equipment has made it possible to obtain a graphical record which is very useful in analyzing the roughness data and in identifying locations for visual inspection to determine the type and probable causes of the roughness observed on the oscillograph records. Many tests were run to determine the effect on the roughness measurements due to actual wear or simulated wear of critical parts of the equipment, which may be expected after many years of operation of the equipment over many thousands of miles of road.

The results of the tests reported in this paper are intended to provide road roughness data and graphical records of road roughness for many different types of pavements under many different conditions under which the BPR roughness indicator may be used. In the discussion of the test data, an explanation will be offered for the variable results obtained under different test conditions with this equipment. In addition certain limitations will be pointed out concerning the use of the equipment which should be recognized in the interpretation and evaluation of the test data.

With passenger car speeds on many rural highways and on some urban expressways today averaging 50 to 60 mph and top speeds exceeding 70 mph, smooth pavements are necessary not only to provide a comfortable ride at these speeds but also to provide greater safety in steering and braking of cars driven at high speeds. Highway engineers in many states are recognizing the need for providing smooth pavements as is evident by the increased use of devices such as the BPR roughness indicator to measure road roughness. This equipment is now in use in about 15 states and on the basis of the many

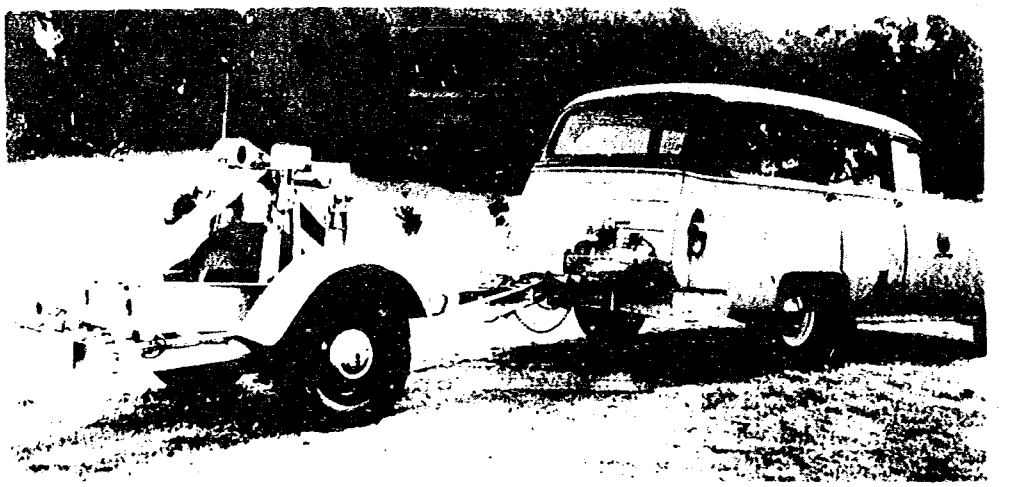


Figure 1. Road roughness indicator, outrigger trailer carrier and tow car.

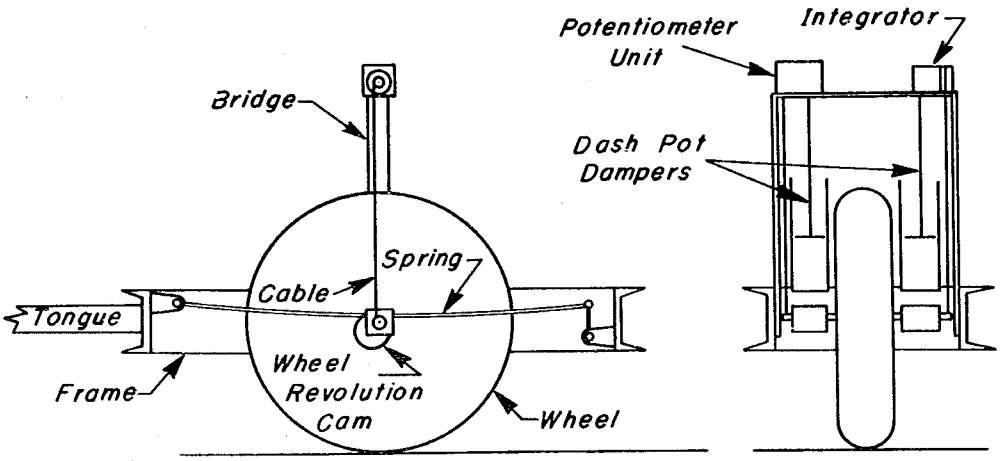


Figure 2. Schematic diagram of the essential elements of the Bureau of Public Roads road roughness indicator.

inquiries received during the past year concerning the equipment, it is expected that additional state highway departments will build similar equipment. The test results and operating experience with the BPR roughness indicator described in this paper should be of special interest to highway engineers who are now using similar equipment or who are contemplating using such equipment.

The roughness measurements can serve many useful purposes such as to provide a standard for new construction, for reconstruction and for maintenance. Roughness measurements are used by the Cities of Berkeley, Los Angeles and San Diego as a major item for rating the condition of streets and for programming street and highway work. The riding public judges a road largely by its smoothness or riding quality and it is, therefore, a matter of good public relations to construct and maintain pavements with as smooth a surface as is reasonably possible.

Description of the University of California BPR Roughness Indicator

The road roughness indicator used in the current research at the University of California was built in 1941 according to plans furnished by the U. S. Bureau of Public Roads. It was used in measuring the roughness of more than 1,000 miles of roads in Iowa, Kansas, Missouri and Wyoming in an extensive research program conducted by Iowa State College in cooperation with the Bureau of Public Roads. In 1949 this equipment was acquired by the University of California for the current research. Since 1949 it has been overhauled several times and modifications have been made for reasons mentioned above and to be described in greater detail in the discussion which follows.

A detailed description of the BPR roughness indicator is given in a paper by J. A. Buchanan and A. Catudal, entitled "Standardizable Equipment for Evaluating Road Surface Roughness," published in the 1940 Proceedings of the Highway Research Board. Briefly stated, this equipment consists of a single-wheeled trailer which is towed by a car or light truck (Figure 1). The BPR plans call for a standard four-ply 6.00 by 16 rib tread tire for the single wheel on the trailer. As the single-wheeled trailer is towed over a given section of road, the irregularities in the road surface transmitted through the tire to the axle of the wheel are measured in terms of the vertical movements of the axle. The vertical movements of the axle are transmitted by a wire cable to a double-acting ball clutch integrator which in turn transmits the accumulated vertical movements in inches to an electric counter mounted on a board in the tow car. A similar electric counter records the revolutions of the trailer wheel and thus provides an accurate measure of the travel distance. The roughness tests have been standardized at a speed of 20 mph and the measurements are recorded on a data sheet by an observer for each half mile section and/or at the end of each test section. The data are summarized by

expressing the roughness of each section of road in terms of a standard unit known as the roughness index (RI), which is the roughness in inches per mile.

The essential elements of the BPR roughness indicator are shown in Figure 2. It should be noted that the wheel of the roughness trailer is supported by two light steel springs. Also, two specially designed dashpot dampers are attached to the axle of the wheel and the frame of the trailer to eliminate excessive bouncing or vibration of the tire as it rolls over rough spots on the pavement. Tests have shown that the tire and the dashpots provide excellent damping action such that the tire follows fairly closely the vertical profile of the pavement surface and thus the equipment provides a reasonably accurate measurement of the vertical movement of the wheel and tire on the paved surface.

Development of Direct Recording Oscillograph Equipment

The need for a graphical record of road roughness was discussed in both the 1950 and 1951 reports referred to above. Also, in these reports a description was given of the direct recording oscillograph equipment developed at the University of California and which has been used in the California tests to obtain graphical records of road roughness. This equipment has been very helpful for obtaining a detailed record of road roughness and for the analysis and interpretation of road roughness data as measured under many different conditions. In the latter part of this report many oscillograph records will be shown to aid interpreting the road roughness data and to provide an indication of the types of road roughness encountered under various test conditions.

Although wiring diagrams were shown in the 1951 report for the electronic amplifier, external bridge circuit and the power supply used with the amplifier, certain changes have been made in these wiring diagrams since 1951. The latest revisions of these wiring diagrams are shown in Figures 3 and 4.

IMPROVEMENTS IN THE DESIGN AND OPERATION OF THE BPR ROUGHNESS INDICATOR

The items in the design and operation of the BPR roughness indicator which were investigated at various times during the past seven years are the following:

1. Tire size, tread design, tire wear and roundness effects.

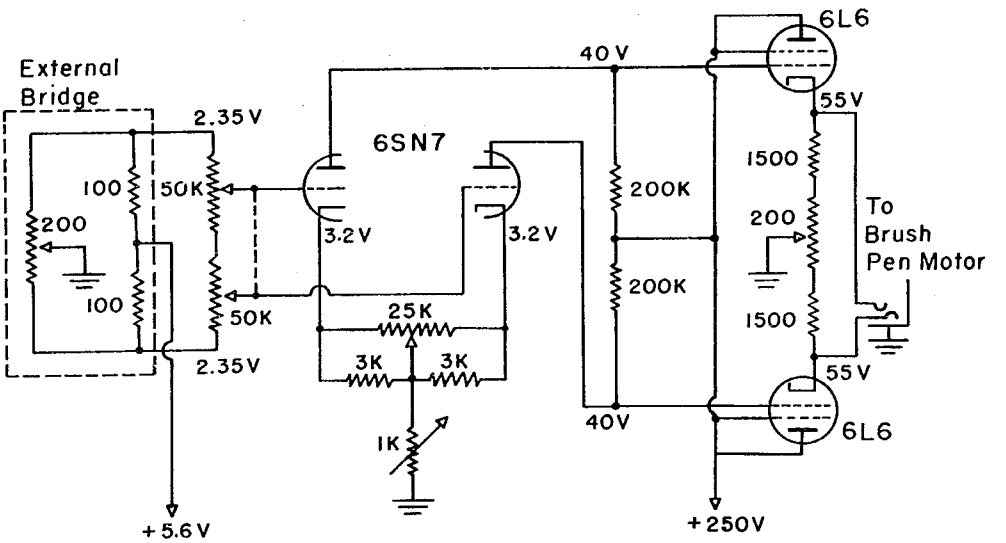


Figure 3. Electronic amplifier and external bridge wiring diagram used with BPR roughness indicator.

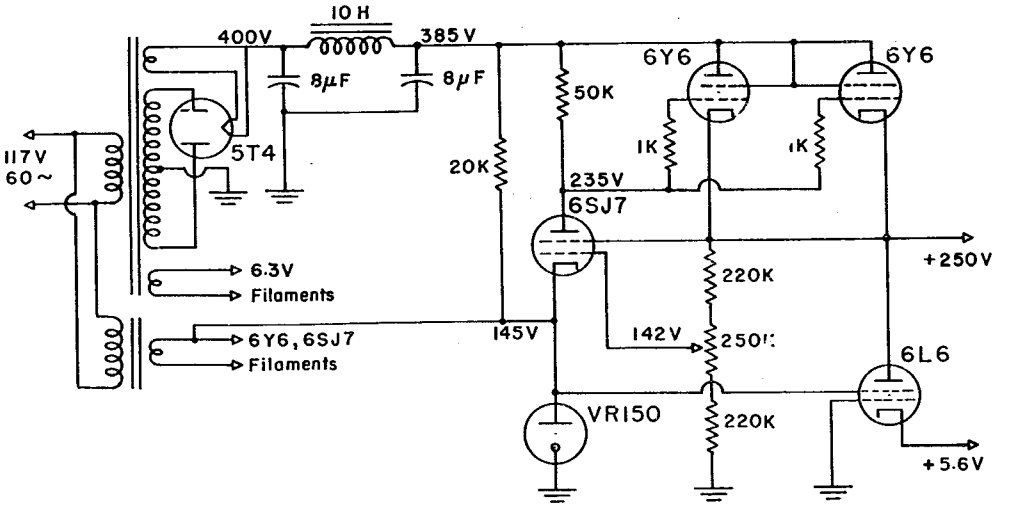


Figure 4. Wiring diagram for power supply used with electronic amplifier.

2. Oil leakage in the dashpot damping units, use of "0" rings, effect of worn joints and use of standard universal joints.
3. Improved leaf spring ball bearing design.
4. Improved integrator design - use of BPR clutch versus commercial clutch.
5. Development of equipment and method of calibrating integrator.
6. Improved wheel revolution counter design.
7. Effect of towing unit - use of outrigger trailer carrier.

Effect of Various Tire Factors

The early tests with a rib tread tire indicated that stone chips and gravel particles were picked up by the tread and were lodged in the grooves of the tread. This had the effect of increasing the roughness by an unpredictable amount. To correct this condition a four-ply 6.00 by 16 tire with a smooth tread was adopted for use on the University of California trailer.

In recent years the size of tires for popular priced cars has been changed from 6.00 by 16 to 6.70 by 15. Accordingly the U.S. Rubber Company, which manufactured smooth 6.00 by 16 tires for use on the BPR roughness indicator, discontinued making the 6.00 by 16 tire several years ago. This company is now, however, making a 6.70 by 15 smooth tread tire for use with this equipment. This new tire may be obtained on special order from the factory.

The University of California roughness trailer was modified to permit running tests with the older size 6.00 by 16 tire and, also, with the new 6.70 by 15 tire. Tests were run with both of these tires on six different road surfaces with varying amounts of roughness. The results of these tests, shown in Table 1, clearly indicate that the change in tire size produced for all practical purposes no change in the roughness indexes as measured on these six surfaces. For four of the surfaces the difference in the roughness index was only 1 in. per mile which is well within the experimental error. On the roughest pavement, the difference amounted to 4 in. per mile but here again this is within the experimental error. The use of the new tire introduced a change in wheel revolutions per mile as

TABLE 1

COMPARISON OF TEST TIRES

Test Section	Pavement Type	Roughness Index, in. per mile	
		6.00-16 Synthetic Rubber Tire	6.70-15 Synthetic Rubber Tire
1	Bituminous	36	37
2	P.C. Concrete	60	61
3	Bituminous	73	75
4	Bituminous	133	132
5	P.C. Concrete	157	158
6	Bituminous	295	291

was expected but even this change was rather small. For the new 6.70 by 15 tire, the wheel revolutions per mile under standard test conditions average 742 as compared to 736 for the older 6.00 by 16 tire.

TABLE 2

COMPARISON OF TEST TIRES

Test Section	Pavement Type	Roughness Index, in. per mile: Smooth Tread Natural Rubber Tire	Smooth Tread Synthetic Rubber Tire
1	Bituminous	68	66
2	P.C. Concrete	72	72
3	P.C. Concrete	166	164

Tests were run to compare the roughness index for three road surfaces using a 6.00 by 16 synthetic rubber tire which was less than one year old and a 6.00 by 16 natural rubber tire 10 years old. The results of these tests given in Table 2 show that there was no measurable effect due to age or to the type of rubber used. It should be mentioned here, however, that in making these comparison tests both tires were carefully checked for roundness prior to the test. As will be shown in the discussion which follows, large errors in the road roughness measurements are obtained if the tests are run with tires which are more than 0.03 in. out of round.

Effect of Tire Out-of-Roundness

In the early stages of this study, it was noted that if the test tire was not perfectly round, an increase in the roughness index was obtained which was directly related to the out-of-roundness of the tire. Since the effect of out-of-roundness of the test tire did not appear to follow a fixed pattern, it was decided to make a special study of this tire factor.

In general, tire out-of-roundness is of two types. One of these is in the form of a flat spot on the tire due to locked-wheel braking or for synthetic rubber tires, the flat spot may be caused by keeping the tire in a loaded position for a sufficient length of time to cause plastic deformation of the rubber in the tread. Another form of tire out-of-roundness is due to the wheel or tire or both not being centered accurately on the hub or axle of the wheel assembly.

The method used in this study to obtain an accurate measurement of tire out-of-roundness was by the use of a Federal Dial indicator with the tire and the indicator

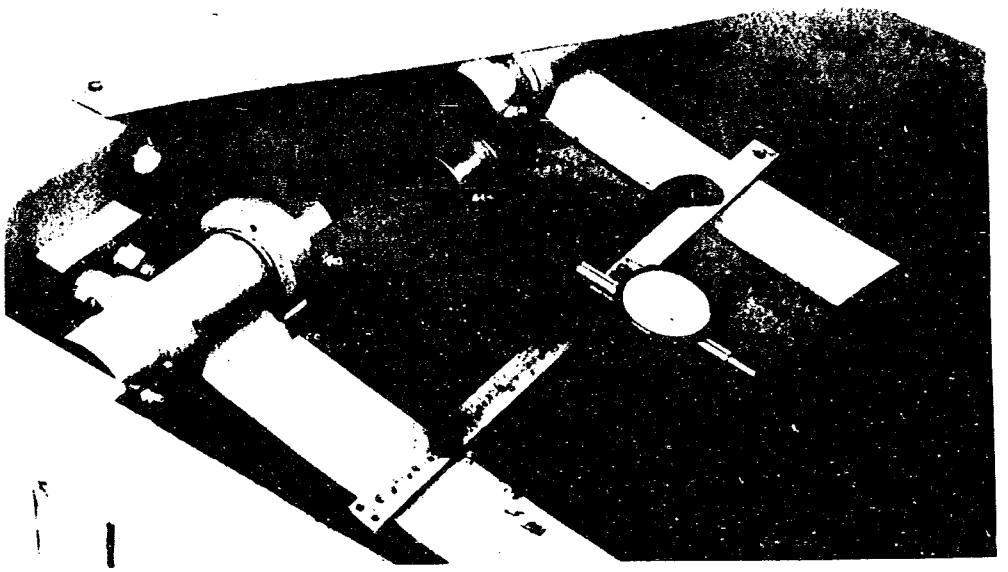


Figure 5. Method of measuring tire out-of-round using Federal Dial indicator. Also shown are the special grease cups with grease fittings used in redesign of ball bearing mountings for leaf springs.

mounted on the trailer as shown in Figure 5. With this method, readings could be made to the nearest 0.001 inch on the indicator.

To determine the effect on the road roughness measurements of varying amounts of out-of-roundness of the tire, the wheel was mounted in four different off-center positions resulting in out-of-roundness varying from 0.017 in. to 0.100 in. Tests were

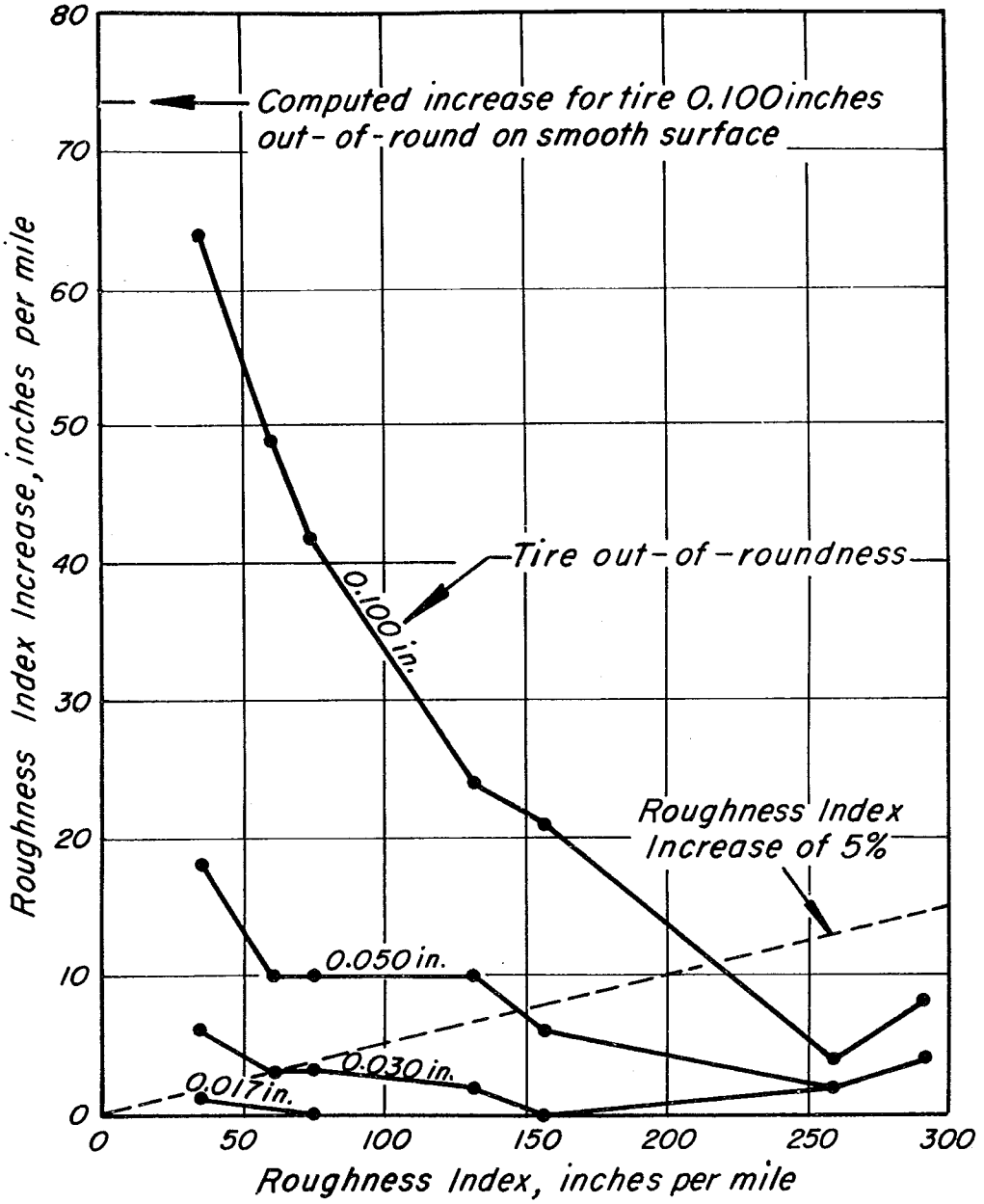


Figure 6. Effect of tire out-of-roundness on the roughness index measurement on various road surfaces.

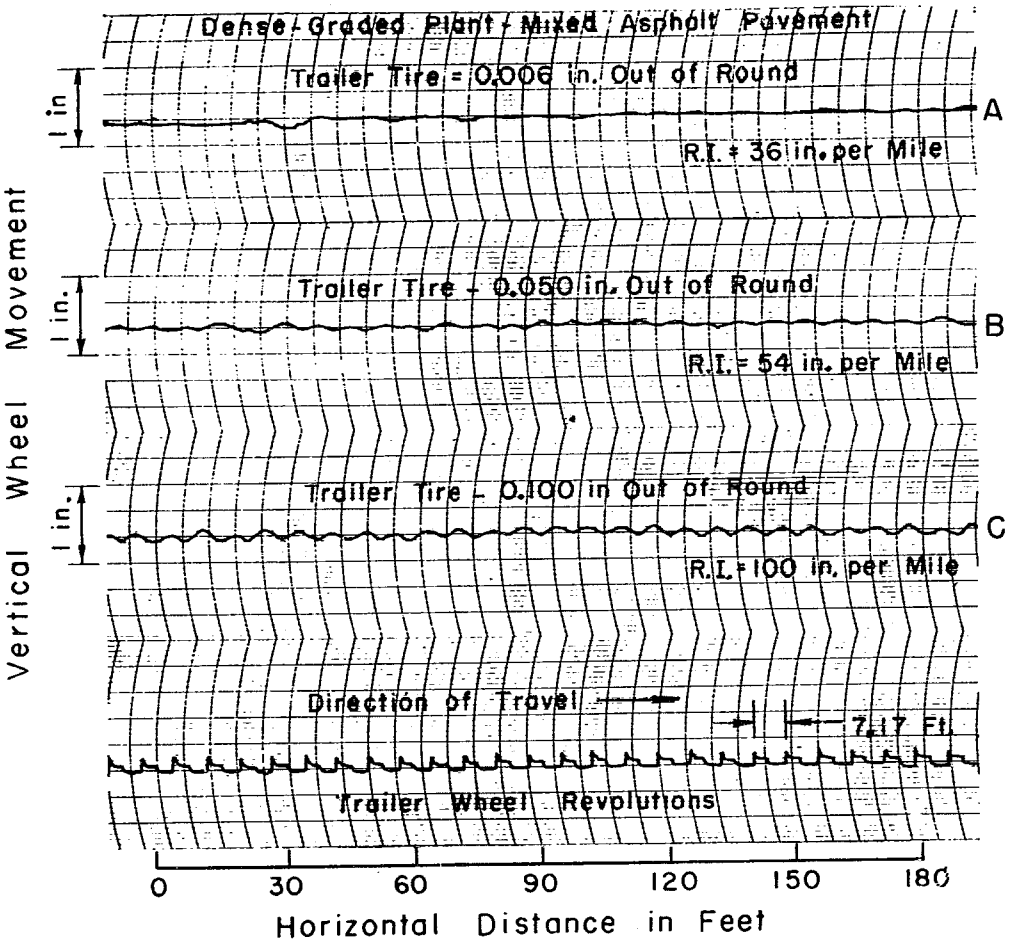


Figure 7. Roughness oscillograph records showing the effect of the use of a smooth trailer tire with varying amounts of out-of-roundness in tests on the same pavement.

then run on seven different road surfaces with roughness indexes for the standard test conditions ranging from 35 in. per mile to 300 in. per mile. The results of these tests, shown in Figure 6, indicated that the maximum increase in the roughness index due to tire out-of-roundness was obtained on the smoothest pavement. On this pavement with a tire out-of-roundness of 0. 100 in., the increase amounted to 64 in. per mile which is approximately a 200 percent increase. By assuming that the full 0. 100 in. out-of-roundness is effective during each wheel revolution the computed increase in road roughness will amount to 74 in. per mile which is only 10 in. per mile greater than the measured increase on a smooth pavement.

The tests with the off-centered tire indicated that the increase in road roughness falls off sharply as the pavement roughness is increased. Thus, with a pavement roughness of 250 in. per mile, the effect of tire out-of-roundness was almost entirely eliminated since on this pavement the increase for the 0. 100 in. out-of-round tire amounted to less than 5 in. per mile.

The effects of varying amounts of tire out-of-roundness on the same smooth asphalt pavement are shown in graphical form in the oscillograph records (Figure 7). These

records provide some interesting patterns. It should be noted in Figure 7 that with the test tire 0. 100 in. out-of-round, a sine-curve roughness pattern of considerable amplitude is obtained on the oscillograph record. The roughness of a smooth asphalt pavement will be raised from 35 in. per mile to 100 in. per mile with the test tire 0. 100 in. out-of-round, and thus make this pavement appear to be rough riding when actually the rough ride should be attributed to an out-of-round tire condition.

While no attempt was made to determine the extent of tire out-of-roundness of tires on passenger cars in service, the reports of service stations equipped to do tire truing work, indicated that tire out-of-roundness of 0. 05 in. to 0. 10 in. was quite common. A common cause of tire out-of-roundness is that which results from the flat spots due to locked-wheel braking. To determine the extent of the flat spot tire wear caused by locked-wheel braking, braking tests were conducted and the tire wear resulting from these tests was measured in $\frac{1}{1000}$ in. units. The results of these tests are shown in Table 3. It should be noted that the wear in the central portion of the tread is only about one-half the wear along the outer edge of the tread. However, in a single stop from 60 mph with a skidmark 150 ft long, the depth of tread removed from the tire amounted to 0. 070 in. This is evidence that locked-wheel braking can cause an out-of-round tire condition which can be as much of a factor in causing a rough ride as a poorly constructed pavement.

It is evident from the above discussion that special precautions should be taken to keep the BPR roughness indicator test tire in an in-round condition. Tire truing machines are now being used by certain tire service station operators which can reduce tire out-of-roundness to ± 0. 001 in. with the tire mounted on the machine and with no load on the tire. It has been found that the mounting studs on the wheel hub may be off-center by as much as 0. 010 in. and thus the tire may be out-of-round when mounted on the trailer due to an off-center mounting. To correct this error the studs should be carefully centered and a final check of tire-roundness made as shown in Figure 5. For accurate roughness measurements, the maximum permissable variation in test tire out-of-roundness as measured with a precision dial indicator should be ± 0. 010 in. and the preferred maximum variation should be ± 0. 005 in.

It should also be noted that synthetic rubber tires develop flat spots when standing in the same spot supporting a load. For this reason, the test tire should be held in an unloaded position except during tests as an extra precaution to keep the test tire within the permissable amount of out-of-roundness.

TABLE 3

PASSENGER CAR TIRE WEAR IN ONE SPOT OF TREAD OBTAINED IN A LOCKED-WHEEL BRAKING TEST

Initial Speed, mph	Average length of skidmarks, feet	Tire tread wear, $\frac{1}{1000}$ in.	
		Along outer edge of tire tread	In central portion of tire tread
20	17	8	4
30	33	15	8
40	62	29	15
50	105	49	26
60	150	70	37

TABLE 4

EFFECT OF "0" RING INSTALLATIONS
CALIFORNIA TESTS

Test Section	Pavement Type	Roughness in in. per mile for various types of "0" ring installations[a]			
		1	2	3	4
1	Bituminous	68	67	57	65
2	Bituminous	140	140	120	140
3	Concrete	166	170	155	168

[a] "0" ring installation:
1. "0" rings installed with recommended depth of cut in bushings of 0. 090 in. 6,000 miles of highway travel, very little fluid leakage.
2. Without "0" rings.
3. New "0" rings installed with recommended depth of cut in bushings of 0. 090 in.
4. New "0" rings installed with depth of cut in bushings increased until very little drag was felt on piston rod and still with no fluid leakage.

TABLE 5

EFFECT OF "0" RING INSTALLATION
U.S. BUREAU OF PUBLIC ROADS TESTS

Test Section	Pavement Type	Road Roughness (in. per mile)	
		Without "0" rings	With "0" rings
1	Concrete	142	119
2	Concrete	126	90
3	Bituminous	122	86

Effect of Dashpot Damping Units on Road Roughness

Observations in tests with the University of California roughness indicator and with a similar unit built by the City of San Diego, indicated that there were three or four features in the design and operation of the dashpot damping units which, if not properly controlled, could introduce large variations in the roughness measurements.

Tests by the Bureau of Public Roads indicated that the viscosity of the oil used

in the dashpots must be standardized and carefully controlled to obtain consistent results. Likewise, the height of the oil level was found to be an important item. Oil leakage presented quite a problem in some of the tests in California and to correct this difficulty "0" rings were installed in the bushings of the dashpots. It was found, however, that if the "0" rings were installed with a tight fit, considerable drag was introduced on the piston rod as it was raised and lowered. The effect of this drag resulted in a reduction of the roughness index values as shown in Tables 4 and 5. The tests with the University of California trailer indicated reductions of 10 to 15 percent in the road roughness values due to tightly fitting "0" rings. Similar tests by the Bureau of Public Roads indicated reductions as high as 30 percent according to the data shown in Table 5.

The data in Table 4 show that if the "0" rings are installed with a depth of cut in the bushings until very little drag is felt when raising and lowering the piston, no error is introduced due to the use of "0" rings and oil leakage can still be held to a minimum.

In this connection it should be mentioned that much of the wear in the dashpot bushings probably resulted from hauling the test trailer from one test site to another at speeds considerably in excess of 20 mph over fairly rough roads. Several years ago a special outrigger trailer carrier was built at the University of California to haul the test trailer from one test site to the next. The test trailer has for the past two years been operated only at 20 mph on the test sections and the difficulties with excessive bushing wear and oil leakage have for the most part been eliminated.

TABLE 6
COMPARISON OF JOINTS IN TEST UNIT AND EFFECT OF WEAR OR END-PLAY FOR BALL-THRUST JOINTS

Test Section	Pavement Type	Roughness Index, in. per mile: Standard Universal Joints	BPR Ball-Thrust Joints: No End-Play	BPR Ball-Thrust Joints: 1/16-in. end play, each side	BPR Ball-Thrust Joints: 1/8-in. end play, each side
1	Bituminous	68	70	94	104
2	Bituminous	113	112	144	180
3	Bituminous	174	176	202	240

Another feature in the design of the dashpot units which our tests demonstrated could be responsible for large errors in the roughness measurements, were the ball-thrust joints where, after many thousands of miles of operation, excessive wear at the joints caused a small amount of end-play. The magnitude of the error in the road roughness values caused by varying amounts of wear and end-play at the ball-thrust joints is indicated in the test results given in Table 6 for three different pavements. To eliminate the end play referred to above, the ball-thrust joints were replaced with standard universal joints. Test results are given in Table 6 which show that the roughness index remained the same for tests on the same pavements for the trailer equipped with universal joints as for the trailer with the BPR ball-thrust joints with no end-play. With 1/8 in. end-play at the ball-thrust joints, the roughness index values were increased approximately 50 percent, as for example, from 70 in. per mile to 104 in. per mile and from 176 in. per mile to 240 in. per mile. A 50 percent error is much too large for satisfactory operation of road roughness equipment and it is evident that either the ball-thrust joint design should be changed or special precautions taken to eliminate end-play at the ball-thrust joints by providing a finer adjustment for seating the ball in the socket.

Improved Leaf Spring Ball-Bearing Design

The suspension system for the roughness trailer was designed to be as nearly frictionless as possible to prevent the variable damping effects commonly observed when an assembly of leaf springs or certain other types of suspension systems are used. For this reason light single leaf springs and ball bearing mountings were used. In general, this design has been satisfactory except for the difficulty in keeping the ball bearings clean and well lubricated. Even with sealed bearings, it was found that water and dirt accumulated in the bearings, caused corrosion and pitting of the bearings and prevented the desired low friction action of these bearings. Accordingly special grease cups with grease fittings were designed for all of the ball bearing mountings. Drawings for the special grease cup design and the mountings may be obtained through the Highway Research Board. In the new design the shields were removed from the ball bearings, thereby facilitating flushing the bearings with grease through the grease fittings by the use of a grease gun. The operation of flushing the ball bearings with grease requires very little time and we recommend that it be done at least once or twice a week if the roughness trailer is in continuous use.

Integrator Design - BPR Clutch Versus Commercial Clutch

The integrator is the most important part of the BPR roughness measuring mechanism. It consists of an over-running double ball clutch which accumulates or integrates the vertical movement in one direction only of the axle on which the test wheel is mounted. Over the seven year period in which this equipment has been used in California, there have been a number of difficulties encountered which contributed to inaccurate readings with the BPR integrator design. Some of these factors were discussed in the 1951 report, including changes in the design of the integrator. Additional improvements have been made in the integrator since 1951 and tests have been conducted to indicate the limitations of accuracy of the integrator with various modifications developed at the University of California.

Such factors as dirt and dust in the case, corrosion of the metal surfaces in the integrator, misalignment of the main shaft in the integrator, stretch in the cable, arching between the carbon brush and commutator, and variable tension in the springs of the rear ball clutch were items which caused most of the trouble with the integrator. The calibration device described in the 1951 report indicated that for certain conditions described above the integrator would "grab" or develop slippage which resulted in lower values of road roughness than the true values and for some of the other conditions the integrator would overthrow or introduce extra counts which resulted in higher readings than the true values.

The use of the six-pronged cam and the micro precision switch described in the 1951 report, eliminated the errors caused by the brush-commutator design. Since then a further modification has been made in the micro precision switch by changing it from a type L2 to a type W22 (Figure 8). The latter type switch does not improve accuracy but it provides a more compact design of the integrator.

Since erratic results have been obtained on certain occasions with the BPR double ball clutch design, a special study was made to determine the reasons for the erratic results and to find out how the errors caused by the clutch could be reduced or eliminated. To eliminate or reduce the errors caused by dust and water entering the integrator, a new dust-proof case was built, with heavy felt covering the cable opening through which the steel cable has to operate. While it was observed that the heavy felt was cut by the cable leaving a larger cable opening than desired, there was no indication that an objectionable amount of dust entered the case at this point. To prevent the formation of rust on the inner and outer races of the ball clutch, it was decided to experiment with a hard chrome finish for these parts. It was found, however, that with the hard chrome finish, all wedging action of the steel balls in the races was lost, causing 100 percent slippage and thus the clutch did not function at all. A new clutch was then built to BPR specifications and installed in the integrator. It was oiled using the light mineral oil specified by the BPR. The small clutch ball springs were brought to uniform tension to hold the steel balls firmly in place. The entire integrator was built with very close

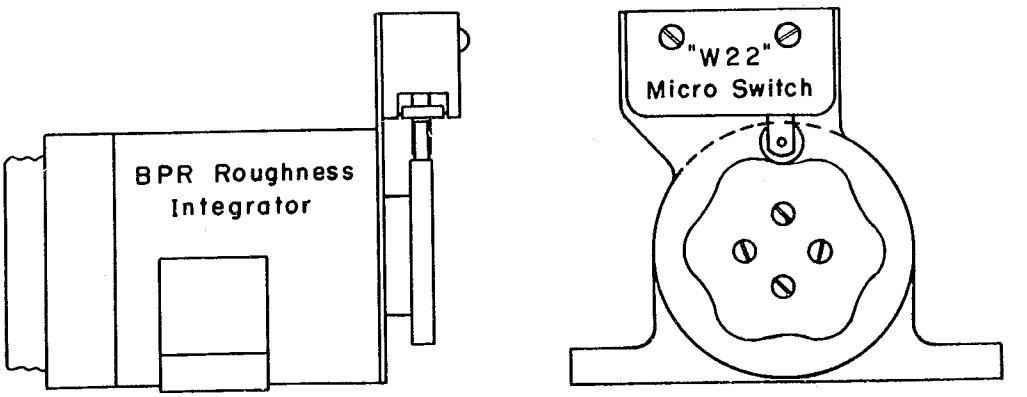


Figure 8. Modification to the BPR roughness integrator.

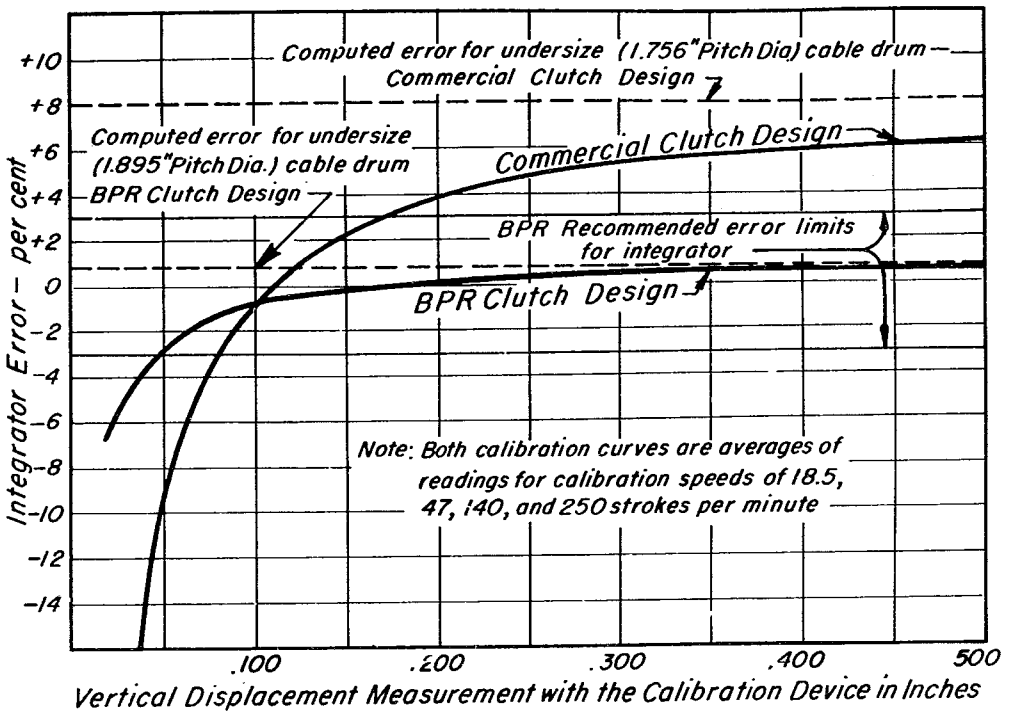


Figure 9. Comparison of the integrator error obtained in the calibration of the commercial clutch integrator and the BPR clutch integrator.

tolerances as called for by the BPR plans and specifications. The integrator was then calibrated at speeds ranging from 18½ to 250 strokes per minute.

The calibration results for the BPR clutch design shown in Figure 9, indicate that for vertical displacements from 0.10 in. to 0.50 in., the error in the measurements was within ± 1 percent. For vertical displacements under 0.10 in., the error increased to about -6 percent for a displacement of 0.025 in. These calibrations show that a mechanical clutch such as the BPR over-running double ball clutch will not pick up displacements under 0.05 in. within the ± 3 percent allowable error recommended by the Bureau. There are two design features of the BPR integrator which provide an explanation for the limitations in the sensitivity of the integrator. They are (1) the stretch in the steel cable which was discussed in the 1951 report and (2) the limit in displacement obtained as the result of the wedging or ratchet action and a certain amount of slippage of the steel balls in the clutch. The calibration curves in Figure 9 and the analysis and observations of the operation of the BPR integrator clearly indicate that at some point near a displacement of 0.010 in., the limit of sensitivity of the mechanical type clutch is reached and that displacements lower than about 0.005 in. are not recorded by this instrument. It should be recognized, however, that a displacement of 0.005 in. per wheel revolution provides a maximum computed roughness index of 4 in. per mile which is so small that it has no practical significance in the evaluation of pavement roughness even for the smoother pavements where the measured roughness index values are in the range of 40 to 60 in. per mile.

Consideration was given to the possibility of reducing the cost of the integrator and possibly of improving the clutch action by using a commercial clutch. Accordingly, two Morse cam clutches No. B-203 were purchased at a cost of only $10.00 each. A new integrator was built incorporating the commercial clutches in the design of the integrator. The Morse cam clutch was described by the manufacturers as a self-contained

ratchet with an infinite number of teeth - one directional drive-over-running and free-wheeling.

The calibration results for the integrator built with the commercial clutch are given in Figure 9. It is evident from the calibration data that the commercial clutch provides the desired accuracy with ± 3 percent over such a small range of displacements (from 0. 08 in. to 0. 175 in.) that it is questionable if a Morse cam type clutch should be used in the design of the integrator. The BPR ball clutch design provided far superior accuracy on the basis of the calibration data in Figure 9 and is therefore recommended as the preferred design for a mechanical type clutch.

Test runs were made on many different pavements using the BPR roughness indicator equipped with both the BPR clutch and the commercial clutch integrator. In these tests both integrators were in operation at the same time. The results of the tests are shown in Figure 10. While the variations in units per mile do not appear to be large,

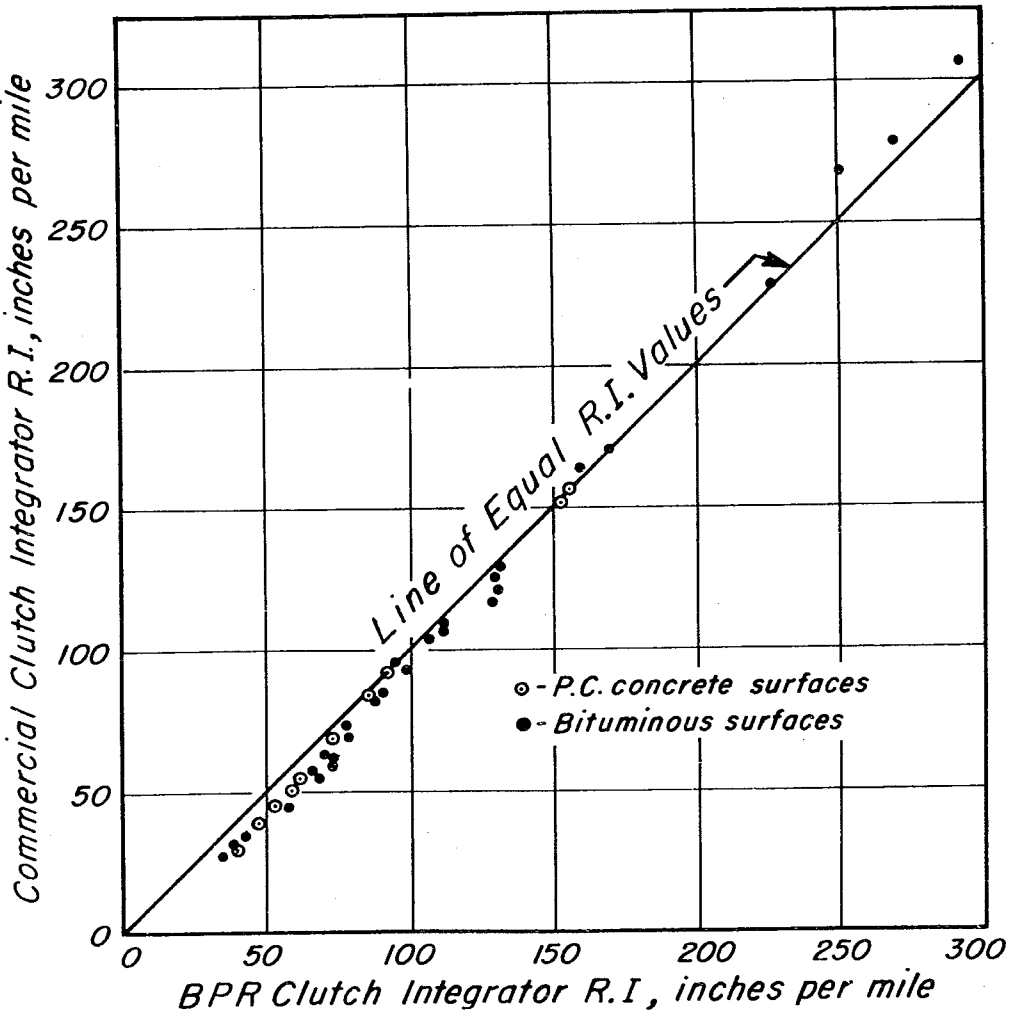


Figure 10. Comparison of roughness index (R.I.) on various surfaces measured with commercial clutch integrator and with BPR clutch integrator.

the errors or variations on a percentage basis are of the order of magnitude of ± 10 percent to ± 20 percent and thus do not comply with the ± 3 percent error specified by the Bureau. The results of these tests support the above recommendation that the Morse cam commercial clutch should not be used.

Equipment and Method for Calibrating Integrator

It is evident from the above discussion that the integrator is a rather complex and sensitive measuring device which must be ruggedly built to prevent damage when operated over rough pavements. It is highly desirable to have a fast and convenient method of calibrating the integrator periodically in the laboratory without requiring the operation of the tow car and the entire roughness indicator. The calibration unit developed by the University of California, described in the 1951 paper, has provided excellent calibration results during the past six years.

The data shown in Figure 9 were obtained by the use of the calibration device and it is doubtful if they could have been obtained by any other method. Since the integrator is a measuring device, it is highly desirable to know the limitations of the device or the errors which may be expected in its use. Also, for routine tests, it is desirable to be able to make use of a fast and convenient method of checking the integrator to be sure that it is functioning properly. All of this is accomplished with the University of California integrator calibration device.

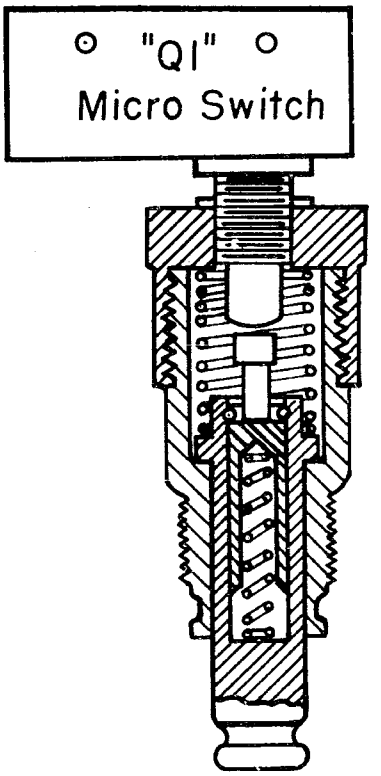


Figure 11. Use of micro switch in revolution counter design for BPR roughness indicator.

Improved Wheel Revolution Counter Device

To obtain the desired accuracy in the measurement of road roughness, it is necessary to have an accurate measurement of the distance traveled by the roughness indicator. In the BPR design of the roughness indicator, distance is measured by obtaining a record of the number of wheel revolutions of the test wheel on the roughness trailer. A contact switch operated by a cam on the hub of the test wheel closes the circuit of the magnetic counter once for each wheel revolution. With 736 wheel revolutions per mile for the 6.00 by 16 tire, it is evident that for satisfactory results when operating the roughness trailer over thousands of miles of road, the contact switch must be well built to keep out dust and water which are certain to cause excessive wear of the contact surfaces and fouling of the contact point. The sliding surfaces on the cam and plunger should be made of hardened steel and provision should be made in the design of this part of the contactor mechanism to keep the cam wiped clean and the surface lubricated with a light oil by the use of a felt wick and oil cup attachment which is a design feature not shown on the BPR plans.

The contact switch when built as shown on the BPR plans was continually giving erratic results due to wear, water and dirt fouling the contact point. The design of the contact switch was modified as shown in Figure 11 to make use of a sealed-in micro switch, Type Q-1. The installation of the felt wiper and oiler and the micro switch

eliminated all of the difficulties previously encountered with the revolution counter mechanism. The new design has given excellent service during the past two years. Of course, the plunger of the contacter requires cleaning about once a month or every 1,000 miles or as needed depending upon its exposure to dust, dirt and water.

TABLE 7

ROAD ROUGHNESS INDEXES MEASURED IN REPEATED TESTS ON SELECTED CALIFORNIA PAVEMENTS

U. S. 40 - Fairfield Bypass, P.C. Concrete

Test Date	Roughness Index, in. per mile: No. Joints Continuous Reinforcement	Standard 15 foot joint spacing
4-18-50	38	42
8- 2-50	41	42
10-11-50	39	40
4-18-51	44	48
9-21-51	40	44
8- 5-52	45	45
9-11-52	52	61
7-28-53	45	45
5-25-54	48	50
10-24-55	50	40

Eastshore Freeway, Fallon St to 23rd Ave
Four Lanes of P.C. Concrete - Passing Lanes

Test Date	Roughness Index, in. per mile: Southbound	Northbound
7-21-49	53	56
1-24-50	55	54
2- 8-50	48	50
4-12-50	50	55
7-26-50	51	47
9-26-50	73	68
9-20-51	82	72
9-10-52	82	72
7-27-53	73	70
10-14-55	68	68

Oxford St, City of Berkeley, P.C. Concrete

Test Date	Roughness Index, in. per mile
8-16-49	158
9-20-51	164
12-11-51	168
9-10-52	168
7-27-53	158
4-15-54	165
10-20-55	160

Eastshore Freeway, Plant-Mixes Surface, Open-Graded

Test Date	Roughness Index, in. per mile
9-19-51	68
12-11-51	70
9-10-52	72
7-27-53	72
4-15-54	74
10-13-55	72

U.S. 40, Vicinity Vacaville, Seal Coat, 3/8 in. Aggregate

Test Date	Roughness Index, in. per mile
8- 2-50	73
4-18-51	83
9-21-51	77
9-11-52	69
12- 8-54	66

Calibration of Towing Unit-Use of Outrigger Trailer Carrier

While the BPR roughness indicator is a fairly simple and ruggedly built piece of equipment, it is a device which for satisfactory results should measure vertical displacements in highway pavements at 20 mph with a high degree of accuracy and with a precision of the order of 5 to 10 thousandths of an inch. Calibration of the integrator is an important aid in checking the accuracy of the equipment but there are many other parts of the roughness indicator such as the dashpot assembly, the revolution counter, the test tire and the ball bearing spring mountings which need periodic checking.

The method used for checking the accuracy of the University of California roughness indicator as a complete unit, has been by running repeated tests over a selected section of concrete pavement built to a high standard in a location where surface and structural failures of the pavement are not likely to develop. The continuously reinforced concrete pavement on U. S. 40 on the Fairfield Bypass has proven to be an excellent pavement for use in checking the general performance and accuracy of the entire roughness unit. Repeated tests have also been run on sections of the Eastshore Freeway, a city street in Berkeley and on an asphalt pavement with a seal coat on U. S. 40 near Vacaville.

The results of repeated tests are shown in Table 7. These tests were started in 1949 and have been run each year on certain pavements up to and including 1955. It should be noted that the roughness index values measured in September, 1952, on certain pavements were higher than usual. A careful checking of the equipment indicated that the test tire used in these tests had developed a flat spot making it more than 0.010 in. out-of-round. The increased roughness values measured on the Eastshore Freeway since 1950 were due largely to settlement and structural failure on a short section of this pavement. This section of pavement has been resurfaced and the roughness index values were reduced somewhat but the average values were still higher in the 1955 tests than in the 1949 tests.

Comparison of Roughness Indicator Test Units

At the present time, three BPR roughness indicator units are in operation on the

TABLE 8

COMPARISON OF TEST UNITS. OREGON HIGHWAY DEPARTMENT AND UNIVERSITY OF CALIFORNIA ROUGHNESS TEST UNITS, NOVEMBER 14, 1951

Test Section	Roughness Index, in. per mile: State of Oregon Roughness Trailer	Roughness Index, in. per mile: Univ of California Roughness Trailer
Oregon Redwood Highway		
Mile 1	82	92
Mile 2	84	94
Crater Lake Highway		
Mile 1	79	90
Mile 2	92	98

TABLE 9

COMPARISON OF TEST UNITS. CITY OF SAN DIEGO AND UNIVERSITY OF CALIFORNIA ROUGHNESS TEST UNITS APRIL 28, 1954

Test Section	Roughness Index, in. per mile: City of San Diego Roughness Trailer	Roughness Index, in. per mile: University of California Roughness Trailer
Florida Drive	89	94
Florida Street	214	219
Madison Ave	199	205
Arthur Ave	446	459
Marlborough Dr	246	248

West Coast. In addition to the University of California unit, the Oregon State Highway Department built and is running tests with a unit and the City of San Diego also has a unit. Tests were run in November, 1951 on the same sections of pavement to make a comparison of the roughness measurements obtained with the Oregon unit and the University of California unit. The results of these tests are shown in Table 8. Similar tests were run in April, 1954 to compare the roughness measurements obtained with the City of San Diego unit and the University of California unit. The results of these tests are shown in Table 9.

In general, the roughness index values obtained in the comparison tests of the Oregon, University of California and the San Diego roughness indicator units were of the same order of magnitude although the values for the University of California unit were 5 to 10 percent higher than for the other two units. In checking the various parts of the three units, it was concluded that there was less friction or damping action in the dashpots and leaf spring ball bearings of the University of California unit than in the other two units.

It is interesting to note here that the City of San Diego experienced some difficulty during the first month of operation of their roughness unit in obtaining consistent results. Considerable extra damping effect was observed when running tests on the same

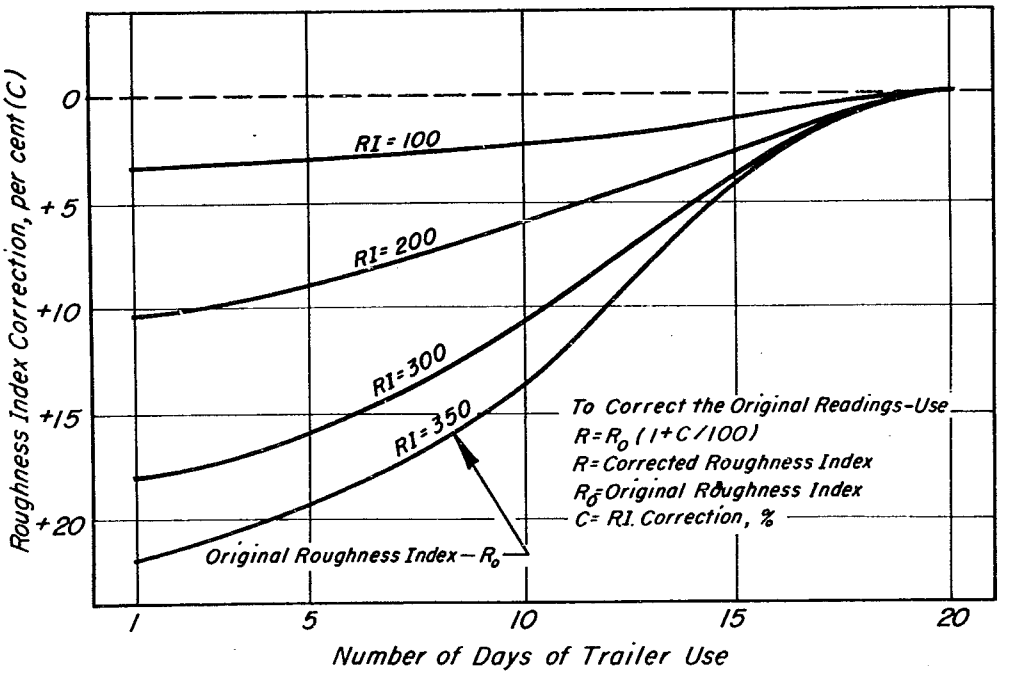


Figure 12. Correction curves used by the city of San Diego for adjusting the original roughness index readings during break-in period of PPR roughness indicator.

pavement. This extra damping effect decreased gradually during the first month of operation of the unit which was referred to as a "break-in" period. Correction curves were prepared as shown in Figure 12 for use in making corrections of the roughness index of pavements on which tests were run during the "break-in" period.

TABLE 10

EFFECT OF TOWING UNIT ON ROUGHNESS INDEX MEASUREMENTS ON P.C. CONCRETE PAVEMENT, U.S. 40, FAIRFIELD

	Roughness Index, in. per mile			
Test Section	Hitch centered, trailer level	Hitch 6 1/8-in. high	Hitch 6 1/8-in. low	Bouncing on trailer hitch during test
1	46	43	44	-
2	45	43	44	44

On the basis of the seven years of tests and experimentation with the University of California roughness indicator, it is believed that if the modifications in the BPR roughness indicator proposed in this paper are made and if all the suggested precautions are taken to eliminate erratic results, consistent results and satisfactory operation of the BPR roughness indicator are reasonably certain to follow.

Dynamic Stability of the Roughness Trailer

Some concern has been expressed concerning the possible variable effects in the roughness measurements which might be attributed to the towing vehicle. The Bureau of Public Roads designed the roughness trailer to be dynamically stable so that the towing vehicle would in no way influence the roughness values measured with the trailer. In Table 10 the results of tests are given for four different towing conditions used to obtain a measure of the dynamic stability of the roughness trailer. The effects of three different heights of the trailer hitch were investigated and the effect also of bouncing on the bumper of the towing vehicle to which the trailer hitch was fastened was investigated. Since the test results were very nearly the same for all four test conditions, it may be assumed that the roughness trailer is dynamically stable.

Design and Use of Outrigger-Trailer Carrier

In the BPR Manual of Information Concerning the Operation and Maintenance of the BPR Roughness Indicator, a truck type towing vehicle is recommended for use with the roughness trailer, so that when the test sections are more than 100 miles apart, it is recommended that the trailer be placed within the towing vehicle when traveling from one test site to another. A suitable tow truck was not available at the University of California when the roughness tests were started and instead of the truck a passenger car was used as the towing vehicle. For the first four years the roughness trailer was towed at all times. It was found that towing the trailer caused a lot of wear on the various bearings and similar parts of the trailer. It also caused uneven tire wear. While the BPR design of the roughness trailer hitch provided excellent universal joint action when towing the trailer, it was not a good design for making a quick change in attaching or detaching the trailer to or from the towing vehicle. To correct all of the above difficulties in running tests with the University of California test trailer, an outrigger-trailer carrier was designed and built in 1953. The design of the outrigger-trailer carrier was patterned after the design of a similar unit built by the Oregon State Highway Department.

A general view of the outrigger-trailer carrier is shown in Figure 13. The trailer carrier is designed with a special spring suspension, electric trailer brakes, a cable hoist and frame to raise and lower the roughness trailer as needed, and with such other features as were needed to facilitate the running of tests with the roughness trailer and for transporting it from one test site to another.

In Figure 14 the roughness trailer is shown clamped in the raised position on the outrigger-trailer carrier. This is the position of the test trailer now used to move it from one test section to another. For running tests the clamps are removed and the test trailer is lowered with the cable hoist to the normal pavement position. The test trailer is attached to the outrigger-trailer carrier with the universal joint hitch shown on the BPR plans. There is no other connection between the test trailer and the outrigger-trailer carrier when it is lowered into position for running the roughness tests. By using a standard heavy duty ball and socket trailer hitch to attach the outrigger-trailer carrier to the towing vehicle, the outrigger-trailer carrier and the test trailer can be

quickly and easily detached from the towing vehicle. A special wheel attached to the outrigger-trailer carrier near the hitch can be lowered in position to support the trailer carrier entirely on wheels and to facilitate moving the trailers by hand when they are detached from the towing vehicle.

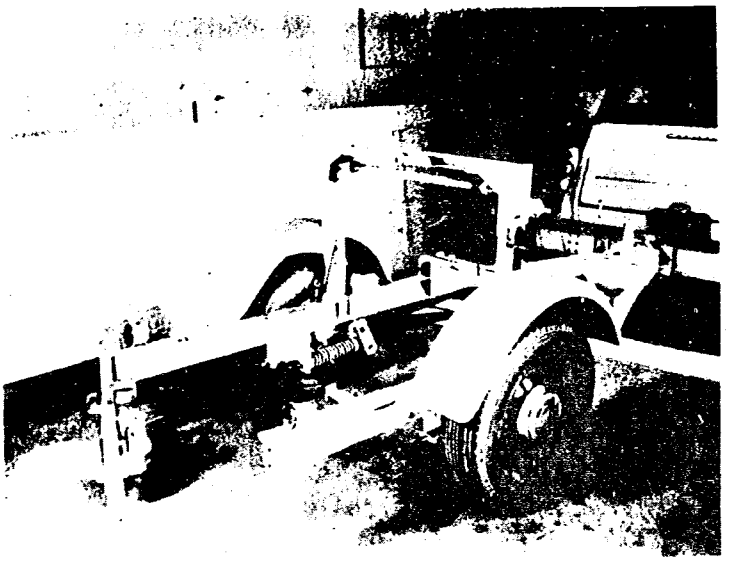


Figure 13. Showing open end of outrigger trailer carrier, trailer spring design, and cable hoist and frame, etc, used for BPR roughness indicator.

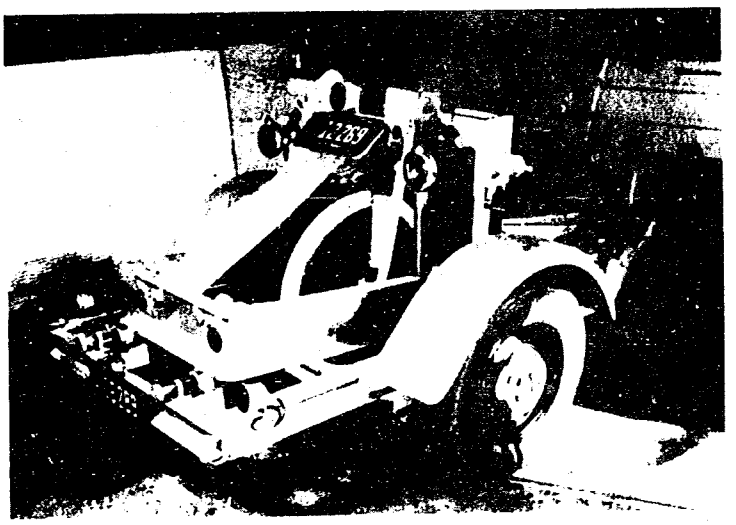


Figure 14. Showing BPR roughness indicator clamped in raised position on outrigger trailer carrier used to move it from one road test section to another.

The use of the outrigger-trailer carrier has eliminated much of the wear on the important working parts of the test trailer and has resulted in the elimination of many of

the errors formerly encountered when the test trailer was towed from one test site to another. Detailed working drawings have been made for use in the construction of the outrigger-trailer carrier. A set of the working drawings may be purchased from the Highway Research Board.

RESULTS OF ROAD ROUGHNESS TESTS ON CALIFORNIA PAVEMENTS AND BRIDGES AND ON THE WASHO TEST ROAD

Road roughness tests have been run during the past seven years on many different types of pavements on state highways in all of the eleven state highway districts in California. A special study was made during 1955 of the roughness characteristics of pavements on various bridges and overpass structures in the San Francisco Bay Area. Repeated tests have been run on five sections of pavement selected partly for calibration test purposes and also as the basis of observing seasonal and annual changes in road roughness which might develop on these pavements. Oscillograph records were taken on many sections of pavements to provide a graphical record of road roughness under many different pavement conditions. Oscillograph records of selected sections of pavements will be presented and discussed in this report. Measurements of road roughness were made on all the pavement sections investigated in the WASHO Road Test. The complete report of these measurements is given in "The WASHO Road Test, Part 2: Test Data, Analyses and Findings" Special Report 22 of the Highway Research Board, 1955. Certain typical results of the road roughness measurements obtained on the WASHO Road Test pavement sections will be presented and discussed in this report.

Seasonal and Annual Variations in Road Roughness

The results of the repeated tests on selected pavements which were made to obtain a record of seasonal and annual changes of road roughness, are given in Table 7 and were discussed briefly in the section of this paper dealing with calibration tests. While small variations in the roughness values for all of the pavements are evident in the data given in Table 7, the greatest change in roughness was that obtained for the P. C. concrete pavement on the Eastshore Freeway. The increase in roughness of from 50 to 82 in. per mile for this pavement was due largely to settlement and structural failure of a section of the pavement about 200 ft in length. After resurfacing this section of pavement, the roughness was reduced to 68 in. per mile. On the basis of the roughness standards proposed in the 1951 report, all of the pavements for which data are given in Table 7, except the pavement on Oxford Street in the City of Berkeley, would be rated as excellent. Although small variations in roughness were observed which appeared to be related to temperature and pavement moisture effects on both the concrete and asphalt pavements, the long range effect of these factors could not be clearly established primarily because the BPR roughness indicator during the development stages of the first four years of this study lacked the accuracy and dependability required to determine these effects. Even with the improvements made on the roughness equipment at various times during the past seven years, the data in Figure 7 indicate that the variations of roughness are largely within the experimental error except for the major change referred to above for the roughness of the concrete pavement on the Eastshore Freeway.

The average and maximum roughness values for different types of pavement surfaces on rural state highways in California tested in 1954 and 1955 are shown in Figure 15. In general the lowest roughness values were measured on P. C. concrete pavements with a low value of 40 in. per mile, an average value on new concrete pavements of 66 in. per mile and on old concrete pavements of 88 in. per mile. On one section of new plant-mix asphalt pavement a low roughness value of 35 in. per mile was measured but the average roughness of the new plant-mix asphalt pavements was found to be 85 in. per mile and for plant mix pavements more than two years old, it was 81 in. per mile. The roughness values shown in Figure 15 were for asphalt pavements with seal coats. The roughness values for seal coats less than two years old averaged 80 in. per mile and for seal coats more than two years old, the average roughness index was 94 in. per mile. Under the proposed standard of roughness given in the 1951 report, all of the pavements would be given a rating of excellent although under the Minnesota standard

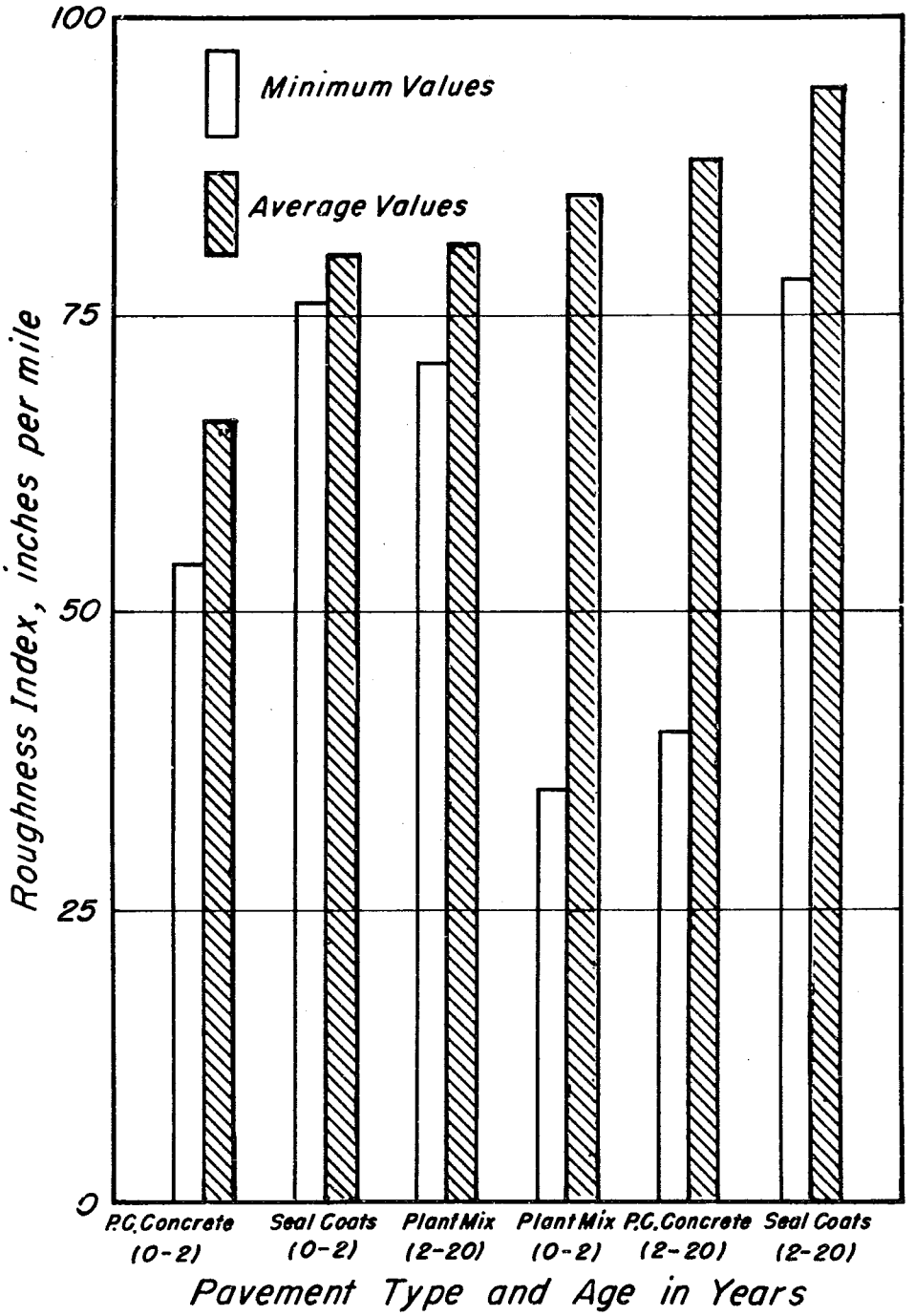


Figure 15. Roughness values for different types of pavement surfaces on rural state highways in California tested during 1954 and 1955.

for new pavements, pavements with a roughness index of 75 to 100 in. per mile are given a rating of fair. On the basis of the Minnesota standard, it may be assumed that certain pavements, notably asphalt pavements with seal coats, for which average roughness values of 80 to 94 in. per mile are given in Figure 15, were not built to an acceptable standard of smoothness.

The roughness of asphalt pavements with seal coats depends primarily on the roughness of the surface on which the seal coat is placed. The high values of roughness measured on seal coats in California is an indication that the seal coats were placed on new surfaces which were not built to an acceptable standard of pavement smoothness. Another consideration is that seal coats are frequently placed on old surfaces which are not patched or repaired to a high standard of pavement smoothness. The use of seal coat construction for filling holes and low spots and for leveling operations is almost certain to result in a rough pavement surface condition and should not be used on pavements where a high standard of surface smoothness or riding quality is desired.

In Figure 16 roughness oscillograph records are shown for certain typical sections

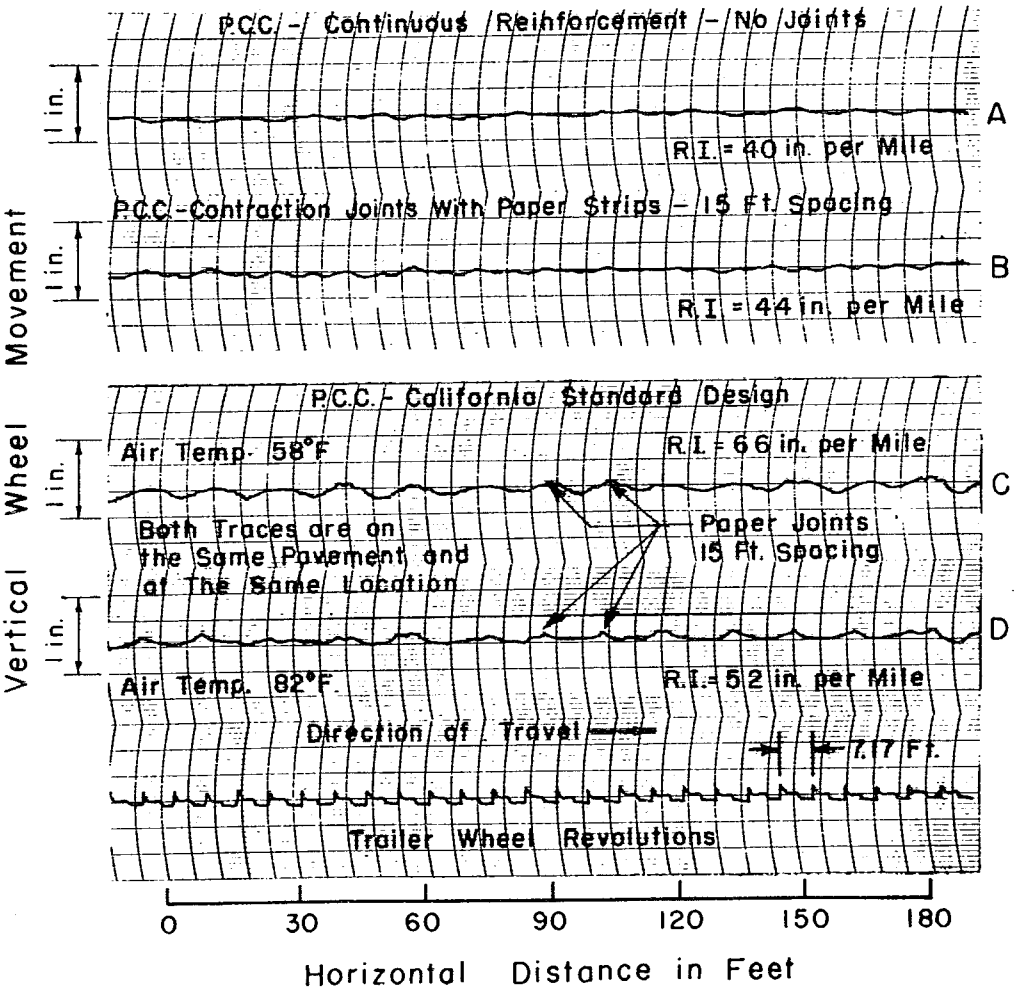


Figure 16. Roughness oscillograph records for P.C. concrete pavement.

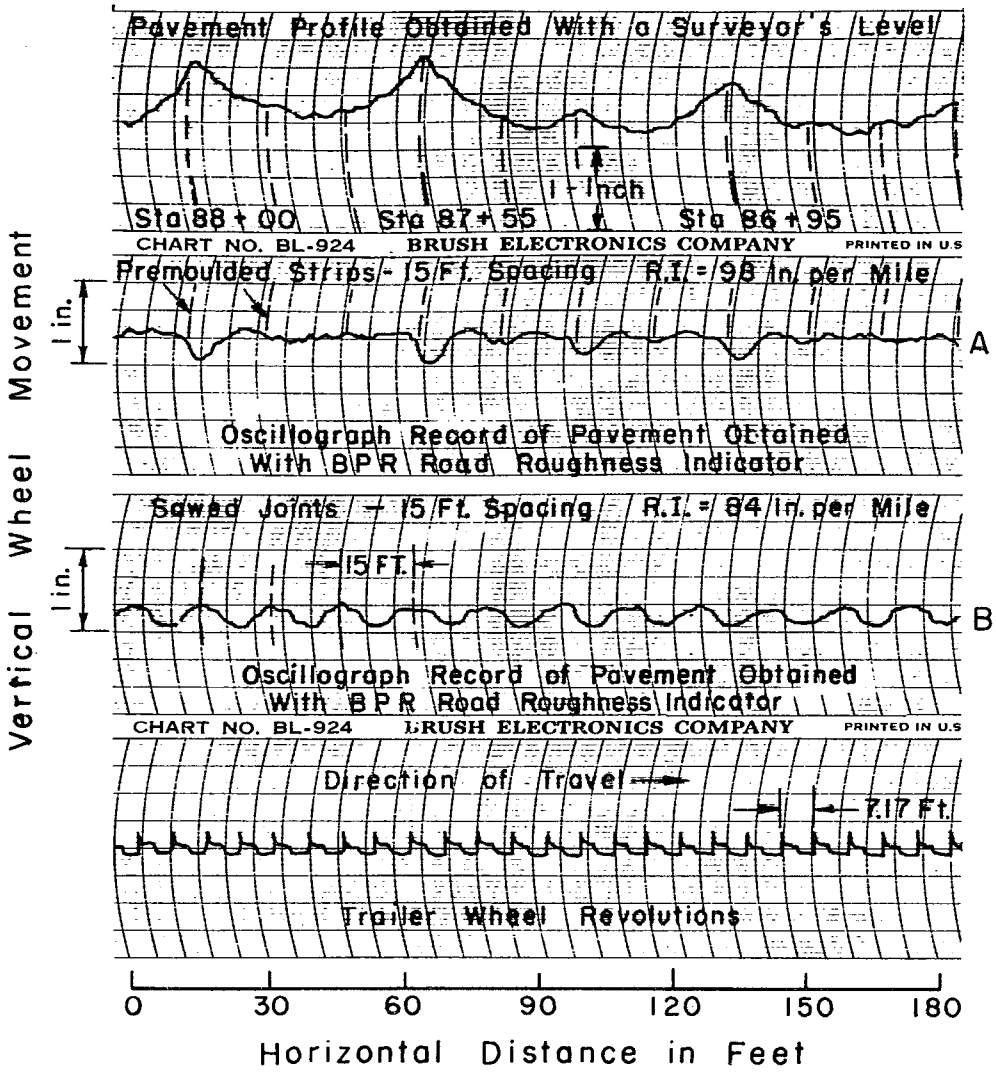


Figure 17. Roughness oscillograph records for P.C. concrete pavements constructed on an expansive type soil, with weakened plane contraction joints of (a) premolded strips and (b) sawed joints. A profile of a section of pavement (a) is also shown.

of P.C. concrete pavements. The records of the sections of pavement with roughness index values of 40 and 44 in. per mile indicate no substantial change in the surface characteristics of smooth concrete pavements construction without joints or with transverse contraction joints spaced 15 ft center to center. The two lower oscillograms in Figure 16 are intended to show the effect of an increase in air temperature on the roughness of concrete pavements. With an air temperature of 58 F, the roughness index was found to be 66 in. per mile whereas by mid-afternoon when the air temperature reached 82 F, the roughness of the same section of pavement was reduced to 52 in. per mile. The oscillograph record for the 82 F air temperature shows improved surface roughness with less warping of the joints than is evident in the oscillograph record for the same pavement with the air temperature at 58 F.

In Figure 17 roughness oscillograph records are shown for a section of P. C. concrete pavement constructed over an expansive type soil using weakened plane contraction joints constructed with thin premolded paper strips for part of the project and with sawed joints for the remaining portion of the project. A profile of a portion of the pavement with the paper joints obtained with a surveyor's level is also shown in Figure 17. Both the oscillograph records and the profile obtained with the surveyor's level indicate the presence of warped joints which contribute to the poor riding quality of these sections of pavement. While the roughness index values of 98 in. per mile and 84 in. per mile are above average for concrete pavements, they are not high enough to give these sections of pavement a low rating. The explanation for the relatively low roughness index values for these two sections of concrete pavement lies in the fact that the roughness was confined to the warping at the contraction joints, while the rest of the pavement was constructed with a smooth finish. Passenger cars with a soft spring suspension system could be operated over the warped joints with fairly good riding qualities but the ride on trucks with stiff springs and a long wheel base was very rough.

Roughness Measurements on Asphalt and Concrete Paved Bridge Floors

The use of finishing machines in the construction of both concrete and asphalt pavements has been an important factor contributing to the low roughness index values measured on concrete and asphalt pavements. In the construction of bridge floors, machine finishing equipment is frequently replaced by hand finishing methods. Also, there are other factors which may effect the smoothness of the paving on bridge floors, especially concrete bridge floors, such as, the method of forming or framing used, the size and shape of the floor panels, the width of the pavement and the provisions made for camber and plastic flow of the concrete.

In Tables 11 and 12 the results of roughness measurements are given for many paved bridge floors on freeway overpass structures and on the major bridges in the San Francisco Bay Area. Oscillograph records of certain typical sections of paving on bridge floors are shown in Figures 18 and 19.

TABLE 11

ROAD ROUGHNESS RESULTS ON P. C. CONCRETE PAVEMENTS ON BAYSHORE AND EASTSHORE FREEWAY OVERPASS STRUCTURES

Eastshore Freeway Overpass Structures	Roughness Index in. per mile
23rd Ave Overpass, northbound (1948)	134
23rd Ave Overpass, southbound (1948)	108
29th Ave Overpass (1948)	106
Fruitvale Ave Overpass	116
Hegenberger Road Overpass	78
98th Ave Overpass	109
Davis St Overpass	80
Albany Overpass (1935)	85
Bayshore Freeway Overpass Structures	**Roughness Index in. per mile**
Bayshore Freeway, elevated structure	
Average Roughness Index - 5th Street to 17th Street	158
Roughness Index - 5th Street to 9th Street	180
Army St Overpass	94
Alemany Blvd Overpass	105
San Bruno Overpass	83
San Francisco Airport Overpass	79
Millbrae Ave Overpass	84
Broadway Overpass	94

TABLE 12

RESULTS OF ROAD ROUGHNESS MEASUREMENTS MADE IN 1955 ON THE ASPHALT AND P.C. CONCRETE PAVED BRIDGE FLOORS OF THE MAJOR BRIDGES AND APPROACH STRUCTURES IN THE SAN FRANCISCO BAY AREA

	Roughness Index in. per mile
San Francisco - Oakland Bay Bridge (opened to traffic 1936)	
East Bay Crossing, Cantilever Section, P. C. C.	130
Yerba Buena Tunnel and Approaches, P. C. C.	71
West Bay Crossing, Suspension Section, P. C. C.	87
Fifth St Ramp, P. C. C., Average Roughness Index	108
Fifth St Ramp, P. C. C., Average Maximum Roughness Index	130
San Francisco - Oakland Bay Bridge Approaches (opened - 1955)	
Elevated Roadway, West Approach near 5th St, P. C. C.	198
Elevated Roadway, East Approach over Eastshore Highway, P. C. C.	141
Golden Gate Bridge (opened to traffic 1937)	
North Approach Anchor Span, P. C. C.	118
Suspension Section, P. C. C.	110
South Approach Anchor Span, P. C. C.	110
South Elevated Roadway Approach, Near Toll Plaza, Asphalt Paving	97
South Elevated Roadway Approach, P. C. C.	138
South Elevated Roadway Approach, S. E. of Toll Plaza, Asphalt Paving	138
Richmond - San Rafael Bridge - Under Construction (1955)	
West Side Crossing, Girder Spans, P. C. C.	128
West Side Crossing, Truss Spans, P. C. C.	129
East Side Crossing, Girder Spans, P. C. C.	110
East Side Crossing, Truss Spans, P. C. C.	118
Carquinez Bridge (opened to traffic 1927)	
South Approach Viaduct, Asphalt paving over P. C. C.	97
Cantilever Spans, P. C. C.	141
San Mateo - Hayward Bridge (opened to traffic 1929)	
West Side Crossing, Timber Trestle, P. C. C.	145
East Side Crossing, Timber Trestle, Asphalt Paving on P. C. C.	94
Open Grid Steel Bridge Floors	
Park St Estuary Crossing	103
High St Estuary Crossing	99
Mossdale - San Joaquin River Crossing	
Open grid steel bridge decking	127
Concrete in wheel tracks in open grid steel bridge decking	139

The roughness index values of concrete paving on the various bridge structures range from a low value of 78 in. per mile to a high value of 198 in. per mile. The latter value was measured on a new structure opened to traffic in 1955 and has been severely criticized by the riding public as a rough section of pavement. It is interesting to note that the roughness values for paving on structures built 20 years ago such as on portions of the San Francisco-Oakland Bay Bridge, the Carquinez Bridge, and the Albany overpass were less than 100 in. per mile while the roughness values for paving on a large number of recently built structures are considerably in excess of 100 in. per mile.

A variable pattern of roughness for concrete bridge floor paving is indicated in the oscillograph records in Figure 18. The Fifth St ramp on the Bay Bridge has a smooth surface finish but the rythmic corrugations are an indication of the lack of camber in the forming of the floor system during construction and of plastic flow after construction which caused a rough riding surface. There is no clearly defined pattern discernible in the oscillograph record for the concrete paving of the elevated structure with a roughness index of 198 in. per mile. The lack of a pattern in the oscillograph record is an indication of poor workmanship in the form work and in the final finishing operations in the construction of this pavement.

While the number of bridge floors with asphalt paving reported in this study is small, the roughness index values for the asphalt paving are in the range of 94 in. per mile to 138 in. per mile, indicating that the asphalt paving on bridge floors is smoother than the concrete paving. In the usual case the asphalt paving is placed as resurfacing on old concrete paving and, if it is placed with a finishing machine, it should be able to meet a high standard of pavement smoothness or riding quality.

In the construction of the concrete paving on the Richmond-San Rafael Bridge a special finishing machine is being used. The final finish, however, is obtained with a hand-

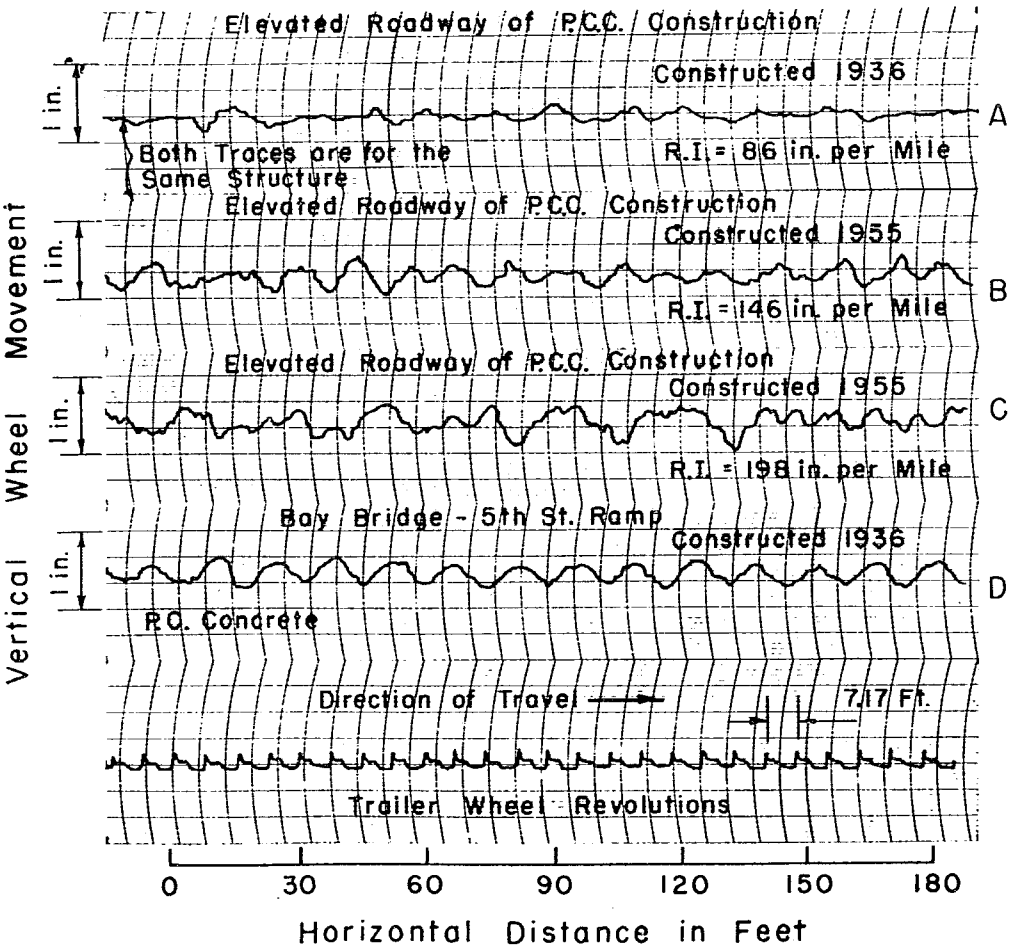


Figure 18. Roughness oscillograph records of P.C. concrete pavements on elevated roadway or bridge type structures.

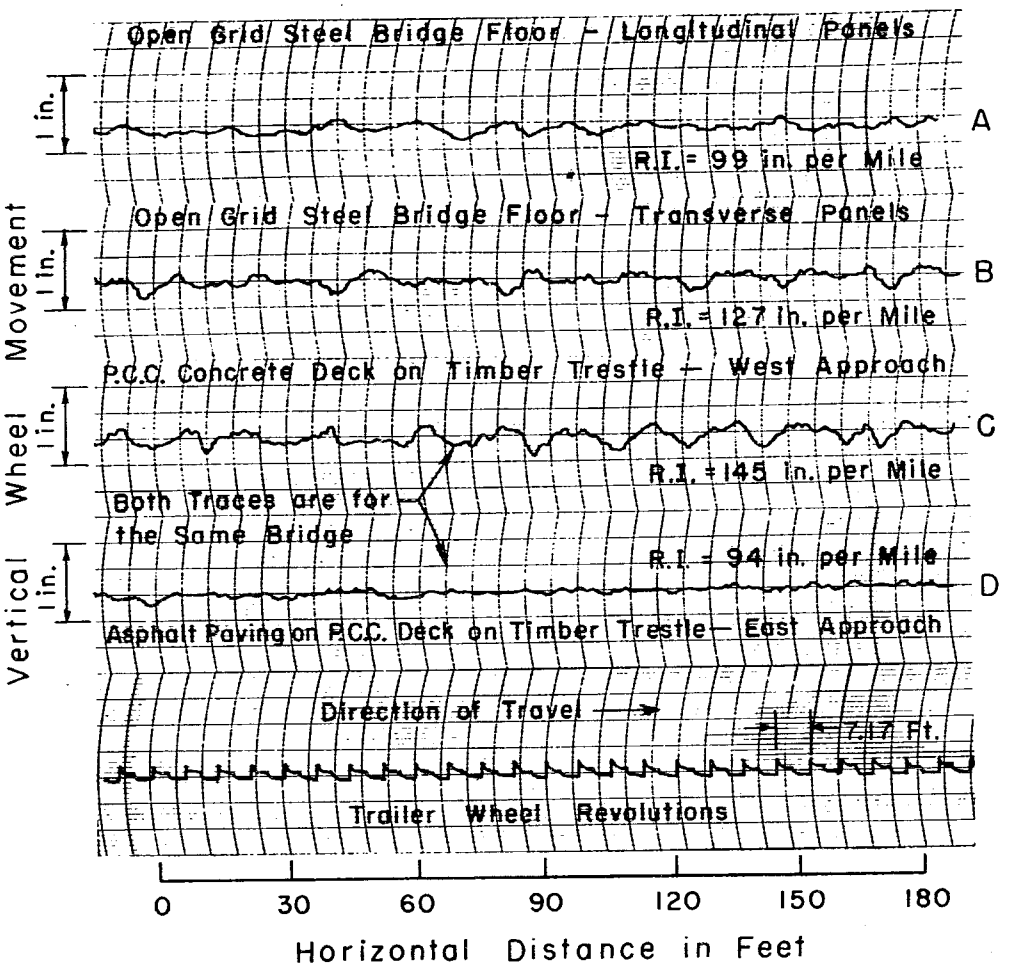


Figure 19. Roughness oscillograph records for four bridge floors.

operated longitudinal float. The roughness index values measured on the completed portions of this bridge vary from 110 in. per mile to 129 in. per mile. It is evident that the concrete paving on this bridge does not measure up to the high standard of smoothness obtained with the Johnson Finisher used on California state highway concrete pavement construction where the roughness index values are usually not greater than 70 in. per mile and they may be as low as 40 in. per mile.

Roughness Measurements on Open-Grid Steel Bridge Floors

The results of roughness measurements on open-grid steel bridge floors are given in Table 12. Typical oscillograph records for two open-grid steel bridge floors are shown in Figure 19. The roughness index values for the open-grid steel decking varied from 99 in. per mile to 139 in. per mile. The oscillograph records indicated that the use of transverse panels resulted in a roughness of 127 in. per mile as compared to 99 in. per mile for a floor system with longitudinal panels. This conformed to the general pattern of smoothness observed on concrete bridge floors in which lower roughness values were measured on floor systems with longitudinal beams and girders than on floor systems with transverse beams and girders or with large open square panels for which proper cambering was generally not provided.

TABLE 13

ROAD ROUGHNESS MEASUREMENTS ON SELECTED SECTIONS OF PAVEMENT OF THE WASHO ROAD TEST. A PARTIAL SUMMARY OF ROUGHNESS MEASUREMENTS MADE WITH THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA BPR ROUGHNESS INDICATOR AS GIVEN IN THE WASHO REPORT, PART 2

		Roughness Index, in. per mile			
		Outside Wheel Path		Inside Wheel Path	
Section	Test Date	18,000 lb Single Axle	32,000 lb Tandem Axle	18,000 lb Single Axle	32,000 lb Tandem Axle
22-4	6-10-53	92	79	88	84
	11-11-53	82	79	65	70
	6- 3-54	104	88	83	85
14-4	6-10-53	79	75	88	75
	11-11-53	70	66	63	66
	6- 3-54	82	77	71	71
6-4	6-10-53	75	97	75	88
	11-11-53	92	193 (163)	79	114
	6- 3-54	201 (43)	304 (290)	97 (15)	220 (45)
Tangent Average	10-16-52	-	-	85	80
	6-10-53	82	81	82	81
	11-11-53	76	88 (178)	68	81
	6- 3-54	104 (43)	121 (305)	79 (15)	100 (45)

Parentheses indicate the linear feet of patching in wheel path.
Tangent averages include transitions
All roughness values are corrected for trenches and test holes but not for patching.
All tests taken in the direction of traffic.

Road Roughness Measurements on Selected Sections of Pavement of the WASHO Road Test

A partial summary of roughness measurements made with the University of California roughness indicator on selected sections of pavement of the WASHO Road Test is given in Table 13. The complete report of these measurements is given in the Highway Research Board Special Report 22. The measurements indicated that the various sections of pavement on the WASHO Road Test were built to an acceptable standard of smoothness and retained this smoothness until patching was required. The roughness measurements gave no clearly defined indication of progressive structural failure under the repeated heavy axle loads. It is interesting to note that on the 22- and 14-in. sections the effect of traffic was to improve the smoothness of the surface. Thus, the roughness index in one portion of the 22-in. pavement was reduced from 88 in. per mile to 65 in. per mile after being subjected to five months of intensive truck traffic. It is reasonable to expect that the heavy truck traffic tended to smooth out minor irregularities in the surface which were present when the pavement was opened to traffic and that therefore lower roughness index values were measured on these sections of pavement after they were subjected to the heavy truck traffic than prior to the opening of these sections to traffic.

The roughness data in the 6-in. sections show a progressive increase in road roughness although the increase reached significant amounts only after structural failure developed and patching was necessary. Thus in one portion of the 6-in. pavement the roughness index increased from 75 to 92 in. per mile after five months of intensive truck traffic and then seven months later it increased to 201 in. per mile after structural failure developed requiring 43 lineal feet of patching.

CONCLUSIONS

Seven years of tests, experimentation and development work with the BPR roughness indicator have demonstrated that the basic design of this equipment is sound and that it provides the simplest and most accurate method for measuring road roughness which has been developed to date. It is, however, a sensitive instrument which measures displacements as small as five-thousandths of an inch and it is important that all moving parts be built to the same uniform design standards such that the effects of wear, dust and excessive friction or damping effects will be minimized if this equipment is to be used as a standardizable unit for measuring road roughness. Also, special precautions must be taken in the operation and in the maintenance of the equipment to preserve the high degree of sensitivity in road roughness measurements of which it is capable. The use of an outrigger-trailer carrier to transport the roughness trailer from one test site to another is an important factor to protect the equipment from damage and excessive wear.

Roughness measurements on asphalt and concrete pavements in California built with modern pavement finishers have indicated that high standards of pavement smoothness and riding quality can be provided and in general have been provided. The roughness measurements of paving on bridge floors of the major bridges and freeway overpass structures in the San Francisco Bay Area indicate a general lack of acceptable smoothness or riding quality of this type of paving. Improvements in bridge-floor construction methods and in the final finishing operations can and should be developed to raise the riding quality of the paving on bridge floors to the same high standard which is now obtained on highway pavements.

Devices for Recording and Evaluating Pavement Roughness

F. N. HVEEM, Materials and Research Engineer, California Division of Highways

● EVER SINCE roads and highways have been constructed, the people who use them have been keenly aware of the relative degrees of comfort or discomfort experienced in traveling. This awareness has been so deeply ingrained that most languages contain metaphors such as "rough road" or "smooth road" to describe human experiences involving hardship or good fortune. There is no doubt that mankind has long thought of road smoothness or roughness as being synonymous with pleasant or unpleasant. Road surface roughness is not easily described or defined and the effects of a given degree of roughness naturally vary considerably with the speed and characteristics of the vehicle. Anyone looking at photographs of the Appian Way (Fig. 1) or the streets in Pompeii (Fig. 2) must wonder how it felt to ride in a chariot over such surfaces, especially as the chariots had steel or bronze tires and no springs. One might assume that the repair bills on chariots were fairly high, and undoubtedly the occupants had real cause to feel "shook up."

In more modern times, references to roads appear in the folk lore, in song and story and in the literature. There is the wistful song about the high and low roads that lead into Scotland, but roads were little, if any, smoother a hundred years ago than they were in the times of the Romans, and our hardy ancestors were not above complaining about them. The "rocky road to Dublin" is legendary, and it may be that the Irish were more concerned over such things than most because it appears than an Irishman may have been the first man to construct a device for measuring road roughness, at least the earliest reference thus far found is in a book entitled "Road Making

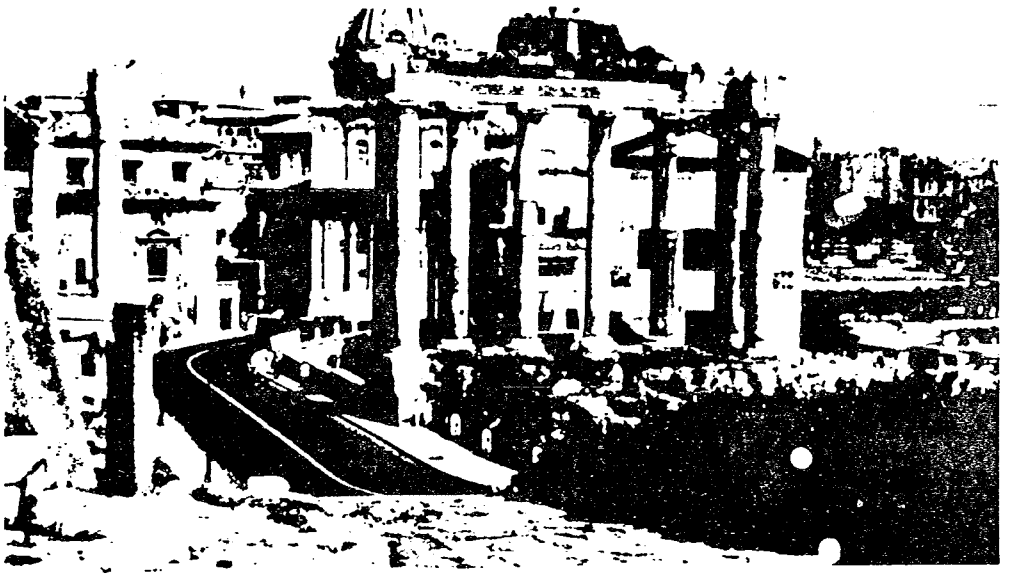


Figure 1. Ruins of the Roman Forum with a remnant of the Appian Way in the foreground.

29

Figure 2. A street in Pompeii showing stepping stones and grooves worn by chariot wheels.

and Maintenance," by Thomas Aitken. This book was published in 1900 and on page 420 there is a discussion of an instrument called the "Viagraph." It is said to be the invention of J. Brown, an engineer of Belfast, Ireland, and is described as being "a straight-edge, twelve feet long and nine inches wide, applied continuously to the road surface, along which it is drawn." This early Viagraph (Fig. 3) contained "an apparatus for recording on paper a profile of the road surface tested, and the sum of unevenness is indicated by a numerical index." The author is mildly chagrined to note this description as he "invented" a device employing the same principle in 1929 (Fig. 4). Brown goes on to discuss the gravel and macadam-type road surfaces that were characteristic of his time (in the years prior to 1900) and concludes that steam rollers offer a distinct advantage in producing a regular and smooth surface. He shows some "autograph records" of macadamized road surfaces and states that, "In the author's opinion, after experience gained in working this instrument over many miles of road and under varying circumstances, a standard of fitness or smoothness of 15-ft of unevenness, or variation from a regular plane, per mile of road might be safely adopted." Brown's device furnished virtually all the information obtainable from the most modern profilograph units today—except that he measured "roughness" in feet instead of inches per mile.

With the high speeds common to modern vehicles on highways and airplanes on landing fields, even minute deviations in the pavement surface become a matter for concern. In the last 40 yr there have been many devices developed for measuring, evaluating or locating the individual high and low spots on a pavement surface. Following Brown's Viagraph, no record has come to light of similar devices until we come to the era of the Bates road test in Illinois in 1922. A.C. Benkelman kindly furnished photographs of a Profilometer built by the State of Illinois at that time (Fig. 5). Judging from the photograph, this was a most impressive instrument in which the frame was supported by 32 bicycle wheels mounted in tandem. According to reports, this particular model was not too successful and undoubtedly was unwieldy and difficult to handle. It does, however, represent a most elaborate example of the principle which is still being used; namely, a series of wheels mounted on short beams or "eveners" to produce a mechanical integration; that is, the center point of the main

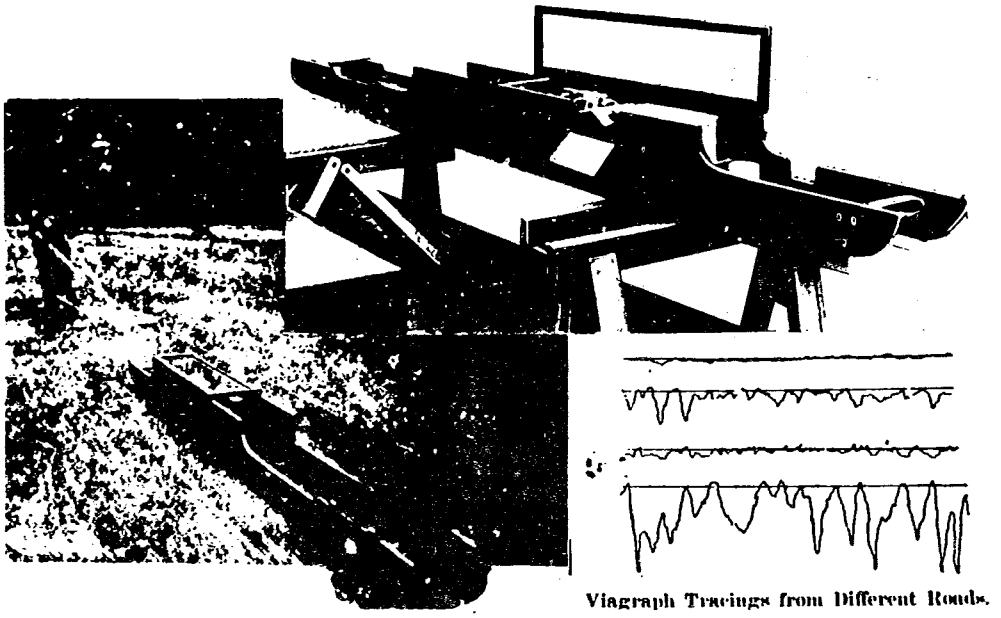


Figure 3. Brown's Viagraph constructed prior to 1900.

frame parallels in elevation at all times a point representing a mean elevation between the high and low spots of the pavement contacted by the series of wheels. By this means, a datum plane is produced to serve as a "plane of reference" for the recording

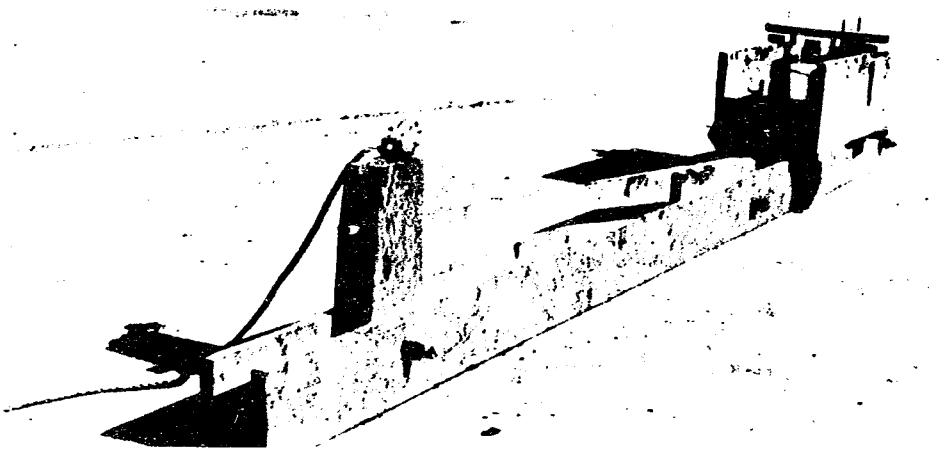


Figure 4. A "poor man's Profilograph."

Figure 5. Profilometer constructed by the State of Illinois for the Bates test road, circa 1922.

wheel that follows the actual profile of the pavement. All of the straightedge types, of which Brown's pioneer model is an example, measure the profile in terms of depth below the peaks or high points on the road surface within the length of the straightedge.

With the rapid expansion of the motor vehicle and increasing awareness of riding qualities, another type made its appearance. One of the earliest was the "Via-Log" developed in the State of New York (Fig. 6). The Via-Log consisted of means of recording a profile on a strip of paper, the stylus being actuated by the vertical movements of the front axle of an automobile with reference to the frame of the car. In order to produce a reading, the car had to proceed at appreciable speed (20 mph or more).

Public Roads magazine for September 1926 reports on a variant of this instrument for the measurement of relative road roughness. It is described as consisting of a "rack which is attached in a vertical position to the front axle of the vehicle, Fig. 31. Meshed with this rack is a spur gear which is supported by the frame of the car. Movement of the front axle with respect to the chassis, caused by deflection of the body spring, thus produces translation of the rack and rotation of the gear. This gear is connected through a flexible shaft to a mechanical counter on the instrument board of the automobile." Modifications and developments of this type have been used for many years in California and by other states and agencies. Constant difficulty was encountered in securing uniformly reproducible readings and results obtained with the same apparatus mounted on different automobiles gave widely different results.

The Bureau of Public Roads continued to work on the problem and in Public

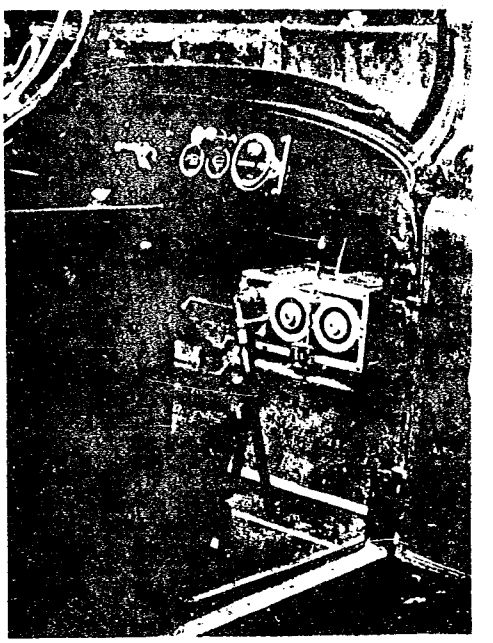


Figure 6. Recorder unit of Via-Log developed in the State of New York.

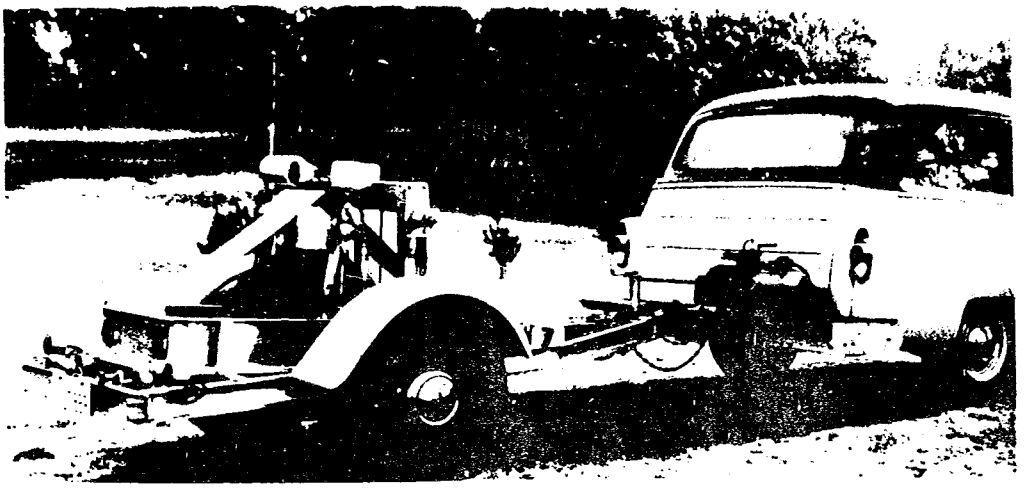


Figure 7. BPR Road Roughness Indicator, outrigger trailer carrier and tow car.

Roads for February 1941 reported on a trailer unit (Figs. 7, 8). In principle, this device is similar to those mounted on an automobile except that carefully selected springs, means for damping, and the weight of the unit can be standardized and thus produce an instrument that is not subject to variations such as exist between automobiles of different size and make. This road roughness indicator is probably the one most widely used in recent years, having been duplicated by several states and other agencies. Figure 9 shows traces of the record produced by one of these units operated by R. A. Moyer of the University of California. However, it is subject to the same criticism as applies to recording devices actuated by the front axle of a car. One might quote from and article on "Independent Wheel Suspension" by Maurice Olley, Special Problems Engineer, Cadillac Motor Car Company; "Frequently analysis of a

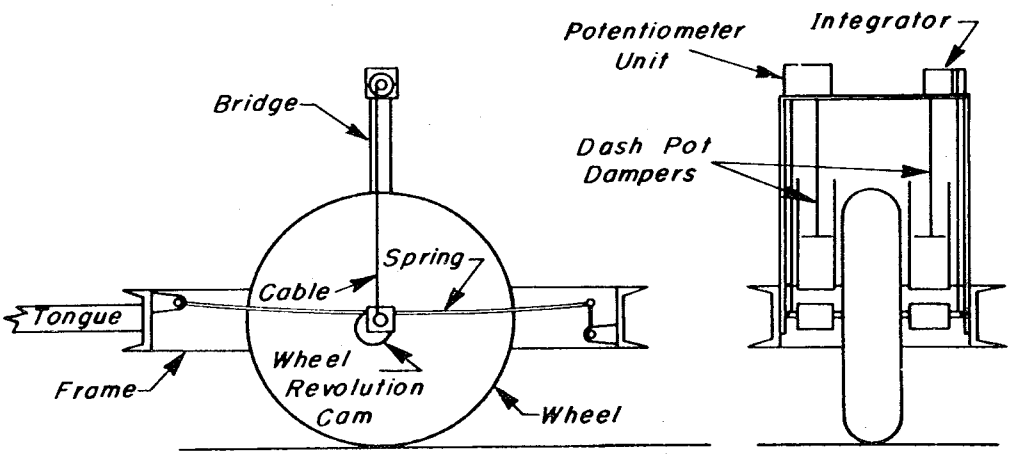


Figure 8. Schematic diagram of the BPR Road Roughness Indicator.

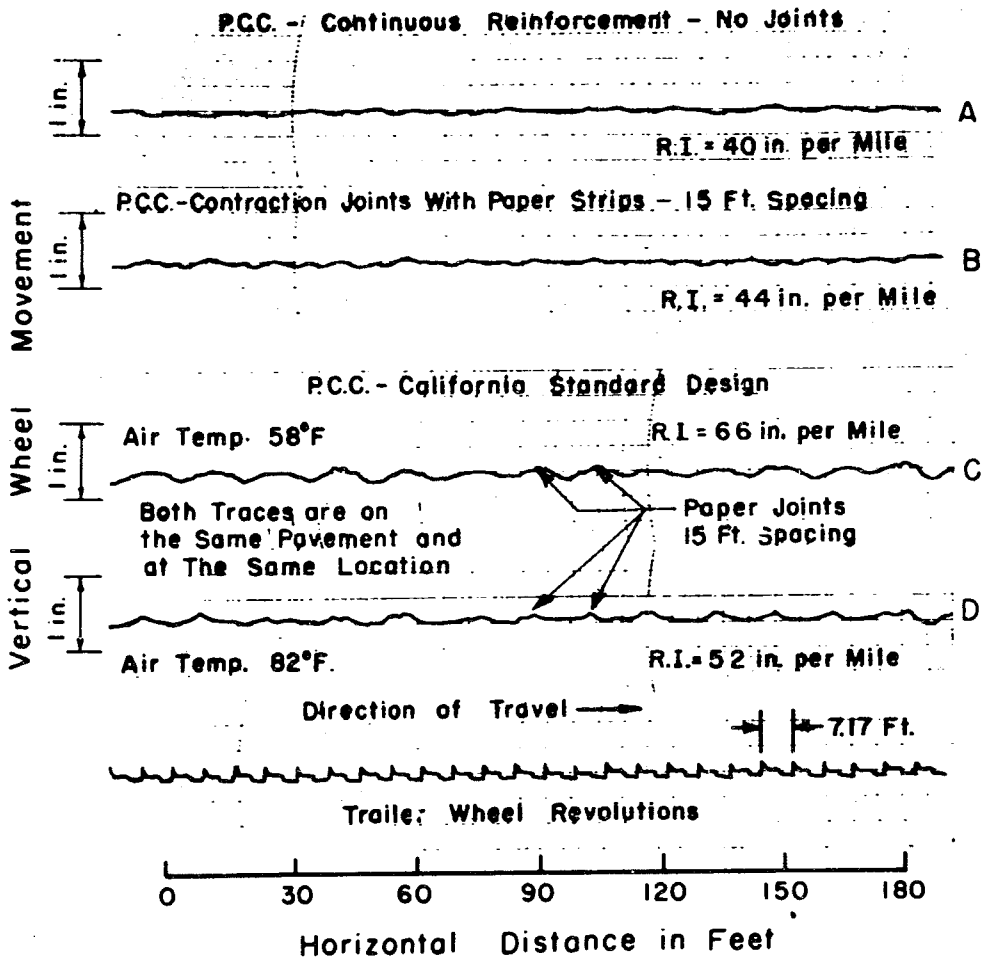


Figure 9. Roughness oscillograph records for P.C.C. pavement. Recorded by BPR Roughness Indicator.

car on the road shows that the average road at normal speeds disturbs the passage of the car by acting as an excitation for the natural frequencies of the car itself. The motion of the car, in other words, is never a true picture of the road surface but is made up of the car-frequencies excited by that particular road surface." Olley goes on to discuss the effects of the main frequencies which vary with different cars, the tire frequencies, and the frequencies of the unsprung masses. He further states, "Different types of road excite frequencies of the three groups to different extents." It will be apparent then that the Bureau road roughness indicator contains all the elements that exist in the average automobile except, of course, to a considerably different degree. Any recorder actuated by the vertical oscillations of an automobile front axle will show the greatest response to the type of bump which the springs are most effective in absorbing or "ironing" out. Obviously, if a bump on a road is to be felt the wheels must lift the car frame and hence there will be relatively less movement between the axle and frame when the shock is not taken up by the springs. While it may

be true that rough roads will cause a greater number of vertical movements than will smooth ones, nevertheless a very distorted picture can be obtained from measurements of this type.)

A fairly comprehensive resumé of road profile measuring devices was prepared by H. Petersen of the Road Research Institute, Technical University, Hanover, Germany, which was published in Strasse in 1939. Many of the following examples or illustrations are taken from Petersen's compilation.

Undoubtedly, the most simple (although slow and painstaking) method of gauging road roughness is by means of a straightedge laid on the surface of the road which means, of course, that the straightedge rests on the peaks of high points and the depths of the valleys or depressions are measured from the bottom of the straightedge, a wedge being a convenient means for accomplishing this purpose (Fig. 10).

In considering the general problem, it is evident that a true profile of a pavement surface can only be plotted in terms of absolute or relative elevations above some base elevation (sea level, for example). Such profiles are commonplace tools used by engineers for planning and establishing grade lines for roads and are generally developed by plotting elevations from level notes. However, such a process becomes very time consuming and requires painstaking care to produce even an approximately accurate intimate profile of a pavement surface as it will be necessary to take readings every foot or so along the pavement with a high degree of accuracy. However, one or two devices have been built that record the road profile with reference to a carefully leveled beam (Fig. 11).

A modification of the simple straightedge is to equip the straightedge with a center wheel that rises and falls as the straightedge is dragged along the surface of the pavement (Figs. 3, 4, 12). This is the principle of Brown's pioneer Viagraph and such a device can produce a reasonably accurate record and need not be difficult to construct. However, a straightedge or glider is tiresome and annoying to drag over the surface of a pavement and this drag becomes aggravated if the straightedge is of substantial length.

A third alternative which is an expedient "invented" by many individuals is to equip a beam with one fixed wheel at either end with a center wheel that rises and falls with the inequalities actuating a pointer or a stylus to record this vertical movement on a strip of paper (Figs. 13, 14). Many profilometers utilizing this principle have been developed but all have one primary weakness. First, a single bump on an otherwise true surface will be recorded on the graph three times as two depressions and one bump, and if a summarizing counter is used the amount of vertical excursion will be approximately twice that of the true profile. Moreover the aberrations produced by this type of device will vary with the pattern of the road inequalities. A certain sequence of waves can be described for which the recorder will produce a straight line on the graph (Fig. 15). These three wheeled machines will exaggerate some "bumps" and minimize others.

Figure 16 is an example of a three-wheel device with a rather elaborate recording mechanism which was reported on page 12 of a California Highways and Public Works, December 1939. This Viagraph was designed by Claran F. Galloway of the Los Angeles County Road Department.

Meanwhile, developments were proceeding abroad. Most of the devices utilize the principle illustrated by the Mailander Wave Measurer developed by the Illinois Division of Highways (Fig. 17). Other examples utilizing this principle are shown in Figures 5, 18, 22, 30, 38, 41, 43, 45. Through the courtesy of Raymond Peltier, Director of Research and Testing, Central Laboratory of Bridges and Roads, Paris, France, information has been furnished on developments in France. Two of the French machines are of interest. One (Fig. 18) is a large unit equipped with marking devices which delineate by a series of stripes all of the depressions or low spots on an old pavement. These markings serve as a guide to the repair crews who place thin localized patches to cover the markings and hence improve the riding quality by leveling up the surface. Figure 19 is a very ingenious design which utilizes the multiple wheel principle but in a novel fashion. Here the frame of the machine is carried on two center wheels and the individual bogie wheels are interconnected by a continous cable running over pulleys. These small individual wheels are free to rise or fall, adjusting themselves to the con-

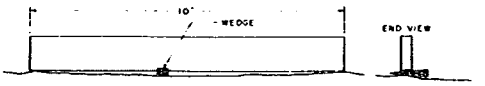


Figure 10. Long straightedge and measuring wedge.

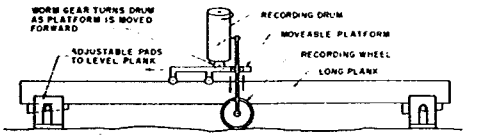


Figure 11. Measuring and recording apparatus of Kohler-Fuesz.

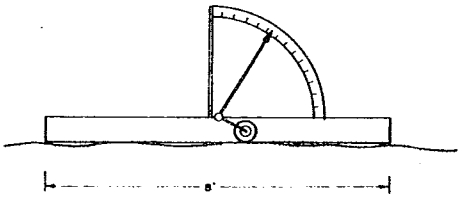


Figure 12. Stuttgart wave measurer.

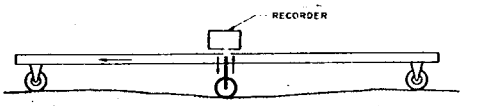


Figure 13. Portable "Unevenness Measurer" —Galloway (Los Angeles Street Dept.).

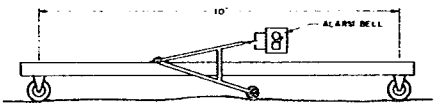


Figure 14. Bumpometer—Illinois Division of Highways.

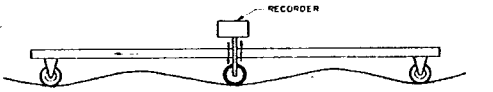


Figure 15. Illustrating the potential error produced by a device equipped with only three points of contact. The wave pattern corresponds to the spacing of the wheels and the profilograph record will be a straight line.

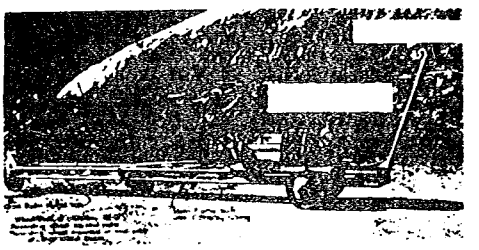


Figure 16. Viagraph designed in Los Angeles Road Department.

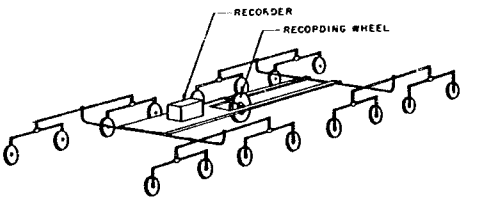


Figure 17. Schematic diagram of the "Mailander Wave Measurer" (Illinois Division of Highways).

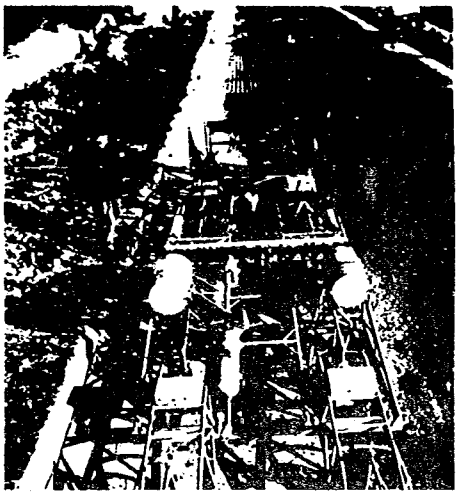


Figure 18. Viagraphe-Traceur used in France for delineating the low spots on a pavement preliminary. to placing leveling patches.

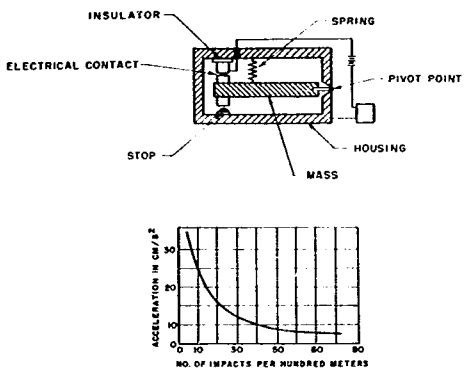


Figure 21. Maximum acceleration meter of Langer-Thome (above). Road condition curve developed by use of acceleration meter(below).

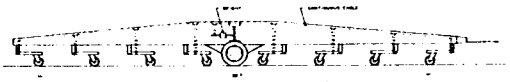


Figure 19. Schematic drawing of the Compensating Viagraphe—France.

Figure 22. Multiwheel Profilometer apparatus (British Road Research Laboratory)

Figure 20. Compensating Viagraphe and towing vehicle—France.

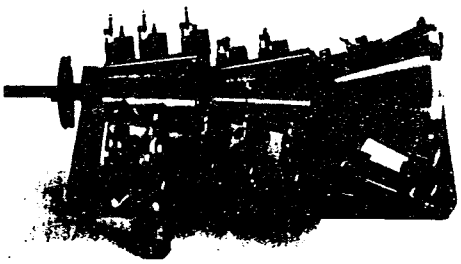


Figure 23. Multiple counter bump classifier on British machine.

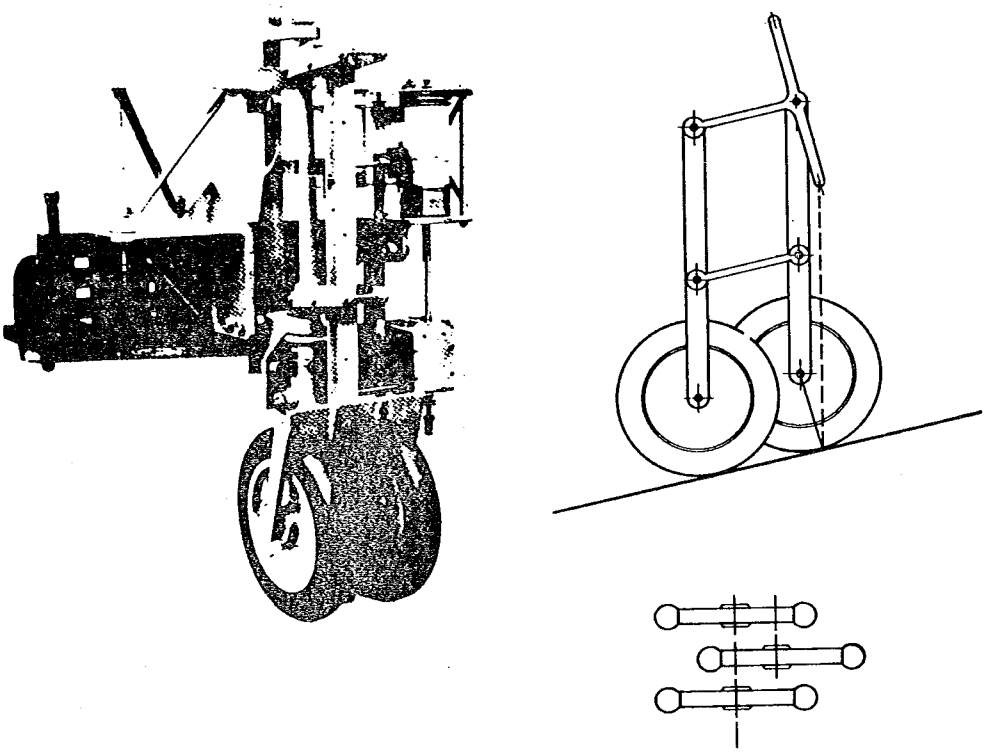


Figure 24. Diagram illustrating the principle of the profile correcting mechanism.

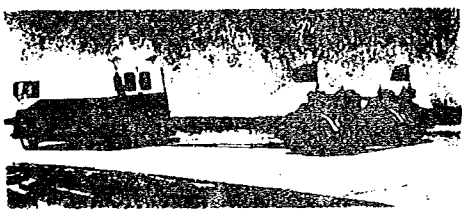


Figure 25. AASHO Road Test Profilometer.

Figure 27. Slope recorder trace of rough pavement—AASHO Road Test (not a profilogram.

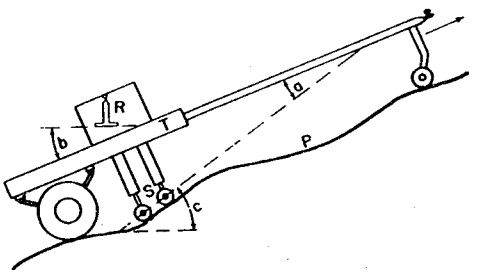


Figure 26. Schematic diagram—AASHO Road Test Profilometer.

tour of the road surface and, in effect, provide a reference datum for the vertical movements of the frame supported on the center wheels. Figure 20 is a photograph of this device shown attached to the towing vehicle. Figure 21 shows a "road condition curve" and the acceleration meter from which it was recorded and designed by Langer-Thome.

One of the more interesting and well engineered profilometers was developed many years ago by the engineers of the British Road Research Laboratory. This multiple-wheel unit employs 16 wheels but so disposed that no two wheels cross the same transverse joint or inequality at the same time (Fig. 22). Figure 23 shows the "classifier" from the British machine. This consists of a series of counters arranged to count each complete up and down movement equal to or greater than a given value. Figure 24 shows the unique three-wheeled recording unit used on the British machine.

A distinctly different principle is embodied in the "Profilometer" (Fig. 25) used on the AASHO test road. As reported by W.N. Carey, Jr., Chief Engineer for Research, it consists essentially of a trailer unit which is towed over the track by the instrument van at a speed of approximately 5 mph. As shown in Figure 26, the slope assembly S measures the angle "a" between pavement P and trailer bed T. Reference R measures angle "b" between the trailer bed and horizontal. As the trailer is towed over the pavement, two voltages are continuously generated proportional to angles "a" and "b". These voltages are added electronically to produce a voltage proportional to angle "c," the angle of the pavement from horizontal. The tangent of angle "c," (slope of the pavement on a 9-in. wheel base) is recorded as an analog in a recording oscillograph. The record includes pip marks at intervals of 1 ft on the pavement and other pips indicating the beginning and end of the test section or area of interest.

This device has reported advantages such as reasonable speed of operation, good over-all accuracy and reproducibility, and

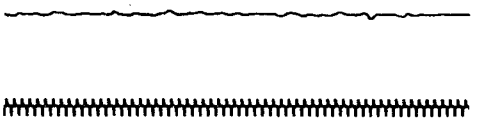


Figure 28. Slope recorder trace of smooth pavement--AASHO Road Test (not a profile).

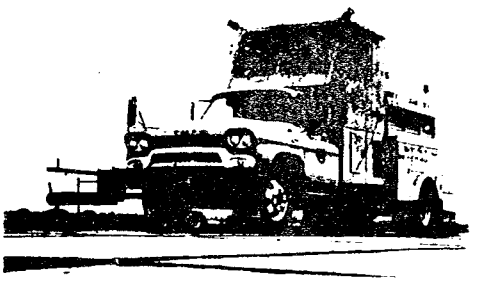


Figure 30. Michigan Profilograph unit modeled after the California Design shown in Figure 41.

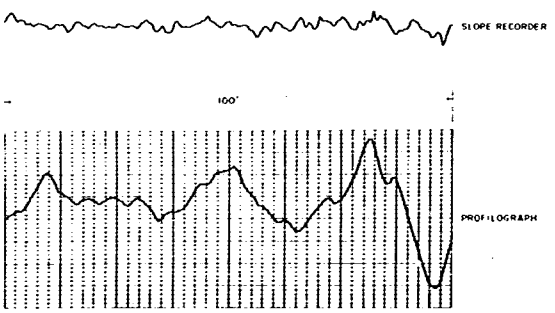


Figure 29. Comparison between records from the AASHO slope recorder and record made by Michigan Profilograph.

Figure 31. Method of mounting Roughometer rack and roller on an automobile in use.

the principle permits use of automatic summarization techniques to develop generalized harmonic analyses as a means of converting the wave form into a few numbers. One might judge that the 9-in. base line will introduce some error or aberrations on short wavelength bumps. Figures 27 and 28 represent some typical records produced by this instrument. The total cost is reported to be about the same as the California or Michigan Profilograph: namely, about $25,000.00. Strictly speaking, this Profilometer does not produce a profilogram directly although it is possible to reconstruct the profile by means of an electronic chart reader and digitizer. Figure 29 shows a comparison between the graphs taken with the test track Profilometer and with the Michigan machine (Fig. 30) over the same section of pavement. It will be noted that there is little apparent resemblance between the actual profile as recorded by the Michigan Profilometer and the tape record recorded by the test track unit. Carey has stated that the test track Profilometer record is actually the first derivative of the profilogram.

From the variety of devices which have been developed and promulgated by different individuals and agencies, it is evident that this problem has been approached from many different viewpoints, and it is not likely that all will agree on the relative merits or demerits of the various instruments. It seems evident, however, that there are two basic or fundamental differences in the approach. One is to record a profilogram on paper which represents a reasonably faithful picture of the intimate pavement profile. The scale, of course, must be distorted to show up the relatively slight inequalities that are involved in the term "roughness." There are several descriptive terms which are often used more or less interchangeably but which really have different connotations or meaning. One, of course, is the "profile" which represents the contour of the road surface along some single line or path. The term "profile" carries no implication as to whether or not the surface is smooth or rough. The term "pavement roughness" is also frequently used. This, of course, leaves the impression that all pavements must be rough to some degree which, of course, they are. The second approach is the attempt to measure "riding qualities" which is a term often used more or less interchangeably or confused with the word "roughness." It seems important to emphasize here that the individual who uses a road and drives a vehicle over a pavement is really not much concerned with roughness and even less with considerations of a profile, but is primarily and almost exclusively aware only of the "riding qualities." The term "riding qualities" means the response of a particular individual in a particular vehicle to the particular road surface at typical speeds of operation. The point the author wishes to emphasize is that an engineer cannot specify such a subjective attribute as "riding qualities" nor can he directly order a pavement contractor to achieve this somewhat elusive condition. By tradition, an engineer or a construction man works to line and grade and hence he can only be expected to produce a finished profile within certain limits of variation. Therefore, it might be concluded that the profile is the aspect which is of most interest to the engineer. As mentioned by Olley, the roughness of the pavement must be regarded as the source of excitation for the natural frequencies of the vehicle. Most will assume that a perfectly smooth road having neither bumps nor low spots will not excite the vehicle or the passenger and consequently will be smooth riding but there is considerable reason to believe that the most pleasant riding highway surfaces are not those that follow a true plane; on the contrary some undulation in the road surface may break the monotony and definitely add to the pleasant sensations of riding in a motor vehicle. Referring to the Profilometer developed and being used on the AASHO test road it might be said to develop some index to the excitation elements in the pavement surface.

It will appear then that the expedients or devices that have been used fall into seven classes which may be described, as follows:

1. Plotting a profile from level notes taken at frequent intervals along the pavement with rod readings to the nearest 0.001 ft. Devices such as the one shown in Figure 11 produce a record with a similar reference plane.
2. Measuring deviations from a straightedge laid on the surface of a pavement in which the reference plane corresponds to the average of the two highest spots within the length of the straightedge.

3. Profile records plotted by the movements of a center wheel in a three-point contact system. In other words, a beam equipped with a single wheel at either end and with a recording wheel in the center free to move in a vertical plane.

4. Recording vertical oscillations of a wheel with reference to a suspended weight or mass; for example, movements of the front axle of an automobile or movements of a wheel in a specially constructed device such as the U.S. Bureau of Public Roads road roughness indicator (Fig. 7).

5. Devices in which the reference plane represents the mean of a number of points of contact with the road surface in the vicinity of the point being recorded.

6. Devices to mark the pavement to delineate either high or low spots as desired. The most elaborate of this type known to the author is the "Marking Viagraphe" developed and used in France. This machine, instead of examining a single line, marks a considerable width of pavement in one operation (Fig. 18).

7. A novel device developed by the staff on the AASHO test road is equipped with two wheels 9-in. apart in tandem with electronic means for constantly measuring the slope of all inequalities on the road surface. This device does not give a direct picture of the road profile but it is stated that the data could be interpreted to give a profilogram if desired (Figs. 25, 26, 27, 28, 29).

DEVELOPMENTS IN CALIFORNIA

As stated before, the California Division of Highways became interested in means for evaluating road roughness more than 30 yr ago, and for many years construction forces, resident engineers and contractors were "kept on their toes" by the fact that pavements would be evaluated for roughness at the completion of the contract. The devices used were of the type described previously in the form of a mechanically operated counter actuated by the movements of the front axle of a car (Figs. 31, 32, 33). In 1950, the mechanical difficulties of the car-mounted Roughometer were overcome by the development of an electronic device (Fig. 34) but differences between cars still affect the readings.

A novel instrument developed by E. L. Seitz, Resident Engineer of the California Division of Highways (1), (Figs. 35, 36, 37), is the Bumpograph which was intended solely for use during the construction of asphaltic concrete pavements. When wheeled by hand over a section of pavement, the Bumpograph would mark all of the high spots with white chalk. The machine was light in weight, weighing only about 30 lb and had a wheel base of approximately 8 ft.

While serving as a resident engineer on a paving contract, the author developed a simple profile measuring device (Fig. 4) which it now appears was identical in principle to the original Viagraph ascribed to Brown of Belfast 40 yr earlier. The mechanism use, however, was much less involved than that shown for Brown's Viagraph. The straightedge was constructed of two pieces of 1- by 6-in. lumber 10 ft in length. The paper feed roller was driven by a small rubber-tired wheel and the mechanism taken from a small hand-operated churn served as a reduction gear. The stylus was a common lead pencil and the platen supporting the paper was an empty tomato can. Graph records were quite accurate and reproducible. However, the unit was somewhat noisy in operation and dragging the "sled" for any appreciable distance became a little wearing.

In 1940, after becoming associated with the Materials and Research Department, a more elaborate device was constructed (Fig. 38), which consisted of a frame 10 ft in length supported on multiple wheels at either end arranged in a pattern similar to that of the larger British machine (Fig. 22). The important feature of this first California Profilograph (2) is the fact that the frame could be broken down into relatively small pieces for ready transportation in a pickup or in the tonneau of a small sedan (Fig. 39). The selection of a 10-ft length of frame was due to the fact that California specifications for pavement finish referred to the amount of departure from a 10-ft straightedge placed on the surface. Profilograms obtained with this profilograph were compared with profiles plotted from level notes at 5-ft intervals and also comparisons were made over sections of pavement by stretching a steel piano wire and measuring ordinates with a steel scale (Fig. 40). Agreement appeared

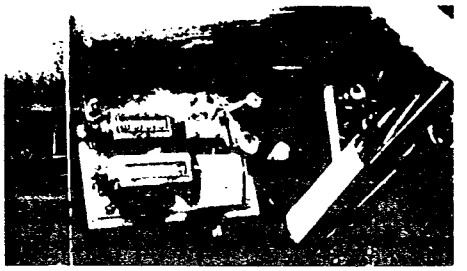


Figure 32. Roughometer head mounted on instrument board.

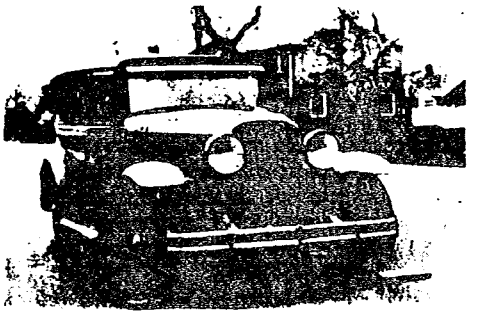
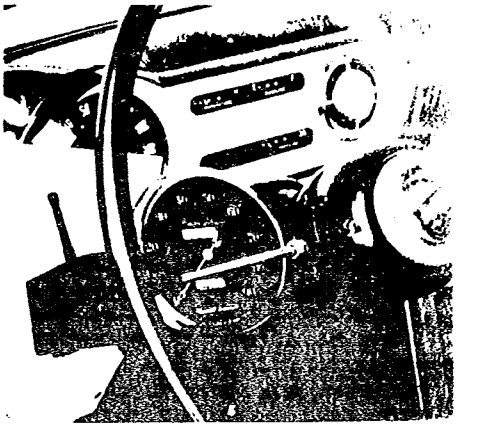


Figure 33. Testing Roughometer with 1-in. boards—1931.



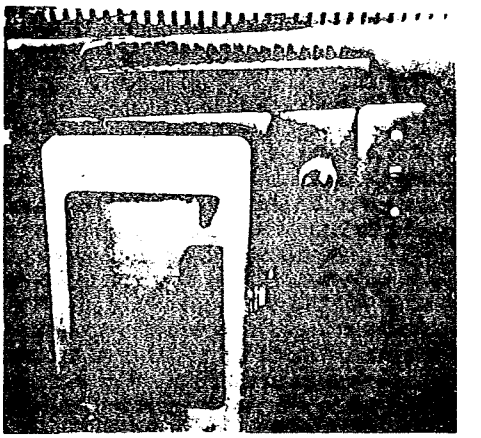


Figure 34. Electronic Roughometer assembly and recorder—1957.

to be sufficiently close for all practical purposes but unanswered questions always persisted as to the exact shape of the bumps in the pavement.

With the general increase in the speed of traffic and trend toward vehicles with a longer wheel base, it was concluded that an improved profilograph should have a longer frame and a 25-ft length was selected more or less arbitrarily. Experience in operating the hand-propelled profilograph on pavements subjected to high-speed traffic has shown that this is definitely a hazardous occupation. Therefore steps were taken to develop a unit capable of more rapid operation and which would offer reasonable protection to the operator. In order to accomplish both purposes a profilograph mechanism was incorporated into a two-ton truck. The frame of the truck was lengthened and became the principal "beam" member. The truck was equipped with a series of small bogie wheels in the front and rear making a total of ten wheels in line. Figure 41 shows this truck with the operator carried by an independently supported frame pushed ahead of the truck, this position enables him to get a close view of any cracks or defects which are registered on the profilogram by manually pressing appropriate buttons on the console. Figure 42 shows the unit with the driver in an elevated position back of the cab. This position is used whenever it is not necessary to mark cracks or joints on the profilogram. The vertical movement of the extra bogie wheels is mechanically integrated and then electrically integrated with the movement of the truck frame in order to produce a datum representing the mean

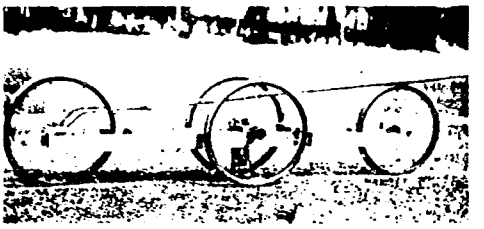


Figure 35.

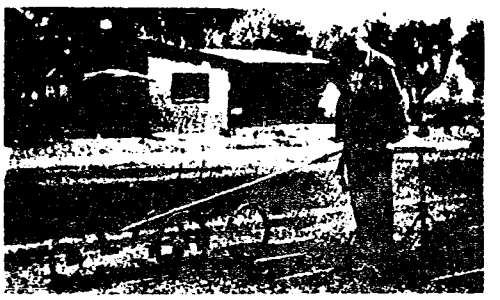


Figure 36.

Figure 37. Bumpograph constructed by E.L. Seitz, California Division of Highways, for detecting bumps during construction of asphaltic pavement.

Figure 38.

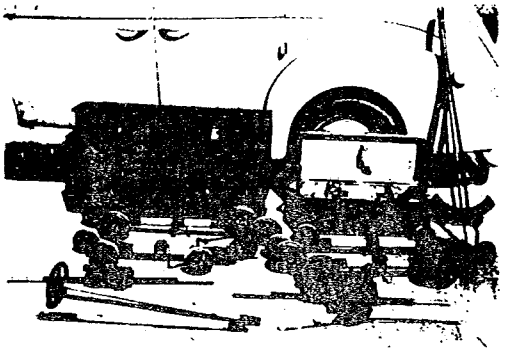


Figure 39. Multiwheel Profilograph with 10-ft base length (California Division of Highways).

elevation of the high or low spots of the pavement which are in contact with the ten wheels. The "profile" is recorded from the vertical movement of a wheel attached to the truck frame at the mid-point and is always with reference to the mean elevation of ten points of contact with the road surface. This self-powered mobile profilograph was constructed in 1955 and has been operated over the length and breadth of California and was sent on one trip to Colorado to record the riding qualities produced with a slipform-type paver. This truck model has proved to be eminently satisfactory and has given little or no trouble in operation and has enabled the California Division of Highways to make records over many miles of existing highways. This unit has been duplicated with some modifications in the State of Michigan (Fig. 30) and reported by Housel and Stokstad (3). It has permitted setting up of a tentative scale for evaluating pavement roughness and relating this scale to

the so-called riding qualities or the reactions to the road roughness of drivers and passengers in motor vehicles.

While the truck-mounted profilograph is invaluable for securing measurements over many miles of an existing highway system and for following the changes that take place with time and traffic, it is, of course, not suitable for use on jobs under construction. The truck is obviously too heavy for safe application on a newly constructed concrete pavement. Therefore, there is a need for a lightweight profilograph and a new model has been constructed using the same wheelbase as the truck unit and which produces a graph record by mechanical means that is virtually indentical. There had been some complaint from operators using the original small plywood unit that crosswinds at times created problems in operating the machine. Therefore, a 25-ft unit using a tubular aluminum frame was constructed in an attempt to meet this objection (Figs. 43, 44). Although satisfactory so far as operation and ability to knock down and reassemble the tubular frame, this material and type of construction proved to be relatively expensive and so in 1957 another hand-propelled model was designed using a plywood frame constructed in five sections for ready knock-down and transportation (Figs. 45, 46, 47). This model, constructed of plywood, appears to be superior in most respects considering rigidity, ability to nest units for conservation of space in a transporting vehicle, enclosing of the operating mechanism for protection against damage and above all the lowest initial cost of construction. This instrument is intended primarily for use to check the surface roughness of newly constructed pavements. The profile of the finished pavement is recorded on a graph record or profilogram to a horizontal scale of 1 in. = 25 ft and a vertical scale of 1 in. = 1 in. which is the same as the scale established for the mobile truck-mounted unit.

Since the first roughness measurement devices were constructed, there has been an instinctive and virtually automatic move on the part of engineers to reduce the data to a number. For example, in the report of Brown's Viagraph it is shown that he recorded a profilogram and he also expressed road roughness in terms of feet per mile. It is previously noted that he thought that 15 ft of roughness per mile represented a satisfactory road. Throughout the years, engineers have converted the readings of Roughometers, Profilometers, etc., to numbers, thus California employed a unit of inches per mile to express results of a "bumpmeter" mounted in an automobile. The Bureau of Public Roads device has means for integrating the results, and Housel has added a mechanism for accumulating the total distance involved in the vertical excursions of the recording stylus to develop a "roughness index." It is true, of course, that these numbers are convenient, but unfortunately often represent an oversimplification and no single numerical scale has been devised to distinguish between large numbers of small asperities on the pavement surface as compared to a few larger and distinct bumps. The British machine uses a number of different counters but the results are not expressed by a single number. It appears that there is no substitute for a careful examination of the graph record if an engineer wishes to know what is going on during construction of a pavement or to study the nature of changes which are taking place with time and traffic. However, the use of roughness "number" becomes less objectionable and is more justifiable as a means for specifying the surface finish to be obtained during construction. Therefore, California had developed a new index which has been called the "profile index" to indicate that it is derived from the recorded profile or profilogram record. Appendix A is taken from a report by Bailey Tremper describing in some detail how the profile index was derived. No claim is made that the roughness or riding quality of a pavement is directly or completely reflected by the profile index. It should again be emphasized that strictly speaking the devices reported herein do not furnish a direct index to "riding qualities." The most elaborate attempt to actually evaluate the response of a passenger is an elaborate instrument developed in Kentucky (4). California duplicated the Kentucky machine and instrumentation but was unable to interpret the results to give consistent or meaningful indices to rideability of a road surface. However, as a practical matter, it can be shown that if the profile index is low the pavements are usually considered to be smooth and to have good riding qualities. At the present time California has established a profile index of 7 which means that the contractor is permitted deviations outside of the 0.2 in. band which will not

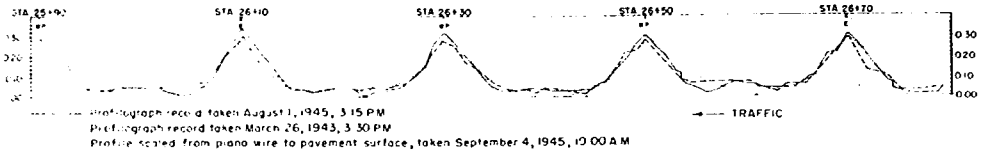


Figure 40. Relative accuracy of profilograph records compared with profile obtained by stretching a piano wire and scaling offset to pavement surface. The pavement shown is a badly curled or warped concrete pavement.

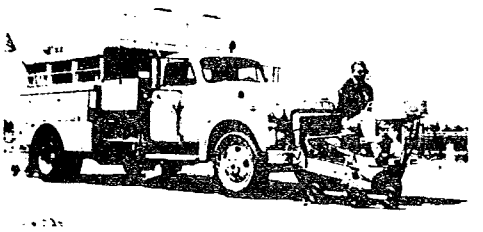


Figure 41. Mobile Profilograph constructed by California Division of Highways—1955—showing operator in position to record cracks and joints.

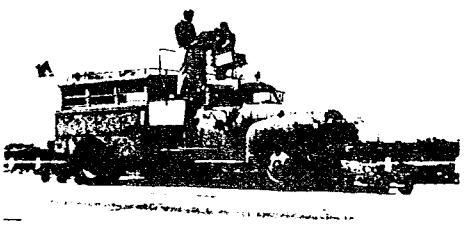


Figure 42. California Profilograph showing recording console in elevated position.

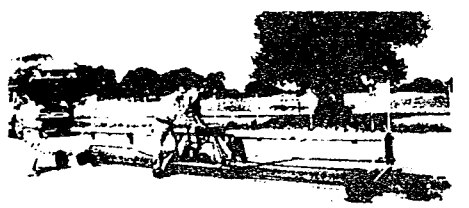


Figure 43.

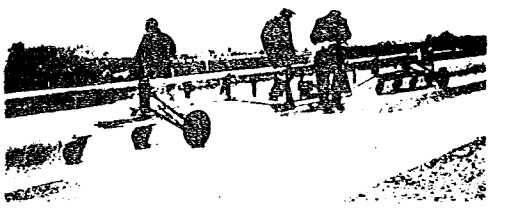


Figure 44. Hand-propelled Profilograph with unitized frame for rapid knockdown.

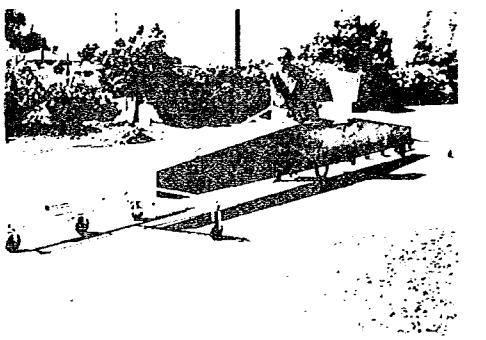


Figure 45.

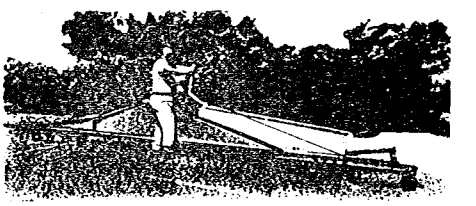


Figure 46.

Figure 47. Most recent California model—hand-propelled recording Profilograph intended primarily for construction control.

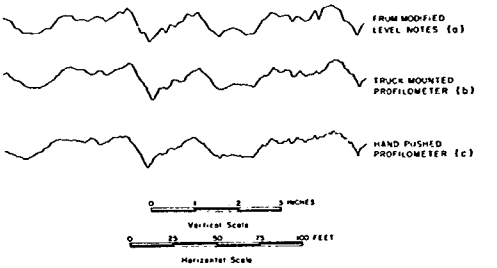


Figure 48. Comparison between three different methods of recording pavement roughness.

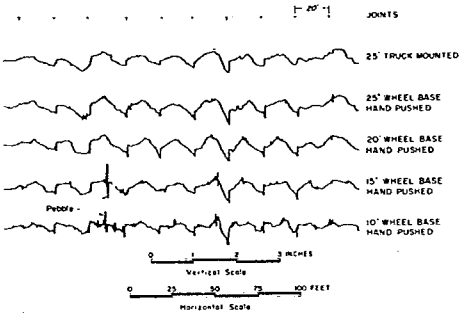


Figure 49. Profiles of a faulted concrete pavement showing influence of varying the length of wheel base on the Profilograph.

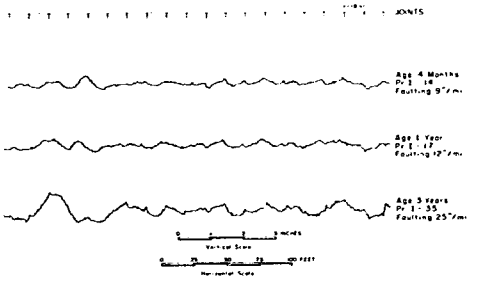


Figure 50. Shows progressive roughening of a concrete pavement.

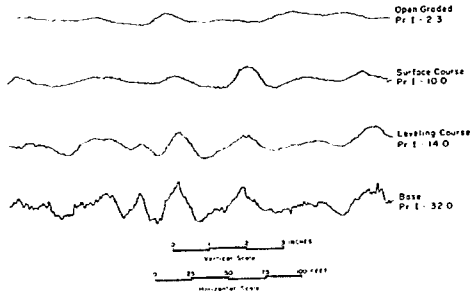


Figure 51. Improvement in riding qualities as successive layers of pavement are placed over a base.

total over 7 in. per mile or in porportion for shorter distances. A copy of the Division's current specifications is Appendix B.

Although the profile index appears to be reasonably satisfactory for use in specifications, it fails to differentiate between bumps or irregularities of different shape and of different length and this numerical expression does not adequately emphasize the annoyance in terms of riding qualities generated by badly faulted concrete pavement, for example. A somewhat more elaborate system of deriving a numerical index will be necessary if it becomes important to assign numbers to existing highways or airfields. It is to be doubted that there will ever be any adequate substitute for careful visual examination of the recorded profiles which convey information on the frequency, magnitude and shape of the inequalities, and it seems unlikely that all of these factors can be adequately identified by any simple numerical expression even though the numbers are produced by feeding the profile record into one of the modern electronic calculators or data reduction "mechanical brains."

To illustrate some of the relationships and information which may be derived from pavement surface profilograms, several examples are shown. Figure 48 represents

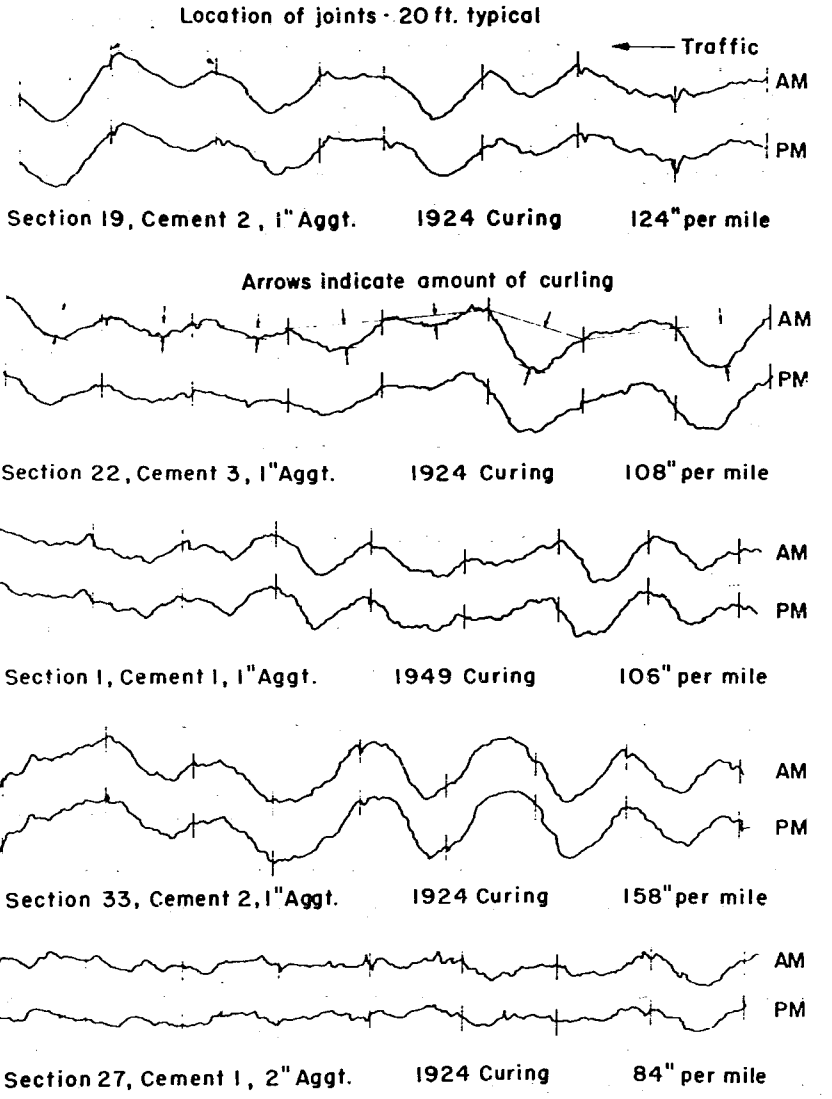


Figure 52.

three profiles taken of the same stretch of pavement plotted by different means. Profile (a) was developed from level notes with rod readings taken at 2½-ft intervals. The readings were adjusted to eliminate any effects of pavement grade or grade changes. Profile (b) is the same surface as recorded with a truck-mounted Profilometer (Figs 41, 42). Profile (c) is recorded with a hand-propelled model (Figs. 43, 44). Figure 48 and Figure 40 both show the relative accuracy of these profilograms compared to other methods of measurement. It will be obvious, of course, that the inequalities in the pavement are recorded with reference to the datum furnished by a 25-ft beam supported on multiple wheels at either end. To illustrate the effects of varying the length of the wheel

base. Figure 49 shows a stretch of concrete pavement with marked faulting at most of the joints as recorded by the 25-ft truck Profilograph. The succeeding profiles represent the same stretch of pavement recorded with hand-propelled units in which the length of wheelbase has been changed successively from 25 ft to 20 ft, 15 ft and 10 ft, respectively. It will be evident that whereas there is not much difference between a 20-ft and 25-ft lengtn, the 10-ft wheelbase does introduce some departures in the recorded profile. It will be noted, however, that the principal features are shown on all records, especially the magnitude of faulting at the joints. Figure 50 is included to show some of the changes in surface roughness which may develop in a pavement over a period of time. Here are shown three stages

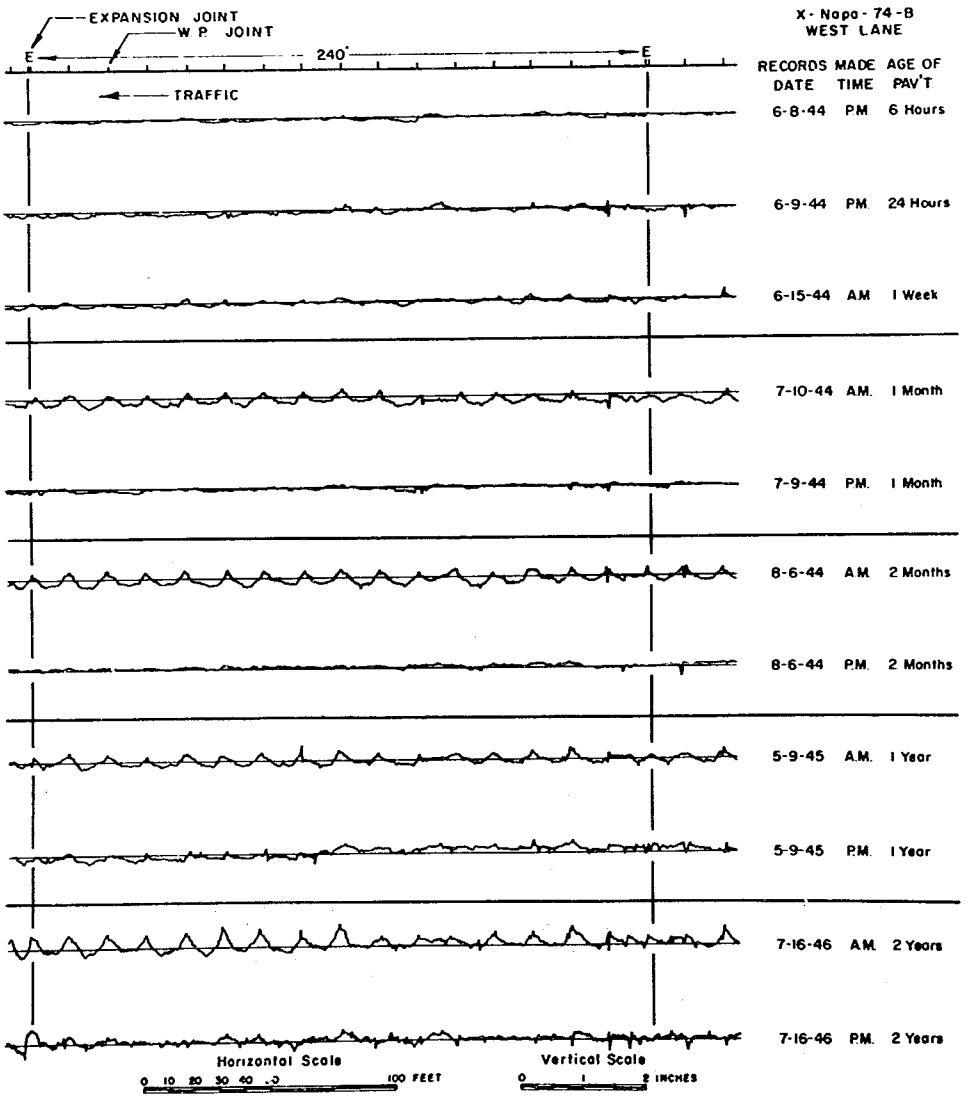


Figure 53. Profilograph records show daily cycle of curling as pavement increases in age.

in the life of a concrete pavement; namely, after 4 months, 1 yr and 3 yr. Figure 51 shows the improvement in riding qualities that develop from placing successive layers of construction. The lower graph is the surface of a cement-treated base. The lower graph is the surface of a cement-treated base. The second is the surface of the first layer or leveling course of asphaltic concrete. Third represents the second layer of dense-graded asphaltic mixture and the fourth or upper profile represents the finished surface of an open-graded wearing course. It will be observed that although most of the initial bumps were eliminated in the top course, nevertheless, the principal one which is shown is apparently the reflection of a bump in the base course.

One valuable attribute of the profilograph is the ability to detect incipient faulting. If the instrument is adjusted to give the proper sensitivity, it is possible to estimate faulting to the nearest 0.01 in. Periodic measurements make it possible to follow the increase in faulting if it occurs. Faulting can be detected on a profilogram before it is apparent from an inspection of the pavement. Profilograms provide a convenient method for recording the location of cracks and also for determining whether there is any relationship between the high or low points in the profile and the location of joints or cracks in the pavement. Profilograms have been used to measure the warping or curling of slabs as affected by variables such as the maximum size of aggregate or nature of the cement. For example, Figure 52 shows several profiles taken from the Topeka test road illustrating some of these effects. (Note that the numerical values for roughness represent a total range from high to low points and on this chart do not correspond to the profile index scale.) Profilograms have made it possible to visualize the wide variations in curling of concrete slabs that often develop between early morning and late afternoon (Fig. 53). They have also demonstrated that California pavement slabs as a rule are curled upward at the ends and it is only on warm afternoons that the slabs approach a condition of flatness. Very few examples have been found of pavements that assume a downward curl with the joints being low.

As also shown in Figure 53, profilograms furnish an invaluable means for recording the initial roughness of pavements as constructed and for following up and analyzing the changes which take place during the years following construction. It is axiomatic that if an engineer is to take steps to correct any deficiency he must understand the nature and cause of the thing he is trying to correct.

ACKNOWLEDGMENTS

The author wishes to acknowledge the contributions of many individuals who have furnished information and material used in this paper and to those who have assisted in the development and use of the profilograph units constructed in this state.

Among those who have furnished helpful information are: H. Petersen, Road Research Institute, Technical University, Hanover, Germany; R. Peltier, Director of Research and Tests, Laboratoire Central des Ponts et Chaussees, Paris, France; A. C. Whiffin, Head of Special Problems Section, Road Research Laboratory, Harmondsworth, Middlesex, England; J. D. Lindsay, Engineer of Materials, Illinois Division of Highways, Springfield; W. N. Carey, Jr., Chief Engineer for Research, and A. C. Benkelman, Flexible Pavement Research Engineer, AASHO Road Test, Ottawa, Illinois; and, Ralph A. Moyer, University of California, Berkeley.

Among those who have made contributions to the work in this State are: Bailey Tremper, Supervising Materials and Research Engineer; George Pomeroy and R. E. Wilhelmy, Chief Instrumentmakers; J. L. Beatty, Charles W. Clawson, and Douglas Howard who have operated the profilographs over many miles of road. J. E. Barton, who suggested the electrical circuits making possible the compensating device on the truck-mounted profilograph; Robert Field who worked out the mechanical and electrical circuits for this unit; and Don Spellman who developed the Profile Index.

REFERENCES

1. California Highways and Public Works, p.26 (Feb. 1937).
2. California Highways and Public Works, pp. 6-9 (March-April 1944).
3. Housel, W.S., and Stokstad, O.L., "Pavement Profile Surveys to Correlate Michigan Design Practice with Service Behavior." HRB Proc., 38:149-182 (1959).
4. Gregg, L.E., and Foy, W.S., "Triaxial Acceleration Analysis Applied to the Evaluation of Pavement Riding Qualities." Kentucky Department of Highways.

Appendix A

A Report on Measuring Pavement Roughness From Profilograms–March 8, 1957

During the spring and summer of 1956, profilograms of selected pavements in nine districts were recorded with the new truck-mounted profilograph. These pavements were selected by the districts in response to a request for examples of "smooth" and "rough riding" pavements, of both portland cement concrete and bituminous types. The profiles covered 60 mi in all, representing 17 sections of each type. Some sections were 2-lane and others 4-lane and because profiles were nearly always made of the two outer lanes, the lengths given are only about one-half the total profiles obtained. All profiles represent the outer wheel track, about 30 in. from the edge of the pavement, recorded in the direction of traffic. From this group, 15 sections of portland cement concrete pavement and 11 sections of bituminous pavement were selected for study.

At the time the profiles were made, the operators recorded their personal observations as to relative roughness when driving over the roadway in a car. Disagreement in terms of personal impressions was found with only a few of the district ratings. Such disagreement however, was only to be expected since the profilograph operators were making comparisons on a statewide basis, while the districts were presumably comparing roads within their own areas. It is believed that the observations made by the Headquarters profilograph operators should be more consistent on a statewide basis and for this reason they are used in the discussion that follows.

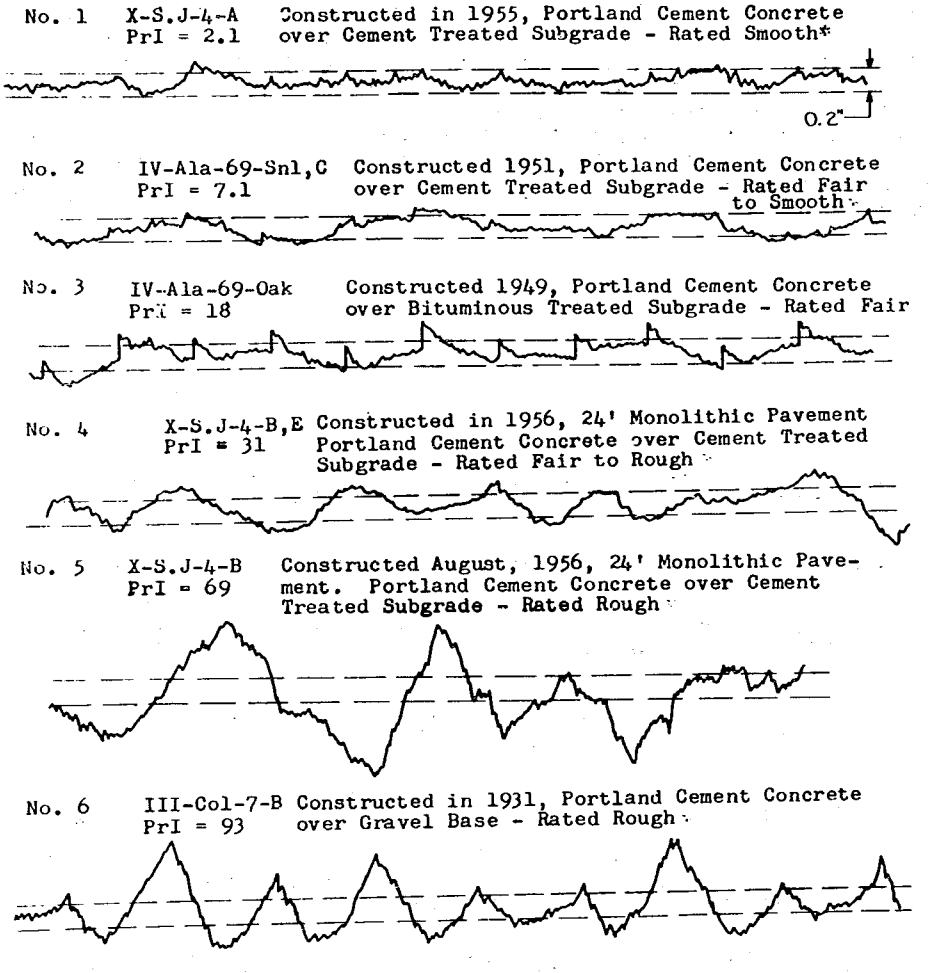
The classification as to riding comfort must necessarily be broad because in addition to the factor of personal reactions, speed and type of vehicle are other prominent variables. Nevertheless, among the pavements selected, examples were found that could be classified as distinctly either rough or smooth without much likelihood of disagreement. In the intermediate zone it is not unlikely that there would be some difference of opinion as to which pavements are smoother than others.

PROFILE ANALYSIS

Various expedients were tried seeking to convert the profilogram records to a numerical scale that would correlate with the jury classification. Some of the relationships developed are given in Table 1.

To speed up the evaluation and make use of the fact that rough roads showed short waves or "scallops" having ordinates over $\frac{3}{8}$-in., Don Spellman conceived the idea of evaluating roads on the basis of vertical deviations only after blanking out those portions of the profile showing only minor inequalities which apparently cause little discomfort to the passengers in a motor vehicle. A "blanking" band of 0.2 in. was arbitrarily selected and a summarization of the measurements of the peaks and low points exceeding that amount were made on several profiles by selecting 1-mi sections that were typical of the job.

It was found that a minimum of 1-mi of profile was needed to obtain a reasonably



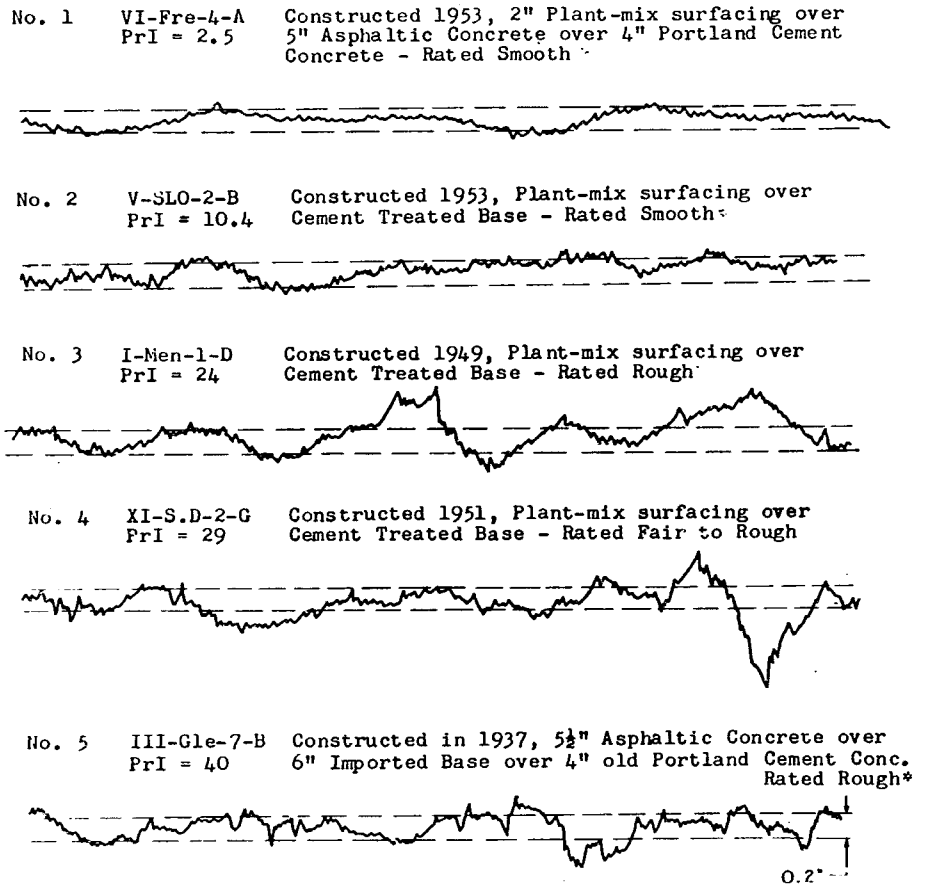
PrI = Profile Index = inches per mile in excess of 0.2"
Horizontal Scale: 1" = 25' Vertical Scale: 1" = 1"

*These ratings are drivers impression while riding in a light car at approximately 50 miles per hour.

Figure 54. Typical profiles of portland cement concrete pavements.

representative section of road. Even then some profiles exhibit wide differences in appearance from one end to the other and cannot be represented as "average." This is one distinct advantage of the profilogram record in that such varying areas can readily be seen on the graph and located on the road. The entire profile could be used in an analysis but of course this would lengthen the time required. The counts or total number of inches deviation obtained by this method varied from 2 in. to over 90 in. per mile. To avoid confusion with previously established use, the term "inches

per mile" in excess of 0.2 in. will be given another name, to indicate that these values are derived from the profile. This term "Profile Index (0.2 in.)", leaves room for other terms which may correlate better with "Riding Quality." A Profile Index (0.2 in.) of 2 in. to 10 in. on a portland cement concrete pavement appears to be typical of new pavements and old ones in good condition. Counts of 40 or over would be considered rough. Other methods yet to be devised may better describe roughness or may better express "riding qualities." Figure 54 is a series of profiles representing some of the varieties of roughness developed in concrete pavements. Figure 55 shows a similar range for asphaltic types.



PrI = Profile Index = inches per mile in excess of 0.2"
Horizontal Scale: 1" = 25' Vertical Scale: 1" = 1"

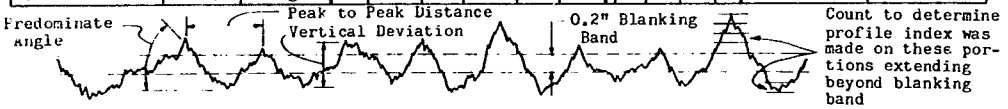
*These ratings are drivers impression while riding in a light car at approximately 50 miles per hour.

Figure 55. Typical profiles of bituminous-type pavements.

TABLE 1

PROFILE ANALYSIS SUMMARY SHEET - PCC PAVEMENTS

County, Route & Section	Length Miles	Classification	Size of Vertical Deviations (Log Scale) 1/4 3/8 ½ 3/4 1	Peak to Peak Distance 10' 20' 30' 40'	Predominate Angle, Degree	Profile Index (0.2")
VI-Fre-4-A	2.1	Smooth			Low	0.2
V-S.B-2-F	1.1	Smooth			5-15	3.8
IV-Ala-69-Berk	1.0	Smooth			Low	5.2
VIII-SBd-26-D	2.0	Smooth				
XI-S.D-199-Cor	2.2	Smooth			10-15	2.6
V-Ken-5B-I	1.2	Smooth			10-15	9.7
I-Hum-1-Etna	0.3	Fair			30-45	19.0
I-Men-1-Uki	0.5	Fair			45	13.8
VIII-Riv-19-B	1.0	Fair				9.7
IV-Ala-69-E	1.5	Fair			45-60	16.4
XI-S.D-2-S.D	0.7	Fair			45-60	21.9
IV-SCl-2-C	2.2	Rough			45-60	58.5
III-Gle-7-A	4.5	Rough			50-70	64.1
VI-Tul-4-B	2.2	Rough			45-60	44.7
V-Mon-2-Sal	0.7	Rough			30-60	



Appendix B

Standard Specifications State of California Department Of Public Works–January, 1960

Portland Cement Concrete Pavement

40-1.10 Final Finishing.—After the preliminary finishing has been completed, the edges of an initial pavement lane shall be rounded with an edging tool having a 0.04-ft radius. Transverse contact joints, expansion joints, and joints adjacent to an existing pavement shall be rounded with an edging tool having a 0.02-ft radius.

When a straightedge 10 ft long is laid on the finished pavement surface, and parallel with the centerline of the highway, the surface shall not vary more than 0.01 ft from the lower edge of the straightedge. Upon completion of the pavement, if any high points are in excess of 0.01 ft, they shall be removed by abrasive means.

In addition to the requirements in the preceding paragraph, the pavement surface shall be tested by a profilograph in accordance withthe methods in use by the Laboratory of the Division of Highways.

The profile index, as measured by the profilograph, for any $\frac{1}{10}$-mile section shall not exceed the rate of 7.0 in. per mile along any line parallel to the edge of the

pavement. Any deviations, which priduce a profile index rate of more than 7.0 in. per mile in any $\frac{1}{10}$-mile section shall be reduced by abrasive means to provide the required profile index. Such abrasive means shall not produce a polished pavement surface. If the daily average of the profile indexes, measured along lines approximately 2.5 ft from the edges of each traffic lane, before grinding, exceeds the rate of 7.0 in. per mile for any three consecutive working days, the paving operations shall be discontinued until suitable equipment and methods are provided by the contractor and approved by the engineer.

Servo-Seismic Method of Measuring Road Profile

ELSON B. SPANGLER and WILLIAM J. KELLY, Research Laboratories, General Motors Corporation, Warren, Michigan

• AT THE GENERAL MOTORS Research Laboratories a ride simulator is used for the study of ride characteristics of the many different General Motors' products. The input to this ride simulator is the road profile of actual roads whose measurements have been stored on magnetic tape. This paper is about the method that was developed for measuring this road profile.

Before starting on the discussion of the measuring, a broader understanding of the Research Laboratories' ride simulator program may be helpful. Figure 1 shows a view of the ride simulator installation. Using the road profile as an input, an analog computer produces voltages proportional to the calculated movements of the car body for any selected suspension characteristics. These voltages then are fed into electro-hydraulic valves and actuators which then produce car body movements of the desired magnitudes. With the actuators shown, the car body can be subjected to bounce, pitch, and roll. Intuitively, it can be seen that the road profile input from two tire tracks is required to obtain body roll.

With this brief background, it is apparent that accurate recording of the road profile of two tire tracks is a very important part of the ride simulator program. This paper describes the method used to measure road profile and techniques used to establish the accuracy of these measurements and attempts to correlate the frequency characteristics of the road profile signal with road roughness as experienced through a car suspension.

At the beginning of the ride simulator program, it was realized that it was necessary to measure the profile of many miles of the country's roads. The results of the usual literature search paralleled F. N. Hveem's report presented at the 39th Annual Meeting of the Highway Research Board. It soon became apparent that the methods developed by the highway people for measuring road roughness were not capable of measuring the road wave lengths required for the ride simulator program.

The methods used by the U. S. Air Force to measure runway roughness were also investigated. These included transiting and the use of a stationary projector that casts a highly collimated light beam onto an optical head moving along the runway. The optical head consisted of an array of photoelectric cells which sensed the light beam's vertical position. Both of these methods allowed the measurement of the long waves but did not have the speed and flexibility desired for continuous measurement of miles and miles of the country's roads.

It was soon concluded that a new method would have to be developed. The results of the first attempt are shown in Figure 2. This method consisted of a road following wheel held against the ground by a spring that used the towing vehicle as a reaction. An accelerometer mounted on the wheel produced an electrical signal that was integrated twice to obtain an electrical signal representing the movement of the accelerometer and thus through the wheel a representation of the road profile. However, difficulty was experienced measuring the long waves. The inadequacy of this method can be attributed to the large maximum accelerations which required the use of a 30-g accelerometer and the resulting poor accelerometer signal to noise ratio for the subtle low-frequency long-wave operation; that is, the signal representing the long-wave displacement contained so much instrument noise that the road profile signal could not be separated. Considerable time was spent trying to develop this method but it was finally abandoned.

In effect, the double integration of the accelerometer signal was the measuring of accelerometer displacement with respect to an inertial reference. Using an inertial reference appeared desirable, and this concept was carried over to the second attack

55

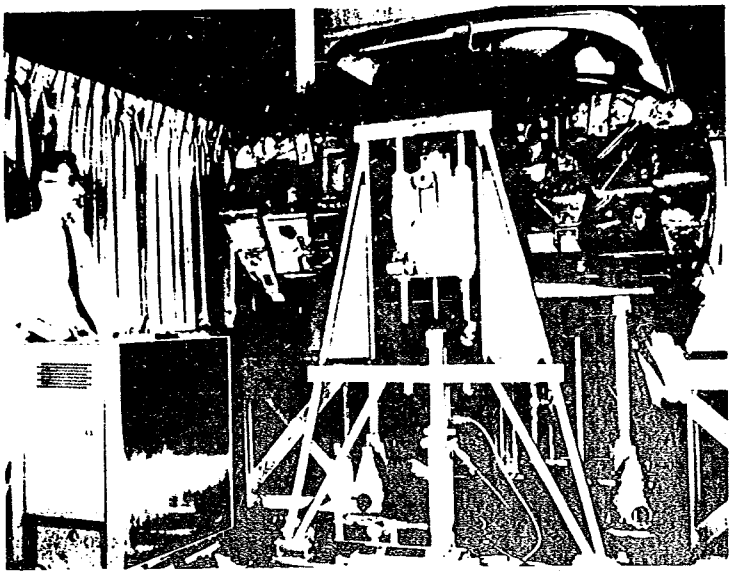


Figure 1. The General Motors vehicle ride simulator.

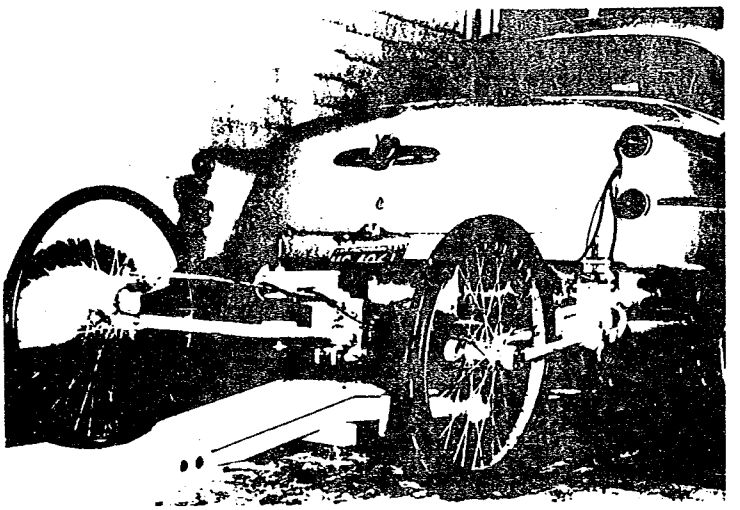


Figure 2. A device for measuring road profile using an accelerometer.

on the problem. In this approach it was decided to establish an inertial reference platform and measure the vertical displacement of the road following wheel with respect to this platform. This reference platform must, therefore, be held stationary with respect to the universe. To determine if the platform has moved, an accelerometer was placed on the platform. An acceleration signal from the accelerometer indicates the platform has moved and the double integration of the accelerometer signal shows how much. If this information can be used to move the platform physically back to its

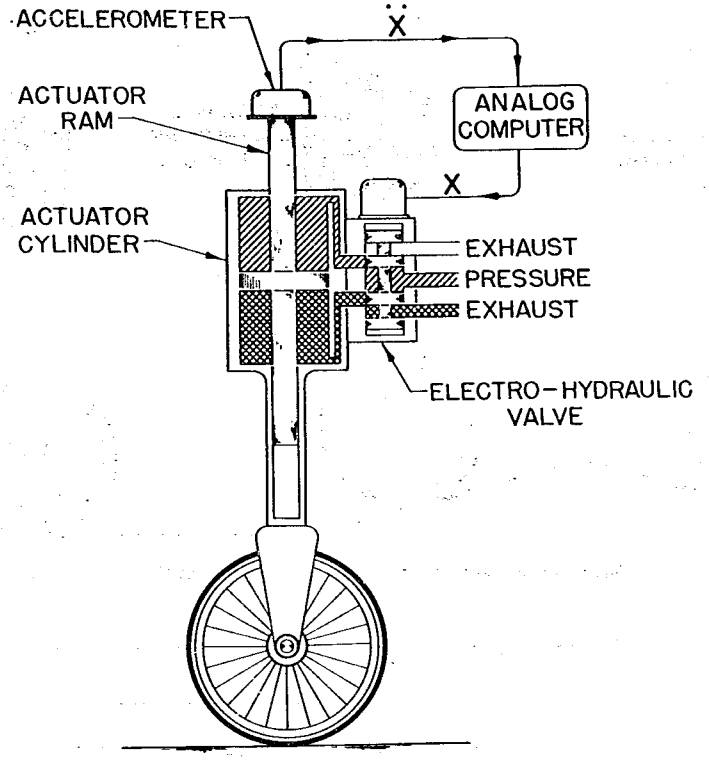


Figure 3. Schematic of Servo-Seismic road profile recording device.

original location, the inertial reference platform has been established. This platform positioning was obtained by use of an electrohydraulic valve and hydraulic actuator which produce a movement of the actuator ram that is proportional to the electric voltage supplied to the valve. Figure 3 shows how these components were combined to accomplish this. The actuator ram with the accelerometer mounted on the end is the inertial reference platform. The analog computer integrates the accelerometer signal and feeds a signal proportional to the platform displacement to the electrohydraulic valve. The valve then causes an oil flow to the appropriate chamber in the actuator. However, this is an oversimplification of the system.

Figure 4 shows a sequence with the road profile measuring wheel going over a bump. As the wheel goes up the bump, the wheel, actuator and accelerometer are accelerated upward. This accelerometer signal is integrated twice, to determine the upward displacement of these components. This displacement signal is used to cause an oil flow in the electrohydraulic valve. The signal is scaled so that the oil flow into the top chamber of the actuator and exhausted oil out of the bottom chamber causes a relative movement of the actuator cylinder and ram exactly equal to the upward movement of the actuator cylinder, thus causing the ram to remain stationary. The road profile can be obtained by measuring the displacement of the actuator cylinder with respect to the ram. The oil ports in the valve are reversed when the wheel goes down the bump. Again, this is an oversimplification of the system, but it illustrates the principle.

Figure 5 is a simplified block diagram of the control system. The circles are summing junctions either mechanical or electrical, and the blocks represent the various components. The input to the system is the actual road profile, Y, as represented by the vertical movement of the wheel hub and actuator cylinder. The first summing junction is the mechanical relationship between the actuator cylinder and the actuator ram.

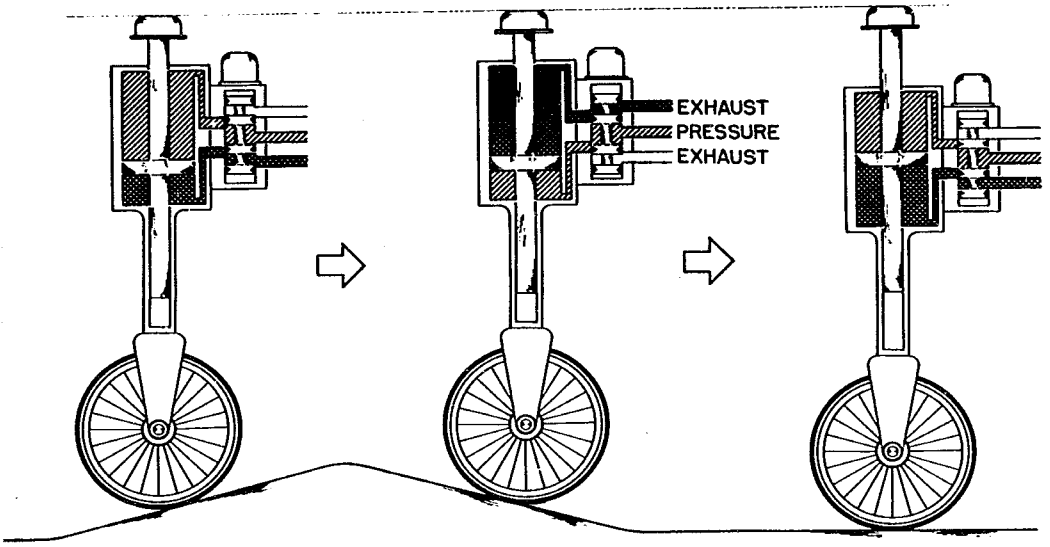


Figure 4. Sequence showing Servo-Seismic device passing over bump.

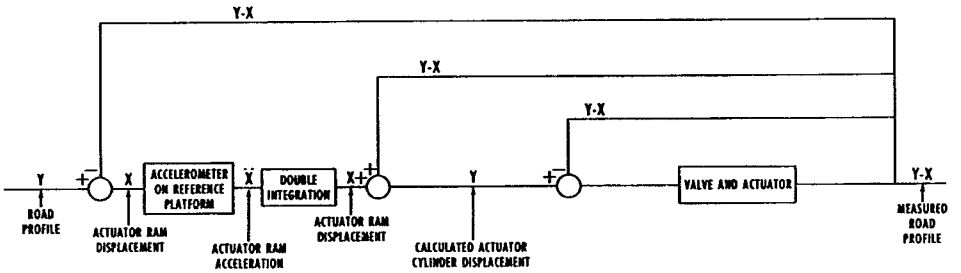


Figure 5. Simplified block diagram of Servo-Seismic system.

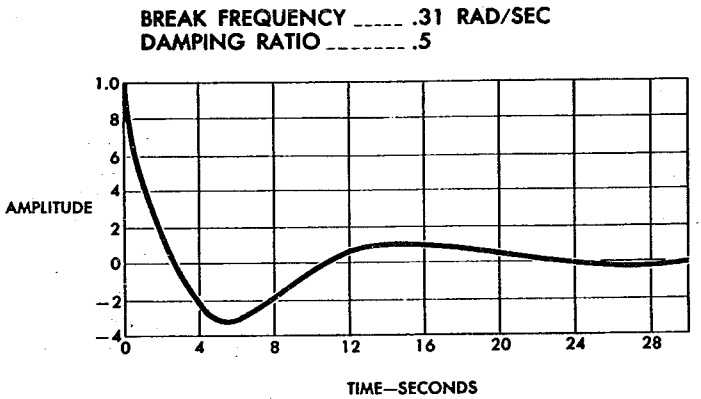


Figure 6. Transient response of third order filter to unit step input.

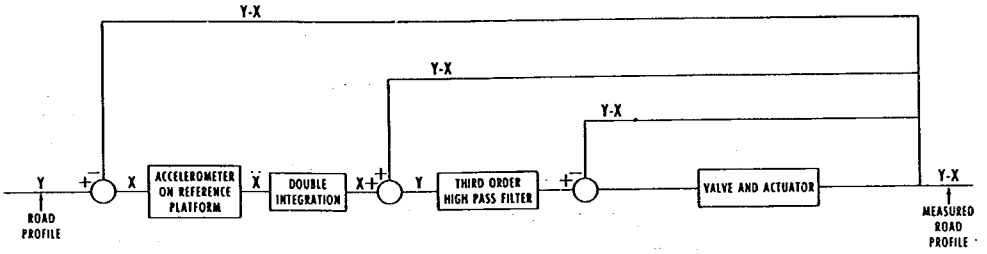


Figure 7. Block diagram of system showing addition of third order filter.

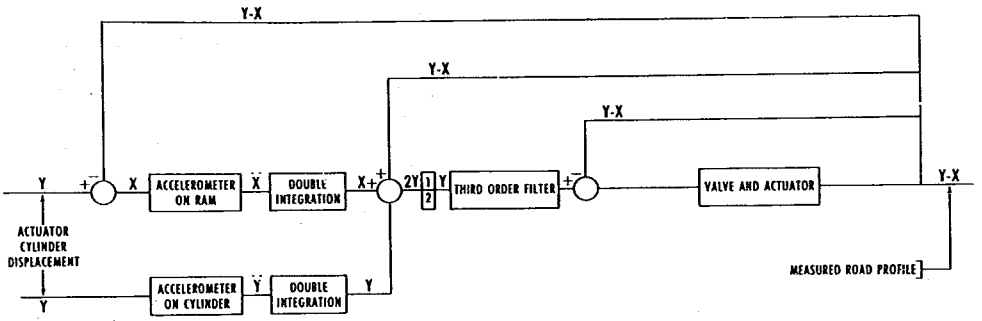


Figure 8. Block diagram of Figure 7 with parallel open loop added.

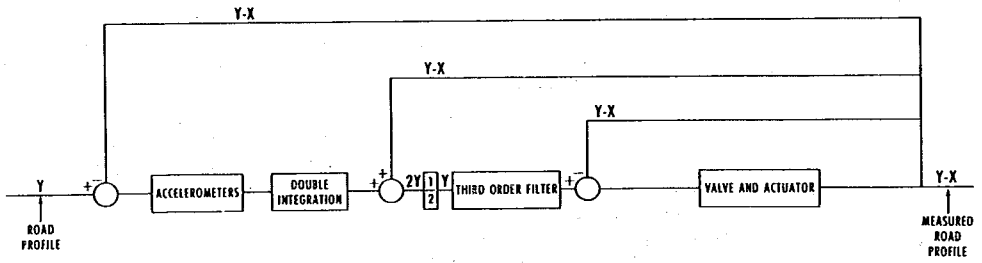


Figure 9. Simplified block diagram.

The movement of the ram, X, is the result of this summation. Because the displacement of X with respect to an inertial reference cannot be measured directly, an accelerometer is used to measure $\ddot{X}$ and a double integration performed to obtain X. The second summing junction is electrical and adds the measured absolute movement of the ram to the relative movement of the cylinder and ram, Y-X, to determine the movement of the cylinder. Using the valve and actuator as a position feedback servomechanism, an oil flow is caused in the actuator that will allow the actuator cylinder to move a displacement, Y, with respect to the actuator ram. If the measurement of X and resulting computer calculation of Y are correct, it can be seen that the reference platform returns to its original position. In fact, if the system has no time lags, the reference platform might never move.

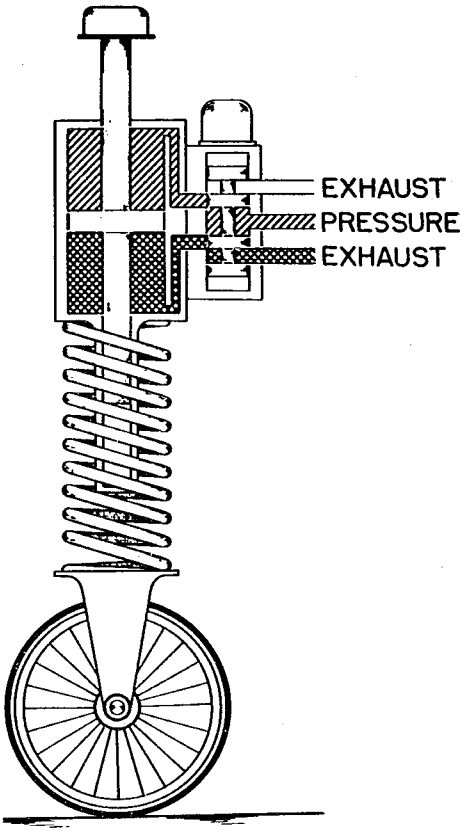


Figure 10. Servo-Seismic device incorporating spring between wheel and actuator.

It may be apparent by now that the reference platform could plow into the side of a hill or at any rate run out of actuator travel if the road amplitude were large. With the road profile trailer towed down the road at a fixed speed, it is necessary to hold the reference for a certain period of time to measure road waves of a certain length. Conversely, it is necessary to return the actuator ram to the center of the cylinder as a function of time. In effect, it is desired to filter the low frequency components or provide a "high-pass filter." Figure 6 shows the transient response of a third order filter to a step input. The 0.31 rad per sec break frequency and 0.5 damping ratio were used in some of the work presented later. Figure 7 is the same block diagram as shown before with the addition of this high-pass filter on the signal to the valve. This block diagram can be described as a closed-loop system because it strives to hold the reference platform stationary and has an error signal if it is unsuccessful. In parallel with this closed-loop system, there is also an open-loop system which converts the block diagram to a multiple input system. Figure 8 is the same block diagram as Figure 7 with the lower branch added. In this system in addition to forming Y as the result of measuring X, an accelerometer is mounted on the parts of the system which follow the road profile and obtain Y directly by integrating this signal. The signal after the second summing junction then is 2 Y and must be halved to maintain proper scaling. Various other proportions of the signal sources can be used as conditions require. This second branch or second source of Y was added to improve the low frequency characteristics of the system by allowing the measuring of an acceleration signal that was considerably larger than the accelerometer noise.

By making the assumption that the two accelerometers are identical, the block diagram can be further simplified as shown in Figure 9. By mounting an accelerometer on the actuator cylinder, large amplitude accelerations are again a problem. To reduce the acceleration level, a spring was inserted between the wheel and the actuator which, in effect, acted as a second order low pass filter. Figure 10 shows the final configuration with the road profile being measured as the relative movement of the wheel hub and actuator ram. Figure 11 shows the complete system including road profile trailer; towing truck; a 20-amplifier, transistorized analog computer; and various other components. The road profile trailer includes the road-following wheel, accelerometers, the electrohydraulic valve, hydraulic actuator, and the road-measuring potentiometers. Figure 12 shows a block diagram of the complete system with the transfer functions for the individual components shown as functions of the LaPlace operator, s. The input to the system is the road profile, now called W, and the output is the measured road profile, X-W. The quantity X-W can be obtained as the summation of two potentiometer signals Y-W and X-Y. It is obtained more directly by a potentiometer between the reference platform and wheel hub.

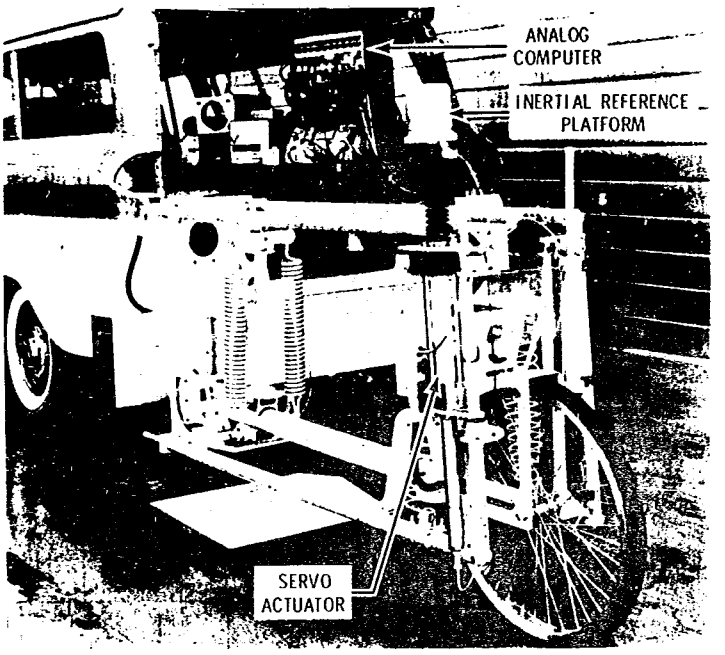


Figure 11. Photograph of complete Serve-Seismic road profiling system.

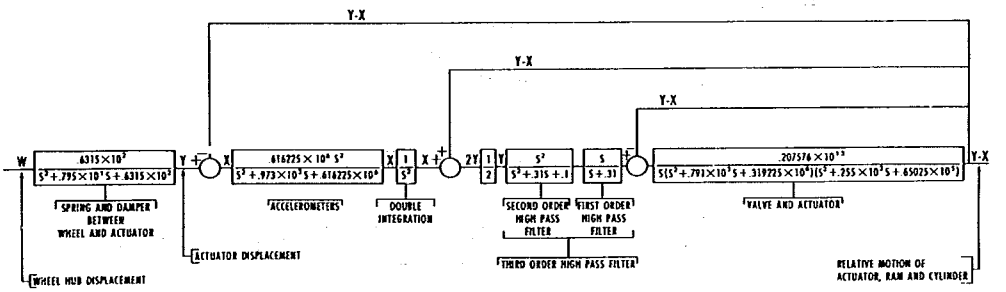


Figure 12. Block diagram showing transfer functions of system components.

A digital computer program was used to obtain the frequency response of the complete system. The frequency response in the form of a "Bode" plot is shown in Figure 13. Both amplitude and phase lag are plotted as a function of frequency. The amplitude is the ratio of the output of the system, X-W, to the input, W, expressed in decibels (db). The phase lag is the amount the output lags the input in degrees. The amplitude is 0 db or an amplitude ratio of 1 above the break frequency of 0.31 rad per sec. For the amplitude ratio to be 1, the reference platform movement, X, must approach 0. Figure 13 also shows the same system without the spring between the wheel hub and actuator cylinder for comparison. The addition of the spring produced a noticeable improvement in amplitude ratio and phase relationship at higher frequencies. At the break frequency of 0.31 rad per sec, the output leads the input by 135°. At 10 rad per sec and above, there is no appreciable phase difference for the system with the actuator

SYSTEM FREQUENCY RESPONSE

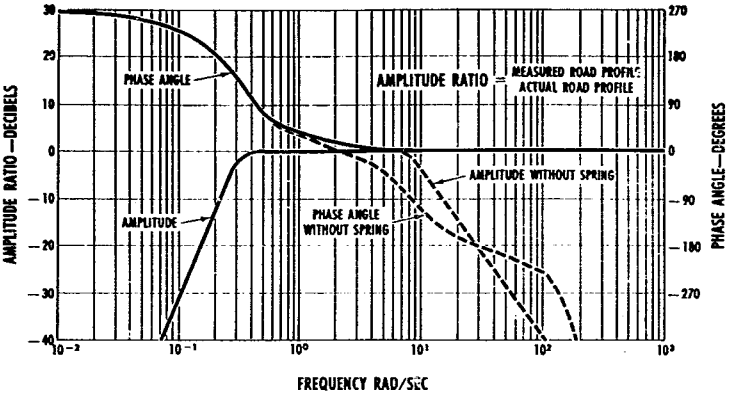


Figure 13. Frequency response of Servo-Seismic system.

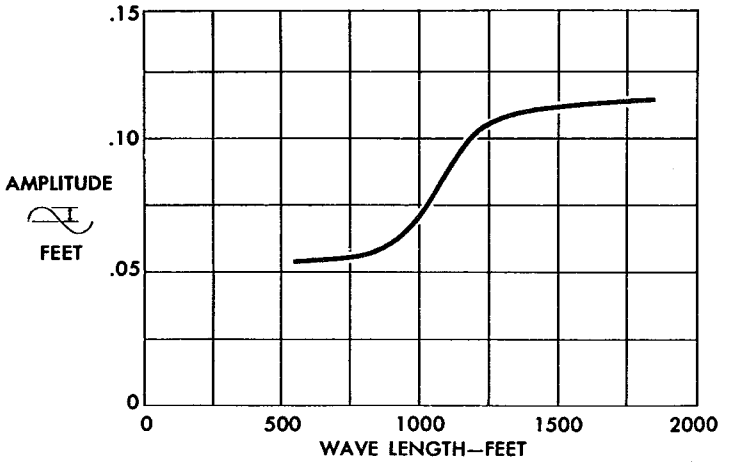


Figure 14. Sensitivity of vehicle passengers to sinusoidal road disturbances at 100 mph.

$$\frac{Y-X}{W} = \frac{.38914 \times 10^{10} S^3}{[S^2 + 7.95\,S + 63.15]\ [S^2 + 981.8\,S + 609674]\ [(S^2 + .31\,S + .1)(S + .31)]\ [S^2 + 796.2\,S + 276201]\ [(S^2 + 53.86\,S + 26325)(S + 289.1)]}$$

$$\frac{Y-X}{W} = \frac{KS^3}{\begin{array}{lllll} \text{[WHEEL SPRING]} & \text{[ACCELEROMETER]} & \text{[THIRD ORDER HIGH PASS FILTER]} & \text{[SERVO VALVE]} & \text{[HYDRAULIC ACTUATOR]} \\ \omega = 7.95 \text{ RAD/SEC} & \omega = 780.8 \text{ RAD/SEC} & \omega = .31 \text{ RAD/SEC} & \omega = 525.6 \text{ RAD/SEC} & \omega = 162.3 \text{ RAD/SEC} \\ \zeta = .50 & \zeta = .63 & \zeta = .50 & \zeta = .76 & \zeta = .17 \\ & & & & \omega = 289.1 \text{ RAD/SEC} \end{array}}$$

Figure 15. System transfer function.

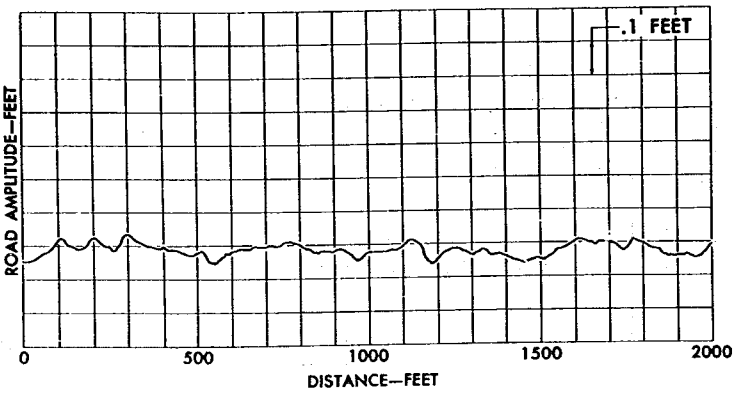


Figure 16. North-South Straightaway, G.M. Milford Proving Ground, Servo-Seismic method.

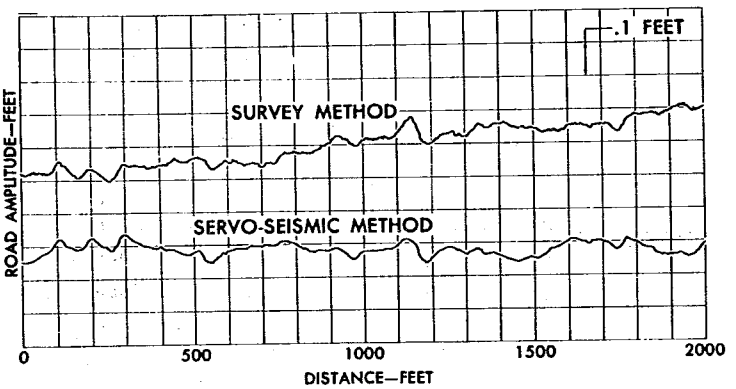


Figure 17. North-South Straightaway, G.M. Milford Proving Ground.

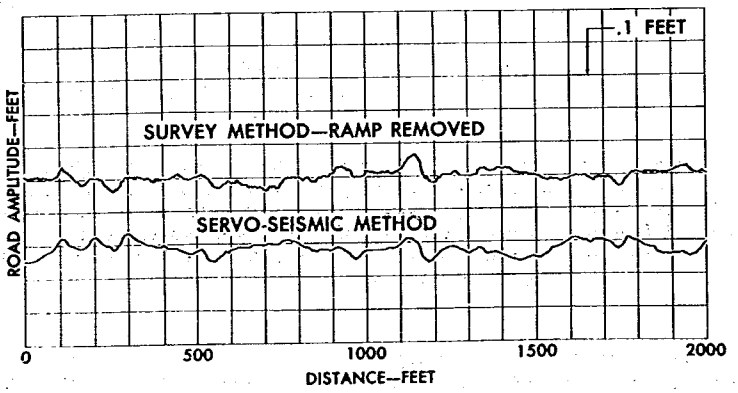


Figure 18. North-South Straightaway, G.M. Proving Ground.

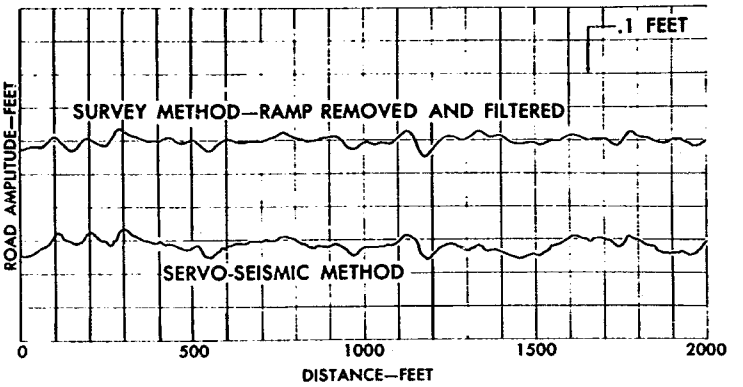


Figure 19. North-South Straightaway, G.M. Proving Ground.

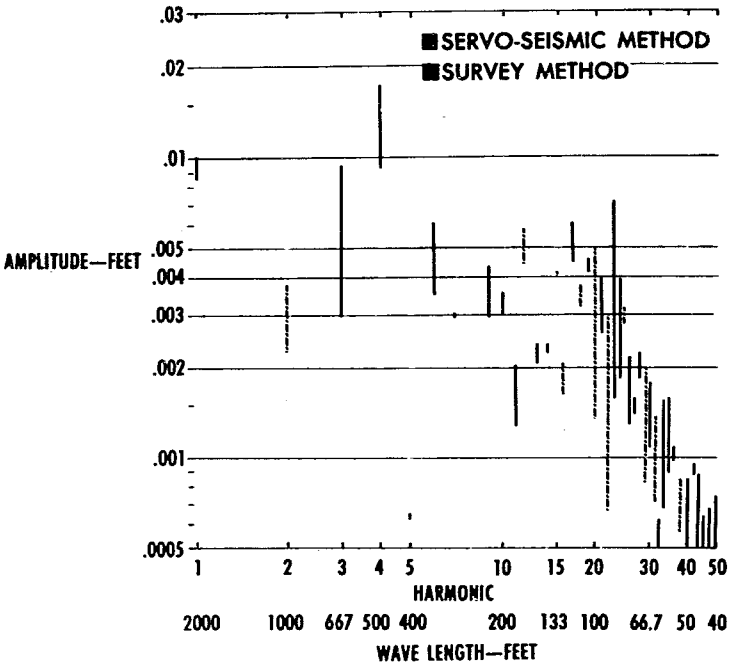


Figure 20. Harmonic analysis, 2,000-ft sample, North-South Straightaway. On this and figures following that compare harmonic analyses of two roads, the ends of each bar mark the amplitudes of the corresponding wave-length components of the two roads. Length of bar represents difference in amplitude. Shading indicates which road contains the larger amplitude. For example, at the 500-ft wave length, the "surveyed" road amplitude is 0.009 ft and the Servo-Seismic, 0.018 ft.

sprung. The effect of the low-frequency phase difference on the accuracy of the system was considered but was found to be insignificant. Figure 13 shows that the selection of the 0.31-rad per sec break frequency for the third order filter was one of the more important decisions.

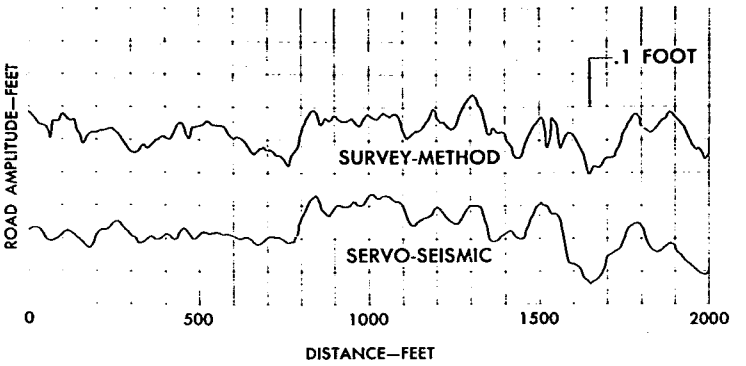


Figure 21. Military Straightaway, G.M. Milford Proving Ground.

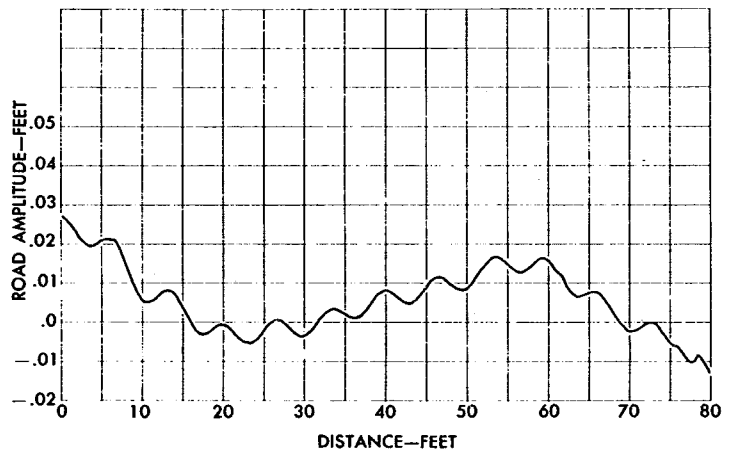


Figure 22. North-South Straightaway, G.M. Milford Proving Ground, with out-of-round wheel.

Some of the considerations that enter into the decision are maximum road wave length to be measured, the amount of travel available in the ram, the ability to hold the wheel on the road, and the ability of the human body to sense change in position as a function of time. In effect, the reference platform is held stationary for a certain period of time after which the ram returns to the center of the cylinder. As a result, the length of wave measured with respect to this reference platform is a function of the filter time constant and the velocity at which the wheel and reference platform are moved down the road. Now the problem of actuator ram travel is apparent. If the wave amplitude exceeds the actuator travel, the trailer velocity must be reduced or the filter break frequency increased. An actuator travel of ± 5 in., which is the maximum commercially available, is used on the trailer shown in Figure 11. The ability to hold the wheel on the ground and the wheel strength appear to be the limits on top trailer recording velocity. A wheel hold-down force of ten times the weight of the wheel assembly is currently being used. No difficulty is experienced in measuring most roads at 20 mph. The fourth consideration is the human body's ability to sense change in position as a function of time. This was determined subjectively using the ride simulator.

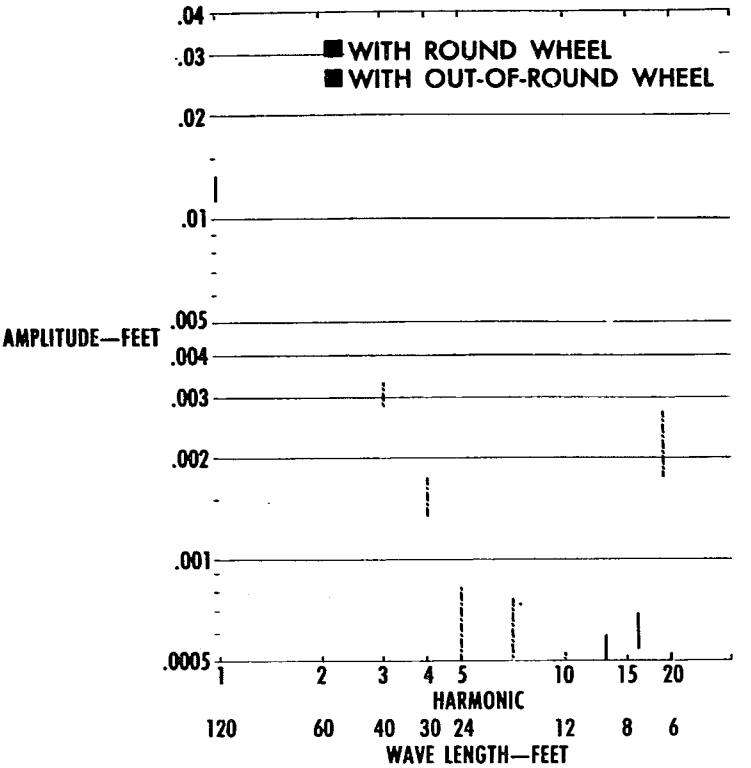


Figure 23. Harmonic analysis, 120-ft sample of North-South Straightaway. (See caption, Fig. 20).

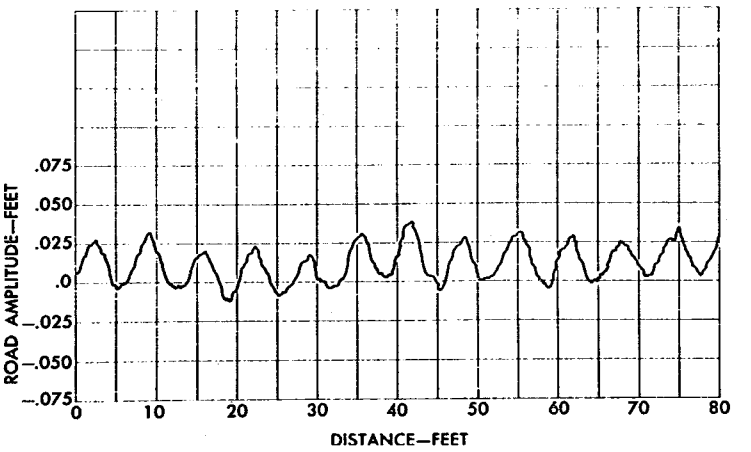


Figure 24. Sine Road, G.M. Milford Proving Ground; wave length—6 ft, wave amplitude—0.03 ft peak to peak.

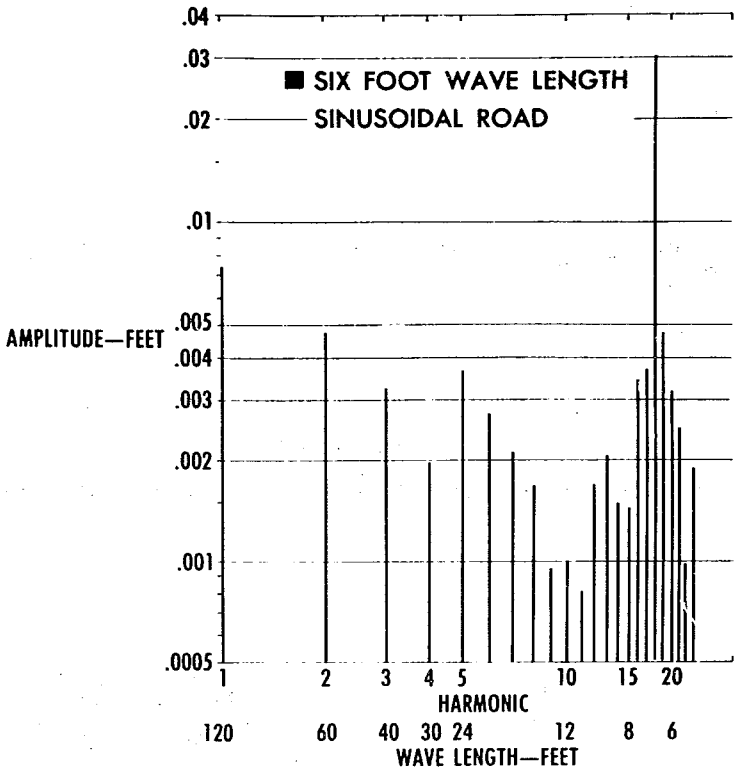


Figure 25. Harmonic analysis, 120-ft sample.

A passenger in the car body of the ride simulator was subjected to an input of sine waves to determine what wave amplitude could be perceived at an equivalent car speed of 100 mph. The test was run by holding wave frequency constant and increasing wave amplitude until the subject could tell he was moving. Superimposed on these low-frequency waves was a low-amplitude white noise which was held constant. Figure 14 shows the preliminary results of this study. This curve indicates that at car velocities of 100 mph, a 500-ft wave with an amplitude in excess of 0.05 ft is of importance in vehicle-ride studies. The subject becomes less conscious of wave amplitude as the wave length increases but is still aware of a wave amplitude in excess of 0.12 ft in 1,800-ft waves.

The requirement to measure wave lengths of this magnitude is certainly severe but it may be possible on roads designed for 100-mph traffic where wave amplitude is low. However, for the initial work, it appears that a recording velocity of 20 mph, break frequency of 0.62 and a damping ratio of 0.5 will allow the measurement of most roads with the actuator travel available. This will allow the measurement of wave lengths up to 300 ft which at 100-mph car velocity produce input frequencies to the car below the natural frequencies of all current road vehicle suspensions.

Now that this servo-mechanism network has been developed to measure road profiles, its stability must be considered. The transfer function for the entire closed loop is shown in Figure 15 with the denominator or characteristic equation factored. Because the characteristic equation has no positive roots, the system is stable. The damping ratio of the roots corresponding to the hydraulic actuator appears rather light, but has caused no stability problem. If necessary, actuator damping can be increased by

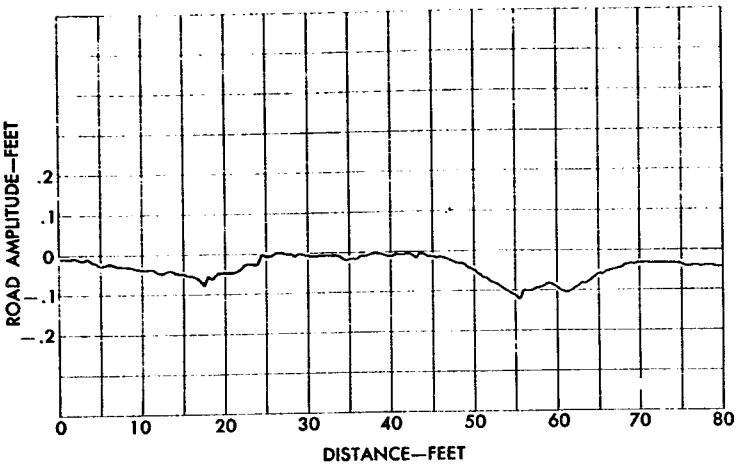


Figure 26. Military Straightaway, G.M. Milford Proving Ground.

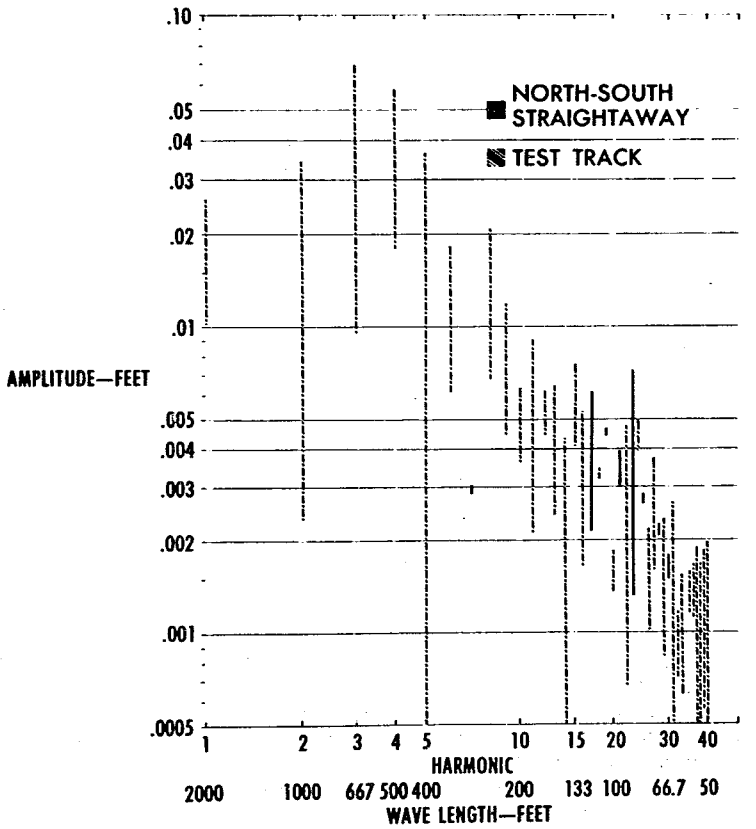


Figure 27. Harmonic analysis, 2,000-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

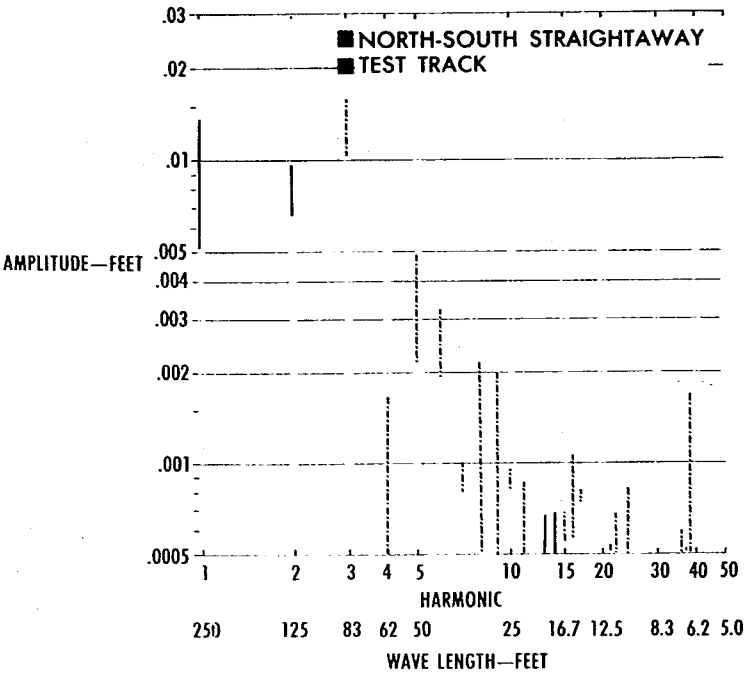


Figure 28. Harmonic analysis, 250-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

reducing the valve gain with little effect on the over-all system. The actual stability analysis was more complete than this and included root locus plots from a digital computer program.

In the over-all evaluation of the profiling device to determine its ability to capture true road profiles, the philosophy was adopted that no better test could be made than to compare the record made by the device directly with a profile of the same road as obtained by conventional surveying methods. This procedure would take into account extraneous effects that could otherwise be overlooked, such as the pitching and bouncing of the towing vehicle, electronic disturbances, bouncing of the contour-following wheel, and tilting and vibrating of the accelerometers. A satisfactory result over a large enough sample of roads would be a sufficient demonstration of the adequacy of the system.

Some difficulties existed, such as ensuring that the recorded path was the same as that surveyed, and accounting for the intentional filtering by the Servo-Seismic method. Variations in the profiles produced by these factors should not be attributed to system error.

Figures 16 through 19 show the results of a comparison test, in this case, a 2,000-ft stretch of the very smooth "North-South Straightaway" at the General Motors Proving Ground in Milford, Mich. Figure 16 shows the profile as recorded by the Servo-Seismic method. In Figure 17, the profile of the same stretch exactly as surveyed has been added to the first plot. Elevations were taken at 5-ft intervals. It is apparent that an over-all slope exists in the real road that is not picked up by the Servo-Seismic device. This was to be anticipated and Figure 18 shows a comparison of the two profiles after removing this "ramp" characteristic from the surveyed profile. In addition, wave components less than 40 ft in length have been eliminated. This facilitates examination of the longer wave components that were of concern in this instance. In Figure 19, the surveyed profile has been further subjected to a computer approximation of the third

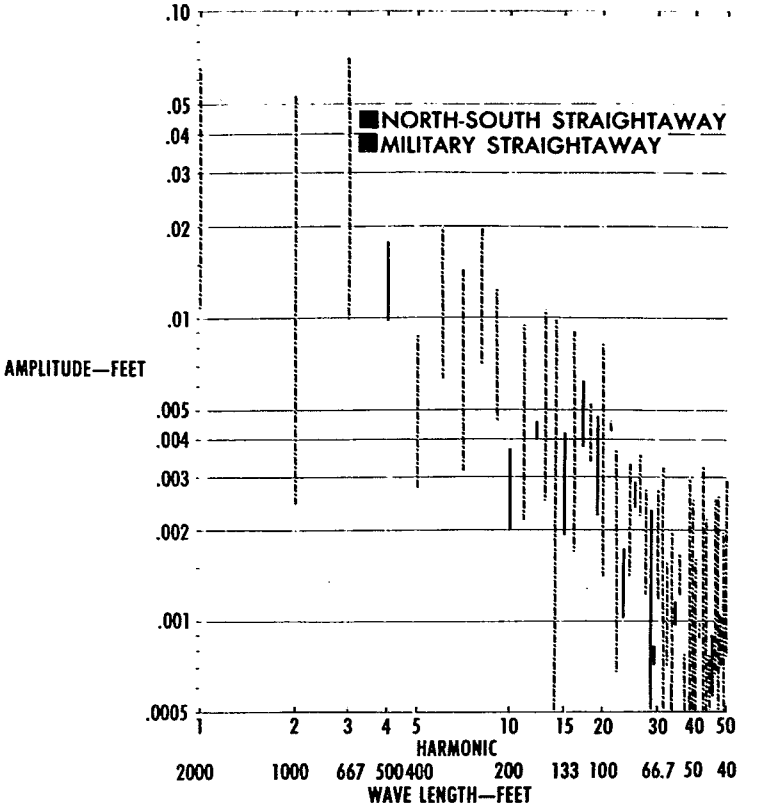


Figure 29. Harmonic analysis, 2,000-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

order filter of the Servo-Seismic system. This has the effect of diminishing the amplitude of road components longer than approximately 600 ft.

The agreement appears to be fairly good. The sensitivity of the Servo-Seismic to long waves of small amplitude has been demonstrated here. In this range, the response is due primarily to the servo-portion of the system. Harmonic analyses of the two 2,000-ft lengths are shown in Figure 20 and also compare favorably.

Figure 21 compares the recorded and surveyed profiles of a considerably rougher stretch of road than the North-South Straightaway, 2,000 ft of the Military Straightaway at the Proving Ground. Amplitudes of the irregularities range up to three times as great as in the previous, smooth road. Here again the agreement is seen to be fairly good. In this run, the vehicle and trailer were subjected to more roughness than in the first, providing an indication of the magnitude of these effects. However, on the rougher road, small variations in path followed can result in considerable differences in profiles. Differences of this type cannot be distinguished from errors produced by deficiencies of the profiling systems.

To obtain a surveyed profile that would include a reasonable representation of the sharper irregularities of the order of 2 to 20 ft in wave length, it would have been necessary to take readings at intervals of approximately $\frac{1}{10}$ of the shortest wave length, which for 2-ft waves would be 0.2 ft. Furthermore, amplitudes in this range tend to be smaller than in the longer wave lengths and more resolution is required than is readily available in conventional surveying procedure. Instead, to verify the performance of the Servo-Seismic system for these shorter wave lengths, a recording wheel

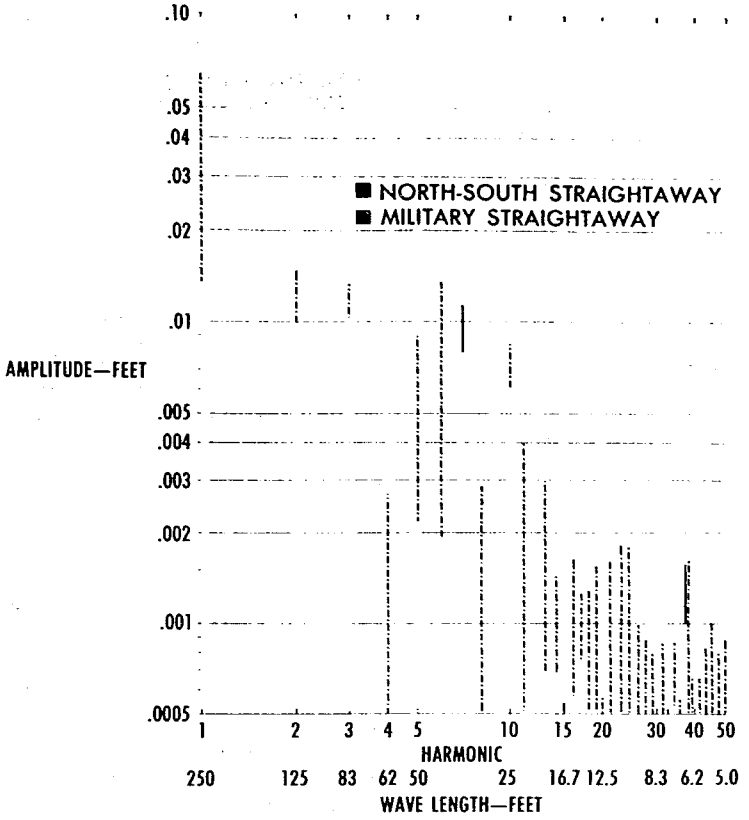


Figure 30. Harmonic analysis, 250-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

that was made deliberately out of round was installed. The resulting effect, a repeating wave approximately 6 ft long, equal to the wheel circumference, is clearly shown in Figure 22, a 120-ft section of the North-South Straightaway. A spike in amplitude also appears at the 6-ft wave point in the harmonic analysis of this section (Fig. 23). The installed out-of-roundness of the wheel totaled 0.120 in. but was modified during the run by the compression of the rubber tire. Lesser out-of-round effects can be noted even in runs with supposedly round wheels.

A second check of system performance for the shorter wave lengths was made by attempting to record the profile of the Proving Ground "Sine Road." The profile of this road consists of continuous sine waves 6 ft long and approximately ½ in. high. These waves are faithfully reproduced in the recorded profile, 120 ft of which is shown in Figure 24. Their presence is also clearly reflected in the harmonic analysis of this section (Fig. 25). An 80-ft section of the Military Straightaway to expanded scale in Figure 26 shows typical shorter wave length irregularities.

Figures 27 through 32 compare various types of road surfaces with the North-South Straightaway as a standard. In each case, harmonic analyses of 2,000- and 250-ft stretches are presented. Characteristic differences can be discerned. The general slope appears to be about the same on all plots and suggests that the average amplitude of the wave components falls off as the square of the wave length. This implies that the acceleration amplitude introduced by these waves as input to a traversing vehicle is constant for a particular road for all wave lengths. This has also been suggested in previous investigations.

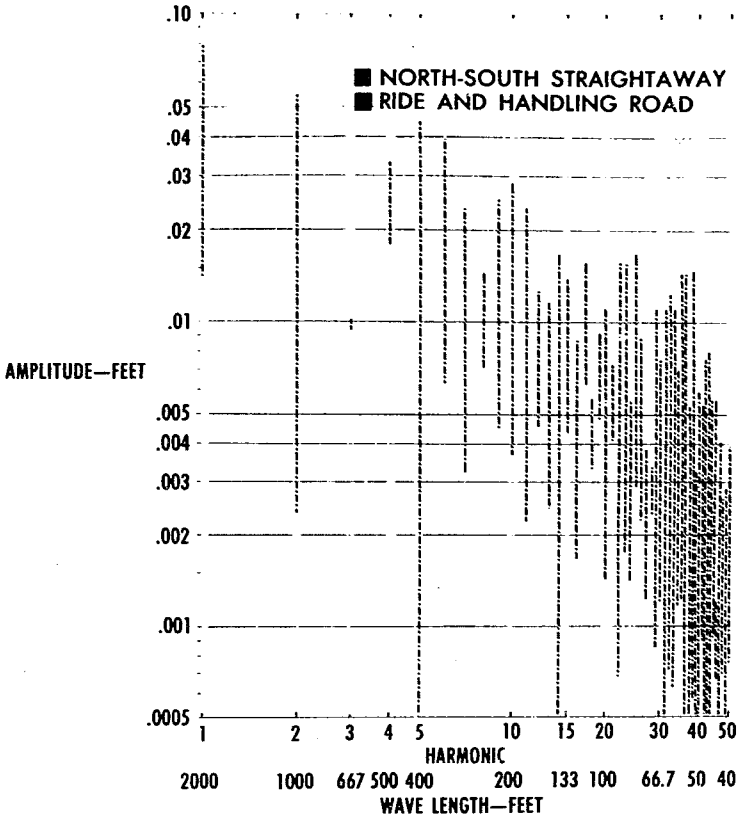


Figure 31. Harmonic analysis, 2,000-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

In general, amplitudes contained in the test track plot (Figs. 27 and 28) appear to be somewhat larger than those in the Military Straightaway (Figs. 29 and 30). Ride and Handling Road amplitudes (Figs. 31 and 32) are clearly greater than either. Of course, the North-South Straightaway amplitudes are the smallest of all. This order conforms to the general impression of relative riding quality gained by driving an ordinary passenger car over these roads. Every plot shows a small spike of amplitude at the 6-ft wave length point. This can probably be attributed to inaccuracies in the contour-following wheel as previously mentioned, but it is also possible that actual components present in the roads may be partially responsible. Refined techniques of analysis may isolate these and other differences more distinctly.

The authors feel that the Servo-Seismic system offers a quick, reasonably accurate method of obtaining road profile data in a form convenient to rapid computer analysis. Future plans include study to develop the correlation between the recorded profile and various properties of the road itself, particularly its "riding" qualities. Hopefully, statistical, frequency, or similar methods of analysis will yield an easily interpreted mathematical criterion by which roads may be quickly and objectively evaluated.

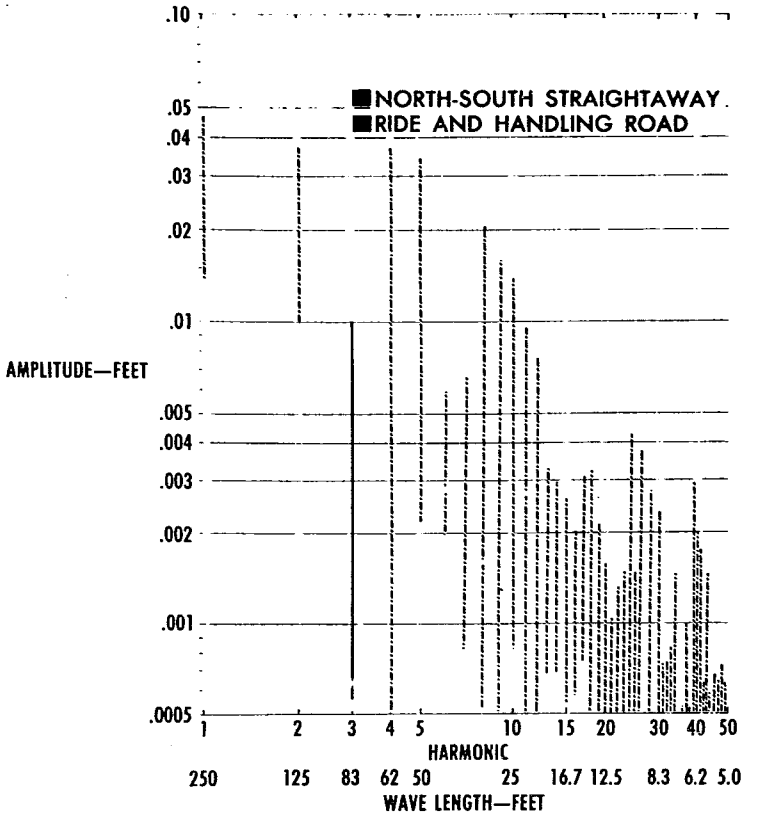


Figure 32. Harmonic analysis, 250-ft sample. (See caption, Fig. 20.)

U.D.C. 625. 73

路面プロフィルの研究*

A Study of Road Profile

森田　敬[1]　田代綾夫[2]
TAKASHI MORITA　AYAO TASHIRO

テストコースの非舗装路の路面状態を把握するために，路面測定機を製作し，測定された路面プロフィルから凹凸量の負荷係数として，PrQ，PNなる値を定義した．この値は，従来のパワースペクトル解析による結果とよい対応をもつていて，路面状態の特性値として代表できることが示されている．特長は測定，およびPrQ，PNの算出が容易なことである．

We made a road profilometer to grasp the road condition of unpaved road in a proving ground, and defined the values of PrQ and PN as the load coefficient of the road roughness from the measured road profile.

This paper shows that these values have a good correspondence to the result of conventional powerspectral analysis, and can be represented as a characteristic value of road condition.

By this study, it became easy to measure the road profile and to calculate the values of PrQ and PN.

1. まえがき

自動車の各種耐久実験のなかで，実車による悪路耐久実験は市場での負荷条件にもつとも近づけた方法として，開発段階では重要なものの一つである．この方法は，テストコース内に非舗装路（悪路）コースを設け，公道で遭偶する路面よりも路面凹凸の頻度を多くして，加速耐久実験を行なうのが一般的である．しかしながら，この路面はベルジアンのような定型パターンと異なつて，車両の走行，路面の乾湿などによつて経時変化をひきおこすために，この路面を走行する車両の負荷履歴が異なる．公道との負荷の対応について考えたり，また，車両の耐久信頼性に対する精度向上について考えるうえで，この負荷履歴を定量的に把握する必要が生じてきた．従来，この種の研究は不規則振動理論による時系列解析，パワスペクトル解析によつて多くの文献が発表されているが，測定解析にようする時間，その評価の方法などで，まだ実用的に使うには多くの問題が残されているように思われる．そこで，路面プロフィルの測定が容易で，かつ容易にその定量的な評価ができ，それが従来のパワースペクトル解析とある種の対応をもつような方法を考える必要がある．この目的のために，まず路面測定機を製作し，その測定された路面プロフィルから容易に路面状態を把握する方法を考案し，確立した．

* 昭和44年12月26日受理．昭和44年10月24日自動車技術会秋季学術講演会において発表．

1)・2)．日産自動車(株)第1実験部．（神奈川県横須賀市夏島町 1）

2. 路面測定機の製作

2.1. 路面測定機の原理

図1のように基準車輪と測定車輪によつて構成され，各基準車輪の高さは平均化されて，ビームの中心において基準高さとなり，この基準高さからの測定輪の上下変動を記録する．なお，基準車輪を無限に多くして，ランダムに配置すれば，記録されるプロフィルは，実際のプロフィルに近づくことはあきらかである．

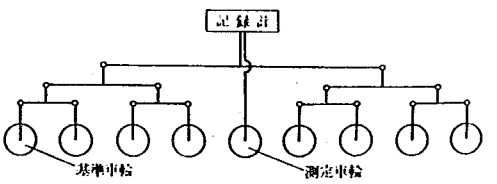


図1　路面測定機の原理

表 1　路面測定機の諸元

項目		諸元
全長		8,650 mm
全幅		1,235 mm
全高		1,550 mm
重量		610 kg
サスペンション	フロント	トーションバー方式（ダットサン・トラック用）
	リヤ	平行半楕円リーフスプリング式（ダットサン・トラック用）
測輪	個数	9 個
	中輪間隔	800 mm
	ベウンド・ストローク	150 mm
	リバウンド・ストローク	150 mm
記録紙送り速度		1/100, 1/200（走行距離比）
記録幅		1/2（実路面凹凸量比）
記録紙		1 mm 方眼紙　250 mm×40m

図 2　路面測定機の概観

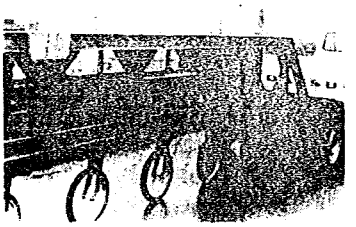


図 3　平均値検出用リンク

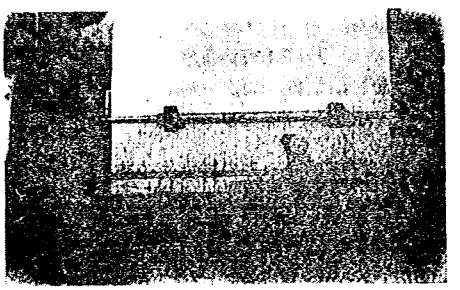


図 4　記録装置

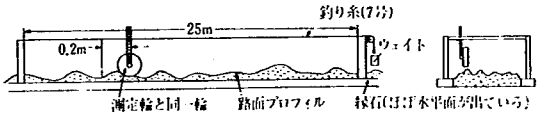
2.2. 試作された路面測定機

表 1，図 2～図 4 は試作された路面測定機の諸元および概要を示している．この測定機は自走はできず，他の車両に索引されるタイプであり，概略特徴はつぎの 2 点である．

（1）　極悪路走行に十分耐え，かつ精密が出るように走行車輪を含めたシャシ系と測定車輪を含めた演算リンク系を独立させたこと．

（2）　取扱いが容易で，測定ばらつきを少なくするために，すべてメカニカルでつくられていること．

図 2 は概観図で，前後のサスペンション系は当社のダットサントラックのものを流用している．9 個の車輪のうち中央の 1 個は測定車輪で，他の 8 個が平均値検出車



（付図）　手測定の方法（スパン=25 m，測定間隔=0.2 m で測定）

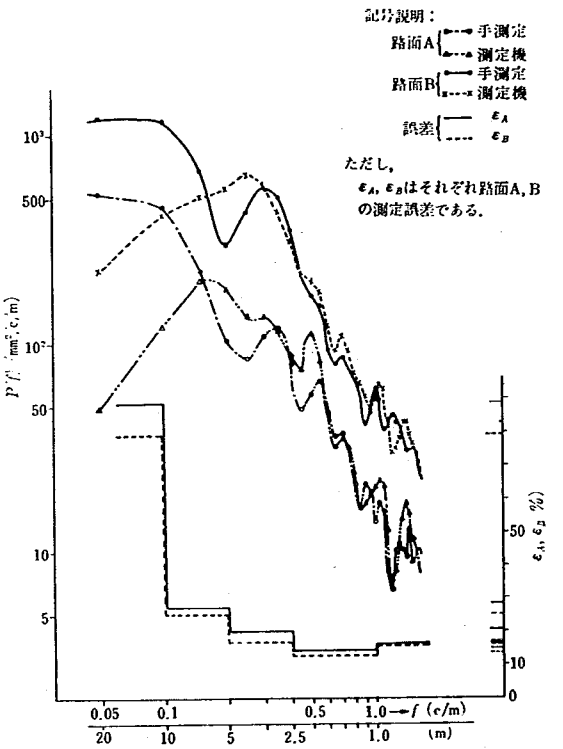


図 5　路面 A，B のパワスペクトル表示および各周波数成分におけるパワの測定誤差

輪である．図3のフレームの中央に見えるのが平均値検出用リンクでフレームとは前述のように独立している．図4は記録部と記録紙の送りは，後車輪と連動しており，測定機の走行距離に比例して，紙送りをするようになつている．中央の記録ペンは，中央の測定車輪と平均値検出用リンクの中央部との差に比例した量で記録紙上に記録するようになつている．この測定機の走行速度は，最大 5 km/h であり，路面プロフィルは連続的に記録することができる．索引車は当社のダットサントラックを使用している．

2.3. 路面測定機の測定精度

前述の原理からわかるように，基準車輪の車輪間隔，および個数が測定機の測定精度に直接関係していることはあきらかである．ここでは，二つの路面A, Bについて路面測定機でもとめたプロフィルと手測定（水平基準面からの凹凸量の測定であり，正しい路面プロフィルを測定していると考えてよい）（付図）で求めたプロフィルとを比較検討する．

（1） 周波数成分について　図5は比較検討に用いる二つの路面プロフィルのパワスペクトル表示，および，各周波数成分におけるパワの測定誤差を示している．ここで，各周波数成分におけるパワの測定誤差（ε）を次式で定義する．

$$\varepsilon=(\alpha-\beta)/\alpha\times 100\ (\%)$$

ただし，

α：手測定で求めた各周波数成分におけるパワ

β：路面測定機で求めた各周波数成分におけるパワ

10 m 以上の波長については，誤差が大きく（$\varepsilon\fallingdotseq 90\%$）使用にたえないが，10 m 以下の波長については，$\varepsilon\fallingdotseq 10$～30%であり，非舗装路測定機としてはほぼ満足できる結果である．また，全域にわたつて路面A，Bによる誤差のばらつき（$\varepsilon_i=(\varepsilon_A-\varepsilon_B)/\varepsilon_A\times 100(\%)$）は，20 %以下であり，測定機の測定誤差は路面によらず，ほぼ一様であるといえる．

（2） 凹凸量について　図6は，路面A，Bの凹凸量の分布を正規確率紙にプロットしたものである．凹凸量の小さい路面(A)は正規分布を示すが，凹凸量の大きい路面(B)は，凹の部分と凸の部分がそれぞれ異なつた正規分布を示し，確率紙上で折線を示すことが示される．（原因は路面凹凸の生成に関係があると考えられる．すなわち，路面が悪化する状況は，まず車両の走行により，路面に波状的な小穴が生じ，その小穴が路面が悪化するにしたがい大きくなり，へこみを生ずるようになる．いつぽう凸の部分は，車両の走行によりつぶされもしくは丸くされるために，さほど大きくならない．したがつて，凹の部分と凸の部分は分布の広がりが異なる）．つぎに，全パワで比較すると，路面Aについては測定誤差＝32%，路面Bについては測定誤差＝24%となり，路面間の誤差＝18.7% となる．正規確率紙上から読みとつた 1σ で比較すると，路面Aについては，測定誤差＝16.7%，路面Bについては，凸部の測定誤差＝17.5%，凹部の測定誤差＝16.8%がえられる．全パワの誤差が大きい原因は，10 m 以上の波長のパワの測定誤差によるものであり，本測定機では，さけられない誤差であるが，1σ の誤差が，両路面ともに 16～18% であり，非舗装路測定機としては，ほぼ満足できる結果である．

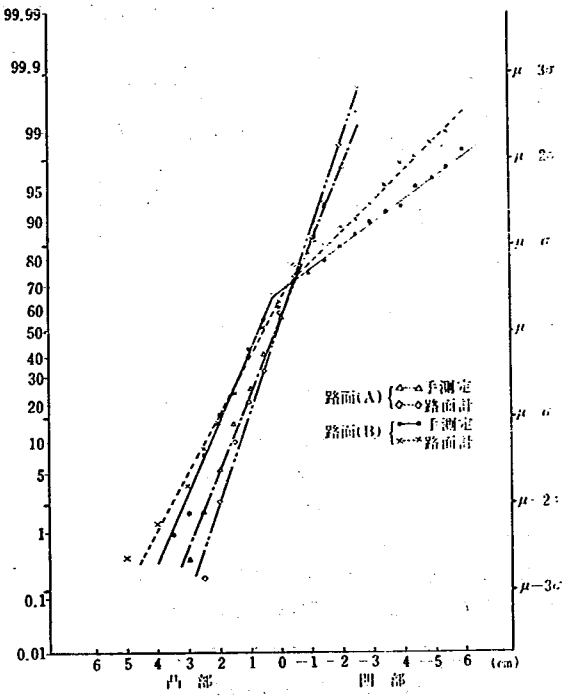


図6　路面凹凸量の分布（経過幅度分布を正規確率紙にプロットしたもの）

3. 路面プロフィルの特性値の表示方法

まえがきでも述べたように，路面プロフィルの状態を表現する方法として一般的には，パワスペクトル表示がよい方法であるが，解析に要する工数，経済性の面で，実用的につかうにはまだ問題があるようである．そこで

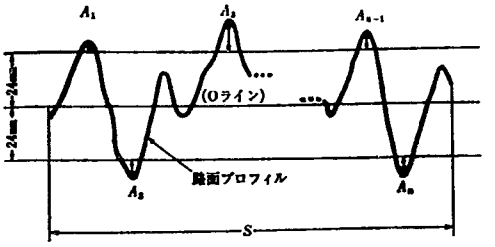


図 7　特性値の算出

路面プロフィルの状態を容易に表現する方法として，つぎの特性値 (PrQ, PN) を導入する．

$$P_rQ=\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}A_i \text{ [mm/m]},\quad PN=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{S} \text{ [回/m]}$$

ただし，S=測定区間の距離 [m]

A_i=バンド外側のピークの高さ [mm]

n=バンドの外側のピークの個数

である．Pr. Q. は Profile Quality の略で，路面凹凸の分布の広がりを与える量であり，P. N は Profile Number の略で，周波数成分の構成を与える量である．

4. テストコース内非舗装路の路面プロフィルの特性

図 8 はテストコース内非舗装路の路面プロフィルの経時変化を 6 か月間にわたつて，縦軸に Pr. Q, 横軸に PN をとりプロットしたものである．・点一つは非舗装路の任意の区間 100 m について，PrQ，PN を算出し，プロットしたものである．PrQ，PN と路面のラフネスとの間には，ほぼ直線的な相関があり，PrQ，PN が増加するにしたがつて路面のラフネスは大きくなる．

回帰直線の式は，

$$PrQ=35.1\times PN-0.48,\quad \sigma=1.22$$

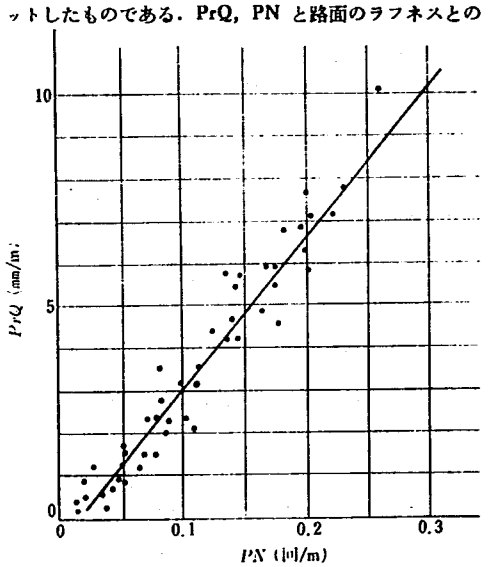


図 8　路面の経時変化

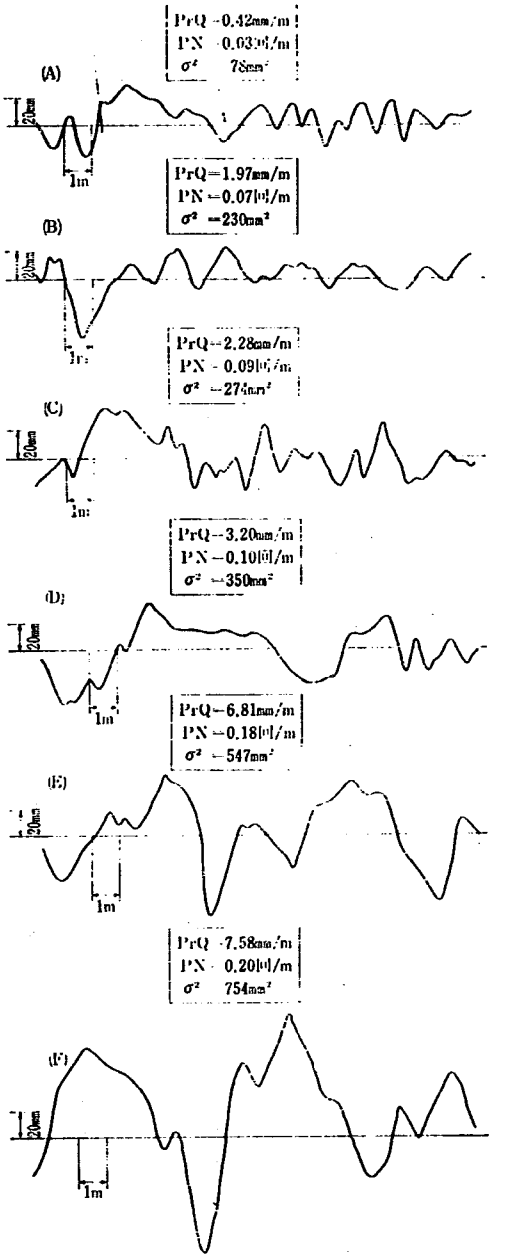
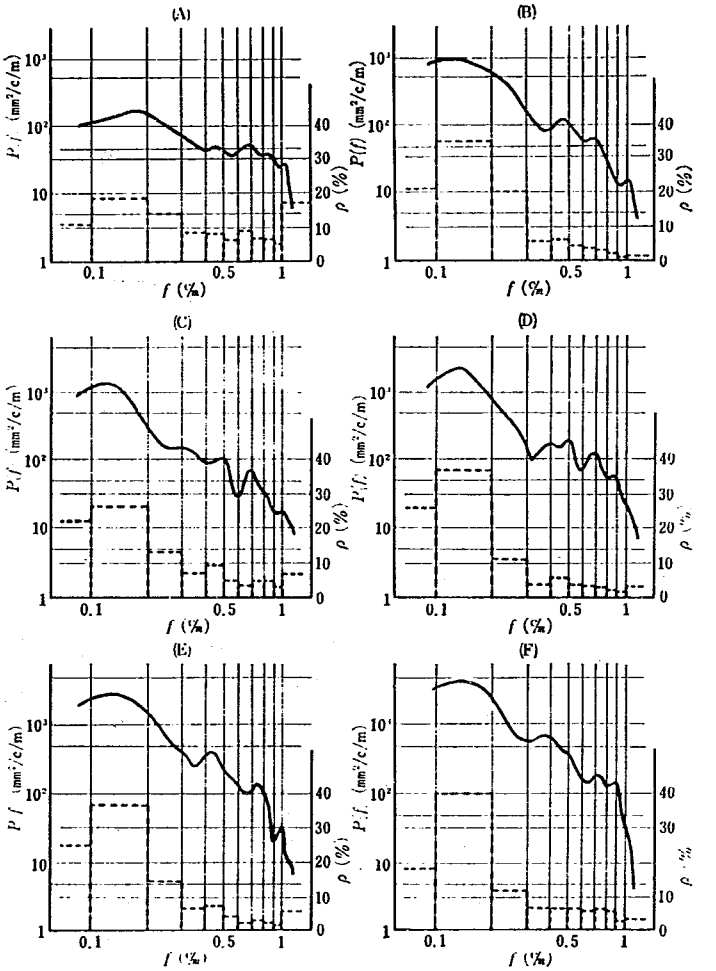


図 9　路面プロフィルの実例

図 10　各々の路面プロフィルのパワスペクトル表示 ▶



であり，ばらつきはかなり小さいといえる．実際には，経験的にPrQの大きさで路面は以下のように大別できる．

0＜PrQ＜2　良好な路面
2≦PrQ＜4　やや悪い路面
4≦PrQ＜6　悪い路面
6≦PrQ＜8　非常に悪い路面
8≦PrQ　きわめて悪い路面

ただし，良好な路面とは，一般公道では，比較的悪い未舗装路である．経験的に PrQ＝3～5 は自動車の部品によつて，それぞれ異なるが，概略一般公道の 5～10 倍である．一般的にいつて，非舗装路は比較的規則的に変化し，修理せずに放置しておくと路面は回帰直線にそつてちくじ悪化してゆく．その変化の様子を図9(A)～(F)，に具体的に示す．良好な路面は自動車のピッチングなどによりこきざみな波長の短い凹凸（車両のばね下固有振動数にしたがつていると考えられる）を形成し，いわゆるせんたく板状の道路となる（図9(A)，(B)）．路面の湿気，種々の車両の走行などによつて，凹凸はさらに大きくなり，隣接する凹凸が重なり，さらに大きな凹凸を形成して波長の大きな波状路となる．ただし，乾湿の状況，車両の走行量などによりこの変化の速度が早いか遅いかの違いがあるが，変化のパターンは同じであり，前述の回帰直線にそつて変化する．

5. 路面プロフィルの特性値とパワスペクトル表示との対応

図9(A)～(F)の各路面について，パワスペクトル表示および各周波数成分のパワの百分率を出すと，図10(A)～(F)となる．悪路コースの路面のパワスペクトルのタイプは大きくわけて，以下の三つのタイプにわかれる．すなわち，良好な路面では周波数成分に顕著なピークがなく，パワは全体に広がつている．このような路面のタイプをⅠとする．しかし，路面が悪化してくると 3～6 m 位の波長の成分のパワがしだいに増大している．このような路面のタイプをⅡとする．さらに，悪

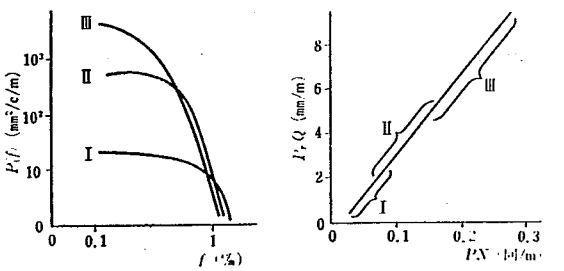
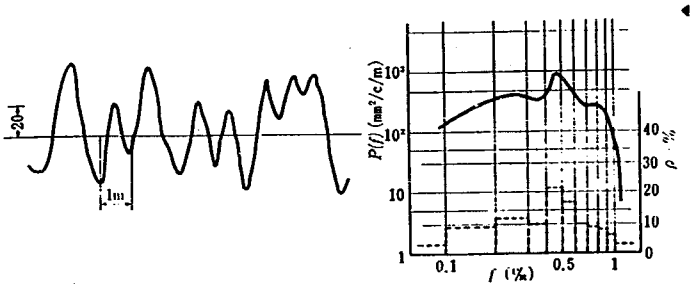


図 11　PrQ～PN とパワスペクトルの対応

78



◀ 図 12
ベルジャン路の路面プロフィルとパワスペクトル表示

化が進行すると 5～10m の波長の長い成分のパワが全体の40%以上をしめてくる．このような路面のタイプをⅢとする．以上を総合すると，PrQ～PN とパワスペクトルの対応は図11のようになつて，PrQ～PN とパワスペクトルがかなり良好な対応をもつており，PrQ～PN からパワスペクトルを推定することが可能である．つぎに，PN の値が PrQ に比べて大きい路面，すなわち，前述の回帰直線から離れた路面を考える．ベルジアン路はその顕著な例であり，PrQ，PN はそれぞれ 7.7 mm/m，0.32 回/m である．この路面プロフィルおよびパワスペクトルを図 12（A）～（B）に示す．この路面は 2～2.5m のパワがいちじるしく大きく，短い波長の振幅の大きな波の連続であることがわかる．PN の値が PrQ に比べて小さい路面については，適当なサンプルがないが，波長の長い波のパワが大きいことが推定される．すなわち，PrQ～PN の回帰直線からのずれにより，路面プロフィルの周波数成分の構成がどうなつているかを把握することができる．もちろん，非舗装路の路面については，回帰直線からずれることは少ないので，図11の関係により周波数成分の構成を把握できる．

6. むすび

路面測定機を製作して，非舗装路の路面プロフィルの状態を定量的に，かつ容易に把握できるようになつた．結言としてつぎの 3 点をあげる．

（1） 非舗装路の路面プロフィルは，図の回帰直線に沿つて変化し，その変化のパターンは一定である．

（2） 路面プロフィルの状態は，特性値（PrQ，PN）で定量的に把握でき，しかも特性値からパワスペクトルを推定することができる．

（3） 非舗装路の路面プロフィルのデータは，今後台上加振機の入力のデータとして利用可能である．

7. あとがき

実車による耐久実験は，その入力源が多種多彩であり，各々についてあらゆる角度から見きわめてゆく必要があるが，ここでは，その重要な入力源である路面プロフィルに着目して，その様子を定量的に把握し，実験業務への応用を計つた．おわりに，路面測定機の製作にあたつては東城計測機の山吉社長をはじめ社員の協力をいただき，また社内では，有益なご示唆を下さつた第一実験部権平部長，北村次長，および第三車両実験課大谷課長に謝意を表します．

参考文献

(1) 金谷重亮：「路面の凹凸に関する研究(1)，(2)」道路，昭和40年 2 月号，4 月号（日本道路協会）．

自動車における振動

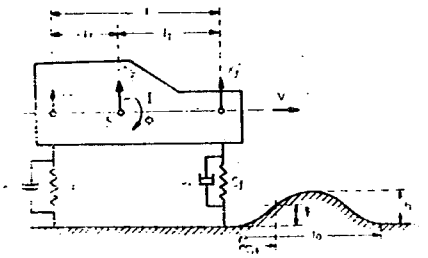
小林 明

第1章 序 説
1・1 自動車の動揺と緩衝
1・2 自動車の振動と乗心地
1・3 板ばね及びタイヤーの具備すべき特性
1・4 緩 衝 器
第2章 車体の自由振動
2・1 車体における振動
2・2 車体の自由振動

第3章 車体の強制振動

3・1 路面の凹凸から起る車体の振動

路面にあるただ1個の凸部または凹部を自動車が通過するときを眺めると，そのはずみに車体や車軸部が大きく揺れるがそれも次第に減衰して行くものである．そのときでも，車体がほとんど揺れないで車軸部だけが揺れるとすれば，乗客や荷物にはこの上もない乗心地である

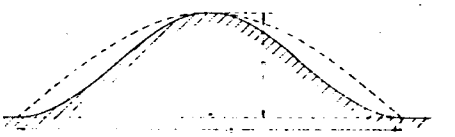


第3・1図 図表のような振動系を持った自動車がv^m/sなる速度でこの単一隆起部を通過する場合

ことになる．このような條件を満足するためには車体部に比較して車軸部の固有振動数が相当に小さいことや，車体の固有振動の週期よりもずつと短い時間でこの路面の凸部または凹部を自動車が通過することも望ましいのである．勿論緩衝器を取付けることによって一旦起った車体の振動を速やかに減衰させることも広く行われておる．

一方において土と小砂利とで固めたマカダム式の舗装道路では第1章で述べたような「たたき穴」の連続を見受けるが，それまでなくても，さざ波のような凹凸が規則正しく連続しておるものである．このような路面を走るときには，速度が遅いと車体の振動が強く現われるにも拘わらず，相当に速度を上げて通過すると，かえって振動が軽減されるものである．このような現象は自動車を走らせてもすぐに実験されるものである．

アメリカなどのようによく舗装された道路を快適な速度で走る場合の條件と日本のように小砂利で固めたような道路の方が多くて，それも修理の手がまわり兼ねておる現狀においては，緩衝器をつけたために乗心地がかえって悪くなることさえあり得るから設計には特に注意せねばならぬ．



第3・2図 路面の隆起部

3・2 單一凸部を通過するときの強制振動

第3・1図に示すような振動系を持った自動車がv^m/sなる速度でこの單一隆起部を通過する場合を考えて見よう．隆起部の水平方向の長さl_0と自動車の軸間距離lとの相対的な関係にもよるが，ξ_f及びξ_rを以てある瞬間における前後の板ばねの撓み量とし，c_f及びc_rをばね定数，k_f及びk_rを速度吸振係数，mを車体の質量，Iを車体の重心のまわりの慣性モーメントとすれば，この場合の運動式は次の形となる．即ち重心の垂直方向における変位をzとし，重心のまわりの角度変位をϕとするとき，慣性力$=m\ddot{z}$と吸振力$=(k_f+k_r)\dot{z}+(k_fl_f-k_rl_r)\dot{\phi}-(k_f\dot{\xi}_f+k_r\dot{\xi}_r)$とばねの復原力$=(c_f+c_r)z+(c_fl_f-c_rl_r)\phi-(c_f\xi_f+c_r\xi_r)$との3つの垂原力の総和が零に等しいという運動式ができる．更に車体の重心Sのまわりの慣性モーメント$=I\ddot{\phi}$と吸振モーメント$=(k_fl_f^2+k_rl_r^2)\dot{\phi}+(k_fl_f-k_rl_r)\dot{z}-(k_fl_f\dot{\xi}_f-k_rl_r\dot{\xi}_r)$と復元モーメント$=(c_fl_f^2+c_rl_r^2)\phi+(c_fl_f-c_rl_r)z-(c_fl_f\xi_f-c_rl_r\xi_r)$との3つのモーメントの総和が零に等しいという運動式とができる．そして$c_fl_f=c_rl_r$及び$k_fl_f=k_rl_r$なる條件が満足されるならば，zなる車体の上下動と，ϕなる車体の重心のまわりの角振動とは互に連成されることなくそれぞれ独立の振動をすることになる．

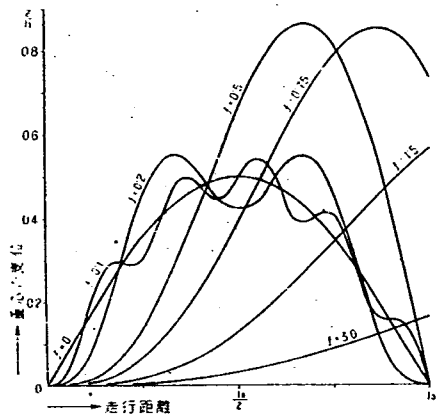
いま路面の隆起部の形を$\xi=\frac{h}{2}(1-\cos\omega t)$で表わすとすれば$\omega=2\pi\frac{v}{l_0}$であることになる．$l_0<l$である

場合には，この隆起部を通過する運動を，前車輪がこの隆起部に乗っておる期間として $0\leqq t\leqq\frac{l_0}{v}$ なる第1期と，前車輪が隆起部を乗り越えたが後車輪はまだこの隆起部に乗りかからない期間として $\frac{l_0}{v}\leqq t\leqq\frac{l}{v}$ る第2期と，後車輪がこの隆起部に乗り上げておる期間として $\frac{l}{v}\leqq t\leqq\frac{l+l_0}{v}$ なる第3期と．後車輪もこの隆起部を通り越してしまってから後の期間として $t\geqq\frac{l+l_0}{v}$ なる第4期とに分けて考えて行くべきである．第1期と第3期の運動に対しては

$$z=A\cos\omega t+B\sin\omega t+z_0e^{-n_1\omega_{01}t}\cdot\cos(\omega_1t-\gamma)$$

$$\phi=C\cos\omega t+D\sin\omega t+\phi_0e^{-n_2\omega_{02}t}\cdot\cos(\omega_2t-\varepsilon)$$

なる解が得られる．また第2期と第4期とに対しては，上の解における ωt の項即ち強制振動の項が出て来ないのである．勿論 A,B,C,D,z_0,ϕ_0 などは積分定数としてこれらの一般解に入ってきたものであるから，第1期



第3・3図　吸振作用のない場合 ($n=0$)

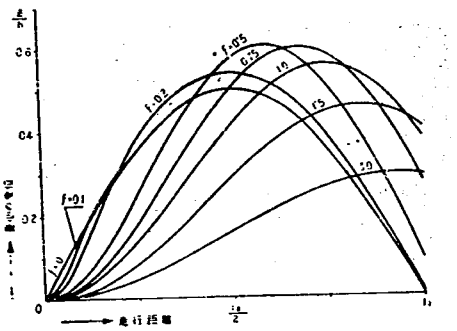
の最初における変位や速度から決定されたり，第1期と第2期との境界における運動の連続條件から決定されたりするものである．ここに $\omega_1=\sqrt{1-n_1^2}\omega_{01}$，

$\omega_2=\sqrt{1-n_2^2}\omega_{02}$, $\omega_{01}^2=\frac{c_f+c_r}{m}$, $\omega_{02}^2=\frac{c_fl_f^2+c_rl_r^2}{I}$,

$n_1=\frac{k_f+k_r}{2\omega_{01}\cdot m}$, $n_2=\frac{k_fl_f^2+k_rl_r^2}{2\omega_{02}\cdot I}$ を表わす．

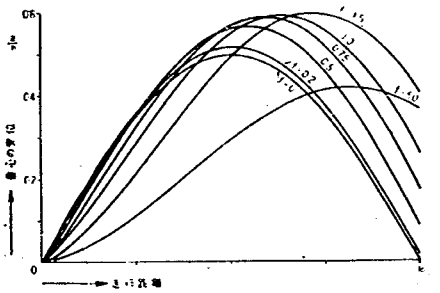
第3・2図に実線で示すように，$\xi=\frac{h}{2}(1-\cos\omega t)$ なる式で表わされる隆起部は水平路面との連結が極めてなだらかであるが，これを点線に示すように $\xi=h\sin\omega t$ なる式で表わして見ると，水平路面からこの隆起部へ乗りかかるときも，これを乗り越えて再び水平路面に入るときも多少の激突を伴うから車体の受ける衝撃も苦しいものがあると考えられる．この第2の場合について計算して見ると次のような結果を得た．

（イ）第1期の運動——第3・3図は $l_f=l_r$ としたとき，車体の重心が持ち上げられる分量 z と隆起部の一番

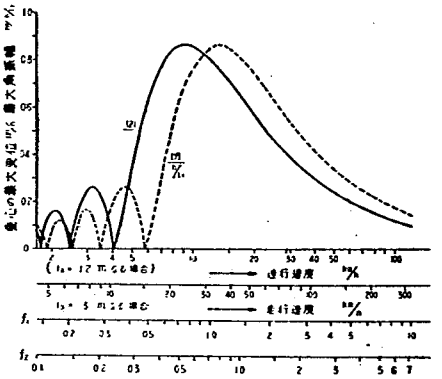


第3・4図　吸振作用のある場合 ($n=0.5$)

高い所の高さ h との比を垂直軸に取つて表わしてある．即ち自動車の前車輪が非常に低い速度で，この隆起部を通過すると，車体の重心はこの隆起部の高さの丁度半分の山を画いて行くはずである．これが $f=0$ の曲線である．それがいま少し速い速度でこの隆起部を通過すると，前車輪がこの隆起部へ差しかかっても，車体の慣性のために前ばねが縮まってくれるからしばらくの間車体は持ち上げられない．しかしその次の瞬間に縮められた担ばねが弾きかえす力を強く現わしてくるから車体の重心は下へはね上げられる．そしてばねの中立の位置よりも遙かに上の方へはね上げられて止まる．従ってその次の瞬間には再び車体は下の方へ落ちて行く．結局自動車は上下に振動しながら，この隆起部を乗り越えることになる．自動車全体としての上下方向の自然振動に対する円振動数は ω_{01} として上に述べたが，これと，自動車がこの隆起部を通過する時間 $t_0=l_0/v$ 秒 から算定される円振動数 $\omega=\pi/t_0$ との比 $f=\frac{\omega}{\omega_{01}}$ の値が 0·1, 0·2 というように小さい間は，即ち自動車の走行速度が非常に遅いか，あるいは担ばねの腰が非常に強くて ω_{01} が ω に比較して非常に大きい間は，$f=0.1$ や $f=0.2$ で示す曲線のように車体の重心が動くのである．f の値が更に大きくなると，前車軸が隆起部へ差しかかったときばねが大分弱いからか，あるいは自動車の速度が相当に大きいために，重心はなかなか持ち上げられないが，その代りばねは十分縮められてから弾き返えすことになる．従って第1番



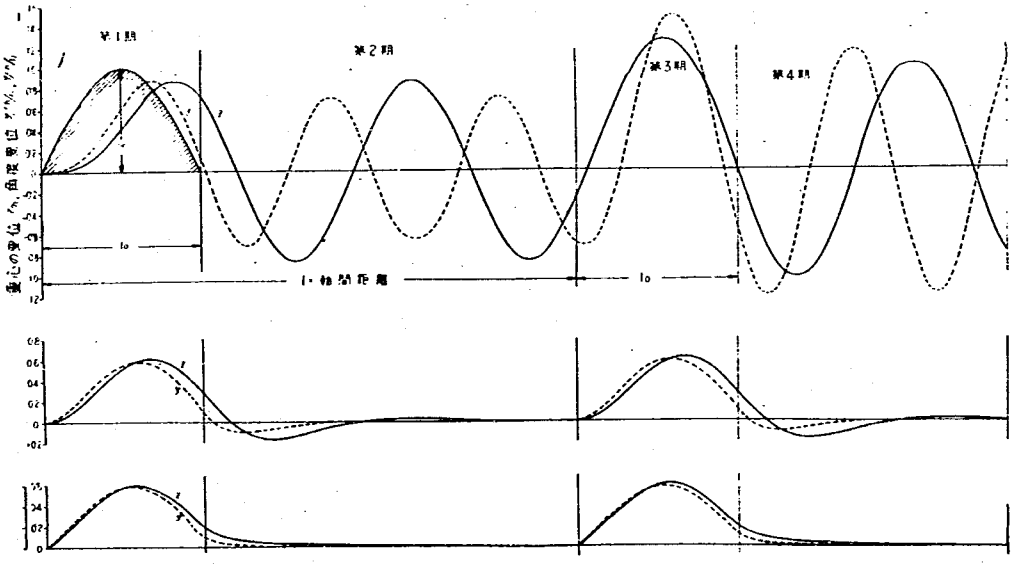
第3・5図　限界吸振の場合 ($n=1$)



第3・6図　車体の重心のまわりの角振動においても起り得ることを点線によつて示す

目のはね上りで重心は，靜かに隆起部を通過したときよりも 75% 以上も高く持ち上げられることもある．これは $f=0.5$ の曲線である．f の値が次第に大きくなると，車体が持ち上げられる分量が急に小さくなるが，これは担ばねがずっと弱くなつたことを意味する．その代り前ばねは隆起部を通り越したときに相当縮められた狀態になつておるから，次の平担路面に進入した後に，車体がおもむろに持ち上げられる形勢になる．このとき單働吸振器が作用してくれると，続いて車体が振動狀態に移ることなく，担ばねの中立の位置に戻り得ることになり，乘心地は滿点となる．近頃の乘用車の設計では，比較的弱い担ばねと單働吸振器とを組合わせるようになつておるのは，このような理由によるのである．このような構造が十分にその機能を発揮してくれるならば，比較的小さな隆起部を相当に速く通過することによって，車体の揺れを反って軽減し得るものである．第3・4図は吸振器が適度に利いた場合であって $n_1=0.5$ になつておる．これに対して第3・5図，は吸振器の作用が更に強くなって，車体の動揺が週期性を失うに至った限界吸振の場合，即ち $n_1=1$ なる場合を示し，第3・3図の場合に比較することによってその間の消息を明らかに知ることができるであろう．実際の自動車では n_1 や n_2 の値は 0.25～0.5 の間にあるようである．これ以上吸振作用が強いとかえって乘心地が悪くなるものである．

(2) 第2期の運動——第3・3図において，隆起部を通過して前車輪が次の水平路面に入る瞬間を眺めて見ると $f=0.1$ のときは車体の重心が路面にたたきつけられるように落ちてくるが，$f=0.2$ の場合は水平部へすらりと進入する姿勢になつておる，それが $f=0.5$ 位になると再びたたきつけられるように水平路に進入することがうかがわれる．これを理論的に考察して見ると第3・6図のように，第2期の運動において車体の上下動が最大になるのは $f_1=\frac{\omega}{\omega_{01}}=0.73$ のときであって，そのときの z の最大値と隆起部の高さ h との比は 1：0.85 位になり，靜かに乘り越えたときよりも 75% ほど余計に上下に動く結果になる．それより f_1 の値が小さくなってもこのような上下動の最大になる点が起るが，その変位の絶対量が余り大きくないから問題にする必要がない．同様のことが車体の重心のまわりの角振動においても起り得るのであって，その結果は第3・6図において点線で示す通りである．これは $f_2=\frac{\omega}{\omega_{02}}$ の値に対応して作ったグラフである．これらの曲線は第2期における3車体の



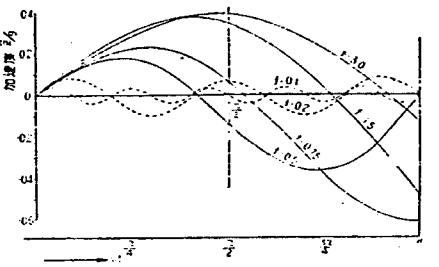
第3・7図　第3・6図の場合を計算した結果のグラフ

重心の上下振動の片振幅の最大値と隆起部の高さとの比 z/h の値が f_1 の値によって変化する有様や，車体の重心のまわりの角振動の最大片振動幅 $|\varphi|$ と，車が静かにこの隆起部を乗り越えたときに車体が受ける最大角変位 $h/\frac{l}{2}$ との比と f_2 の値との関係を示すものである．従ってばねが相当に弱いか，相当に速い速度でこの隆起部を通過するか，あるいは隆起部の水平長さ l_0 が車の速度に比較して余り大きくないときには，車体の動揺はほとんど現われてこないことがわかるであろう．これは f_1 や f_2 の値がずっと大きくなったところで曲線が次第に低くなって行っておることが容易に知られるのである．このような現象を実際に読者が実験せられるために，試みに普通の自動車について計算して見ると，隆起部の水平長さ l_0 が $1.2\,m$ のときには $9\,km/h$ 位の速度で通過したときに最大の振動を感ずるであろうし，$l_0=3\,m$ のときには $25\,km/h$ 位の速度で通過したときに最大の動揺を感ずるはずである．

(3) 第3期の運動——これは第2期に於て車体が動揺しながら後車輪が隆起部に乗りかかるのであるから，車体が沈みつつあるときに後車輪がこの隆起部に差しかかると，はげしい衝撃を受けることになるし，車体が浮き上がろうとする姿勢で差しかかったならば，この隆起部からの衝撃が極めて軽くなるはずである．

(4) 第4期の運動——第 1, 2, 3 期と振動が重ねられてきて後，後車輪も隆起部を通過し終るのであるから，その瞬間における車体の振動が上向きか下向きかによつて，第2期におけると同じような影響を受けるはずである．

(5) 計算例——第3・6図で説明したように，第2期における車体の振動は $f_1=0.728$ の時に最大となるから，この場合について計算した結果をグラフにすると第3・7図のようになる．これに対応する f_2 の値は 0.524 になっておる．一番上は $n_1=0$, $n_2=0$ なる場合，即ち吸振作用が全然起らない場合である．従って車輪が隆起部から衝撃を受けると，車体の振動は永久に持続することになる．車体の角振動が先ず起り，少し遅れて車体の重心が



第3・8図　第3・3図に示すような変位を受けて高さ $h=10\,cm$ なる隆起部を通過したときの変化を示す

上下動を始めるようになる有様がよくわかるであろう．中のグラフは $n_1=0.5$, $n_2=0.694$ の場合であり，車体の振動は誘起されても直ぐに減衰されることがわかる．下のグラフは更に吸振作用が強く $n_1=1$, $n_2=1$ となった場合を表わす．

以上の現象を乗心地とか，衝撃とかの見地から加速度の変化を眺めて見よう．$\omega_{01}=9$ rad/s とすれば，車体重心の上下動に対する週期が 1.43 秒になる．このような自動車が第3・3図に示すような変位を受けて高さ $h=10\,cm$ なる隆起部を通過したときの加速度は第3・8図に示すように変化を起す．即ち f の値の大きい所，即ち速い速度でこの隆起部を乗り越えると，重心の受ける上下変位は小さいが，加速度は大きくなって，乗客は強い慣性力を感ずることになる．但しこの図では加速度の大きさを重力の加速度 g の倍で表わしてある．従って変位ばかりでなく，同時に加速度も考え合せて行く必要を感ずるのである．同様に第3・7図の場合について加速度の変化を考えて見ると，吸振作用のない場合には，第1期で最大 $0.9\,g$，第2期で $0.7\,g$，第3期で $1.5\,g$，第4期で $1.2\,g$ 位になる．それが吸振器をつけると第1期で $0.3\,g$，第2期で $0.2\,g$ 位で済み乗心地はずっとよくなることがわかる．それが更に吸振力を強くして臨界吸振にすれば加速度は今少し小さく $0.25\,g$ 位に止めうることができるのである．〔未完〕（名古屋大学）

ターボプロップの4つの型の比較

現在のターボプロップは以下のように4つの形式がある．1) Basic turboprop engine 2) Reheat turboprop engine 3) Regenerative turboprop engine 4) Regenerative-plus-reheat turbobrengine

この構造は，1) は基本的なもので，流入口から入つた空氣は圧縮機を通り燃料と混ぜられ燃料室を経てタービンを廻し排氣孔より出る，2) は圧縮機より燃料室を経て第1タービンを廻わし，ついで再び燃料を加えて燃燒し第2タービンを廻わし排氣孔より出る．次の 3) の型は，1)とよく似ているが，圧縮機を通った空氣が燃料と混ざる前に排氣ガスの熱の利用により熱せられて，燃燒室に入る点が1)と異っている．これは，タービンに入る前適当な温度になるので燃料の消費が少くなる．最後の 4) の型は，2) と 3) とを組合せたもので，第2タービンを通った排氣ガスが，圧縮機からでる空氣を熱するようになっている．この型では，圧縮比が6から 42 の変化に対しタービンに入る温度を 2,000～2,500°Fに保ち高度は海面から 50,000 ft (15,200 m) 速度は，200 から600mphまでカバーできる．又この 4) の型では海面上で，最少燃料消費率は，2) の型より 2%，3) より 6%，1) より10% 少い．高度 30,000 ft (9,150 m) では，4)の型は，2) より 4%，3) より 5%，1) より 7% 少い．又この4) の型では，最少燃費のときの圧縮比は，海面上で 6，高度 30,000 ft で 12 で，1) 2) より低く，3) よりはやや高目である．

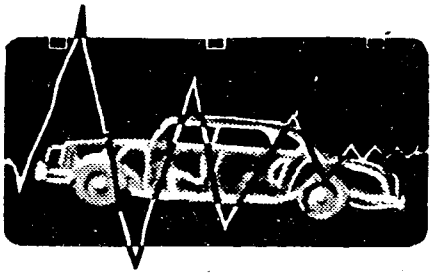
次に reheat について解析されたが，それによると，航続力は，低速飛行では約 10%，高速飛行では，15～20% よくなっている．この傾向は高度には関係しない．

又タービン流入温度について見ると，1)の基本的なエンジンでも，高度 30,000 ft，速度 500 mph として，流入温度を 2,000°F より 2,250°F に増すと，航続力は 119%，2,500°F にすると 32% も増加する．

圧縮比を設計上の見地から，8～12 に押えるとすると航続力の点では，タービン流入温度に関係なく，3),4) は 1) 2) より望ましい．(S. A. E. T., March, (1951) より)

自動車における振動

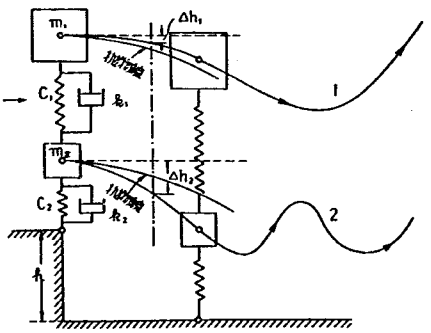
小林 明



第1章 序 説
1・1 自動車の動揺と緩衝
1・2 自動車の振動と乗心地
1・3 担ばね及びタイヤーの具備すべき特性
1・4 緩 衝 器
第2章 車体の自由振動
2・1 車体における振動
2・2 車体の自由振動
第3章 車体の強制振動
3・1 路面の凹凸から起る車体の振動
3・2 単一凸部を通過するともの強制振動

3・3 単一凹部を通過する時の強制振動

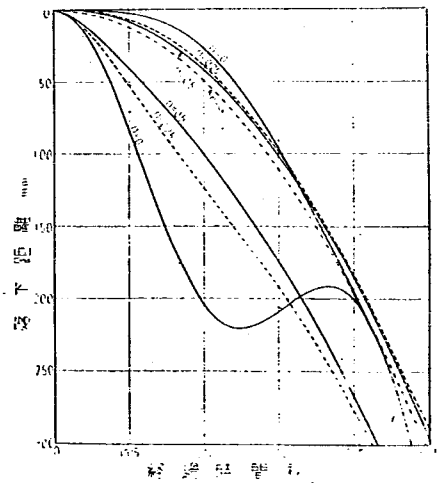
水平路面を走って来た自動車が急に凹部に落ち込んだ時には，車体も乗客も劇しい衝撃を感ずる．実にこのような時に充分な強さがなければ自動車の何処かに破損を起すものである．従って強度の計算の基礎資料としてもこの問題を明らかにする必要がある．この場合にも車体全体としての固有振動の特性が，落下という外部の作用に強く現われるのであるが，近似的には，前車軸部と後車軸部との2つの振動系に分けて，その振動が夫々独立に起って相互に連成しないと考えられることは 2・2 で説明した通りである．即ち第 2・3 図に示したような振動系が v m/s なる水平速度で走って来て，急に h mだけ路面の階段を落ちたと考えて，その運動を考えて行くことにする．そうすると先ずタイヤーは今まで接地点で幾らか撓んでいたものが解放されて元の真円に帰えるであろう．一方において，車体全体としては，その重心が，水平方向に v なる等速度運動をすると同時に重力の加速度 g の作用を受けた自由落下の運動をするから，その組合せとして所謂抛物線を画くことになる．併し，車体を構成するばね上質量 m_1 とばね下質量 m_2 との運動を個別的に考えて見ると，m_1 と m_2 との重心こそは上に述べたように抛物線を画きながら落ちて行くが，ばね下質量 m_2 の方は，今まで押し縮められていた担ばねが解放されるために，ばねの弾き返えす力を受けて下の方へ押し下げられる．その反動で，ばね上質量 m_1 は幾らか上の方へ押し上げられる傾向を受ける．この有様を図に表わすと第3・9図のようになる．この自由落下の運動は m_1 と m_2 の相対的大さに関係し，担ばねのばねの係数 c_1 や減衰係数 k_1 にも影響される．



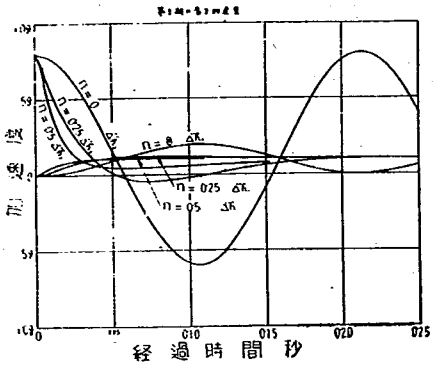
第 3・9 図 車体の自由落下

やがてタイヤーが下の路面に接すると，タイヤーは真円から再び撓み始めるし，担ばねも今まで幾分伸び過ぎていたものが急に押し縮められる．併し振動系の常として，タイヤーも担ばねも一旦は押し縮められ過ぎて再び弾き返えされる筈であり，それが原因となって，振動が続いて行く．その変位の有様を想像すると第3・9図の曲線 1 ~~または~~ および 2 のようになるに相違ない．

(1) **自由落下** この場合の運動式は次のようになる．



第3・10図 第1期自由落下



第3・11図　第1期の落下加速度

$$m_1\ddot{x}_1+k_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+c_1(x_1-x_2)=m_1g$$

$$m_2\ddot{x}_2+k_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+c_1(x_2-x_1)=m_2g$$

これを $\frac{c_1}{m_1}=\omega_{01}^2$, $\frac{c_2}{m_2}=\omega_{02}^2$, $\frac{k_1}{m_1}=2n_1\omega_{01}$, $\frac{k_2}{m_2}=2n_2\omega_{02}$ と置いて書直すと次のようになる.

$$\ddot{x}_1+2n_1\omega_{01}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+\omega_{01}^2(x_1-x_2)=g$$

$$\ddot{x}_2+\frac{m_1}{m_2}\cdot 2n_1\omega_{01}(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+\frac{m_1}{m_2}\cdot\omega_{01}^2(x_2-x_1)=g$$

この式の解は一般に次の形となる.

$$x_1=A_1e^{(-\lambda+i\omega)t}+\frac{1}{2}gt^2$$

$$x_2=A_2e^{(-\lambda+i\omega)t}+\frac{1}{2}gt^2$$

この式の右辺第2項は重力の加速による落下運動の項であるが，第1項は m_1 または m_2 がばねの影響 c_1 と減衰の影響 k_1 の作用による運動を表わすのである．そして λ と ω は

$$\lambda=n_1\omega_{01}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)^2=\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left\{1-n^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right\}$$

で決定される．そうすると $1-n^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$ の値が正であれば m_1 と m_2 は週期的に振動するが，これが零に等しくなると限界吸振運動となり，負になると無週期減衰運動となる．若しまた吸振作用がなければ $k_1=0$ と減るから $n_1=0$ となり，$\lambda=0$ となつて減衰しない振動になる．そしてその時の円振動数は

$$\omega=\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\cdot\omega_{01}$$ となる．これ等の場合の運動を今少し詳しく説明すると，先ず減衰のない場合には

$$\omega_0=\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\cdot\omega_{01}$$ として

$$x_1=\frac{1}{2}gt^2-\frac{m_1}{m_1+m_2}\delta_0\cos\omega_0t$$

$$x_2=\frac{1}{2}gt^2+\frac{m_1}{m_1+m_2}\delta_0\cos\omega_0t$$

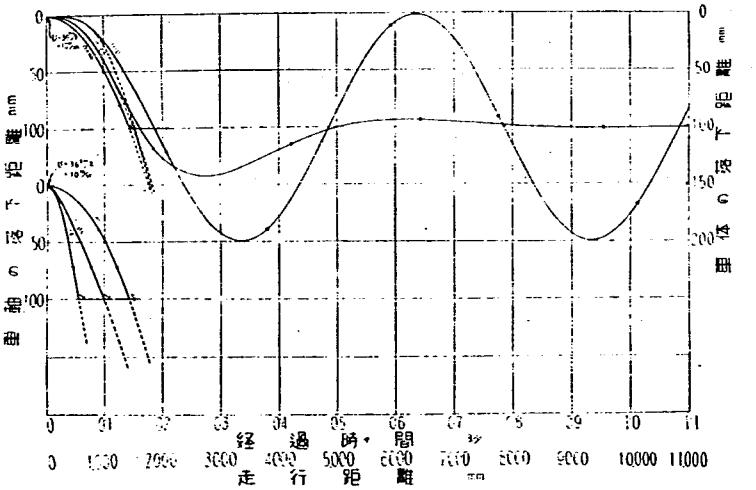
玆に $\delta_0=g/\omega_{01}^2$ であって，担ばね c_1 が m_1 なる荷重を受けていた時の撓み量を表わす．また Δh_1 及び Δh_2 を以て m_1 及び m_2 が最初の位置から垂直方向に落下した距離とすれば，これ等は夫々次の式で表わされる．

$$\Delta h_1=\frac{1}{2}gt^2-\frac{m_2}{m_1+m_2}\delta_0(1-\cos\omega_0t)$$

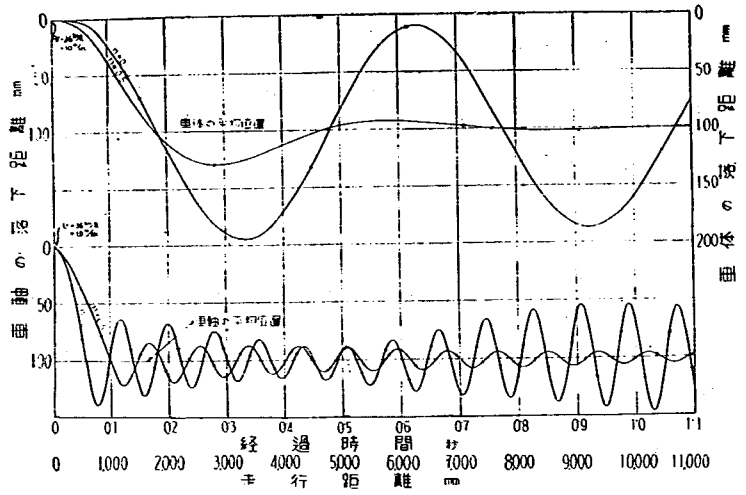
$$\Delta h_2=\frac{1}{2}gt^2+\frac{m_2}{m_1+m_2}\delta_0(1-\cos\omega_0t)$$

第3・10図は $v=36$ km h$=10$ m/s, $\frac{m_1}{m_2}=7$, 車体の自然振動の週期を 0.6 秒として $\omega_{01}=\frac{2\pi}{0.6}=10.47$ rad/s, $\delta_0=0.089$ m に対する計算値を示す．即ち $n=0$ なる曲線の内，上の方は車体の運動，下の方は車軸の運動を表わす．この図で水平軸は経過時間を表わし，垂直軸は落下距離を表わす．この図を見ると，自由落下の時間が 0.12 秒経過して，下の路面に達したとすれば，落下速度が零になってタイヤーが路面に接するし，それより暫らくは落下速度が負になるから，タイヤーと路面との接着に関する限りは，それだけ緩やかになる筈である $n=\infty$ と記した曲線はばねが非常に強くなつた場合であつて $\frac{1}{2}gt^2$ なる剛体の自由落下経路を表わす．

減衰作用のある場合は，落下距離は次の式で表わされる．



第3・12図　タイヤの弾力を無視した場合



第3・13図　タイヤの弾力を考慮に入れた場合

$$\Delta h_1=\frac{1}{2}gt^2-\frac{m_2}{m_1+m_2}\delta_0\left\{1-e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t+\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)\right\}$$

$$\Delta h_2=\frac{1}{2}gt^2+\frac{m_1}{m_1+m_2}\delta_0\left\{\qquad〃\qquad\right\}$$

玆に λ や ω は前に示した式で与えられる．**第3・10図**において $n=0.25$ で示した 2 つの曲線はこの n_1 の値が 0.25 となった場合であって，減衰振動をしながら落下する場合の m_1 や m_2 の軌跡を表わす．また $n=0.5$ の曲線は，上に述べた条件によって，無週期減衰をしながら自由落下する場合に対する計算結果を示す．その時の運動式はこゝでは省略する．

なお**第3・11図**はこれ等の場合における加速度の変化する有様を示す．m_2 の加速度が零になった時に下の路面へタイヤーが接着するならば衝撃がないことになる．

（2）落下の衝撃を吸収する運動　タイヤーの弾力を考えないならば，車軸系 m_2 が h だけ落下すると，その落下運動は停止し，m_1 だけが更に落下運動を続ける．そして担ばねの撓みが δ_1 から δ_2 になる間に $\frac{1}{2}m_1v_1^2$ なる運動のエネルギーをばねの撓みの仕事に変えてしまうと考える．この時の運動式は

$$m_1\ddot{x}_1+c_1x_1=m_1g$$

となり，その解は次の形となる．

$$x_1=-(\delta_0-\delta_1)(\cos\omega_{01}t+\tan\omega_{01}t_1\cdot\sin\omega_{01}t)+\delta_0$$

玆に t_1 はタイヤーが下の路面に接地してから，m_1 なる車体の運動が一番下まで沈み切って一瞬停止するまでの経過時間を表し，$\cos\omega_{01}t_1=-\frac{\delta_0-\delta_1}{\delta_2-\delta_1}$ で与えられる．

また δ_2 は次の式で決定される．

$$(\delta_2^2-\delta_1^2)-2\delta_0(\delta_2-\delta_1)-\frac{v_1}{w_{01}^2}=0$$

即ち，タイヤーが下の路面に接地した瞬間における車体の落下速度 v_1 とその時のばねの撓み δ_1 とを知って δ_2 を決定し得ることになる．

吸振作用のある場合には

$$m_1\ddot{x}_1+k_1\dot{x}_1+c_1x_1=m_1g$$

なる運動を解いて

$$x_1=e^{-\lambda t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+\delta_0$$

なる変位の式を導くことが出来る．そして

$$\lambda=n_1\omega_{01},$$

$$\omega=\sqrt{1-n_1^2}\,\omega_{01}$$

$$A=-(\delta_0-\delta_1),$$

$$B=\frac{\tan\omega t_1+\frac{\lambda}{\omega}}{1-\frac{\lambda}{\omega}\tan\omega t_1}\cdot A$$

また t_1 は担ばねがこの間に δ_1 から δ_2 まで撓みを増して，$\frac{1}{2}m_1v_2^2$ なる運動のエネルギーを吸収し，それにつれて $k_1\dot{x}$ に対応する減衰仕事も起ることからこれを決定することが出来る．即ち上の運動式の両辺に $\dot{x}_1$ を掛けて処理すると

$$\frac{1}{2}m_1d(\dot{x}_1)^2+k_1(\dot{x}_1)^2dt+c_1x_1dx_1=m_1g\,dx_1$$

なるエネルギー式が得られる．これを $x_1=\delta_1$ から $x_1=\delta_2$ まで積分すればよいのである．即ち

$$(\delta_2^2-\delta_1^2)+\frac{4n_1}{\omega_{01}}\int_0^{t_1}(\dot{x}_1)^2dt=\left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2+2\delta_0(\delta_2-\delta_1)$$

$\dot{x}_1$ の式は上の x_1 を微分すれば得られるから，その自乗を t について積分することが出来る．またこの積分は，ショック・アブゾーバーにおける衝撃吸収の仕事や，それによる発熱量などを，計算する時にも，役立つのである．

$n=0$ なる吸振作用のない場合や $n=\infty$ なるばねの腰が無限大に強い場合，及び $n=0.5$ なる自動車の実際に近い場合に就て計算した結果を示すと**第3・12図**のようになる．n の値によって，$h=10$ cm の距離を落ちる時に大小が起ることは，車軸の落下運動の曲線からよくわかるであろう．また加速度の変わる有様は**第3・14図**において点線で表わした $n_1=0$ 及び $n=0.5$ なる曲線のようになる．

なおタイヤーが下の路面に接着してから，車体が沈み切ってしまうと，再びばねが車体を弾き返えてて振動を始めるようになる．このような運動には，自由振動の式を用いればよいのであって，$n_1=0$ の場合と $n_1\neq0$ なる場合とは夫々次のようになる．

$$x_1=-(\delta_2-\delta_0)\cos\omega_{01}t$$

$$x_1=e^{-n_1\omega_{01}t}(\delta_2-\delta_0)\left(\cos\omega t+\frac{n_1}{\sqrt{1-n_1^2}}\sin\omega t\right)+\delta_0$$

玆に $\omega=\sqrt{1-n_1^2}\,\omega_{01}$ であることは前と同じである．

（3）タイヤーの弾力を考慮に入れた場合　タイヤーは自動車が跳躍する前には (m_1+m_2) なる質量を支

86

えていたから $\varepsilon_0'=\frac{m_1+m_2}{m_1}\varepsilon_0$ だけの撓みを受けていた筈である．茲に $\varepsilon_0=g/\omega_{02}^2$，$\omega_{02}^2=\frac{c_2}{m_2}$ であって，ω_{02} はタイヤーの弾力 c_2 に車軸系の質量 m_2 が取付けられた振動系の固有円振動数を表わし，ε_0 は m_2 なる車軸系だけの質量を支えた時のタイヤーの撓みである．従って自動車が跳躍して h なる高さの階段を落ちるとすれば，$(h-\varepsilon_0')$ だけの高さを車軸が降りた時にタイヤーは下の路面に接地するのである．上の例に対しこう計算すると $n_1=0$，$n_2=0$ の場合は 0.0505 秒で下の路面に接地するが，$n_1=0.5$，$n_2=0.5$ の時は 0.0888 秒で下の面へ接地することになる．

下の路面に接地してから後の運動式は次のようになる．

$$m_1\ddot{x}_1+k_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+c_1(x_1-x_2)=m_1g$$
$$m_2\ddot{x}_2+k_2\dot{x}_2+c_2x_2-k_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-c_1(x_1-x_2)=m_2g$$

これは連成振動の形となるがその解は次のようになる．

$$x_1=Ae^{(-\lambda+i\omega)t}+C,\quad x_2=Be^{(-\lambda+i\omega)t}+D$$

そしてこの解を上の運動式に代入すると C と D とが次のように決定される．

$$C=\left(1+r\frac{c_1}{c_2}\right)\delta_0\equiv\delta_0',\quad D=r\varepsilon_0\equiv\varepsilon_0'$$

茲に $r=1+\frac{m_1}{m_2}$ である．上の例の場合には $\frac{m_1}{m_2}=7$，$\frac{c_2}{c_1}=7$ であって $D=8\varepsilon_0$，$C=\frac{57}{49}\delta_0$ となり，これに $\varepsilon_0=g/\omega_{02}^2=0.001{,}82$ m，$\delta_0=g/\omega_{01}^2=0.089{,}32$ m とを代入すると $\delta_0'=0.104$ m，$\varepsilon_0'=0.014{,}6$ m となる．

次に減衰作用のない場合における連成振動は，次の式で与えられる 2 つの円振動数 ω_1 及び ω_2 を持つことを知る．

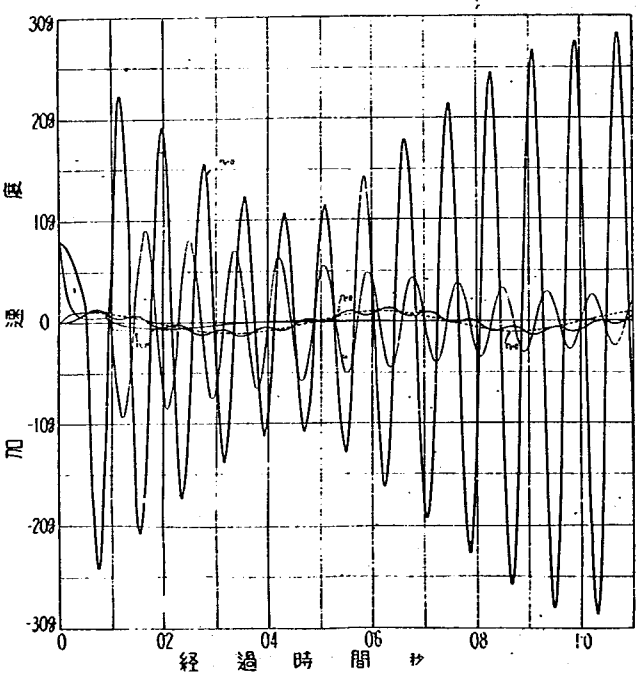
$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}=\frac{r\omega_{01}^2+\omega_{02}^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r\omega_{01}^2+\omega_{02}^2}{2}\right)^2-\omega_{01}^2\cdot\omega_{02}^2}$$

更にまた，減衰作用のない連成振動として，この m_1 と m_2 の運動を解析して見ると，両方の振動の位相は全く一致していることを知るのである．この様に考えを進めて行くと，最後に車体系 m_1 と車軸系 m_2 との変位は次の式で表わされることを証明することが出来るのである．

$$x_1=A_1(\cos\omega_1t+\alpha\sin\omega_1t)+B_1(\cos\omega_2t+\beta\sin\omega_2t)+C_1\cos\omega_{01}t+D_1\sin\omega_{02}t+\delta_0'$$
$$x_2=A_2(\quad\ 〃\quad\ )+B_2(\quad\ 〃\quad\ )+C_2\cos\omega_{02}t+D_2\sin\omega_{02}t+\varepsilon_0'$$

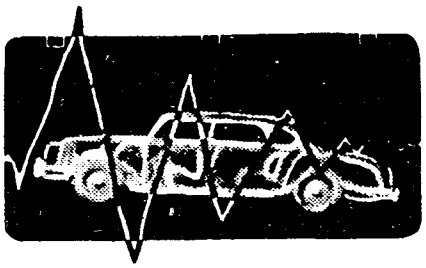
この式の中の A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, α, β なる定数はこの種の力学の問題に適当した初期条件から決定されるが，詳しい説明は割愛する．

更に減衰作用の伴う場合には問題が一層複雑になって来る．第 1 連成振動における 2 種の円振動数 ω_1 及び ω_2 や減衰率 λ_1 及び λ_2 を決定せねばならないし，m_1 と m_2 との振動には位相のずれがある．これ等に就て著者は根気よく解析して見たのである．これを $\frac{m_1}{m_2}=7$，$\frac{c_2}{c_1}=7$ として $n_1=0$，$n_2=0$ と $n_1=0.5$，$n_2=0.5$ なる 2 つの場合に計算して見た結果をグラフに表わすと第 3・13 図及び第 3・14 図となる．車体系の固有振動とタイヤー系の固有振動とが連成されて行く有様が，変位にも加速度にもよく現われており，また吸振作用がある場合に，これ等の振動が減衰されて行く有様もよくうかがわれるであろう．またタイヤーが路面から跳び上る有様も明瞭に現われている．更にまた，車体の変位には余り現われて来ないが，車体においても，タイヤーの固有振動から来る周期の短い強い振動が感じられることが加速度の曲線からわかるであろう．また車軸系では $10g$ 近くの加速度を持った振動が起っていることがわかり，設計上のよき資料を提供するものと考えられる．これが僅か $h=10$ cm を落下した場合の話である．[未完]　　（名古屋大学）



第 3・14 図

お詫 都合により 6 月号には休載しました．



自動車技術講座 6

自動車における振動

小　林　　明

第1章　序　　説

1・1　自動車の動揺と緩衝

1・2　自動車の振動と乗心地

1・3　担ばね及びタイヤーの具備すべき特性

1・4　緩　衝　器

第2章　車体の自由振動

2・1　車体における振動

2・1　車体の自由振動

第3章　車体の強制振動

3・1　路面の凹凸から起る車体の振動

3・2　単一凸部を通過する時の強制振動

3・3　単一凹部を通過する時の強制振動

3・4　週期的衝撃を受ける車体の動揺

今までは唯一回の衝撃を路面から受けて自動車が動揺する場合に就て述べた．併し第1章の始めに述べたように，自動車交通の頻繁な砂利固め道では，「**たたき穴**」が連続していることが多く，そのような路面を走ると，自動車は週期的な衝撃を路面から受けるものである．

さて自動車が路面の凹凸によって受ける動揺の運動式は第3・1図に就て，その一般なる形を説明したが，これを水平の姿勢を保ったまゝ，自動車の重心が上下に動く運動と，その重心のまわりに角振動をするのとの2つの独立した運動に分けて考えることが近似的に成立つことも説明した所である．今 $k_f+k_r=k$，$c_f+c_r=c$ として前後のシヤシばねの影響を合算して考えると，車体の上下動は次の式で表わされる．

$$m\ddot{z}+k(\dot{z}-\dot{\xi})+c(z-\xi)=0$$

今路面の凹凸を $\xi=h\sin\varphi t$ で表わし得るとすれば，この運動式の解は $z=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ なる

$$\rho=\sqrt{\frac{1+(2nf)^2}{\left(1-f^2-\frac{f^2}{\alpha}\right)^2+(2nf)^2}}$$

$c=\infty$ となると $\alpha=\infty$

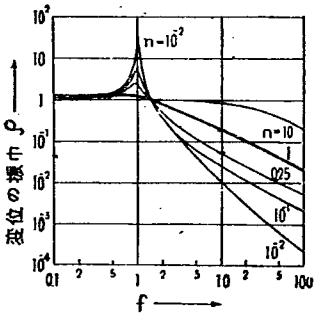
形となる．この場合，自己振動は直ぐに減衰してしまい，外部からの週期的強制振動のみが残るのである．そして自動車の重心の変位は次の形で表わされることになる．

$$z=\rho\cdot h\sin(\omega t-\delta)$$

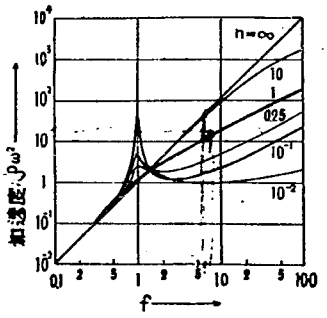
茲に $\rho=\sqrt{\frac{1+4n^2f^2}{(1-f^2)^2+4n^2f^2}}$，$\delta=\tan^{-1}\frac{2nf^3}{(1-f^2)+4n^2f^2}$，

$f=\frac{\omega}{\omega_0}$，　$\omega_0^2=\frac{c}{m}$，　$2n\omega_0=\frac{k}{m}$　である．

従って波状路面の高さ h と，車体の上下動 z との比は ρ で表わされる．n はシヤシばねの腰の強さ c，車体の質量 m 及び吸振作用 k の相対的関係によって 0 から ∞ まで任意の値を取り得るが，与えられた自動車に於ては，一定不変であると考えられる．そうすると ρ は f の値によって変化する筈であるが，これをグラフに表わすと第3・15図のようになる．f の値が大きくなるということは自動車の走行速度が次第に大きくなることであり，$f=1$ であるということは，吸振作用のない時には共振れを起し危険状態に陥ることを表わす．この結果を見ると，$f=0.5$ までは車体の上下動の振幅 $h\rho$ に於て $h=1$ とすると ρ が殆んど 1 に近いのである．併し f が 1 に近づくと n の値の大小にもよるが，図に示すように振幅が著しく拡大されて共振れ状態に陥る．更に f が大きくなって $f=1\cdot4$ 位になると振幅は再び小さくなるが，f の値が更に大きくなると n の値の大きい場合，即ち吸振作用が強いと振幅は n の値の小さい場合よりも小さくならないで反対に大きくなるのである．この悪い結果は第3・16図に示す加速度のグラフに一層明らかに現われている．即ち車体の上下動の加速度の振幅は車

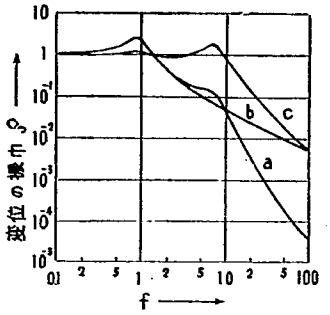


第3・15図

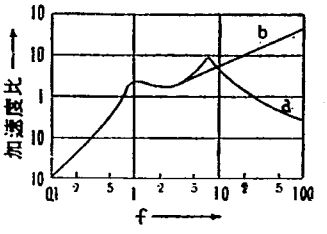


第3・16図

88



第 3·17 図



第 3·18 図

$k\rho\omega^2$ で与えられるから，$k=1$ として，垂直軸にはこの $\rho\omega^2$ の値が取ってある．この結果から考えると，吸振作用を弱くすると，これは n の値の小さい場合であるが，$f=1$ の附近になって共振を起すようになると，振動の加速度も大きくなるが，更に f が大きくなると，加速度は再び小さくなり，更に f が大きくなると，振動の加速度は再び増大して行く．n の値を大きくすると，f の値の大きい所，即ち高速度で自動車が走ると大きな振動の加速度を起すようになるから，吸振作用を余り強くすることは好ましくない．例えば $n=1$ といえば限界吸振の場合であるが，自動車の固有振動数の 10 倍の高い振動数の衝撃を与えると（$f=10$ の場合である），吸振作用の弱い場合の加速度の 20 倍も大きい振動の加速度を受けるものである．

これは計算結果から推理したことであるが，実際には小さな振幅で振動数の高い衝撃は自動車には少いのである．それは第1には路面にある波長の短い不斉点は，波長の長い不斉点よりも浅い凹凸を持っており，第2には車輪の直径が大きいから，小さい凹みには忠実に落ち込まないでそのまゝ跳び越すように通過する傾向がある．第3には空気入りのゴムタイヤーの弾性によって，振動数の高い振幅の小さい衝撃は能率よく吸振されてしまうのである．

斯くして吸振作用の数の最も良い値は，車輪や車軸と車体とを連結する振動系の特性の他に路面の凹凸の有様や自動車の走行速度にも関係するのである．例えばアスファルト道路よりも石だたみ道の方が路面からの衝撃の振動数は高い筈である．そうすると石だたみ道に対しては，n の小さい，即ち吸振作用の弱いような支持装置が望ましいことになる．砂利道に於ても，適当に速く走った方が，反って振動を少く感ずることは吾人のよく経験する所であり，これは上の理論とも一致するのである．多くの自動車の実際に就ていえば $n=0.25\sim0.5$ の範囲が一番よいように思われる．

次に連続した波状地帯を通過する自動車に於て，その波長の整数倍と自動車の軸間距離とが一致する場合を考えると，前後の車輪の受ける上下の変位が一致するから $\xi_f=\xi_r$ となり，且つ $c_fl_f=c_rl_r$ 及び $k_fl_f=k_rl_r$ と置き得るならば，車体の縦揺れは

$$\ddot{\phi}+2n\omega_{02}\dot{\phi}+\omega_{02}^2\phi=0$$

なる運動式で表わされる．これを解くと角振動の振れの角度は

$$\phi=\phi_0\frac{e^{-n\omega_{02}t}}{\sqrt{1-n^2}}\times\cos(\sqrt{1-n^2}\,\omega_{02}t-\varepsilon)$$

となり，n が小さい程角振動の振幅は小さくなることを知るのである．然るに $\omega_{02}^2=\dfrac{c_fl_f^2+c_rl_r^2}{I}$，$2n\omega_{02}=\dfrac{k_fl_f^2+k_rl_r^2}{I}$ であるから

$$n=\frac{k_fl_f^2+k_rl_r^2}{\sqrt{c_fl_f^2+c_rl_r^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{I}}$$

となる．而して $k_fl_f=k_rl_r$，$c_fl_f=c_rl_r$ であり且つ $l=l_f+l_r$ であると

$$n=k_f\sqrt{l\frac{l_f}{c_f}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{I}}$$

となる．従って軸間距離 l を大きくし，車体の慣性モーメント I を小さくする必要がある．I を小さくするためには，車体の質量をその重心の附近に出来るだけ集めるようにすればよい．日本に多い小型車では軸間距離 l が小さいから，縦揺れが大きくなることは免れないのである．

以上は波状地帯の波長の整数倍が軸間距離に一致した場合であるが，これが一致しない場合も解くことが出来るが，こゝでは省略する．併しその結果からいえば，l を大きくし，I を小さくすれば角振動の振幅を小さくすることが出来ることには変わりがない．

3·5 タイヤーの弾力と週期的衝撃との関係

この問題は第2·3図で示すような振動系として考えることが出来る．x_1 及び x_2 を夫々車体部及び車軸部の変位とすれば，これ等は次の式で表わされる．

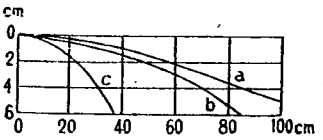
$$x_1=\rho_1\cdot h\sin(\omega t-\delta)$$
$$x_2=\rho_2\cdot h\sin(\omega t-\varepsilon)$$

玆に $\xi=h\sin\omega t$ は自動車が v なる水平速度で波状地帯を通過する時の路面の波状を表わす．途中の計算を省略するが ρ_1 及び ρ_2 は変位と波状地帯の深さとの比として次のように表わされる．

$$\rho_1=\sqrt{\left\{(f^2-1)(4n^2f_1^2-f_1^2+1)+\frac{c_1}{c_2}f_1^2(4n^2f_1^2+1)\right\}^2+4n^2f_1^2(f_2^2-1)^2}$$

$$\rho_2=\frac{\sqrt{(4n^2f_1^2-f_1^2+1)^2+4n^2f_1^6}}{\eta}$$

$$\delta=\tan^{-1}\frac{2nf_1^3(f_2^2-1)}{(f_2^2-1)(4n^2f_1^2-f_1^2+1)+\dfrac{m_1}{m_2}(4n^2f_1^2+1)f_2^2}$$



第 3·19 図

$$\varepsilon=\tan^{-1}\frac{(4n^2f_1^2-f_1^2+1)\dfrac{A_1}{B_1}+2nf_1^3}{(4n^2f_1^2-f_1^2+1)\cdot 2nf_1^3\dfrac{A_1}{B_1}}$$

茲に $2n\omega_{01}=\frac{k_1}{m_1}$, $\omega_{01}^2=\frac{c_1}{m_1}$, $\omega_{02}^2=\frac{c_2}{m^2}$, $f_1=\frac{\omega}{\omega_{01}}$, $f_2=\frac{\omega}{\omega_{02}}$ であることは今までと同じである．但し $k_2=0$ とする．

今 $\frac{m_1}{m_2}=7$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{1}{7}$ とすれば $\omega_{02}=7\omega_{01}$ となる．従って $f_2=\frac{1}{7}f_1$ となる．且つ普通の自動車の場合として $n=0.25$ と取れば，上に示した ρ_1 も ρ_2 も共に f_1 のみの函数となる．こうして計算した結果を示すと第 3·17 図のようになる．即ちタイヤーの弾力も無視することは $c_2=\infty$ と取ることにらるが，その時には $\omega_{02}=\infty$ となり $f_2=0$ となる．その時には

$$\rho_1=\sqrt{\frac{4n^2f_1^2+1}{4n^2f_1^2+(f_1^2-1)^2}}\quad 及び\quad \rho_2=1$$

となる．曲線 b はこのような場合における ρ_1 の値が f_1 の変化につれて変わる有様を示す．即ち車体の振幅が車の走行速度が高まるにつれて変化する有様を示すのである．これに対して曲線 a はタイヤーの弾力を考慮に入れた場合における車体の振幅と路面の凹凸との比即ち ρ_1 の変化を示すのである．また曲線 c はこの場合に車軸の振幅即ち ρ_2 の変化を表わす．この計算によると $f_1=\frac{\omega}{\omega_{01}}=10$ 以上になると始めてタイヤーの弾力の効果が顕著に現われて，車体の振動を著しく軽減することになる．つまり走行速度が相当に大きいか，或は路面の波状が小さい場合に於て始めてタイヤーの弾力が好ましい効果を現わしてくれるのである．

第 3·18 図は車体の受ける振動の加速度の最大値が f_1 の値，即ち車の走行速度と共に変化する有様を示すのであって，曲線 a はタイヤーの弾力を考慮に入れた場合であり曲線 b は弾力の全くないタイヤーの場合である．

この場合，振動の力速度は

$$\ddot{x}_1=-\rho_1 h\omega^2\sin(\omega t-\delta)$$
$$\ddot{x}_2=-\rho_2 h\omega^2\sin(\omega t-\varepsilon)$$

となるから，$\frac{\rho_1 h\omega^2}{g\omega_{01}^2}$ や $\frac{\rho_2 h\omega^2}{h\omega_{02}^2}$ は，弾力 c_1 や c_2 が全然ない場合の振動の加速度と，弾力のある実際の場合の加速度との比を表わすことになる．第 3·18 図に於て，縦軸に示す振動の加速度は，この比の値を以て表わしてある．

今車体の固有振動の週期を $\tau_0=0.7$ 秒とし，車の走行速度を 60 km/h とすれば，これは $v=16.65$ m/s に相当する．そうすると $\omega_{01}=2\pi/0.7$ となる．一方路面の状況凹凸の波長を 4 m とすれば，これを通過する時間は $\tau=0.24$ 秒であるから，$\omega=\frac{2\pi}{0.48}$ となる．従って $f_1=\frac{\omega}{\omega_{01}}=\frac{0.7}{0.24}=2.92$ となる．この曲線で示された結果によると $f_1=3$ の程度まではタイヤーの弾力が車体の振幅や加速度を軽減する効果を殆んど現わしていない．ゴムタイヤーは路面との粘着力を現わして強い加速力や制動力を発揮することにだけ役立っているのである．そのような場合にはゴムだけのタイヤーであっても空気入りのタイヤーであっても何等変わりがないのである．併し路面の波状凹凸の波長が更に $\frac{1}{10}$ の 40 cm になると $f_1=29.2$ となり，空気入りタイヤーの弾力の効果が顕著に現われて来ることを認めるであろう．その中間に波長が 1.2 m になった時に $f_1=10$ となり，車体の振幅はタイヤーの弾力がある場合と，ない場合とが一致するようになる．

波長が短くなって 12 cm になると $f_1=100$ となり，車体の振れは路面の凹凸の振れの 2.5×10^{-5} になるから，タイヤーの効果は車体の振幅に関する限り殆んど現われない．併し加速度の方では著しい差異が認められるから乗心地には関係して来る．

次に車体の振幅と車軸の振幅との比を作って見ると

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{4nf_1^2+1}{\sqrt{(4n^2f_1^2-f_1^2+1)4n^2f_1^6}}$$

であるから $n=0.25$ として計算すると

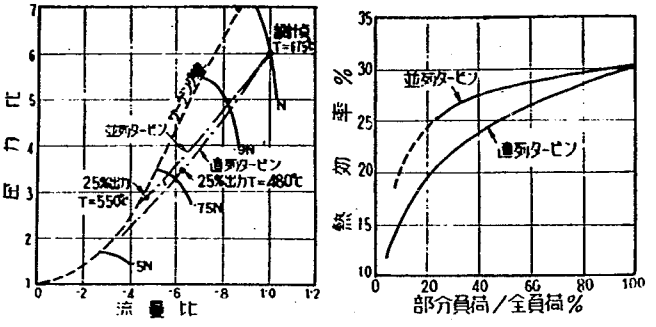
$f_1=$	0.5	1.0	10	100
$\frac{\rho_1}{\rho_2}=$	1.30	2.24	0.05	0.005

となる．そうして見ると，車体の固有振動と共振れを起すようになると，車軸の受ける変位が最大値を示し，車輪が路面から跳び離れるようになることもある．逆に $f_1=0$ 即ち非常に低い速度で走ると ρ_1 も ρ_2 も共に 1 になる．

車輪及び車軸系即ちばね下質量を大きくすると，その固有振動数 ω_{02} は低くなる．そうすると ρ_2 の式が示すように，同じ走行速度即ち f_1 の値に対して車体の振れが小さくなるから，振幅だけ考えるとばね下質量は大きい方がよい．併し一方に於て，同じシヤシばねの弾力及び吸振力に対して自動振動数が小さくなり，共振れを起し易くなる．その上に車軸系が跳ね上る慣性力が強く現われるし，一旦跳ね上ると，反対にこれを弾き返えして地面へ再び接触させようとする作用が弱められる結果になる．これは何れも自動車の走行性能を悪くする筈である．従って車軸系の質量は寧ろ出来るだけ軽くした方がよいのである．

これに関連して，自動車が非常に低い速度で走って来て，深さ 6 cm の直角な凹みに落ちたとして，タイヤーの直径が 74 cm であるとすれば，その車輪の中心が画

(216 頁下段へ続く)



a) 軸流圧縮機特性曲線　　b) 部分負荷効率曲線

第 14 図　部分負荷効率曲線 (並列タービン及直列タービン)

——回転数特性も良くない.

1·3·3　2 軸式タービン　2 軸式タービンでは圧縮機駆動用タービンと，出力用タービンが区別されているので，トルク——回転数特性は良くなる．この場合には 1 軸式の時と違って出力と出力タービンの回転数との間の関係，例えばプロペラ法則等は全体の作動状態に少しも影響しない．そして負荷によって作動状態が変化する仕方はタービンや圧縮機の配置の方法によって定まる．2 軸式の場合でもやはり，一般原則通りガス流量の減少によって出力を減ずる方が，タービン入口温度を下げるよりも望ましいわけである．而してガス流量はタービンの部分がオリフィスの様働くので，タービン部分によって定まり，タービン入口の圧力及温度を夫々 P_1, T_1 とし圧力比を R とすれば

$$(\text{ガス流量}) \propto \frac{P_1}{\sqrt{T_1}}\sqrt{1-\frac{1}{R^2}}$$

となる.[1] R が高いときは平方根の中はガス流量に殆んど影響を与えないが，R が小になると，平方根の項が非常に影響する様になる．

今タービンが幾つか直列に配置されているとすると，上の関係から，全圧力比が減ずると，高圧の方の圧力比は余り減少せず，低圧の方は非常に減ずることになる．

今高圧タービンで圧縮機を駆動している場合について考えると，圧力比が減ずると圧縮機駆動馬力が減ず，高圧タービンの出力も減ずる．所が高圧タービンでは圧力比の減少は非常に少いから，従ってタービン出力を減ずるためにはタービン入口温度を下げてやらなければならなくなる．これは前に述べた様に急激な効率低下を招くことになる．

次に低圧タービンで圧縮機を駆動する場合には，上の場合とは逆に，低圧タービンでは圧力比が非常に減少し従ってタービン入口温度を下げなくてもタービン出力を下げることが出来る．更に(10)式から考えるとこの場合の方がガス流量の減少も大きい．

以上のことから 2 軸の場合圧縮機駆動馬力は出来るだけ多く低圧タービンによった方が部分負荷の特性は良好になるといえる．所が低圧側で圧縮機を駆動すると，前に述べた様に一定の圧力比に対して空気流量の減少が大きいので，これを圧縮機の特性と合せ考えると，第 14 図 (a) の様にサージング線に近附き易いことになり，低負荷のときは運転が甚しく不安定になる．従って効率のみから考えると低圧側を圧縮機駆動に用いるのはよいが，実際は運転の安定を望むために多少効率を犠牲にしても，高圧タービンで圧縮機を駆動するのが普通である．第 11 図 b) c) の場合，c) の並列の場合では圧縮機駆動用タービンは b) の直列の場合に比して低圧側まで含んでいるから，上の決論によって第 14 図(b) の様に部分負荷の効率は b) よりも良いが，20% 負荷以下となるとサーヂングによって安定な運転を得ることが出来なくなる．従って c) の様な型式は実際には余り用いられない．〔未完〕　(慶応大学工学部)

参 考 文 献

1) W. M. Rohsenow & J. P. Hunsaker; Part-Load Characteristics of Marine Gas-Turbine Plants, Trans. A. S. M. E. May (1947) 433~439.

(212 頁より続く)

く軌跡は第 3·19 図に於て曲線 c のようになる．然るに自動車が 72 km/h 即ち 20 m/s の速さで走って来たとすれば，車軸の中心の軌跡は曲線 a または b のようになるというのである．a は $n=0.25$ に相当する吸振作用がある場合であり，b は吸振作用の全くない場合である．但し $m_1=7m_2$, $c_1=\frac{1}{7}c^2$, $\tau_0=0.7$ 秒等であることは今まで取って来た計算例の場合と同じである．この結果から見ると凹みが 1 cm 位であると吸振作用があっても無くても変りがないが，凹みの深さが 3~4 cm になると，両者の差異が現われて来る．即ち吸振作用のない車では 70 cm に就て 4 cm 降るような所を車輪が通過すると，車輪が路面から跳び離れないで済むが，吸振作用がある車では，1 cm だけ路面から車輪が離れることになる．このように考えを進めて見ると，普通の速さで自動車が走る時には，車輪が路面から跳び離れるということに対して，吸振作用の有る無しは殆んど影響しないことを知る．併し高速度で比較的深い凹みを通過する時には吸振作用の弱い方が望ましいことになる．近頃のショック・アブソーバーは単働型であって，車が門部に乗りかゝった時には車体がそれにつれて余り飛び上らぬように，吸振作用が殆んど現われないようにして，次の瞬間に車体がシヤシばねで弾き返されようとする傾向をやわらかく受けるように，その時だけ吸振作用が利くようにしてある．日本の自動車道路によく見受けられるように，「たゝき穴」が連続しているような所を通過する時には，このように調整されたショック・アブソーバーでは全く反対に，それこそ逆効果が現われて，反って有害なことになる．〔未完〕(名古屋大学)

路面の性質と自動車振動を結ぶ一理論

高　橋　安　人

1. まえがき

自動車の振動はこれまで理論からも実際面からも数多くの研究者によっていろいろな角度から検討されてきた．ここに筆者は本問題へ，サーボ機構の手法を応用し，路面の起伏を統計的につかんで計算するという見地をつけ加えたい．

自動車振動の理論や実験でよく想定するのは，路面に一つだけ段がある(第1図)とか，正弦波状の起伏がつづく(第2図)という状況である．いうまでもなく実際の路面はこんな単純なものではなく，たとえば第3図のようなデコボコをもつ．それにも拘らずこれまでの単純な想定に基ずく理論や実験は，結果の応用や推論を誤るのでなければ，実際問題に対して極めて重要な指針や資料となることは，これまでの多くの論文が示すところである．

しかし第3図のように一見つかみどころのないような不規則な路面状況を，もし何らかの理論である程度まで的確にとらえることができれば，そこからこれまでは得られなかった若干の進路がひらかれてくる可能性が考えられよう．サーボ機構に関する一理論が応用されるのはこの点である．たとえば飛ぶ敵機の方向へ，ぴたりと向きつづけるように電探アンテナを自動探作するサーボ機構は，探作源となる受信電波に雑音を含み，また敵機自体がある程度まで予測を許さない動きをすることを考慮して，“最適”の性能をもつように設計しなければならない．ここに学問に対して不規則に変るシグナルを扱う必要が生じ，それに関する理論が確立されてきた[1]．

自動車が第3図のような実際の路面を走るときは，不規則な起伏はタイヤ下面の上下動となって車体を加振する．この状況は不規則なシグナルを受けつつ動作するサーボ系と似ており，したがって同じような手法である程度まで扱われることが予想されよう．

以下はこんな見地から，まず路面の起伏状況(パタン)を統計的にスペクトル密度によって表現することを提案する．このスペクトル密度と自動車特性および走行速度が与えられると．車体の上下振動を推定することができる．また車体の振動を測定すると逆に路面の状況を推定することも可能と考えられるのである．

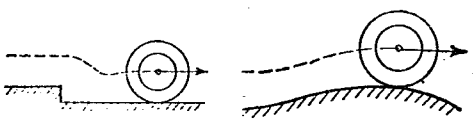
もちろんこのような進み方をするにはいくつかの大きな仮定を必要とする．その点だけからみても，以下の理論の応用は自ら限定されることになる．このような限界についても最後に若干の考察を加えることにする．

2. 路面特性のとらえ方

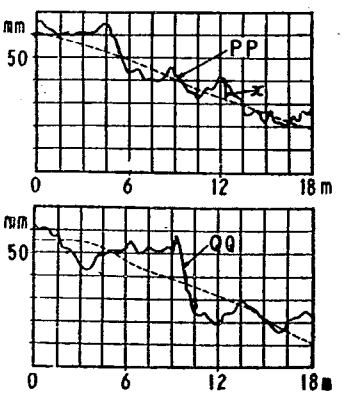
ぬかるみや砂のような変形するものは除外し，固い路面だけを考える．そのデコボコの寸法や場所は第3図の例が示すようにきわめて不規則に分布するが，それにも拘らずたんたんとした鋪装道路とか“デコボコ道”という具合にそれぞれの型(パタン)がある．このパタンを何とか定量的につかみたい．それも自動車の振動に直結するつかみ方をしたい．それにはこのデコボコを波長によって分類し，各波長分に相当するデコボコ寸法がどれ位になるかという分布状況によって表わす方法が考えられる．

これは音や光などについて行われてき　　る．たとえば多くの光は連続スペクトルによっ　　分における強さの分布が示される特定の波長分だけを含む光では輝線スペクトルになる．

このような概念が路面のデコボコ具合を表わすのにも応用されるのであるが，それにはまず第3図のようなまとまりのないデータから各波長分の“強さ”を求める方法を考えなければならない．ここに，デコボコの分布が



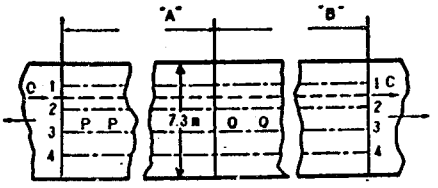
第1図　段のある路面　　第2図　正弦波状の路面



第3図　実際の路面の例

第4図　$\bar{x}$ と $\bar{x}$

92



第5図 試験区間

"定常不規則"と想定されるときは，まず"自己相関かん数"を計算してから，下に記すようにスペクトル密度が求められる[2]．"定常不規則"という前提下では，デコボコ寸法 x（第4図）の長さ方向の平均値 $\bar{x}$ が頻度分布からの平均値 x に等しくなければならない．実際の路面状況がどの程度までこの仮定をみたす"定常不規則"な分布であるかは今後の検討にまつ事項である．この仮定がみたされないときは下記の理論値の精度が低下したり誤った結論に導くおそれがある．

さて路面の長さ l(m) のかん数としての，デコボコ寸法 $x_{(l)}$ (mm) の自己相関かん数 $R_{(u)}$ はつぎの式で定義される．

$$R_{(u)}=\lim_{l_0\to\infty}\frac{1}{2l_0}\int_{-l_0}^{l_0}x_{(l)}\ x_{(l+u)}\ dl \qquad (\mathrm{mm^2})\ \cdots\cdots(1)$$

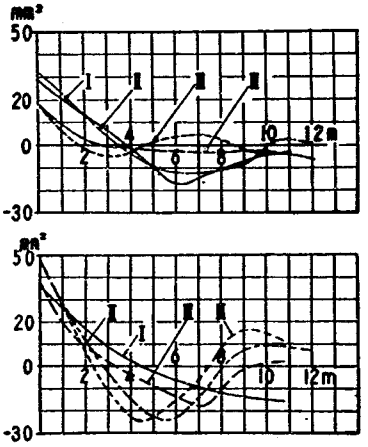
これは $x_{(l)}$ へそれを u だけずらせた値 $x_{(l+u)}$ を掛けたものの平均値に他ならない．ある基準面からの路面の高低寸法 x(mm) を路面長 $\triangle l$(cm) ごとによんで

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_N$$

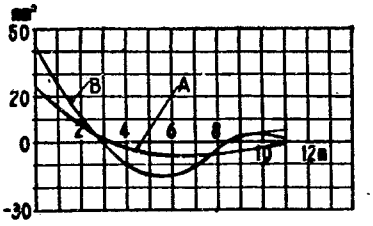
とすれば (1) 式の計算はつぎの式によって行われる：

$$\left.\begin{aligned}R(\mathrm{m})&\fallingdotseq\frac{1}{N-m}\sum_{n=1}^{N-m}x_n\ x_{n+m} \qquad (\mathrm{mm^2})\\ m\cdot\triangle l/100&=u \qquad (\mathrm{m})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

こうして自己相関かん数 $R_{(u)}$ が求まると路面高低のスペクトル密度 $S_1(f_3)$ はつぎの公式によって与えられる：



第6図 路面の自己相関かん数，
上はA区間，下はB区間



第7図 A，B 区間それぞれの
平均自己相関かん数

$$S_1(f_3)=4\int_0^\infty R_{(u)}\ \cos 2\pi f_1 u\ du \quad (\mathrm{mm^2\cdot m})\cdots\cdots(3)$$

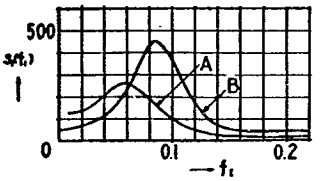
ここに f_1 は路面長さ 1(m) 当りの起伏数(サイクル/m)である．つぎに実例について以上の計算がどう進められどんな結果になるかを示そう．

3. 路面特性の例

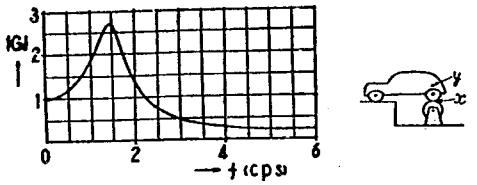
路面のでこぼこは，第3図のように精密に測ること自体がすでに大変な仕事である．筆者はたまたま岡本教授らによって行われた実測結果を同教授の好意により利用することができた．以下はこのデーターについて計算を進める．

測定されたのは東京——千葉間の国道の市川橋上の舗装面である．第5図の区間 A は特に入念な舗装工事施工行約 1 週間の"よい路面"，B はかなり使い古された"普通の路面"である．測定は路面にレールをしいて記録計を転がす方法により図示の 1~4 線に沿て行われた．第3図の PP，QQ は第5図にそう記入した部分の実測値例である．ここで便宜上 12m 当りの移動平均値(第3図の破線)を求め，それを基準にとって路面の高さ x(mm) を $\triangle l$=30(cm) ごとに測り，(2) 式へ適用すると第6図のように自己相関かん数が求まる．

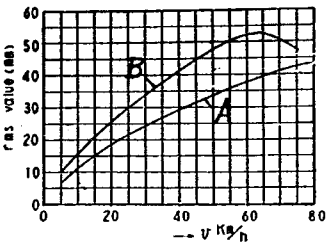
第6図の I~IV は第5図の 1~4 にそれぞれ対応するものである．第6図の上すなわち A 区間に対する結果を見ると4本の線のうち I と II，III と IV が互に似ていることがわかる．この区間は片側ずつ通行止して施工したばかりのものであり，路面の片側に対する一対ずつの結果が似ているのはこのような片側を一区切とする施工によるのではなかろうか？ また第6図の下すなわち B 区間に対する結果は，路面の左右両端 I と IV が互に近く，路面の中央部における II と III が互に近い形をしている．これは交通量や通る車の性質，速度などが中央部と両端部とで違うために路面のパタンも違っ



第8図 試験路面のスペクトル密度



第 9 図　自動車の振動特性試験とその結果



第 10 図　試験車の試験路面における rms 振幅計算値

てきたものとみることはできないだろうか？

さて A 区間および B 区間についての自己相関かん数の算術平均値を求めると第 7 図の A, B になる．これを図示の破線に相当するつぎの近似式，

$R_A(u)=26e^{-0.2u}\cos(0.383u+0.271)-4e^{-0.47u}\sin u$,

$R_B(u)=43e^{-0.182u}\cos 0.54u-11e^{-0.53u}\sin 1.04u$

に置換し，(3) 式に適用してスペクトル密度を求めると第 8 図を得る．

第 8 図を見ると，第 3 図のようなデータのままではとらえようのなかった A, B 両区間のパタンの相違がはっきりとしかも定量的に浮び上ってくることがわかる．B 区間にくらべ A 区間ではでこぼこの“強さ”(intensity) の最大値が約 60% に減り，この点に相当する周波率が 70% に下っている．

最初に記した“定常不規則”という条件がなりたつ限り第 8 図によって路面のパタンが統計的に表現されたことになるのであるが，しかも重要なことはこの表現がその上を走る自動車の振動に関するインホメーションを直ちに与えるという点である．すなわち路面のパタンをスペクトル密度によって表わすと，与えられた自動車が一定の速度でその上を走るときの上下振動のパタンをつぎに記すように求めることができ，逆に後者（振動のパタン）から前者（路面のパタン）を推定する途もひらけてくる．

なお上に扱って路面は上に述べた光の例でいうと“連続スペクトル”に相当する．“輝線スペクトル”は路面電車の敷石面のような場合に現われるものと思う．このような周期性をもつ場合の計算式にはデルタかん数を導入しなければならないが，むしろ本問題ではこの種の状況に対しては第 2 図からの簡単な計算で目的が達せられるだろう．

4. 自動車の振動

光がフィルターを通ると色がつく，つまりスペクトル密度分布が変る．それと同じような概念をこの場合にも適用しよう．すなわち路面のデコボコはタイヤ下面を上下に動かし，この動きがダイヤやばねを通って車体の上下動をおこすが，後者のスペクトル密度はいくつかの仮定をおくと路面のスペクトル密度との間にきわめて簡単な関係をもつものである．

仮定条件として必要なのは，まず車輪の半径が路面のデコボコの曲率にくらべて十分に小さいということである．またタイヤが路面から離れないと前提する．こう考えるとタイヤ下面は路面のデコボコ通りに上下動すかとして計算を進めることができる．

さらに，タイヤから車体までは上下方向だけの 1 次元振動系とし，前後動その他の自由度による影響を無視する．この大きな仮定は第 1, 2 図に対するこれまでの多くの理論でもなされてきたものである．

最後にもう一つ“線型”という大きな仮定をおく，そうすると車体の上下動のスペクトル密度 $S(f)$ と路面のスペクトル密度 $S_1(f_1)$ とはつぎの簡単な式で結ばれる：

$$S(f)=|G(2\pi f)|^2\,S_1(f_1)\qquad(\mathrm{mm^2\cdot s})\qquad\cdots\cdots(4)$$

ここに f (cycle/s) は上下振動の周波数であって，路面 1m 当りのでこぼこの周波数 f_1 に対し明らかに，

$$f_1=(3.6/v)\,f$$

v(km/h) は走行速度

なる関係をもつ．

また $|G(2\pi f)|$ は自動車の上下動に関する伝達かん数のゲインである．これはタイヤ下面に f なる周波数の強制振動を与えたときのタイヤ下面と車体の振幅比に他ならない．たとえば第 9 図上のような台上試験[3] をすると

$$|G(2\pi f)|=y_0/x_0$$

として求められるものである．ここに x_0 y_0 は図示の x_0, y_0 の振幅．

なおスペクトル密度がわかると，それを全周波域にわたり積分することにより振幅 y の 2 乗平均値が求まる．すなわちつぎの重要な関係がなりたつ：

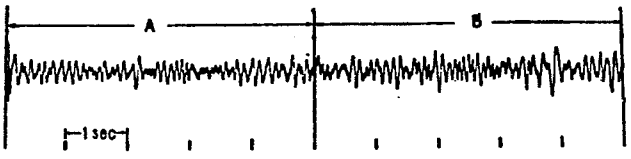
$$\overline{y^2}=\int_0^\infty S(f)\cdot df\qquad\cdots\cdots(5)$$

同じ関係は路面に対しても適用される．すなわちでこぼこ寸法 x の 2 乗平均値は

$$\overline{x^2}=\int_0^\infty S_1(f_1)\cdot df_1\qquad\cdots\cdots(6)$$

によって与えられるただ上に実例として扱った路面では x を既知として計算を進めたから (6) 式を応用する必要はない．第 6, 7 図の自己相関かん数曲線と縦軸との交点がこの値を与えることは (2) 式で $m=0$ とおくことにより直ちに首肯されよう．

さてつぎに一例について (4), (5) 式の計算を試みる．



第 11 図　振動記録の一例（v=40km/h の場合）

5. 自動車振動の例

自動車の共振特性 $|G|$ の一例が第9図下に示してある．これは同じ図に示す台上試験により，トヨペット試験車につき平尾，亘理氏らによって実測[9]されたものである．これと第8図とを (4) 式に適用して $S(f)$ を求め，(5) 式の積分を行うと，トヨペット試験車が市川橋を走るときの車体振動の振幅の2乗平均値 $\overline{y^2}$ が推定される．図上でこの計算を進め，rms (root mean square の略) 振幅 $\sqrt{\overline{y^2}}$ を求めると第 10 図の結果を得る．この図で B 路面における振幅が v=約 65 km/h で最大になるのは，ここで $|G|$ のピーク(共振点) と $S_1(f_1)$ のピークとが一致するためである．A 区間のものは図示の速度範囲ではまだこの共振状況に達しておらない．

前記のトヨペット試験車を実際に市川上で走らせて車体の床面振動を測る実験も，特に鉄道技術研究所松平錬，国枝正春氏らの御好意による協力を後て行うことができた．第 11 図がこの実験で得た車体振動記録の一例である．図の A, B は第5図の路面区間 A, B を示し，この図は試験車が第5図の CC 線上を東京側から千葉へ向けて走ったときのものである．

第 11 図の A と B をくらべると，何とはなしに A の方が静かであるように思われる．この相違をもつと定量的にとらえて第 10 図の計算値とつき合せるには，実例値について (2), (3) 式に相当する計算を行ってそのスペクトル密度 $S_R(f)$ を求め，記録計特性 $G_R(2\pi f)$ に対する補正，

$$S(f)=S_R(f)/|G_R(2\pi f)|^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

を行い，これを (5) 式へ適用して $\sqrt{\overline{y^2}}$ を求めなければならない．

非常に残念なことにはこの実験で用いた記録計の特性 $G_R(2\pi f)$ は 10 cps 近くの高い周波帯域では約 20 倍の感度をもつのに対し，本研究で大きな役割をする数サイクル以下の低域ではほとんど不感に近いものであった．さらに橋自体の振動もいくらか混入している可能性がある．このような事情から実験結果に計器補正を加えて第 10 図と同等の値へもっていくことは断念し，振動記録自体の rms 振幅だけを求めてみた．第 12 図がその結果を示す．図の縦軸は振動記録の寸法であって，第 10 図の寸法と定量的にはくらべられるいののである．しかし第 11 図に見られるような高周波帯域に $|G|$, $S_1(f_1)$, $|G_R|$ のピークがあってそれらが互に干渉し合う類の現象が大きくなければ，第 12 図をもって車体 rms 振幅の大体の程度を定性的に表わすものとみることができる．

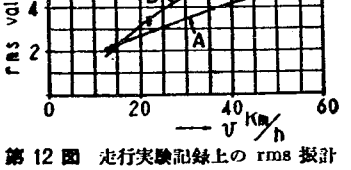
この見地から第 12 図を計算結果たる第 10 図とくらべると，記録計感度が第8,9図の $S_1(f_1)$ および $|G|$ のピークに対して僅かながら有効になってくる高速域（約 30 km/h 以上）では，両結果が定性的には似ているものと結論することができよう．すなわち rms 振幅の計算値（第10図）も実測値（第 12 図）も共に，30～50 km/h の走行速度では，A 路面で B 路面の値の 70～75% となり，舗装の良否が車体振動にかなりの影響を及ぼすことを示している．

6. あ と が き

この論文では舗装道路のでこぼこと，その上を 30～50km/h 位の速度で走る小型乗用車の上下振動振幅との関係に主として注目してきた．この領域では毎秒数サイクルまでの低周波振動が主たる役割をするものであり，(4)～(7) 式によって路面――車体――記録値の相互関係を計算することができた．いまこれらの式，数に (4) 式で何を既知とし何を未知とするかによって場合を一般的に分類するとつぎのようになる：

場　合	既知量	未知量	公　式
a. 振動推定	S_0, $\|G\|$	S	$S(f)=\|G(f)\|^2 S_0(f_0)$
b. 路面測定	S, $\|G\|$	S_0	$S_0(f_0)=S(f)/\|G(f)\|^2$
c. 車輛設計	S, S_0	$\|G\|$	$\|G(f)\|^2=S(f)/S_0(f_0)$

上に述べたのは a の立場のものであった．これに対し b は試験車による路面診断への途を示すものである．それは特定の速度で試験車 ($|G|$ 既知) を走らせて振動を記録 ($|G_R|$ 既知) し，この記録から (2), (3) 式と同じ計算によって路面のスペクトル密度 $S_1(f_1)$ やさらに (6) 式によって路面の粗さの 2 乗平均値を推定する方法である．この場合には $|G|$, $|G_R|$, v は路面診断の精度を最も高くし，しかも，(特に自己相関かん数の) 計算をなるべくらくにするようにとの見地から選定しなければならない．上記の類の実例の計算をいくつかの路面条件について試みるとこの選定指針は自ら明らかになるだろう．ついでながら，自動車や記録計の特性すら求



第 12 図　走行実験記録上の rms 振計

めないで試験車を走らせたのでは路面のパタンを客観的にとらえるすべがないし，時としては無意味に近いデータしか得られないおそれのあることは，上の議論からも明らかなことと思う．

つぎに上の分類表の C は路面のパタンと走行速度を与え，さらに車体振動のパタンを指定して自動車（タイヤ条件，ばねおよびダンパーの条件など）の条件を求めようとする立場を示す．各種の路面のパタンが本論文で提案したような表現を用いて定量的にわかってきた場合には，このような進み方も或は設計の一参考になるかも知れない．

以上はもっぱらタイヤ下面の“動き”と車体の“動き”とに注目してきた．ここで上には考えなかった“抵抗”（タイヤやばねのヒステリシスなど）の概念を導入すると，振動によるエネルギー消費へ計算を進めることができ，路面のパタンと走行抵抗とをある程度まで結びつける可能性が出てくると思う．また上記の計算から導かれる上下加速度と，新たに“質量”とを考慮に加えると，たとえば路面に対する自動車の槌打作用が求まる．このようにして路面や自動車部品の損耗をある程度まで定量的に論ずることなども可能かも知れない．

このようにいろいろな今後の応用が考えられる反面にいくつかの困難のあることも忘れてはならない．かりに上に記した多くの大きな仮定を許すことができるとしても，特に高周波帯域（毎秒 10 サイクル以上）の状況を問題にする場合には，計算も実験もうるさくなってくるようだ．この論文のように車体振動の振幅に注目する限りこの困難は大体さけることができる．しかしいま推論した応用分野や乗心地の検討では速度，加速度の振幅が問題になるだろう．そのようなときは高周波域が多少共計算に入ってくるから，慎重な実験的根拠を必要とする．たとえば質量をばねの上下2点に集中と仮定する類の公式を不用意に高周波帯域まで適用すると時として意外な誤をおこすおそれがあると思う．なぜなら実際の振動系は集中常数系ではなくて分布常数系であり，両者は高周波域の加速度振幅などに関しては全然違った答を与えるからである．またこのような条件下では機関その他から伝わってくる振動とか非線型性（特に飽和性）なども大きく作用するおそれがあるだろう．

このような事情から本論文のような理論の応用は自ら限定され，また特殊な計算機が実用化するまでは自己相関かん数を算出する手数も実用上の一欠点をなすものと思う．しかし一方において，うまく応用すればこれまで不可能だった新らしい見地から道路や自動車の問題を扱う．可能性もまた少くないと思う．この論文がそのような方向への今後の発達や討論のきっかけとなることを希望する次第である．

最後に，この研究ができたのはつぎの諸氏のおかげであることを特記して心から謝意を表わす：

1) 文部省試験研究費による自動車乗心地研究グループの諸氏，特に故小川太一郎先生の御好意．
2) 路面の資料に関し岡本教授，北川助手．
3) 自動車の資料に関し平尾，亘野両氏．
4) 走行試験に関し松平，国枝氏らの御援助．
5) 試験車提供に関しトヨタ自動車工業株式会社．
6) 試験運転につき平尾研究室の諸君．
7) 複雑な計算に関し丸山成治君．

なおこの研究は 1953-9-9 に第 3 回応用力学講演会 #416 として発表したものである．

文　献

1) James, Nichol,, Phillips, Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill, (1947)
2) 植村益次君はフーリエ解析によりこれを求めた．トヨタ技術，6，5.
3) 高橋安人，平尾収，亘理厚；生産研究，4 (1952) No. 7, 252

（東大生研）

（315 頁より続く） **自動車の安定性操縦性運動性（続）**

大きくなっているので転舵しても効かない）．

（3） 超過制動時の不規旋転を防ぐ最良の方法はブレーキの片効きを無くすることであることはいうまでもない．

（4） 雪や雨でおおわれた路面では，車輪の corn. force が普通の ½～¼ に減少するから，普通に走っていても，方向安定性及び舵の効きは非常に減少している．もし，少し急な曲線運動をして横滑り角を大きくすれば安定性も舵の効きも 0 となるから，超過転舵による不規旋転も起り易い．

（5） 雪や雨の路面で，特にその下り坂で，不規旋転が起るとする（原因は超過制動にしろ超過転舵にしろ）と，制動効果悪化のため重心は容易に停止しないから，重心廻りの旋転もそれだけ長く続くことになる．

（第5章終り）　（東京工業大学）

（301 頁より続く） **フォルクスワーゲンの性能（続）**

について行った．第1日は雨でなやまされたが Renault のパンク以外試験車に故障なく第2日は好天にて無事試験を終った．試験結果を第 10 表に示す．

6. 結　　言

標準型は借用した車であり，輸出型は機械試験所の車であるが，試験割当日程がつまっていた為充分試験する事が出来ず不十分なもので誠に恥しいものであるが，第1報として報告する．いずれ機関台上試験，部品試験，振動強度試験，分解検査等もあわせて検討し，再び報告したいと思っている．（後藤）

Methods for Measuring Load Transfer Through Vehicle Tires to the Road Surface

R. C. HOPKINS, *Electrical Engineer, and*
H. H. BOSWELL, *Highway Research Engineer,*
Division of Highway Transport Research, Bureau of Public Roads

● THE LOAD TRANSMITTED to the road surface through the tires of a vehicle in motion is not constant but varies in frequency and magnitude with several factors such as the speed of the vehicle, the smoothness of the road surface, tire pressure, and the vehicle's suspension system. An adequate means for obtaining a continuous record of the frequency and magnitude of these load variations has not been available.

The development of the electronic scale has not only made it possible to weigh vehicles in motion but also has made available a means for measuring the load transmitted to the road surface over a limited distance; thus, providing a means for checking the accuracy of other methods that could be employed on a vehicle to obtain a continuous record.

The results of studies made at the electronic scale (*1*) near Woodbridge, Virginia, showed that although most vehicles in motion registered close to their static weight and there was little error in the gross tonnage, the error was in excess of 5 percent for about 35 percent of the individual axles weighed. The dynamic weight was just as likely to be either heavier or lighter than the static weight, which suggests that when weighed in motion, a truck is undulating on its springs as it travels along the highway. The axle weight as recorded by the electronic scale would depend on the amplitude of this oscillation and what part of

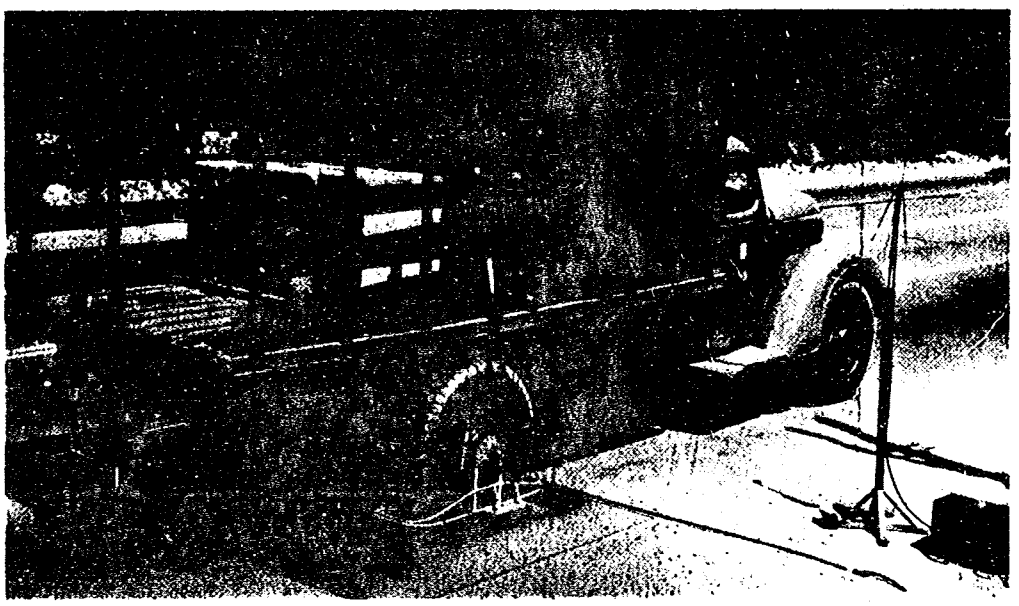


Figure 1. Test truck with experimental apparatus.

97

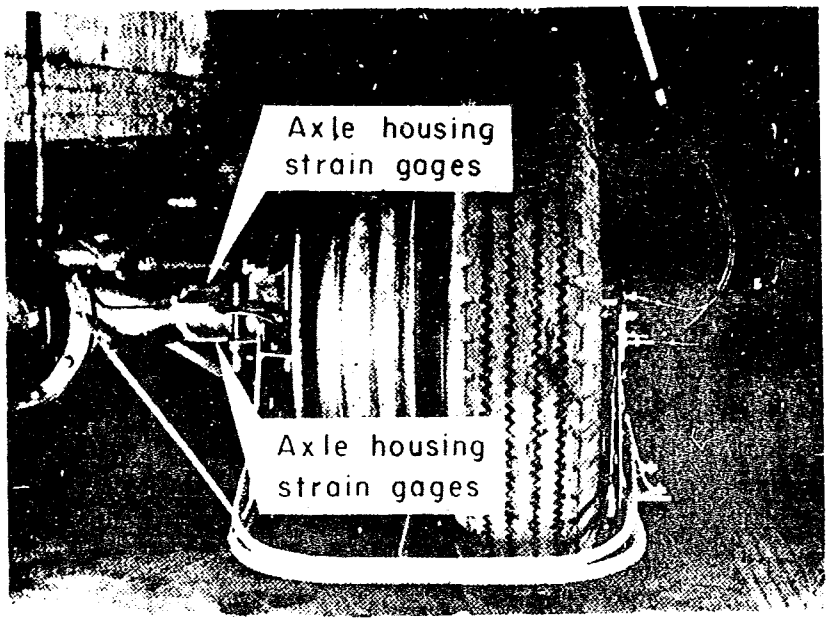


Figure 2. Axle housing strain gage detail.

the oscillation cycle was measured by the scale platform. The amplitude can be controlled somewhat by a smooth pavement surface, but the measured part of the cycle cannot be fixed and the scale platform will record random parts of the cycle. This would account for some axles being recorded as heavier, some lighter, and some equal to their static weight.

This report is the result of a study to determine, if possible, the best means for measuring the magnitude and frequency of these variations in weight. Some preliminary work had been done in connection with the WASHO Road Test (*2*). Information was also obtained to determine whether the electronic scale is recording the changes accurately, or whether there is an error in the basic design of the electronic scale.

The electronic scale used for these investigations was recently constructed in the northbound lane of US 1 about 1,000 ft south of the Virginia State Official Weighing Station near Woodbridge. The scale was constructed as a cooperative project between the Virginia State Highway Department, a manufacturer of electronic scales, and the Bureau of Public Roads in an effort to improve the accuracy of electronic scales and determine the feasibility of their use in connection with the enforcement of legal weight limits.

The scale has a 7-ft platform in the direction of traffic and extends across the right-hand lane of the 2 northbound lanes. It embodies all the improvements that were determined as a result of research conducted on the first electronic scale constructed for weighing vehicles in motion on the Shirley Highway in April 1951.

In conjunction with the electronic scale which records wheel loads at one place on a highway, three different methods for obtaining a continuous record of the magnitude and variations in the weight transferred by the tires to the road surface were developed and tested:

1. Axle-housing strain near the spring mounting.
2. The change of bulge or spread of the tire sidewalls directly above the center of contact with the pavement surface.
3. Changes in air pressure within the tire.

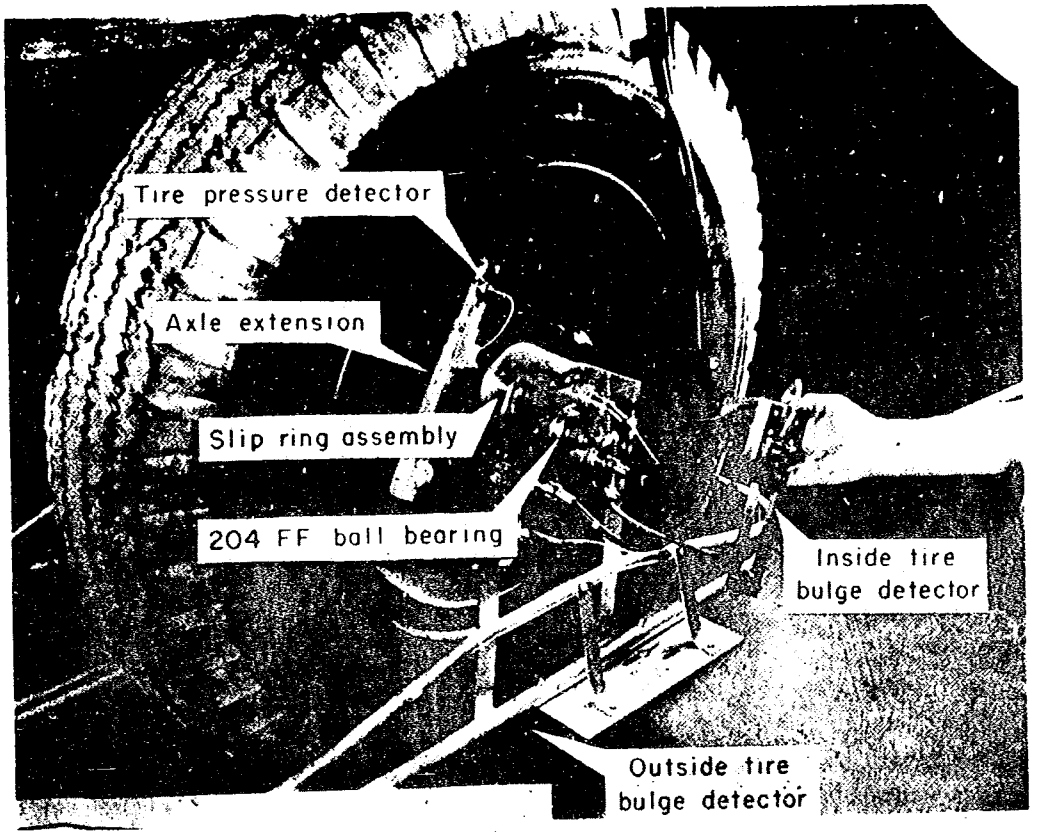


Figure 3. Tire load detectors.

The vehicle on which the instruments were mounted for the three types of measurements was a K-7 International single-axle truck with 9:00 x 20 tires (Figure 1). The inside tire on each dual wheel was removed to permit the installation of the detectors and the truck was loaded with four 1,000-lb concrete blocks in a manner to give a 9,000-lb rear-axle load. This produced a tire load of 4,500 lb which is equal to that allowed by the many states having an 18,000-lb single-axle load limit. The right-rear wheel only was instrumented.

The three different means of measuring the wheel load were employed simultaneously. It was not known which of the three methods would prove to be the best. A description of each method follows.

Axle-Housing Strain Method

Four strain gauges were used as the arms of a resistance bridge circuit to record the changes in axle-housing strain due to variations in the load on the wheel. The gauges were cemented to the rear axle housing just inside the spring mount, two gauges on top and two on the bottom (Figure 2). The axle housing is a continuous cantilever beam which transfers the load on the springs to the wheel resting on the pavement. Any change in the wheel load causes a change of strain in the axle housing.

The calibration of the axle strain gauges was easily done. The wheel of the vehicle was placed on a scale platform, a loadometer in this case, and the load changed on the bed of the truck. For each change in load the recording instru-

99

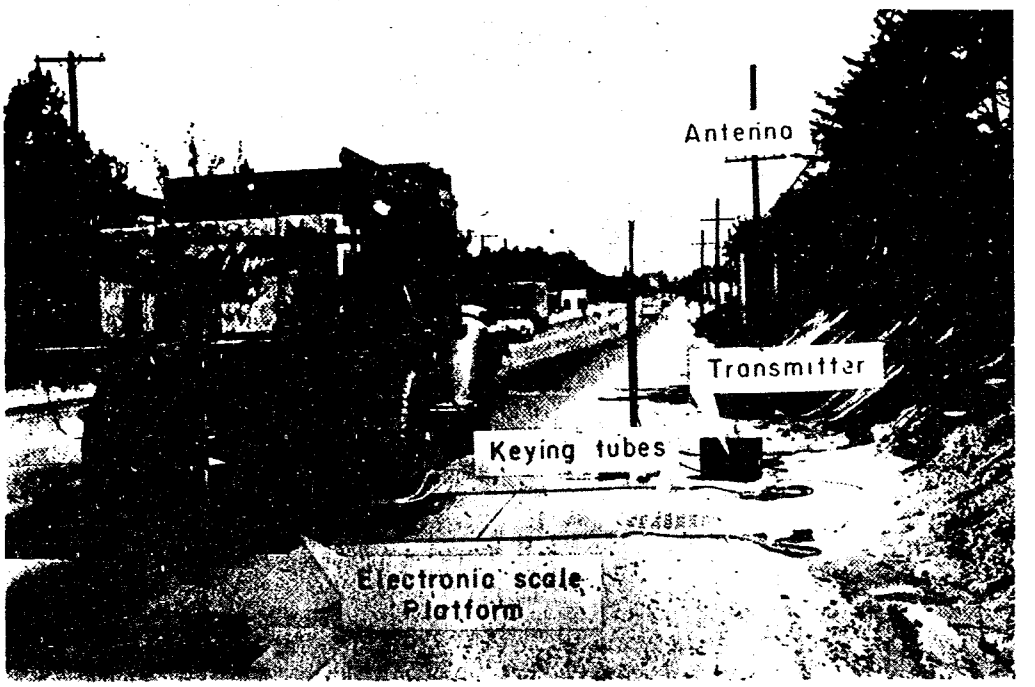


Figure 4. Truck on electronic scale.

ments recorded a corresponding change in strain, giving a calibration curve.

Although this is a simple means of recording the change in wheel load and worked very well in this study, there are factors which limit its usefulness. As the pavement surface becomes rough and the truck speed increases, the axle-housing strains are influenced not only by the load resting on the springs (the sprung load) but also by the weight or inertia of the truck undercarriage (the unsprung load). On a smooth surface and at slow speeds the unsprung load would have little or no effect because it would have practically no vertical motion or acceleration.

Another complicating factor is the addition of the second wheel of a dual assembly, which would change the lever arm of the cantilever axle-housing beam, depending upon which of the two tires was carrying the greater proportion of the momentary load. Therefore, the calibration would continually change due to the changing lever arm. On a smooth surface this would have little or no effect because each tire would carry the same proportion of the load, provided the inflation pressure of each was the same.

Bulge or Spread of Tire Sidewalls Method

Another method of determining wheel load changes was suggested by Endres and Bombard (*3*). As the load changes on a pneumatic tire the lower part of the tire casing bulges or spreads due to its contact with the pavement surface. This tire sidewall deflection can be calibrated in a similar manner as the axle-housing strain, with the addition of rotating the wheel between each change in load to allow the sidewall to attain its normal deflection for the given load as it would with the vehicle in motion.

The instrument used to measure the tire sidewall deflection was built in the Bureau of Public Roads laboratory (Figure 3) and consisted of two 1/16- x ¾-in. pieces of spring steel, 9½ in. long, riveted to a ¼- x 3- x 3-in. aluminum plate. The two pieces of spring steel were spaced ¾

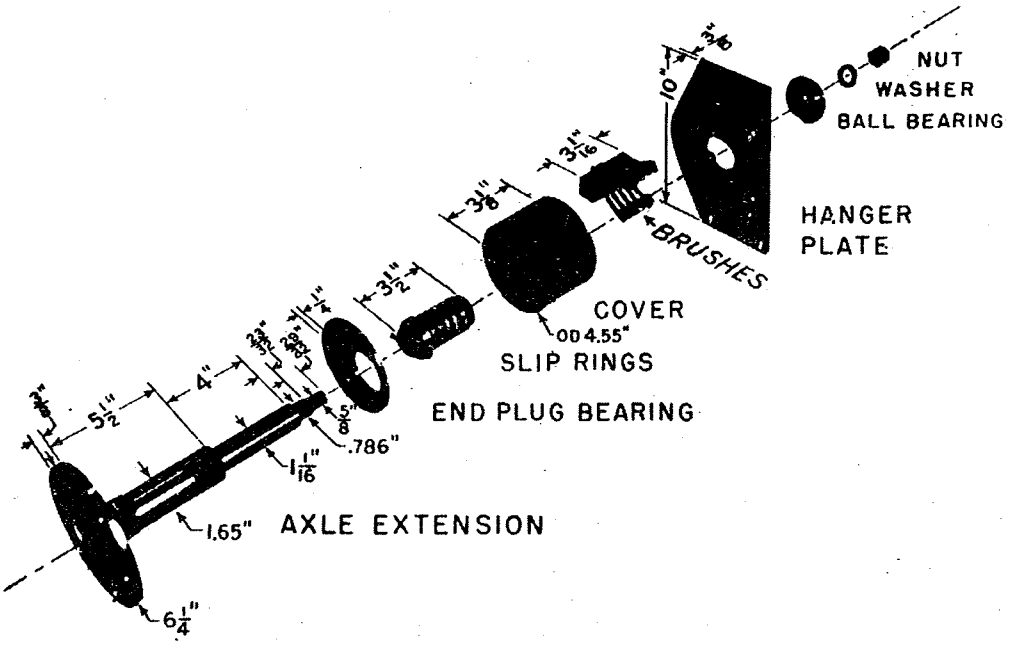


Figure 5. Slip ring assembly.

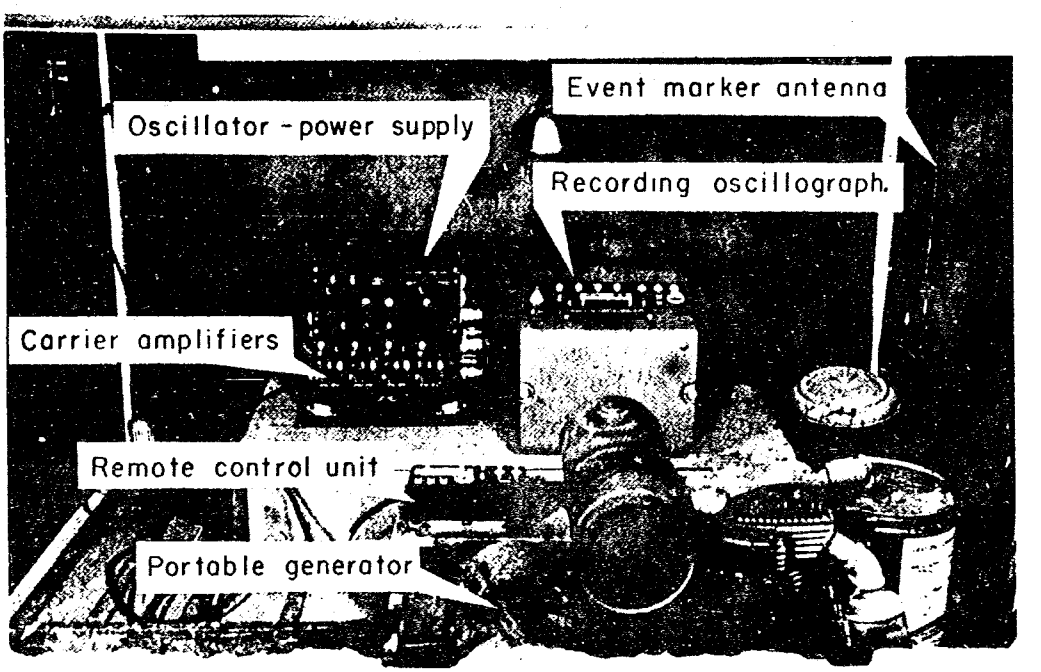


Figure 6. Recording instruments and generator.

in. apart to allow for the mounting of a 200 SFF ball bearing which acted as a roller running against the tire sidewall. The ball bearing was mounted between the two pieces of spring steel, which were used to measure the spread of the tire sidewall by the amount that the roller caused them to bend. Thus, when the plate was held rigid and the roller was in contact with the sidewall, any deflection of the sidewall would cause the spring steel straps to bend. Strain gauges were cemented to each side of both spring steel straps to provide a resistance bridge for measuring the amount of bend in the straps and, thereby, the bulge of the sidewall with increased load. The aluminum plate holding the steel straps was mounted vertically and bolted to an aluminum angle which was in turn bolted to a ¼- x 4- x 12-in. horizontal aluminum plate. Both the vertical and horizontal faces of the angle were slotted to permit an adjustment in the position of the roller with respect to the sidewall. A framework, made by bending ¾-in. thinwall tubing, was used to support the horizontal plate to which the sidewall bulge detector was attached. This plate was also slotted to permit a longitudinal adjustment. This framework was rectangular in shape with rounded corners and encircled the wheel.

A second framework of ½-in. tubing was placed above the ¾-in. framework. It had the same general shape as the latter, but the sides were raised 4 in. at the center to make it more rigid. The two frameworks were brazed together at each end. This frame was then hung from the truck spring mounting bolts on the inside of the wheel and from a special axle extension on the outside of the wheel.

The axle extension was built from a broken truck axle and was long enough to protrude about 3 in. beyond the plane of the tire sidewall (Figure 4). The face plates of the axle and the axle extension were placed back to back and held in position with the normal axle bolts. The end of the extension was trued with the axis of rotation by means of a micrometer dial before the nuts were tightened. A 204FF ball bearing was placed near the end of the extension to provide a mounting for the plate on which the framework was hung. Through this bearing, the framework was rigidly supported even though the axle extension rotated with the wheel. A sidewall bulge detector was placed on each side of the tire. Both were held in position by the rigid frame supported by the axle housing on the inside of the wheel and by the extension of the axle on the outside of the wheel (Figure 2). Electrical cables from the gauges on the bulge detectors were wired to sockets in the hanger plate so that the cables leading to the recording equipment could be connected or disconnected with ease.

An initial bending moment was placed in the spring steel straps to obtain negative as well as positive readings for deflections of the sidewalls. The roller of the bulge detector was first adjusted so that it was in contact with the sidewall. A ½-in. steel block was then placed between the roller and the tire. After the resistance bridge circuit had been balanced to a zero reading, the block was removed and the bulge detector repositioned until a zero reading was again obtained on the recorder. This assured contact between the roller of the detector and the tire for all expected sidewall deflections.

A linear calibration curve for the detectors used to measure the deflection of the sidewalls was obtained by a laboratory test calibration of the bulge detectors using a micrometer screw to move the roller of the detector through a 1-in. range. A greater displacement was not tried because the original ½ in. ± ½ in. was thought to be sufficient to record the expected range in the bulge, and this proved to be the case.

After the roller of the detector was in place and rolling along the tire sidewall as the truck wheel turned, a smooth path had to be provided on each side of the tire for the roller. Furthermore, that part of the tire in contact with the roller had to be trued because the plane of the tire sidewall was not exactly perpendicular to the axis of rotation. Otherwise, the wobble of the tire sidewall would have been recorded and could not have

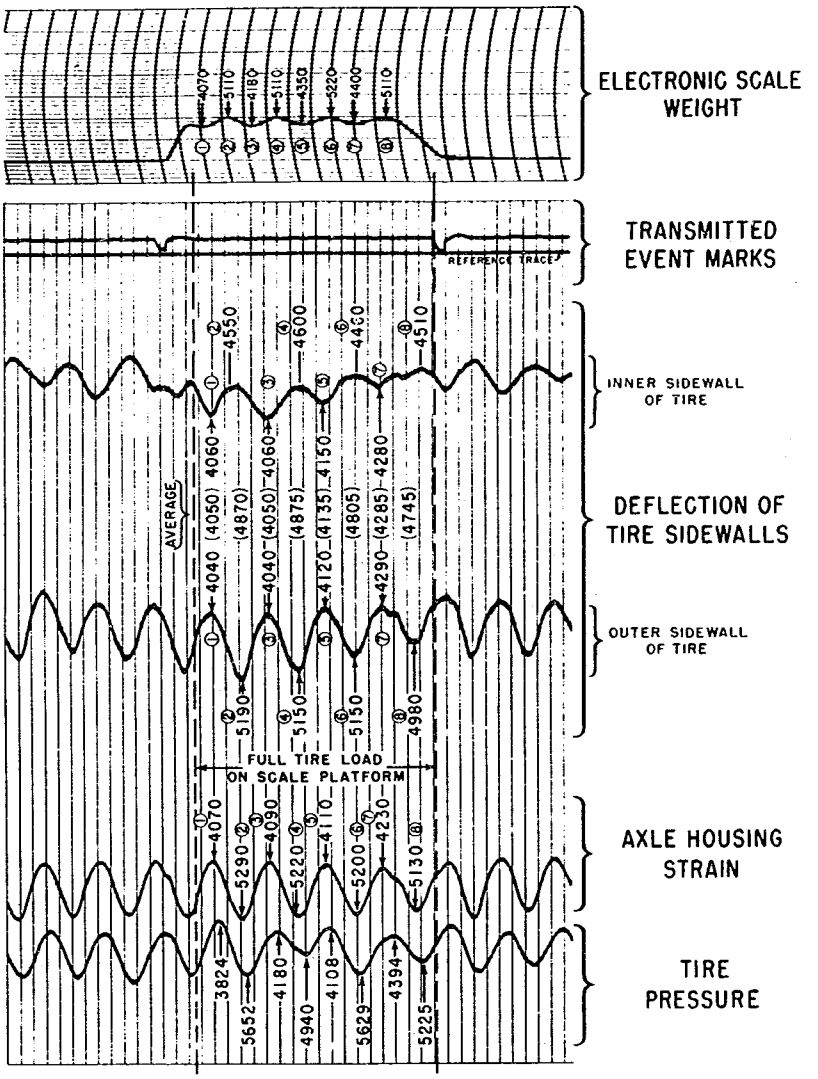


Figure 7. Oscillograms of wheel load measurements.

been distinguished from actual sidewall deflection due to a change in the load on the tire.

Using an emery wheel in a fixed position while the jacked-up truck wheel was rotating, a smooth and true path was provided on each side of the tire for the roller of a detector. The largest amount of rubber removed at any one point was less than 1/16 in. Some slight imperfections remained, however, and undoubtedly accounted for some error in the recordings.

Changes in Tire Air Pressure Method

The third method of measuring momentary changes in the load imparted to the tire was that of recording the changes in the air pressure within the tire. It was believed that the distortion of the tire casing at the point of contact

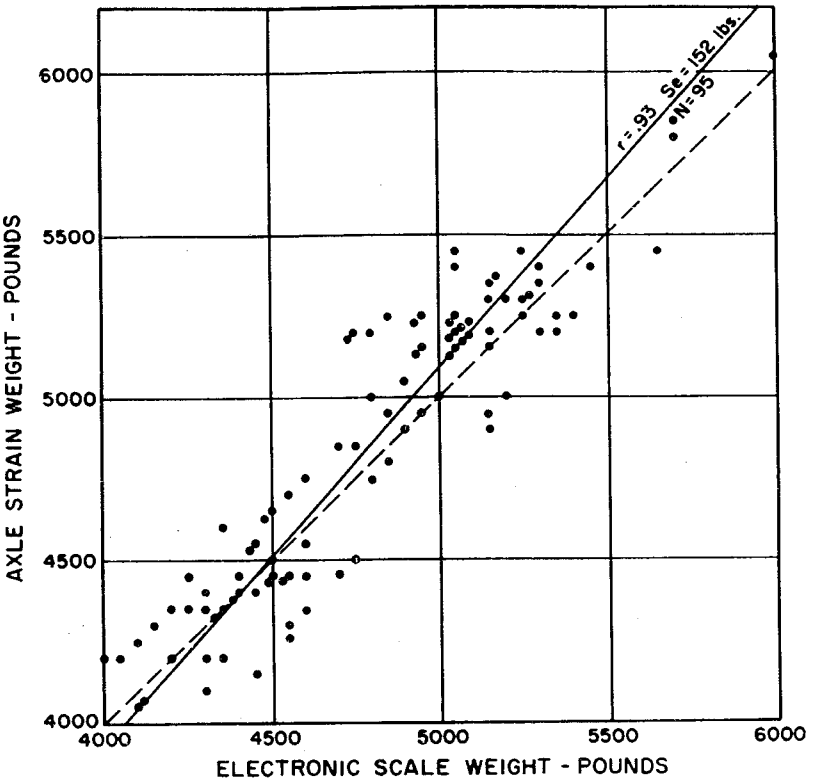


Figure 8.

with the pavement surface must cause a slight change in the volume of the inflated chamber of the tire. A change in volume would be accompanied by a change in pressure. The purpose of this phase of the study was to measure this change and calibrate its magnitude in terms of pounds of weight on the tire. There was considerable uncertainty as to whether the change would be great enough to measure accurately since no record could be found of any previous research on this phenomenon.

A Consolidated Electrodynamics Corporation pressure pickup gage type 4-311,-0-50 psi (gage) was used to record pressure changes (Figure 3). A hole was drilled in the valve stem of the tire tube and a short piece of ⅛-in. o.d copper tubing was soldered into the valve stem. This tubing was connected to the pressure pickup which was mounted so that the axis of the diaphram was parallel with the axis of rotation of the truck wheel, thus, minimizing the effect of angular and vertical accelerations on the diaphram. The tire was inflated to a pressure of 55 psi (gage) when cold.

The pressure pickup is of the unbonded strain gauge type and turned with the truck wheel. The electrical circuits, therefore, had to be transferred from the rotating wheel to the stationary bed of the truck. A slip-ring assembly of five rings was built for this purpose (Figure 5). The rings were concentric with and fastened to the axle extension. They rotated with the truck wheel while the brushes remained stationary and were anchored to the framework provided for the bulge detectors. The brushes were wired to a socket in the hanger plate to permit an easy connection with the recording equipment in the truck. A plastic cover was

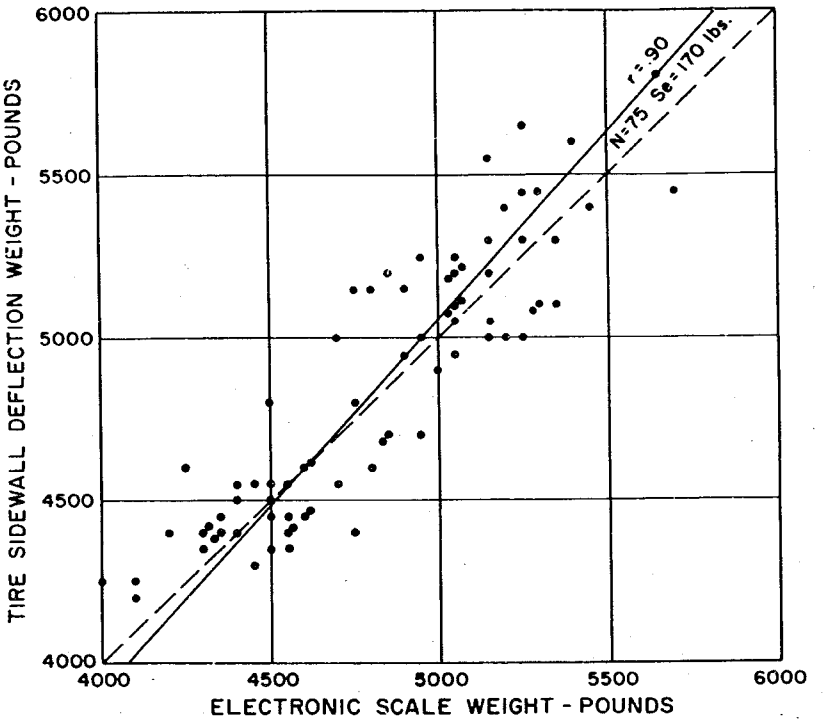


Figure 9

provided for the slip-ring assembly to keep dust and other foreign matter out.

Calibration of the pressure pickup was accomplished by comparing the pressure pickup oscillogram with the maximum and minimum weights recorded from the axle-housing strain and the tire sidewall deflection. It was not possible to make the calibration statically in the same manner (as for the axle and sidewalls) because the galvanometer readings for the same air pressure were different with the slip rings stationary and with them in rotation. The plotted points of comparison show some scatter due to normal imperfections in the slip rings and brushes used. The use of high quality instrument-type slip rings would permit a more accurate calibration and would also make an oscillogram more representative of the actual magnitude of pressure change due to a change in the load on a tire.

The recording instruments for the three tests were mounted on the forward end of the truck bed (Figure 6). The recording oscillograph (using mirror galvanometers) with its standard oscillator power supply and carrier amplifier circuits was used to record the data. Power to operate this equipment was furnished by a portable generator placed on the truck bed just behind the instrument shelter. The shelter was built of 3/16-in. tempered pressed fiber panels which provided protection from the elements and darkened the space so that the operator could better see the viewing screen on the oscillograph. The rear panel of the instrument shelter was removed (Figure 6) to allow a photographic view of the recording instruments.

All test runs included travel over the new electronic scale where simultaneous weight recordings were made for each run using a Brush amplifier and ink recorder. The Brush recorder was calibrated by placing known wheel and axle weights on the scale platform and recording these static weights. The static

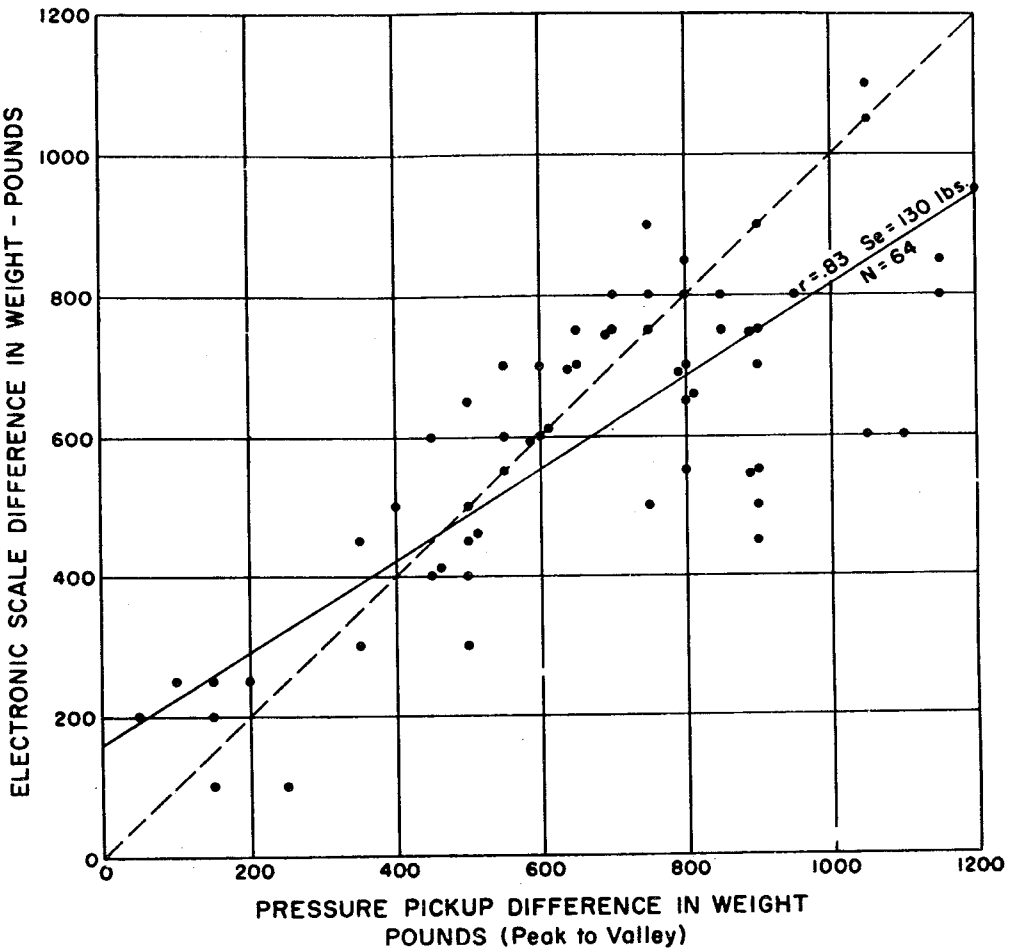


Figure 10.

wheel and axle weights were obtained by weighing at the nearby official weighing station. Only the right side of the vehicle passed over the platform because only the right-rear wheel was instrumented.

Pneumatic detectors were placed at the beginning and end of the scale platform to synchronize the recording of axle strain, tire bulge, and tire pressure with the wheel weight as recorded by the electronic scale. The air switches of these detectors keyed a radio transmitter (Figure 4).

When a tire rolled over a pneumatic detector the transmitter sent out a signal which was picked up by an antenna on the wall of the instrument shelter. The signal was rectified by a germanium diode whose output was connected to one of the galvanometers in the oscillograph. This made a pip on the oscillogram every time a pneumatic detector was depressed by a tire. The oscillogram of the wheel load measurements was thus marked so that it could be directly compared with the oscillogram of the electronic scale weight.

During trial runs across the scale platform, the difference between static wheel weight and the dynamic wheel weight (as well as the amplitude of the change in axle strain, tire bulge, and tire pressure) was too small to obtain the desired comparison between the various trial methods. Consequently, the load was

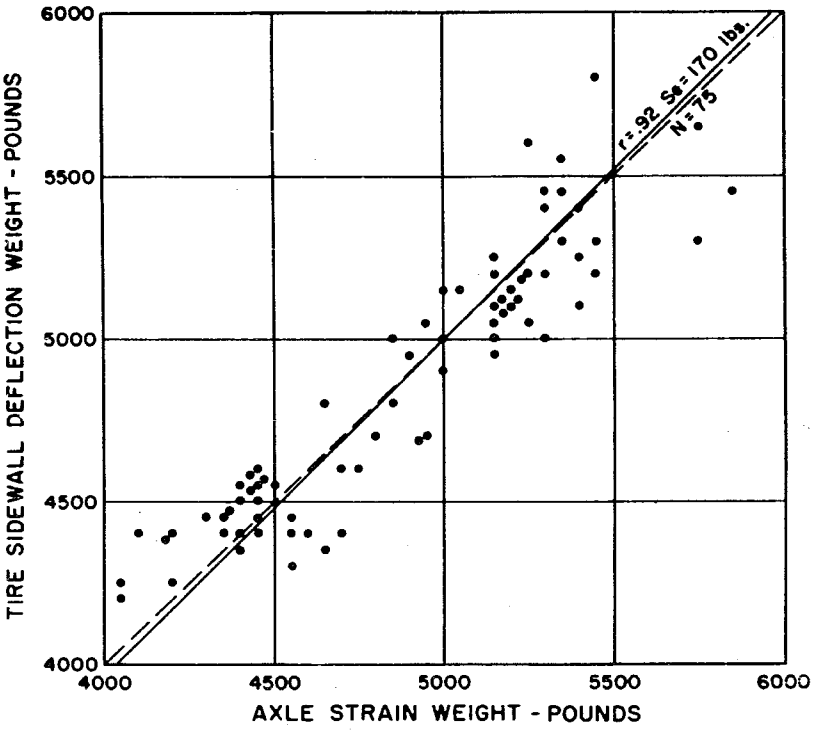


Figure 11.

artificially oscillated at all speeds by a man jouncing up and down on the truck bed in rhythm with the natural frequency of the truck springs. This gave definite peaks and valleys for a direct comparison of the various methods. During analysis of the data, an oscillogram peak for the instruments on the truck was compared with the simultaneous peak on the scale record; and, similarly, the valleys or low weights were compared. The additional weight of the man at the rear of the truck bed increased the static load on the right-rear tire to about 4,750 lb.

At creep speed the load was oscillated through 6 or 6½ cycles while the wheel was crossing the 7-ft scale platform. At 10 mph, 1 or 1½ cycles were recorded; and at 20 mph, about ½ cycle was recorded. Speeds above 20 mph were not included in this study because too many trips would have been necessary before a definite peak or valley was recorded on the electronic scale oscillogram. As speed appeared to have no effect within the range of the study, the data for all speed groups were combined for the analysis. Four trips each at creep speed and 5, 10, 15, and 20 mph were made across the scale platform.

Figure 7 is a copy of typical simultaneous oscillograms from the electronic scale and the truck instruments. It shows the varying weight caused by the undulating vehicle load and the continuous wheel load measurement by the three methods. The length of the scale platform is indicated on the wheel load oscillogram by the event marker trace.

The data taken from the oscillogram were plotted to show the correlation between the three methods of wheel load measurement with the electronic scale. The correlation is also shown between the weight as derived from axle-housing

strains and that derived from tire sidewall deflections (Figures 8, 9, 10, and 11). The static wheel load was 4,750 lb. These data were recorded while the truck was being artificially oscillated. The lines shown in Figures 8, 9, and 10 are the computed statistical regression lines, used to predict the weight recorded by the electronic scale from any of the other three recordings. The line on Figure 11 is the relationship between weights as shown by the axle-housing strain and the tire sidewall bulge.

The 45-deg line (dashed) represents a hypothetical line of perfect correlation on which all plotted points would fall if there were no difference in the weights as indicated by the various methods. The regression lines would approach the ideal case as the weighing methods increase in accuracy. Correlation coefficients (r) and standard errors of estimate (Se) were calculated for each of these sets of data and appear on the graphs. N on the graphs indicates the number of samples or observations.

Figures 8 and 9 show that the correlation is good, indicating that the electronic scale does record the actual weight which a moving load imposes on the platform with reasonable accuracy.

From records taken while the truck was traveling down the open highway without the man providing artificial oscillations, it was found that an oscillation of from 2½ to 4 cycles per second did occur depending upon the roughness of the pavement surface. The lower frequency with increased amplitude was on the rougher surfaces, and the higher frequencies occurred on the smoother surfaces.

Figure 10 shows that the correlation between the differences in weights as recorded by the pressure pickup compared with the electronic scale was less than for the other two methods probably because of the changing circuit constant of the slip-ring assembly. Calibration of this random change showed it to be equal to about 225 lb maximum, which would account for much of the observed error in this method.

Figure 11 shows that there was a high correlation between the weights as recorded by the axle-housing strain and the tire sidewall deflection.

Three means are being considered to improve the performance of the pressure pickup for future studies: 1. better quality slip rings; 2. differential-type pressure pickup (5 psi differential) which should give a strong signal output compared to any slip-ring noise; and 3. rotating pressure slip joint to eliminate the electrical slip rings between the pressure transducer and the recording equipment.

CONCLUSIONS

1. The most practical of the three methods for measurements involving all wheels of a vehicle is the tire pressure method. The changing lever arm for dual tires (when the axle-housing strain is measured) and the difficulty of mounting rollers between dual wheels make the other two methods less desirable. It is possible by incorporating refinements to record, continuously with acceptable accuracy, the force exerted on the pavement by each tire of a vehicle.

2. Pavement deflections can now be related to the actual load applied by a vehicle in motion.

3. The load transfer characteristics of the many different suspension systems now in common use on the undercarriage of trucks can now be compared.

4. Differences in weight of more than 5 percent between the static axle weight and the weight shown by the electronic scale with a stable platform are probably due to the undulating load of a vehicle in motion rather than to errors of the scale.

REFERENCES

1. NORMANN, O. K. AND HOPKINS, R. C., "Weighing Vehicles in Motion." *Public Roads*, Vol. 27, No. 1, April 1952.
2. "The WASHO Road Test," Highway Research Board Special Report Number 22, Section 5e, Load Shift, p. 170.
3. ENDRES, W. AND BOMBARD, J., "Vertical Forces Between the Road Surfaces and Tires." (Translated from the German by A. C. Benkelman, Bureau of Public Roads.)

研 究 速 報 (3)

路面の凹凸と自動車の振動の相関について

(昭 33. 10. 30 受理)

武 田 峻[1)]

1. まえがき

路面走行時の自動車の上下方向振動は第1図のように表わすことができる．路面凹凸 W は自動車の進行方向に測つた距離 X の函数として与えられる．自動車の各タイヤ接地点の受ける強制変位の間には，タイヤ配置と路面の凹凸特性から決められる函数関係が存在する．タイヤ接地点の受ける強制変位は自動車の走行速度に応じた時間変化を行う．このような強制変位によつて自動車に生じる振動は，自動車の構造諸元（質量分布・緩衝装置の配置・特性等）から決まる振動特性によつて左右される．この場合，各タイヤの受ける強制変位による振動が重畳されて，全体としての自動車の振動を形成する．

自動車の乗心地は，車体の振動によつて左右れさる．

自動車の部材に加わる走行荷重は，自動車の振動加速度による慣性力と路面から受ける反力によつて決められる．

2. 自動車の振動特性

2.1. 力学系

上下方向の振動に関して自動車を代表する力学系は，線形要素からなり，取扱う変位は微小変位であると仮定する．また，自動車は車体中心面に関して左右対称で，車体は剛体であると仮定する．このように仮定すれば，その力学系は第2図のように示される．

自由度 $\begin{cases} Z_0,\ \theta,\ \varphi & ;\text{ばね上質量の変位} \\ Z_{Ft}, Z_{FL}, Z_{Rr}, Z_{RL} & ;\text{各ばね下質量の変位} \end{cases}$

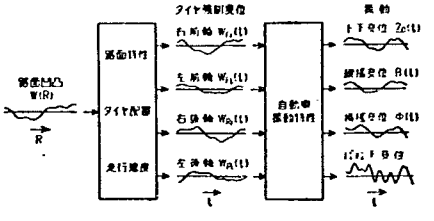
入力 $W_{Ft}, W_{FL}, W_{Rr}, W_{RL}$；各タイヤ接地点の変位

(添記号 F；前輪，R；後輪，r；右，L；左)

この力学系は，第3図に示すような2個の系に分離できる．

上下縦揺系 $\begin{cases} \text{自由度 } Z_0, \theta, Z_F, Z_R \\ W_F, W_R \end{cases}$

横揺系 $\begin{cases} \text{自由度 } \varphi, Z_F', Z_R' \\ \text{入力 } W_F', W_R' \end{cases}$



第 1 図 自動車の上下振動

ただし，第2図と第3図の系のばね下質量の変位・入力の間には，つぎの関係がある．

$$\left.\begin{aligned} &Z_F=\frac{1}{2}\{Z_{Ft}+Z_{FL}\},\quad Z_R=\frac{1}{2}\{Z_{Rr}+Z_{RL}\} \\ &Z_F'=\frac{1}{2}\{Z_{Ft}-Z_{FL}\},\quad Z_R'=\frac{1}{2}\{Z_{Rr}-Z_{RL}\} \\ &W_F=\frac{1}{2}\{W_{Ft}+W_{FL}\},\quad W_R=\frac{1}{2}\{W_{Rr}+W_{RL}\} \\ &W_F'=\frac{1}{2}\{W_{Ft}-W_{FL}\},\quad W_R'=\frac{1}{2}\{W_{Rr}-W_{RL}\} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2.2. 周波数応答

第3図に示した系の運動方程式は，構成要素の値を与えれば，導くことができる．上下縦揺系について4元2次の微分方程式，横揺系については3元2次の微分方程式となる．この方程式を解くことによつて，系の周波数応答が求められる．こゝでは，記号 $[FR]_{q_i q_0}(\omega)$ によつて，周波数応答函数を表示する．すなわち，

$q_i(t)=e^{i\omega t}$ $\quad (q_i$；入力)

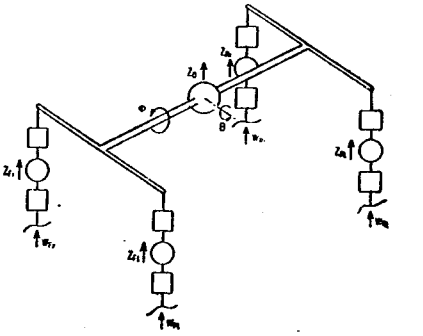
の場合には， (2)

$q_0(t)=[FR]_{iq_0}(\omega)\cdot e^{i\omega t}$ $\quad (q_0$；出力)

第3図に示した系の振動変位特性は，第1表に示した 14 個の変位に関する周波数応答函数で示される．系の振動速度・加速度についても，同様の表示が可能である．

3. 路面凹凸の特性

自動車の振動に関係する路面凹凸の特性には，凹凸の大きさと波長の二つが考えられる．これらは，路面の状態によつて変化するが，路面状態がほゞ一様と考えられるような区間内では，凹凸は大体一様に，かつ不規則に分布していると考えられる．このような状態は定常確率過程の成立条件を満足するものと考えられる．路面凹凸が定常確率過程で表わされゝば，凹凸の周波数特性は，パワスペクトルで表示される．



第 2 図 自動車の力学系

1) 富士精密技術研究所 航空部

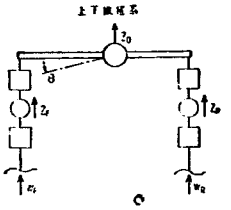
110

$$\left.\begin{aligned}&[PSD]_W(\Omega)=\{\sigma[W(R)]\}^2\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[ACC]_W(r)\cdot e^{-i\Omega r}\cdot dr\\&[ACC]_W(r)=\\&\frac{M[\{W(R+r)-M[W(R+r)]\}\{W(R)-M[W(R)]\}]}{\sigma[W(R+r)]\cdot\sigma[W(R)]}\\&\Omega=\frac{2\pi}{L}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

たゞし
- L；波長，M；平均値，σ；標準偏差，
- $[PSD]_W(\Omega)$；路面凹凸の円振動数 Ω に関するパワスペクトル
- $[ACC]_W(r)$；距離 r に関する自己相関係数

(3) 式をフーリエ逆変換して，$r\to 0$ にすれば，

$$\{\sigma[W(R)]\}^2=\int_0^\infty[PSD]_W(\Omega)\cdot d\Omega\qquad(4)$$



第 3 図　力学系の分離

(4) 式から判るように，$[PSD]_W(\Omega)$ は路面凹凸量の二乗平均中の波長 L の成分を与える．

4. 路面走行時の自動車の振動

4.1. 各タイヤの受ける路面凹凸量

前後車軸の車輪間隔が等しく，自動車が速度 u で直進すると考えれば，各タイヤの受ける路面凹凸量の間には，つぎの関係がある．

前後輪の間には，l を車軸間隔とすれば，

$$W_{Fr}(t)=W_{Rr}\left(t+\frac{l}{u}\right),\quad W_{Fl}(t)=W_{Rl}\left(t+\frac{l}{u}\right)\qquad(5)$$

左右輪の間には，d を車輪間隔とすれば，

$$\left.\begin{aligned}&E[W_{Fl}(t)]_{W_{Fr}}=W_{Fr}(t)\cdot[ACC]_W(d)\\&E[W_{Rl}(t)]_{W_{Rr}}=W_{Rr}(t)\cdot[ACC]_W(d)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

たゞし，$E[W_{Fl}(t)]_{W_{Fr}}$ は $W_{Fr}(t)$ の値を固定した場合の $W_{Fl}(t)$ の母集団平均値である．(6) 式の関係は路面凹凸が定常確率過程で定義され，かつ凹凸の性質が路面上の方向に拘らず同じ性質を持つと考えて導かれたものである．

(1), (5), (6) 式を用いて，各系の入力を $W_{Fr}(t)$ によつて，つぎのように表示することができる．

$$\left.\begin{aligned}&E[W_F(t)]_{W_{Fr}}=W_{Fr}(t)\cdot\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\\&E[W_R(t)]_{W_{Fr}}=W_{Fr}\left(t-\frac{l}{u}\right)\cdot\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\\&E[W_F'(t)]_{W_{Fr}}=W_{Fr}(t)\cdot\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\\&E[W_R'(t)]_{W_{Fr}}=W_{Fr}\left(t-\frac{l}{u}\right)\cdot\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

(7) 式で示される系の入力の，円振動数 $\omega=(2\pi f,\ f$；振動数) に関するパワスペクトル $[PSD](\omega)$ は；$\omega=\Omega u$

第 1 表　変位に関する周波数応答函数

系	入力	出力	周波数応答函数
上下横揺系	$W_F(t)$	$Z_F(t)$	$[FR]_{W_FZ_F}(\omega)$, $[FR]_{W_RZ_F}(\omega)$
	$W_R(t)$	$\theta(t)$	$[FR]_{W_F\theta}(\omega)$, $[FR]_{W_R\theta}(\omega)$
		$Z_F(t)$	$[FR]_{W_FZ_F}(\omega)$, $[FR]_{W_RZ_F}(\omega)$
		$Z_R(t)$	$[FR]_{W_FZ_R}(\omega)$, $[FR]_{W_RZ_R}(\omega)$
横揺系	$W_F'(t)$	$\varphi(t)$	$[FR]_{W_F'\varphi}(\omega)$, $[FR]_{W_R'\varphi}(\omega)$
	$W_R'(t)$	$Z_F'(t)$	$[FR]_{W_F'Z_F'}(\omega)$, $[FR]_{W_R'Z_F'}(\omega)$
		$Z_R'(t)$	$[FR]_{W_F'Z_R'}(\omega)$, $[FR]_{W_R'Z_R'}(\omega)$

および $[PSD]_{W_F}(\omega)=[PSD]_{E[W_F]}(\omega)$[2] の関係を (7) に用いて，次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&[PSD]_{W_F}(\omega)=[PSD]_{W_R}(\omega)\\&=\frac{1}{u}\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)\\&[PSD]_{W_F'}(\omega)=[PSD]_{W_R'}(\omega)\\&=\frac{1}{u}\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

4.2. $W_F(t)=e^{i\omega t}$ で示される路面を走行する場合の自動車の振動

この場合の上下縦揺系の応答は，第 4 図によつて示される．すなわち，

$$W_R(t)=W_F(t)\cdot e^{-i\omega\frac{l}{u}}=e^{i\omega\left(t-\frac{l}{u}\right)}\qquad(9)$$

系の応答は，たとえば Z_0 については，

$$\left.\begin{aligned}Z_0(t)&=\{[FR]_{W_FZ_0}(\omega)\\&\quad+[FR]_{W_RZ_0}(\omega)\cdot e^{-i\omega\frac{l}{u}}\}\cdot e^{i\omega t}\\&=[PF]_{WZ_0}(\omega,u)\cdot e^{i\omega t}\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

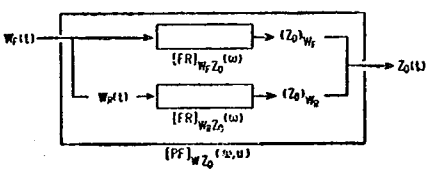
$[PF]_{WZ_0}(\omega,u)$(以下特性函数とよぶ)は，系の入力を W_F で代表した場合の，系の出力 Z_0 の周波数応答を示す．同様な表示は，横揺系についても可能である．これらを一括して第 2 表に示す．

4.3. 路面走行時の自動車の振動

一般に，力学系の入力がパワスペクトルで表示された場合の系の出力は，次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&[PSD]_0(\omega)=|G(\omega)|^2\cdot[PSD]_i(\omega)\\&G(\omega)：\text{系の周波数応答}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

路面走行時の自動車の振動を考えた場合には，前節で扱つた特性函数が $G(\omega)$ に相当すると考えられ，系の入力のパワスペクトルは (8) 式で与えられるので，たとえば出力 Z_0 については，



第 4 図　$[PF]_{WZ_0}(\omega,u)$

2) パワスペクトルを求める操作には平均化の操作を含むので，この式が成立する．

第 2 表　変位に関する特性函数

系	出力	特性函数
上下振動系	Z_0	$[FR]_{W Z_0}(\omega)+[FR]_{W Z_0}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
	θ	$[FR]_{W\theta}(\omega)+[FR]_{W\theta}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
	Z_F	$[FR]_{W Z_F}(\omega)+[FR]_{W Z_F}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
	Z_R	$[FR]_{W Z_R}(\omega)+[FR]_{W Z_R}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
横揺系	ϕ	$[FR]_{W\phi}(\omega)+[FR]_{W\phi}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
	Z_F'	$[FR]_{W Z_F'}(\omega)+[FR]_{W Z_F'}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$
	Z_R'	$[FR]_{W Z_R'}(\omega)+[FR]_{W Z_R'}(\omega)\cdot e^{-i\omega t/v}$

$$[PSD]_{Z_0}(\omega)=|[PF]_{W Z_0}(\omega,u)|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega) \tag{12}$$

系のすべての振動変位に関するパワスペクトルを一括して第 3 表に示す．同様な表示は，振動速度・振動加速度についても可能である．

5. 自動車の乗心地

乗心地の定義は不明確であるが，ここでは Janeway の提示した乗心地限界値を用いて検討を進める．Janeway の値は，振動が唯一つの正弦波から成る場合の値であるが，これを (12) 式の振動が連続スペクトルを持つ場合に拡張すれば，次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} A_\omega&=\left[\frac{[PSD]_{Z_0}(\omega)\cdot d\omega}{\frac{1}{2}\{a_\omega\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}\\ A&=\left[\int_0^\infty\{A_\omega\}^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ただし，

a_ω：ω における Janeway の乗心地限界値

A_ω：ω における乗心地レベル（ω〜$\omega+d\omega$ の領域において，振動 Z_0 が持つパワーと Janeway の限界値のパワーの比の平方根）

A：乗心地係数

A は綜合された乗心地を示す値で，$A=1$ の場合の乗心地が限界値となる．

6. 走行荷重

6.1. 走行荷重のパワスペクトル

走行荷重の一例として，前進方向に直交する車体の断面（x 断面）に作用する曲げモーメントを考えてみる．(x,y) を車体の座標とすれば，車体の質量分布は面密度 $\rho(x,y)$ で与えられる．車体の面密度と運動 (z_0,θ,ϕ) を与えれば，(x,y) 点における慣性力 $[IF]_{(x,y)}(t)$ が得られる．

$$\left.\begin{aligned}[IF]_{(x,y)}(t)&=C_{11}(x,y)\cdot\ddot{Z}_0(t)\\&\quad+C_{12}(x,y)\cdot\ddot{\theta}(t)+C_{13}(x,y)\cdot\ddot{\phi}(t)\\ Cij(x,y)&：\text{面密度分布から決まる常数}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

第 3 表　路面走行時の振動のパワスペクトル

変位	パワスペクトル
Z_0	$\|[PF]_{W Z_0}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
θ	$\|[PF]_{W\theta}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
ϕ	$\|[PF]_{W\phi}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_F	$\|[PF]_{W Z_F}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_R	$\|[PF]_{W Z_R}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_F'	$\|[PF]_{W Z_F'}(\omega,u)\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_R'	$\|[PF]_{W Z_R'}(\omega,u)\|^2\cdot\left\{\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)\right.$
Z_{FL}, Z_{FL}	$\left[\|[PF]_{W Z_F}(\omega,u)\|^2\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right.$ $\left.+\|[PF]_{W Z_F'}(\omega,u)\|^2\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right]\cdot\frac{1}{u}[PSD]_W(\Omega)$
Z_{RL}, Z_{RL}	$\left[\|[PF]_{W Z_R}(\omega,u)\|^2\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right.$ $\left.+\|[PF]_{W Z_R'}(\omega,u)\|^2\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right]\frac{1}{u}[PSD]_W(\Omega)$

車体が緩衝装置を介して路面から受ける外力 $[F]_k(t)$ は外力と慣性力の釣合い，および車体重心まわりのモーメントの釣合いを考えることにより，次式で示される．

$$\left.\begin{aligned}[F]_k(t)&=C_{21}(k)\cdot\ddot{Z}_0(t)+C_{22}(k)\cdot\ddot{\theta}(t)\\&\quad+C_{23}(k)\cdot\ddot{\phi}(t)\\ k&：\text{車輪を示す添記号}\\ C_{ij}(k)&：\text{面密度分布と車輪の配置から}\\&\quad\text{決まる常数}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

慣性力と外力が与えられれば，x 断面に作用する曲げモーメント $[BM]_{(x)}(t)$ は，これらを適当な積分領域で 2 回積分することによつて求められる．この場合，$\ddot{\phi}(t)$ の係数は 0 となり，したがつて次の表示が得られる．

$$\left.\begin{aligned}[BM]_{(x)}(t)&=C_{31}(x)\cdot\ddot{Z}_0(t)+C_{32}\cdot\ddot{\theta}(t)\\ C_{ij}(x)&：\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(16) 式によつて，系の振動加速度と曲げモーメントの関係が示されたので，第 5 章における特性函数の表示を，曲げモーメントに適用すれば，次式が得られる．

$$[PF]_{W[BM](x)}(\omega,u)=[PF]_{W\ddot{Z}_0}(\omega,u)\cdot C_{31}(x)+[PF]_{W\ddot{\theta}}(\omega,u)\cdot C_{32}(x) \tag{17}$$

したがつて，曲げモーメントのパワスペクトルは，次式で与えられる．

$$[PSD]_{[BM](x)}(\omega)=|[PF]_{W[BM](x)}(\omega,u)|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega) \tag{18}$$

さらに，x 断面の断面係数を与えれば，曲げ応力のパワスペクトルを求められる．

6.2. 走行荷重の分布

S. O. Rice によれば，定常確率過程 $q(t)$ において，平均値が 0 で，分布の確率密度函数が正規分布である場合には，次の関係が成立する．

$$\left.\begin{aligned}P(q)&=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}\\ N(q)&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}\right\}$$

ただし，$\sigma^2=\int_0^\infty [PSD]_q(\omega)\cdot d\omega$

$\sigma_1^2=\int_0^\infty \omega^2\cdot[PSD]_q(\omega)\cdot d\omega$ (19)

$P(q)$：$q(t)$ の確率密度函数

$N(q)$：正の傾斜をもつて値 q を超える毎秒当りの回数

$q>2\sigma$ の範囲の q の値に対して，$N(q)$ は q より大きな毎秒当りのピーク数の良好な近似値を与える．

(19) 式を走行荷重の場合に適用することにより，その荷重頻度分布特性を求めることができる．

7. 寿命の推定

自動車がその全使用期間中に受ける荷重の性質は，強度および疲労の面から自動車の寿命を決めるものである．第6章で得られた走行荷重のパワスペクトル表示から，寿命推定の一案が導かれる．

まず，対象となる自動車の使用目的および使用状態を考慮して，その走行路面状態・走行速度・走行時間を仮定する．全走行路面を m 個の路面状態に分類する．各々の路面状態 $W_i(i=1\sim m)$ においては，その凹凸のパワスペクトル $[PSD]_{W_i}(\Omega)$ は一定と考える．また，走行速度も n 個の領域に分類して，それを $u_j(j=1\sim n)$ で示す．路面 W_i を速度 u_j で走行する時間（単位秒）を T_{ij} で表わす．

$$T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}：\text{全走行時間} \qquad (20)$$

路面 W_i を速度 u_j で走行する場合の走行荷重のパワスペクトル・ピーク値分布は，第6章の表示を用いて次のように表わされる．

$$[PSD]_{W_i(u_j)}(\omega)_{ij},\quad N(q)_{ij} \qquad (21)$$

(20), (21) 式を用いて，全使用期間中にうける q より大きな荷重ピークの回数は，つぎのように示される．

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\cdot N(q)_{ij} \qquad (22)$$

(22) 式は，全使用期間中の荷重頻度を与える式で，この値から，車体の疲労に関する寿命が決められる．

つぎに，全使用期間中に k 回起ると考えられる荷重 q_k は，次式で与えられる．

$$k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\cdot N(q_k)_{ij} \qquad (23)$$

k 個の値は，平均値 q_k のまわりに正規分布をしているので，q_k より大きな荷重 q が全使用期間中に少くとも1回おこる確率 $P(q>q_k)$ は，次式で与えられる．

$$P(q>q_k)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad (24)$$

(24) 式は，最大荷重の生ずる確率を与える式で，この値から，大きな荷重による車体破損に関する寿命が決められる．

8. あとがき

この報告では，一般調和解析の手段によつて，路面の凹凸特性と自動車の構造諸元から，路面走行時の自動車の振動・乗心地・走行荷重を与える式（第3表・(13), (18), (19) 式）を導いた．さらに，自動車の寿命推定の一方法を提示した．

ただし，これらの結論は，いくつかの仮定に基いて得られたものである．このうち，路面凹凸の定常確率過程化・力学系の線形化・車体の剛体化の3仮定は，さらに検討を必要とするものである．

また，路面凹凸の測定・実車走行試験による検討も行う必要がある．

〔昭和 33 年 10 月 9 日　自動車技術会講演会にて発表〕

参考文献

(1) J. H. Walls, J. C. Houbolt, H. Press; Some measurements and powerspectra of runway roughness. N. A. C. A. Tech. Note 3305, (1950).
(2) N. Wiener; Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series. Wiley, N. Y., (1950).
(3) S. O. Rice; Mathematical analysis of random noise., Bell Sys. Tech. Jour., Vol. 23, 24.
(4) H. S. Tsien; Engineering cybernetics. McGraw Hill, N. Y., (1954).
(5) R. N., Janeway; Passenger vibration limits. S. A. E., Aug. (1948).
(6) 穂坂衛，石川次郎；乗心地の量的表現とその計測方法，鉄道業務研究資料，8 巻 17 号，(1951).
(7) 武田峻；路面走行時の自動車の振動，運輸技術研究所報告，(本年度刊行予定)

(499 頁より続く)

機械の計画的保守体系（続）

のクレーンの停止の減少が見られ，1956 年は 1955 年に対して補修作業に対する消費時間が約 30% も減少した．機械修理において，この準備の基本をうまく適用すれば例えばこのような成果が得られるわけである．

7. 結　　言

海外の各工場において，長い間科学的基礎の下で展開されたこの計画的保守体系の効果が広く認められていた．しかしこの領域にも，着々と進展しつつある機械並びに自動化に従がつて，より以上の諸問題が先じて来ている．これらを解明する事により，ともすれば過少評価されている保守の本質に対して，学問的基礎に基ずく研究も可能になるであろう．

文　　献

1. Lange, H. "工業経営における計画的予防修理" Verlag-Teknik, Berlin (1956).
2. Bstängig Merert. "計画的予防修理による運転停止時間の 51.4% 減少" 工業経営 (1957). 16～17pp. および 69～71pp.

路面走行時の自動車の振動

武田 峻*

Vibrations of Car Taxiing On the Road

Shun Takeda

In this report, a technique for analyzing vibrations of car taxiing on the road was developed. Results obtained were;

1) The characterics of car vibrations was prescribed by the power-spectral-densiry of vibration amplitudes. This power-spectral density was determined as a function of car dimensions, taxiing speed, and power-spectral density of road height variations.

2) The riding comfort of car was determined from the power-spectral-density of vibration amplitudes.

3) In respect to dynamic loads and stresses of car, the power-spectral-density of loads and stresses were determined. From these power-spectral densities, statistical properties of loads and stresses were obtained.

概 要

この報告は，路面凹凸による自動車の振動の解析方法を提示したものである．要約すれば，つぎのとおりである．

i) 路面凹凸による自動車の振動状態は，振動のパワスペクトルで規定される．これは，自動車の構造諸元（振動特性・車輪の配置）・走行速度と，路面凹凸のパワスペクトルの関数として表示される．

ii) 振動のパワスペクトルから，自動車の乗心地を与える式を導いた．

iii) 路面凹凸による自動車の走行荷重・応力の状態を規定するパワスペクトルを導いた．走行荷重・応力の統計的性質は，このスペクトルから導くことができる．

* 航空部

目 次

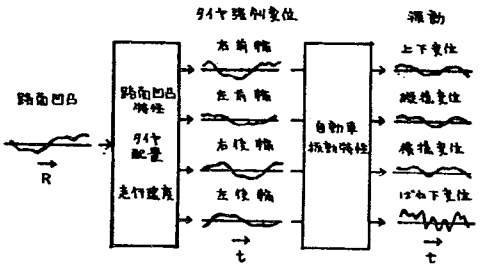
1) まえがき
2) 記 号
3) 自動車の振動特性
4) 路面凹凸の特性
5) 路面走行時の自動車の振動
6) 乗心地
7) 走行荷重・応力
8) 結 論
9) 参考文献
10) 附 録
11) 註

1. まえがき

路面走行時の自動車の振動は，乗心地・走行荷重を決めるものである．この振動に影響するものは，自動車の構造諸元（とくに，質量分布・タイヤ配置・緩衝装置特性・タイヤ振動特性等）・走行速度と，路面凹

凸の特性である．それゆえ，自動車の設計にあたつては路面凹凸の特性を考慮する必要があるし，一方，自動車道路の設計においても自動車の振動特性・走行速度に対する配慮を必要とする．このような考え方に従つて，この報告は路面走行時の自動車の振動に関して，自動車と路面について一貫した解析方法を採り上げたわけである．

路面走行時の自動車の振動は，つぎのような現象と考えられる．まず，自動車は各タイヤの接地点で路面凹凸量による強制変位をうける．この強制変位は，自動車の走行速度に応じた時間変化を行う．このような強制変位によつて自動車に生ずる振動は，自動車の質量分布・タイヤおよび緩衝装置の配置・特性等から決まる振動特性によつて左右される．この場合，各タイヤの受ける強制変位の間には，自動車のタイヤ配置・走行速度，および路面凹凸の特性からきまる関数関係が存在する．一方，各タイヤの受ける強制変位による振動は，たがいに重畳されて，全体としての自動車の振動を形成する．この関係は図—1によつて示される．



図—1　路面走行時の自動車の振動

る．図—1において，入力と考えられる路面凹凸および出力としての自動車の振動の特徴は，それらが連続した不規則変動と考えられることである．

一般調和解析は，連続不規則変動を行う力学系の解析に適した手段であり，この場合，変動の周波数特性はパワスペクトルによつて表示される．それで，この報告では，一貫した解析方法として一般調和解析を採り上げたわけである．すなわち，自動車の振動の周波数特性を知れば，入力としての路面凹凸のパワスペクトル表示を与えることにより，各走行速度における自動車の振動のパワスペクトルが求められる．路面走行時の乗心地は振動のパワスペクトルから導かれる．自動車の走行荷重・応力の状態を規定するパワスペクトルも同様な手段により求めることができる．

振動・走行荷重・応力等の統計的性質は，それぞれのパスペクトルが判ればそれから導くことができる．

2. 記　号

A ：乗心地係数

$A(\omega)$ ：円振動数ωにおける乗心地レベル係数

$a(\omega)$ ：円振動数ωにおける乗心地限界値（Janeway の提示した値）

$[ACC]_w(\gamma)$：路面凹凸の距離γに関する自己相関係数

$[BM]_x(t)$：車体の$x-x$断面に作用する曲げモーメント

C_{ij} ：常数（$i,j=1,2,3,$）

d ：車輪間隔

$E[\ ]$ ：母集団平均値

F_{Fr}, F_{Fl}, F_{Rr}, F_{Rl} ：車体が緩衝装置から受ける力

$[FR]_{q_0 q_i}(\omega)$ ：入力q_0と出力q_iに関する周波数応答

$G(\omega)$ ：周波数応答関数

I_x, I_y ：ばね上質量の重心点まわりの縦揺および横揺慣性モーメント

$[IF]_{(x,y)}(t)$ 車体の(x,y)点に作用する慣性力

L ：路面凹凸の波長

l_0 ：車軸間隔

l_1 ：ばね上質量重心点と前車軸の水平距離

l_2 ：ばね上質量重心点と後車軸の水平距離

$M[\ ]$ ：平均値

M_0 ：ばね上質量

$2M_F$, $2M_R$：前車軸系および後車軸系のばね下質量（独立懸架方式）

$N[q]$ ：変数$q(t)$が正の勾配をもつて，ある値qをこえる毎秒当りの回数

O-XY ：基準水平路面

o-xy ：車体の基準水平面（原点は，ばね上質量の重心点にとる）

$P(W)$ ：Wの確率密度関数

$P_1(q>q_k)$：qが少くとも1回，q_kより大きな値を生じる確率

$[PSD]_w(\Omega)$ ：路面凹凸のΩに関するパワスペクトル密度関数

$[PSD]_q(\omega)$ ：$q(t)$の円振動数ωに関するパワスペ

クトル密度関数

$[PF]_W q_0(\omega)$

：路面走行時の自動車の振動に関する特性関数（第 5.10 式参照）

q, ：変数

q_i, q_o ：力学系の入力および出力

R, γ ：距離

$[SF]_x(t)$ ：車体の x-x 断面に作用する剪断力

T ：走行時間

t, τ ：時間変数

u ：自動車の走行速度（X軸方向）

$W(X, Y)$：路面上の (X,Y) 点における凹凸量

$W(R)$ ：路面上の直線 R_O 上の位置 R における凹凸量

$W_{Fr}(t)$, $W_{Fl}(t)$, $W_{Rr}(t)$ $W_{Fl}(t)$

：路面凹凸によるタイヤ接地点の変位

$W_F(t)$, $W_R(t)$, $W_{F'}(t)$, $W_{R'}(t)$

：上下縦揺系および横揺系の，路面凹凸によるタイヤ接地点の強制変位

X, Y ：路面に関する座標

x, y ：車体に関する座標

$Z_O(t)$ ：ばね上質量重心点の上下変位

$Z_{Fr}(t)$, $Z_{Fl}(t)$, $Z_{Rr}(t)$, $Z_{Rl}(t)$

：ばね下質量の上下変位

$Z_F(t)$, $Z_R(t)$, $Z_{F'}(t)$, $Z_{R'}(t)$

：上下縦揺系および横揺系のばね下質量の上下変位

$\rho(x,y)$ ：車体の (x,y) 点における面密度

σ, $\sigma[\ ]$ ：標準偏差

$\sigma_{S(x_0)}$, $\sigma_{B(x_0)}$

：x_0 断面の剪断応力，曲げ応力

$\theta(t)$ ：ばね上質量の縦揺角変位

$\phi(t)$ ：ばね上質量の横揺角変位

ω ：円振動数

Ω ：路面の単位長さに含まれる凹凸の波の円振動数$\left(\frac{2\pi}{L}\right)$

$dott(\cdot)$ ：時間微分

3. 自動車の振動特性

路面凹凸による自動車の振動は，主としてつぎの運動の自由度をもつものと考えられる．

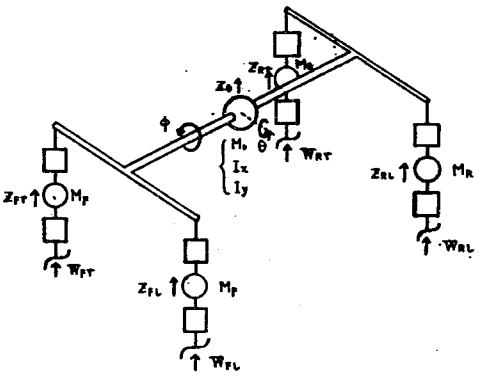
- ばね上質量の上下変位
- 〃 縦揺角変位
- 〃 横揺角変位
- ばね下質量の上下変位

ただし，車体は剛体と考え車体の弾性変形による振動は考えない．車体の前後変位・横変位，片揺角変位は路面凹凸による車体の上下振動に直接関係しないので無視する．車輪の支持は，完全な独立懸架方式とする．

上記の振動を引起す入力としては，路面凹凸によるタイヤ接地点の強制変位が考えられる．

3.1) 自動車の力学系

路面凹凸による自動車の振動を代表する力学系を図—2に示す．この系における自由度および入力は，つぎのとおりである．



図—2 自動車の力学系

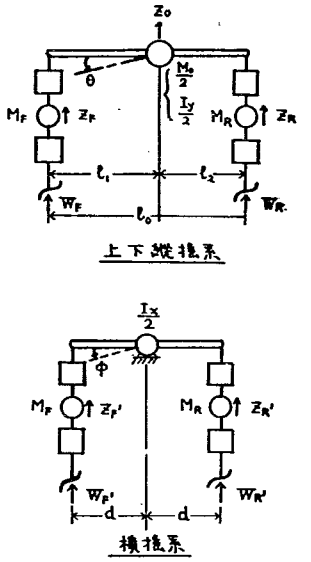
- 自由度：Z_O, θ, ϕ, Z_{Fr}, Z_{Fl}, Z_{Rr}, Z_{Rl}
- 入　力：W_{Fr}, W_{Fl} W_{Rr}, W_{Rl}

この系は，一般に非線型要素（たとえば，アブソーバー・タイヤ等）を含む．また，変位が大きい場合には，力学系がくずれて他の自由度との間に連成を生じ，その結果，系の運動方程式は非線型となる。(たとえば，大きな横揺角変位により，ばね下質量の横方向変位を生じ方程式は非線型となる.)ここでは，系の要素がすべて線型要素からなり，系の変位が微小である場合について解析を進める．（このように，系を線型化すれば，重畳の原理が適用できる.）

3.2) 上下縦揺系と横揺系の分離

自動車は一般に車体中心点をとおる前後方向の垂直

面に関して左右対称と考えられる．この場合，系が線型であれば，図—3に示す2個の系に分離できる．



図—3 分 離 系

上下縦揺系 { 自由度：Z_O, θ, Z_F, Z_R ／ 入 力：W_F, W_R

横 揺 系 { 自由度：ϕ, $Z_{F'}$, $Z_{R'}$ ／ 入 力：$W_{F'}$, $W_{R'}$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} Z_F(t)&=\tfrac{1}{2}\{Z_{Fr}(t)+Z_{Fl}(t)\}\\ Z_R(t)&=\tfrac{1}{2}\{Z_{Rr}(t)+Z_{Rl}(t)\}\\ Z_{F'}(t)&=\tfrac{1}{2}\{Z_{Fr}(t)-Z_{Fl}(t)\}\\ Z_{R'}(t)&=\tfrac{1}{2}\{Z_{Rr}(t)-Z_{Rl}(t)\}\end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} W_F(t)&=\tfrac{1}{2}\{W_{Fr}(t)+W_{Fl}(t)\}\\ W_R(t)&=\tfrac{1}{2}\{W_{Rr}(t)+W_{Rl}(t)\}\\ W_{F'}(t)&=\tfrac{1}{2}\{W_{Fr}(t)-W_{Fl}(t)\}\\ W_{R'}(t)&=\tfrac{1}{2}\{W_{Rr}(t)-W_{Rl}(t)\}\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

3·3) 上下縦揺系・横揺系の周波数応答

図—3に示した2個の系は，その構成要素の特性を与えれば，運動方程式がたてられる．一般に，系の入力 $q_i(t)$ と出力 $q_o(t)$ の間には，

$$\left.\begin{aligned} &q_i(t)=e^{i\omega t} \text{ とすれば，}\\ &q_o(t)=[FR]_{q_iq_o}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

ここで，$[FR]_{q_iq_o}(\omega)$ は周波数応答関数とよばれるもので，系の振動の周波数特性を表示している．この表示方法に従えば，たとえば，系の変位の周波数特性は，14個の周波数応答関数で示される．

表—1 変位に関する周波数応答函数

系	入 力	出 力	周波数応答函数
上下縦揺系	$W_F(t)$	$Z_O(t)$	$[FR]_{W_FZ_O}(\omega)$
			$[FR]_{W_RZ_O}(\omega)$
		$\theta(t)$	$[FR]_{W_F\theta}(\omega)$
			$[FK]_{W_R\theta}(\omega)$
	$W_R(t)$	$Z_F(t)$	$[FR]_{W_FZ_F}(\omega)$
			$[FR]_{W_RZ_F}(\omega)$
		$Z_R(t)$	$[FR]_{W_FZ_R}(\omega)$
			$[FR]_{W_RZ_R}(\omega)$
横揺系	$W_{F'}(t)$	$\phi(t)$	$[FR]_{W_{F'}\phi}(\omega)$
			$[FR]_{W_{R'}\phi}(\omega)$
	$W_{R'}(t)$	$Z_{F'}(t)$	$[FR]_{W_{F'}Z_{F'}}(\omega)$
			$[FR]_{W_{R'}Z_{F'}}(\omega)$
		$Z_{R'}(t)$	$[FR]_{W_{F'}Z_{R'}}(\omega)$
			$[FR]_{W_{R'}Z_{R'}}(\omega)$

これらの周波数応答関数は運動方程式から導くことができる．また，同様な取扱いによつて，これらの自由度の速度・加速度についても，周波数応答関数を定義することができる．

4. 路面凹凸の特性

4.1) 考え方の基礎

自動車の振動に関係する路面凹凸の特性には，凹凸の大きさと波長の二つが考えられる．これらは路面の状態，すなわち，舗装の有無・種類・施工仕上げの程度・保守の状況等により変化する．しかしながら，これらの状況がほぼ同一と考えられるような一連の路面区間を取上げれば，この区間内の凹凸の特性はつぎのようなものと考えられる．

i) 凹凸は不規則連続変動と考えられる．それで，路面上の任意の点 (X,Y) における凹凸量 $W(X,Y)$ は，X と Y を変数にもつ確率変数で，$W(X,Y)$ が $W\sim W+\Delta W$ の間にある確率は，$P(W)\Delta W$ で示される．$P(W)$ の値は，路面の状態によつて変化するが，多数の確率的因子に支配される場合には，その形は正規分布に近づくことが期待される．

ii) この区間内の任意の直線 Ro 上の凹凸量 $W(R)$ について，つぎの量を考えてみる．

$$M[W(R)]=\frac{1}{R_0}\int_0^{R_0}W(R)\,dR$$

$$\sigma[W(R)]=\left\{\frac{1}{R_0}\int_0^{R_0}\{W(R)-M[W(R)]\}^2dR\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$[ACC]_W(\gamma)=\frac{\frac{1}{R_0}\int_0^{R_0}\{W(R+\gamma)-M[W(R+\gamma)]\}\{W(R)-M[W(R)]\}dR}{\sigma[W(R+\gamma)]\cdot\sigma[W(R)]} \tag{4.1}$$

前述したような路面区間では，$M[W(R)]$，$\sigma[W(R)]$ は直線 R_0 の選び方にかかわらず一定値をとり，$[ACC]_W(\gamma)$ も直線 R_0 の選び方に無関係で単に γ のみの関数となる．

iii) このような路面凹凸の特性は，距離 R を変数とする定常確率過程の性質にあてはまる*．さらにこの場合は，直線 R_0 の位置・方向にも無関係と考えられるから，凹凸の特性は路面に関して等方性をもつと考えられる．

iv) 上に述べたような，路面凹凸を定常確率過程として取扱う考え方は，すでに，いくつかの論文において採用されている考え方である**．この報告においても，この考え方に従つて凹凸の特性を表示する．

4.2) 路面凹凸特性の表示

路面凹凸が定常確率過程で表わされるとすれば，凹凸の周波数特性は，パワスペクトルによつて表示される***．

$$[PSD]_W(\Omega)=\{\sigma[W(R)]\}^2\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[ACC]_W(\gamma)\cdot e^{-i\Omega\gamma}d\gamma \tag{4.2}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{L} \tag{4.3}$$

(4.2) 式をフーリエ逆変換すれば，

$$[ACC]_W(\gamma)=\frac{1}{\{\sigma[W(R)]\}^2}\int_0^{\infty}[PSD]_W(\Omega)\cdot e^{i\Omega\gamma}d\Omega \tag{4.4}$$

(4.4) 式において，$\gamma\to o$ にすれば，(4.1) 式から判るように，

$$[ACC]_W(o)=1$$

であるので，

$$\{\sigma[W(R)]\}^2=\int_0^{\infty}[PSD]_W(\Omega)\,d\Omega \tag{4.5}$$

$[PSD]_W(\Omega)$ は，(4.5) 式から判るように，路面凹凸量の二乗平均（パワ）中の波長 $L\left(=\frac{2\pi}{\Omega}\right)$ の成分を与えるものである．これは，$W(R)$ を実測することにより，(4.1) (4.2) 式を用いて導くことができる．

5. 路面走行時の自動車の振動

自動車の振動特性と路面凹凸の特性が判れば，路面走行時の自動車の振動を求めることができる．

5.1) 各タイヤの受ける路面凹凸量

自動車の前輪と後輪は，路面上の同一直線上を移動する．このことは，前車輪間隔と後車輪間隔が等しく，また自動車が直進運動する場合にのみ厳密に成立する事項であるが，近似的にはあらゆる場合に成立つものと考えてよい．このことから，各タイヤの受ける路面凹凸量の間には，つぎの関係が導かれる．

i) 前後タイヤの間には，

$$\left.\begin{aligned}W_{Fr}(t)&=W_{Rr}\left(t+\frac{l_o}{u}\right)\\W_{Fl}(t)&=W_{Rl}\left(t+\frac{l_o}{u}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

すなわち，後車輪タイヤ接地点の強制変位は，前車輪タイヤのそれに比べて l_o/u だけの時間遅れがある。

ii) 左右タイヤのうける路面凹凸量の間には，つぎの関係がある．路面上の直線 R_0 上の一点 (R) における凹凸量 $W(R)$ が与えられた場合に，それから γ だけ離れた点における凹凸量 $W(R+\gamma)$ の値は，路面凹凸が確率過程で示されるので一義的には決まらない．しかし，(4.1) 式で定義される $[ACC]_W(\gamma)$ を用いれば，次のように表示される．

$$E[W(R+\gamma)]_{W(R)}=W(R)\cdot[ACC]_W(\gamma) \tag{5.2}$$

すなわち，γ だけ離れた点の凹凸量は，その母集団平均値のみが定義される．(5.2) 式を左右タイヤの場合に適用すれば

$$\left.\begin{aligned}E[W_{Fl}(t)]W_{Fr(t)}&=W_{Fr}(t)\cdot[ACC]_W(d)\\E[W_{Rl}(t)]W_{Rr(t)}&=W_{Rr}(t)\cdot[ACC]_W(d)\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

iii) 右前輪タイヤ接地点の路面凹凸量を与えた場合の各タイヤのうける凹凸量は，(5.1) (5.3) 式から求められる．表—2に示す．上下縦揺系・横揺系の入力は，(3.2) 式と表—2から求められる．

---

* 定常確率過程については参考文献 1) 参照
** 参考文献 2)
*** 一般調和解析・パワスペクトル表示については，参考文献 1), 3), 4), 5), 6), 参照

表—2　タイヤ接地点の凹凸量

	前　　輪	後　　輪
右側	$W_{Fr}(t)$	$W_{Fr}(t-lo/u)$
左側	$W_{Fr}(t)\cdot [ACC]_W(d)$	$W_{Fr}(t-lo/u)\cdot [ACC]_W(d)$

上下縦揺系

$$\left.\begin{aligned} &E[W_F(t)]_{W_{Fr}(t)} \\ &\quad = W_{Fr}(t)\cdot\frac{1+[ACC]_W(d)}{2} \\ &E[W_R(t)]_{W_{Fr}(t)} \\ &\quad = W_{Fr}\left(t-\frac{lo}{u}\right)\cdot\frac{1+[ACC]_W(d)}{2} \end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

横　揺　系

$$\left.\begin{aligned} &E[W_F'(t)]_{W_{Fr}(t)} \\ &\quad = W_{Fr}(t)\cdot\frac{1-[ACC]_W(d)}{2} \\ &E[W_R'(t)]_{W_{Fr}(t)} \\ &\quad = W_{Fr}\left(t-\frac{lo}{u}\right)\cdot\frac{1-[ACC]_W(d)}{2} \end{aligned}\right\}$$

すなわち，$W_F(t)\sim W_R'(t)$ はその母集団平均が定義される．

iv)　(5.4) 式で示された各系の入力のパワスペクトルはつぎのようにして求められる．

たとえば $E[W_F(t)]_{W_{Fr}(t)}$ については，$[ACC]_W(d)$ が d のみの関数であるから．

$$[PSD]_{E[W_F]}(\omega) = [PSD]_{W_{Fr}}(\omega)\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2 \quad (5.5)$$

一般に，変動のパワスペクトルを求めることは，変動の位相関係を無視して，変動の二乗平均の周波数成分を求めることである．この位相の消去は，(4.1) 式において自己相関を求めるときの平均化の操作で行われる．それゆえ，母集団平均と時間平均が同じ意味をもつ定常確率過程においては，つぎの関係が得られる．

$$[PSD]_{W_F}(\omega) = [PSD]_{E[W_F]}(\omega) \quad (5.6)$$

一方，(5.5) 式における $[PSD]_{W_{Fr}}(\omega)$ は，路面凹凸によるタイヤ接地点の強制変位の円振動数 ω に関するパワスペクトルで，これは (4.2) 式で与えられる路面凹凸のパワスペクトルと，つぎの関係で結ばれている．

$$\int_0^\infty [PSD]_{W_{Fr}}(\omega)\cdot d\omega = \left\{\sigma[W_{Fr}(t)]\right\}^2 = \left\{\sigma[W_{Fr}(R)]\right\}^2 = \left\{\sigma[W(R)]\right\}^2 = \int_0^\infty [PSD)_W(\Omega)d\Omega,\ \omega = u\Omega$$

それゆえ，

$$[PSD]_{W_{Fr}}(\omega) = \frac{1}{u}\cdot[PSD]_W(\Omega) \quad (5.7)$$

(5.5) ～ (5.7) 式を用いて，系の入力のパワスペクトルは，つぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} &[PSD]_{W_F}(\omega) = [PSD]_{W_R}(\omega) \\ &\quad = \frac{1}{u}\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega) \\ &[PSD]_{W_F'}(\omega) = [PSD]_{W_R'}(\omega) \\ &\quad = \frac{1}{u}\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega) \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

5.2)　$W_F(t)=e^{i\omega t}$ で示される路面における上下縦揺系の振動

(5.1) 式より，

$$W_F(t) = e^{i\omega t}$$

ならば，

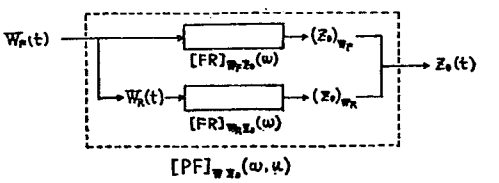
$$W_R\left(t+\frac{lo}{u}\right) = e^{i\omega t}$$

このような路面における自動車の振動は，表—1に定義した周波数応答関数を用いて，つぎのように表わされる．

$$q_o(t) = [PF]_{Wq_o}(\omega, u)\cdot e^{i\omega t} \quad (5.9)$$

ただし，

$$[PF]_{Wq_o}(\omega, u) = [FR]_{WFq_o}(\omega) + [FR]_{WRq_o}(\omega)\cdot e^{-i\omega\frac{l_o}{u}} \quad (5.10)$$



図—4

$[PF]_{Wq_o}(\omega,u)$ は，図—4から判るように，系の入力を $W_F(t)$ で代表させた場合の，系の出力 q_o に関する周波数応答を与えるもので，以下特性関数とよぶことにする．

5.3)　$W_F'(t)=e^{i\omega t}$ で示される路面における横揺系

表—3 変位に関する特性函数

系	出力	特性函数
上下縦揺系	Z_O	$[FR]W_{FZ_O}(\omega)+[FR]W_{RZ_O}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
	θ	$[FR]W_{F\theta}(\omega)+[FR]W_{R\theta}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
	Z_F	$[FR]W_{FZ_F}(\omega)+[FR]W_{RZ_F}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
	Z_R	$[FR]W_{FZ_R}(\omega)+[FR]W_{RZ_R}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
横揺系	ϕ	$[FR]W_{F\phi}(\omega)+[FR]W_{R\phi}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
	$Z_{F'}$	$[FR]W_{FZ_{F'}}(\omega)+[FR]W_{RZ_{F'}}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$
	$Z_{R'}$	$[FR]W_{FZ_{R'}}(\omega)+[FR]W_{RZ_{R'}}(\omega)\cdot e^{-i\omega\, l_0/u}$

の振動

5.2) 節におけると同じ過程で特性函数が求められる.

$$[PF]W_{q_0}(\omega,u)=[FR]W_{F'q_0}(\omega,u)+[FR]W_{R'q_0}(\omega,u)\cdot e^{-i\omega\frac{l_0}{u}} \qquad (5.11)$$

表—3 に，系の変位に関する特性関数を表示する. 系の速度・加速度に関する特性関数も，同様にして求められる.

5.4) 系の入力がパワスペクトルで与えられた場合の系の出力

系の入力が定常確率過程であれば，入力の特性はパワスペクトルで表示される. この場合，系の入力と出力の間には，つぎの関係が成立する*.

$$[PSD]q_0(\omega)=|G(\omega)|^2[PSD]q_i(\omega) \qquad (5.12)$$

ここに，$G(\omega)$ は系の入力と出力に関する周波数応答関数である.

5.5) 路面走行時の自動車の振動

路面走行時の上下縦揺系・横揺系の入力のパワスペクトルは，(5.8) 式で与えられる. 各系の振動特性を表わす特性関数は，表—3 に示された. 系の入力と出力の関係は，(5.12) 式で与えられる. これらの関係を用いて，路面走行時の自動車の振動のパワスペクトルはつぎのように表示さされる.

上下縦揺系においては,

$$[PSD]_{q_0}(\omega)=|[PF]W_{q_0}(\omega,u)|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]W(d)}{2}\right\}^2[PSD]_W(\Omega)$$

横揺系においては,

$$[PSD]_{q_0}(\omega)=|[PF]W_{q_0}(\omega,u)|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]W(d)}{2}\right\}^2[PSD]_W(\Omega) \qquad (5.13)$$

(5.13) 式によつて，上下縦揺系および横揺系の出力 (Z_O, θ, ϕ, Z_F, Z_R, $F_{F'}$, $Z_{R'}$) が与えられる

ばね下重量の変位 (Z_{Fr}, Z_{Fl}, Z_{Rr}, Z_{Rl}) のパワスペクトルは，つぎのようにして求められる.

(3.1) 式を書きなおして

$$\left.\begin{aligned}Z_{Fr}(t)&=Z_F(t)+Z_{F'}(t)\\Z_{Fl}(t)&=Z_F(t)-Z_{F'}(t)\\Z_{Rr}(t)&=Z_R(t)+Z_{R'}(t)\\Z_{Rl}(t)&=Z_R(t)-Z_{R'}(t)\end{aligned}\right\}$$

ゆえに,

$$M[Z_{Fr}(t)\cdot Z_{Fr}(t+\tau)]=M[Z_F(t)\cdot Z_F(t+\tau)]M[Z_{F'}(t)\cdot Z_{F'}(t+\tau)]+M[Z_F(t)\cdot Z_{F'}(t+\tau)]+M[Z_{F'}(t)\cdot Z_F(t+\tau)]$$

この式の第3・4項の値は，Z_F と $Z_{F'}$ の間に相関がないので0になるから*,

*参考文献 5), 6)

*本文末尾註 1) 参照

表－4　路面走行時の振動のパワスペクトル

変　位	パ　ワ　ス　ペ　ク　ト　ル
Z_O	$\left\|[PF]_{WZO}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
θ	$\left\|[PF]_{W\theta}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]w(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
ϕ	$\left\|[PF]_{W\phi}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_F	$\left\|[PF]_{WZF}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_R	$\left\|[PF]_{WZR}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
$Z_{F'}$	$\left\|[PF]_{WZF'}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD[_W(\Omega)$
$Z_{R'}$	$\left\|[PF]_{WZR'}(\omega,u)\right\|^2\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\cdot[PSD]_W(\Omega)$
Z_{Fr}, Z_{FL}	$\left(\left\|[PF]_{WZF}(\omega u)\right\|^2\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2+\left\|[PF]_{WZF'}(\omega,u)\right\|^2\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right)\cdot\frac{1}{u}[PSD]_W(\Omega)$
Z_{Rr}, Z_{RL}	$\left(\left\|[PF]_{WZR}(\omega,u)\right\|^2\cdot\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2+\left\|[PF]_{WZR'}(\omega,u)\right\|^2\cdot\left\{\frac{1-[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2\right)\cdot\frac{1}{u}[PSD]_W(\Omega)$

$$M[Z_{Fr}(t)\cdot Z_{Fr}(t+\tau)]=M[Z_F(t)\cdot Z_F(t+\tau)]+M[Z_{F'}(t)\cdot Z_{F'}(t+\tau)]$$

この式の両辺に，(4.1)・(4.2) 式を適用して，つぎの関係が導かれる．

$$[PSD_{Z_{Fr}}(\omega)=[PSD]_{Z_F}(\omega)+[PSD]_{Z_{F'}}(\omega) \tag{5.14}$$

同様の取扱いが，Z_{Fl}・Z_{Rr}・Z_{Rl} についても行われる。

(5.13)・(5.14)　式で与えられる系の振動変位のパワスペクトルを一括して表－4 に示す．

振動速度・加速度に関するパワスペクトルについても，同様の表示が可能である．

これらの出力は，定常確率過程の性質をもち，入力としての路面凹凸の分布が正規分布である場合には，その分布も正規分布となる．

5.6)　振動の統計的性質*

路面の走行時の振動のパワスペクトルが求められれば，振動の二乗平均・振巾分布等の統計的性質が求められる．

i)　振動の二乗平均　振巾の二乗平均については，(4.5) 式と同様に，つぎのように与えられる．

$$\{\sigma[q_o]\}^2=\int_o^\infty[PSD]q_o(\omega)\cdot d\omega \tag{5.15}$$

ii)　振動振巾の分布　振動振巾が正規分布をもつらば，平均値が 0 である場合には，その分布はつぎの式で与えられる．

$$P(q_o)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q_o^2}{2\sigma^2}} \tag{5.16}$$

ただし，

$\sigma=\sigma[q_o]$

iii)　$q_o(t)$ が，正の傾斜をもつて，ある値 q_o をこえる毎秒当りの回数は，つぎの式で与えられる．

$$N[q_o]=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma}e^{-\frac{q_o^2}{2\sigma^2}} \tag{5.17}$$

ただし，

*振動の統計的性質に関しては，参考文献 4) を参照した．

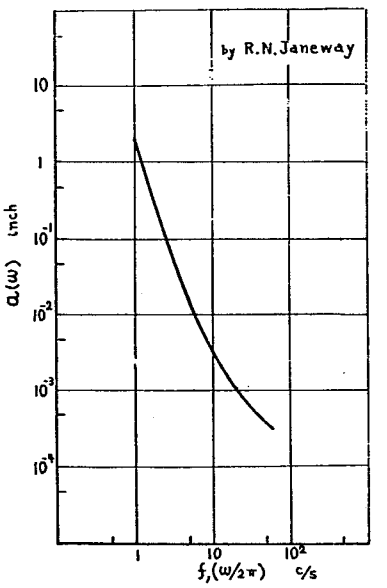
$$\sigma_1=\left[\int_0^\infty \omega^2\cdot[PSD]q_0(\omega)\cdot d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.18)$$

(5.17) 式は，$q_0>2\sigma$ を満足する q_0 に対しては，毎秒当りの q_0 より大きい極大値の数の良好な近似値を与える．

6. 乗心地

路面走行時の自動車の振動のパワスペクトルから，乗心地はつぎのように推定される．乗心地は，人間の心理的反応を含むので厳密に定義することはできないが，ここでは R.N.Janeway によつて提示された上下変位に関する乗心地限界を採用して解析をすすめる．*

JAneway の乗心地限界曲線を図—5に示す．この



図—5 乗心地限界値

限界値は，振動が単一振動数からなる場合に適用されるものである．実際の路面走行時における自動車の振動は，連続した振動数範囲をもつパワスペクトルで与えられるので，彼の方法をそのまま適用することはできない．ここでは，鉄道技術研究所の穂坂氏の提示した乗心地感覚レベルを導入して，解析をすすめる．**

円振動数が $\omega\sim\omega+d\omega$ の間における，自動車の重心点に関する乗心地レベル係数 $A(\omega)$ は，つぎの式で与えられる．

$$A(\omega)=\frac{\{2[PSD]z_0(\omega)\cdot d\omega\}^{\frac{1}{2}}}{a(\omega)} \qquad (6.1)$$

各振動数成分を総合して得られる乗心地係数は，つぎの式で与えられる．

$$A=\left[\int_0^\infty\{A(\omega)\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6.2)$$

(6.2) 式で乗心地を定義すれば，$A=1$ の場合が乗心地限界を与えることになる．

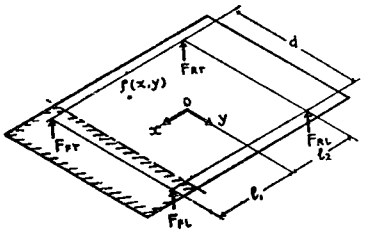
7. 走行荷重・応力

自動車の強度上の要求の大部分は，走行荷重により決められる．この場合には，自動車の全使用期中に受けると考えられる走行荷重について，その最大値と荷重頻度分布が問題となる．すなわち，自動車の車体・使用部材の破壊強度は荷重の最大値に耐える必要があり，疲労強度は荷重頻度分布から決まる繰返し荷重に対して耐える必要がある．

路面走行時時の自動車の振動は，パワスペクトルで与えられる．このような振動のもとにおける走行荷重を求めてみる．

7.1) 走行荷重のパワスペクトル

車体をその基準水平面 (o—xy) 上で考えてみる．車体に加わる外力は，4個の支持ばね系からうける力 (F_{Fr}, F_{Fl}, F_{Rr}, F_{Rl}) であり，車体の運動は，3個の自由度 (Z_0, θ, ϕ) で決められる．図—6にその状態を示す．



図—6 車 体

車体上の一点 (x,y) における単位面積あたりの慣性力は，つぎの式で与えられる．

$$[IF]_{(x,y)}(t)=-\rho(x,y)\{\ddot{Z}_0(t)+x\ddot{\theta}(t)+y\ddot{\phi}(t)\} \qquad (7.1)$$

したがつて，x_0 断面 ($x=x_0$ をとおり基準面に直交し，かつ o—y 軸に平行な断面) に関して，剪断力および曲げモーメントは，つぎのようになる．たとえば，

* 参考文献 7)
** 参考文献 8)

$l_1 > x_0 > o$

とすれば，

$$\left.\begin{aligned}
&[SF]_{(x_0)}(t) = F_{Fr}(t) + F_{Fl}(t) \\
&\quad -\iint_{S_1} \rho(x,y)\left\{\ddot{Z}_o(t) + x\ddot{\theta}(t) + y\ddot{\varphi}(t)\right\}dxdy \\
&[BM]_{(x_0)}(t) = \left\{F_{Fr}(t) + F_{Fl}(t)\right\}(l_1 - x_o) \\
&\quad -\iint_{S_1} \rho(x,y)\left\{\ddot{Z}_o(t) + x\ddot{\theta}(t) + y\ddot{\varphi}(t)\right\} \\
&\qquad (x - x_o)dxdy
\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

ただし，$\iint_{S_1}$ は図－6において斜線で囲まれた部分についての積分を意味する．

一方，(7.1) 式よりつぎの関係が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_S [IF]_{(x,y)}(t)\cdot dxdy + F_{Fr}(t) + F_{Fl}(t) \\
&\quad + F_{Rr}(t) + F_{Rl}(t) = o \\
&\iint_S [IF]_{(x,y)}(t)\cdot x dxdy + l_1\left\{F_{Fr}(t) + F_{Fl}(t)\right\} \\
&\quad - l_2\left\{F_{Rr}(t) + F_{Rl}(t)\right\} = o
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

ただし，$\iint_S$ は車体の全面に関する積分を意味する．

(7.2)・(7.3) 式から外力が消去され，x_o 断面に関して剪断力および曲げモーメントは，つぎのように表示される．

$$\left.\begin{aligned}
[SF]_{(x_0)}(t) &= C_{11}\ddot{Z}o(t) + C_{12}\ddot{\theta}(t) + C_{13}\ddot{\varphi}(t) \\
[BM]_{(x_0)}(t) &= C_{21}\ddot{Z}o(t) + C_{22}\ddot{\theta}(t) + C_{23}\ddot{\varphi}(t)
\end{aligned}\right\}$$

ここに，$C_{ij}(i,j=1,2,3,)$は，$x_o \cdot l_1 \cdot l_2$ と $\rho(x,y)$ から決まる常数である．車体は重心点をとおる前後方向垂直面に対して，左右対称であるから，

$$C_{13} = C_{23} = o$$

それゆえ，

$$\left.\begin{aligned}
[SF]_{(x_0)}(t) &= C_{11}\ddot{Z}o(t) + C_{12}\ddot{\theta}(t) \\
[BM]_{(x_0)}(t) &= C_{21}\ddot{Z}o(t) + C_{22}\ddot{\theta}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

(7.4) 式は，車体の変位 Zo と θ を与えた場合に，x_o 点における曲げモーメントを与える式である．路面凹凸と，剪断力あるいは曲げモーメントの関係は，5.2) 節で定義した特性関数の考え方をこの場合にも適用することにより，つぎのように表示される．

$$\left.\begin{aligned}
&[PF]_{W(SF)(x_0)}(\omega,u) \\
&\quad = C_{11}\cdot[PF]_{W\ddot{Z}o}(\omega,u) + C_{12}\cdot[PF]_{W\ddot{\theta}}(\omega,u) \\
&[PF]_{W(BM)(x_0)}(\omega,u) \\
&\quad = C_{21}\cdot[PF]_{W\ddot{Z}o}(\omega,u) + C_{22}\cdot[PF]_{W\ddot{\theta}}(\omega,u)
\end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

(7.5) 式の表示を用いれば，5.5) 節で用いた方法をこの場合にも適用して，その結果剪断力あるいは曲げモーメントのパワスペクトルは，つぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}
&[PSD]_{SF(x_0)}(\omega) \\
&\quad = \left|[PF]_{W(SF)(x_0)}(\omega,u)\right|^2 \cdot \\
&\qquad \frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2 \cdot [PSD]_W(\Omega) \\
&[PSD]_{(BM)(x_0)}(\omega) \\
&\quad = \left|[PF]_{W(BM)(x_0)}(\omega,u)\right|^2 \cdot \\
&\qquad \frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2 \cdot [PSD]_W(\Omega)
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

y_o 断面に関する剪断力・曲げモーメントについても，ほぼ同様の取扱いによつてパワスペクトルが求められる．

7.2) 応力のパワスペクトル

x_o断面の断面形が判つていれば，剪断力・曲げモーメントと剪断応力・曲げ応力の関係が与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{S(x_0)}(t) &= C_3\cdot[SF]_{(x_0)}(t) \\
\sigma_{B(x_0)}(t) &= C_4\cdot[BM]_{(x_0)}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

ここに，$C_3 \cdot C_4$ は断面形から決まる常数である．この関係を用いれば，応力に関する特性関数は，つぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}
&[PF]_{W(\sigma_S)(x_0)}(\omega,u) \\
&\quad = C_3\cdot[PF]_{W(SF)(x_0)}(\omega,u) \\
&[PF]_{W(\sigma_B)(x_0)}(\omega,u) \\
&\quad = C_4\cdot[PF]_{W(BM)(x_0)}(\omega,u)
\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

したがつて，応力のパワスペクトルは，つぎの式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
&[PSD]_{\sigma_S(x_0)}(\omega) \\
&\quad = \left|[PF]_{W\sigma_S(x_0)}(\omega,u)\right|^2 \cdot \\
&\qquad \frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2 [PSD]_W(\Omega) \\
&[PSD]_{\sigma_B(x_0)}(\omega) \\
&\quad = \left|[PF]_{W\sigma_B(x_0)}(\omega)\right|^2 \cdot \\
&\qquad \frac{1}{u}\left\{\frac{1+[ACC]_W(d)}{2}\right\}^2 [PSD]_W(\Omega)
\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

7.3) 走行荷重・応力の統計的性質

5.6) 節で取扱つた振動の二乗平均・分布等の特性を示す (5.15)～(5.17) 式は，そのまま走行荷重・応力の場合にも適用できる．

7.4) 全使用期間中にうける走行荷頻度分布と最大走行荷重

自動車が，その全使用期間中に走行する路面の状態および走行速度は，広い範囲にわたつて変化するが，これをいくつかの代表的な場合にまとめて考えを進める．すなわち，路面の状態を代表的な m 個の場合に分類し，走行速度も代表的な n 個の値に分類する．

路面の状態；Wi；$i=1, 2, \cdots\cdots, m$

速度の状態；u_i；$j=1, 2, \cdots\cdots, n$

路面 Wi における凹凸のワパスペクトルを，$[PSD]_{Wi}(\Omega)$ と表わす．

路面 W_i を速度 u_j で走行する時間を T_{ij} とし，全使用中の走行時間を T とする．

$$T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij} \tag{7.9}$$

$[PSD]_{Wi}(\Omega)$ と T_{ij} の値を仮定すれば，自動車の全使期間中にうけると考えられる走行荷重頻度分布と最大荷重は，第5章の結果を適用して，つぎのようにして求められる．

i) 走行荷重頻度分布

路面 W_i を速度 u_j で走行する場合の，走行荷重のパワスペクトルは，(7.6) 式で与えられる．たとえば，x_0 点の曲げモーメントについては，

$$[PSD]_{(BM)(x_0)}(\omega)=\left|[PF]_{W(BM)(x_0)}(\omega,u_j)\right|^2\cdot\frac{1}{u_j}\left\{\frac{1+[ACC]_{Wi}(d)}{2}\right\}[PSD]_{Wi}(\Omega) \tag{7.10}$$

パワスペクトルが求まれば，(5.15)～(5.17) 式によつて，この状態のもとにおける q をこえる毎秒当りの極大値数・$N_{ij}[q]$ が求められる．

全使用期間中にうける，q より大きな曲げモーメント極大値の数は，つぎのように表わされる．

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\cdot N_{ij}[q] \tag{7.11}$$

q に適当な値 (q_1, q_2, $\cdots\cdots$) を与えることにより，全使用期間中の走行荷重の頻度分布が得られる．

ii) 最大走行荷重の確率分布

(7.11) 式について，つぎの関係で示される状態を考えてみる．

$$\left.\begin{array}{l} q=q_k \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\cdot N_{ij}[q_k]=k \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

すなわち，全使用期間中に k 回うける走行荷重の平均値 q_k は (7.12) 式で与えられる．k 個の値は，この平均値 q_k のまわりに正規分布していると考えられる．

それゆえ，全使用期間中に少くとも1回 q_k なる値より大なる走行荷重を生じる確率は，つぎの式で与えられる．

$$P_1(q>q_k)=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \tag{7.13}$$

8. 結　論

この報告は，路面凹凸による自動車の振動，およびそれにともなう乗心地・走行荷重の解析方法を提示したものである．

すなわち，一般調和解析の手段によつて，入力としての路面凹凸のパワスペクトルと，自動車の振動特性から，路面走行時の自動車の振動のパワスペクトルを与える式（表―4）を導いた．

自動車の乗心地は，乗心地の感覚特性を与えることにより，振動のパワスペクトルから導くことができた ((6.2) 式)．

走行荷重・応力のパワスペクトルも，同様な手段により求めることができた ((7.6)，(7.7) 式)．走行荷重・応力の統計的性質は，それぞれのパワスペクトルが判れば，それから導くことができる．また，自動車がその一生のうちに受けると考えられる走行荷重・応力の頻度分布・最大値は，自動車の使用状態を仮定することにより，それぞれのパワスペクトルから決めることができた．

しかしながら，この報告で提示した解析方法を実際上の問題に適用する場合には，いくつかの検討を必要とする問題がある．すなわち，

i) 力学系の線型化の仮定

ii) 車体を剛体と考え，弾性変形を無視したこと．

iii) 路面凹凸の特性の検討

iv) 路面凹凸のパワスペクトルの資料をあつめること．

これらの点に関しては，今後さらに研究を進めたいと思う．

なお，附録10に，この解析方法に従つた計算例を示した．

9. 参考文献

1) 東工大・統計工学研究会編；
統計工学ハンドブック，技報堂

2) J.H. Walls, J.C. Houblt, H. Press；
Some measurements and powerspectra of runway roughness.
N.A.C.A. Tech. Note 3305, 1954,

3) N. Wiener；
Extrapolatiom, interpolation, and smoothing of stationary time series.
Wiley, N. Y., 1950.

4) S.O.Rice；
Mathematical analysis of random noise.
Bell Sys. Tech. Jour. Vol. 23. 24,

5) H. S. Tsien；
Engineering cybernetics.
Mc Graw Hill, N. Y., 1954.

6) G.S. Brown, D. P. Campbell；
Principles of servomecanisms.
Wiley, N.Y., 1949

7) R. N. Janeway；
Passenger vibration limits.
S.A.E. Jr. 8, 1948,

8) 穂坂 衛，石川次郎；
乗心地の量的表現とその計測方法
鉄道業務研究資料8巻17号，1951,

10. 附 録（計算例）

中型乗用車について，提示した解析方法に従つた計算を行つた．自動車の諸元は，すべて仮定した値である．

10.1) 自動車の諸元（図—1，2 参照）

$M_0 = 140\ Kgm^{-1}S^2$

$M_F = 9\ Kgm^{-1}S^2$

$M_R = 12\ Kgm^{-1}S^2$

$I_y = 200\ Kgm\ S^2$

$l_0 = 2.5\ m$

$l_1 = 1.2\ m$

$l_2 = 1.3\ m$

$d = 1.3\ m$

支持ばね系は，独立懸架方式で，線形ばねと線形振動減衰器からなると仮定した．

$K_{SF} = 1600 Kgm^{-1}$ （前輪ばね）

$K_{SR} = 2400 Kgm^{-1}$ （後輪ばね）

$C_{SF} = 120 Kgm^{-1}S$ （前輪減衰器）

$C_{SR} = 160 Kgm^{-1}S$ （後輪減衰器）

タイヤ特性は，線形ばねと仮定した．

$K_{TF} = 2600 Kgm^{-1}$ （前輪タイヤ）

$K_{TR} = 2200 Kgm^{-1}$ （後輪タイヤ）

表—5 車体の質量・剛性分布

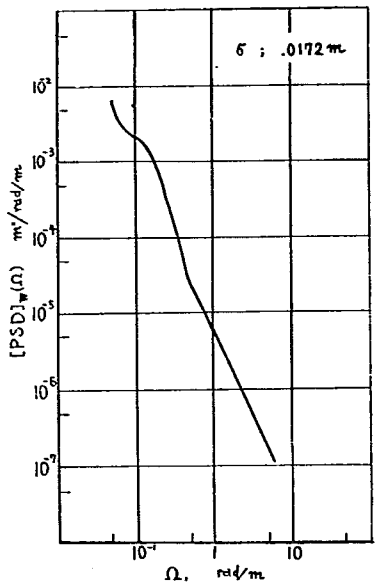
位置	集中質量	断面係数
x_i m	m_i kgm$^{-1}S^2$	Z_i mm^3
1.8	7	1.6×10^4
1.5	21	2.0
1.2	11	2.4
.9	8	3.2
.6	14	4.0
.3	7	〃
0	7	〃
—.3	7	〃
—.6	6	〃
—.9	16	3.2
—1.2	11	2.6
—1.5	13	2.0
—1.8	10	1.6
—2.1	2	1.2

車体の質量分布・剛性分布は，車体の前後方向軸に関して表—5のように仮定した．ただし，質量分布は等価集中質量で表示した．

10.2) 走行路面特性

走行路面としては，参考文献2）の資料を用いた．これは，米国の Langly Field, Va, の滑走路の資料である．凹凸のパワスペクトルを図—7に示す．この

路面凹凸の標準偏差は 0.0172m で，相当に良好な路



図－7 $[PSD]_w(\Omega)$

面と考えられる．

10.3) 自動車の振動の方程式

図－3に示した上下縦揺系・横揺系について，運動方程式はつぎのように書ける．

上下縦揺系

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Mo}{2}\ddot{Z}_O+C_{SF}\cdot(\dot{Z}_O-l_1\dot{\theta}-\dot{Z}_F)\\
&\quad+K_{SF}\cdot(Z_O-l_1\theta-Z_F)\\
&\quad+C_{SR}(\dot{Z}_O+l_2\dot{\theta}-\dot{Z}_R)\\
&\quad+K_{SR}\cdot(Z_O+l_2\theta-Z_R)=o\\
&\frac{I_y}{2}\ddot{\theta}-l_1C_{SF}(\dot{Z}_O-l_1\dot{\theta}-\dot{Z}_F)\\
&\quad-l_1K_{SF}\cdot(Z_o-l_1\theta-Z_F)\\
&\quad+l_2C_{SR}\cdot(\dot{Z}_O+l_2\dot{\theta}-\dot{Z}_R)\\
&\quad+l_2K_{SR}(Z_O+i_2\theta-Z_R)=o\\
&M_F\ddot{Z}_F-C_{SF}\cdot(\dot{Z}_O-l_1\dot{\theta}-\dot{Z}_F)\\
&\quad-K_{SF}\cdot(Z_O-l_1\theta-Z_F)\\
&\quad+K_{TF}\cdot(Z_F-W_F)=o\\
&M_R\ddot{Z}_R-C_{SR}\cdot(\dot{Z}_O+l_2\dot{\theta}-\dot{Z}_R)\\
&\quad-K_{SR}\cdot(Z_O+l_2\theta-Z_R)\\
&\quad+K_{TR}\cdot(Z_R-W_R)=o
\end{aligned}\right\}\quad(10.1)$$

横揺系

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{I_x}{2}\ddot{\phi}-\frac{d}{2}C_{SF}\cdot\left(-\frac{d}{2}\dot{\phi}-\dot{Z}_{F'}\right)\\
&\quad-\frac{d}{2}K_{SF}\cdot\left(-\frac{d}{2}\phi-Z_{F'}\right)\\
&\quad+\frac{d}{2}C_{SR}\cdot\left(\frac{d}{2}\dot{\phi}-\dot{Z}_{R'}\right)\\
&\quad+\frac{d}{2}K_{SR}\cdot\left(\frac{d}{2}\phi-Z_{R'}\right)=o\\
&M_F\ddot{Z}_{F'}-C_{SF}\cdot\left(-\frac{d}{2}\dot{\phi}-\dot{Z}_{F'}\right)\\
&\quad-K_{SF}\cdot\left(-\frac{d}{2}\phi-Z_{F'}\right)\\
&\quad+K_{TF}\cdot(Z_{F'}-W_{F'})=o\\
&M_R\ddot{Z}_{R'}-C_{SR}\cdot\left(\frac{d}{2}\dot{\phi}-\dot{Z}_{R'}\right)\\
&\quad-K_{SR}\cdot\left(\frac{d}{2}\phi-Z_{R'}\right)\\
&\quad+K_{TR}\cdot(Z_{R'}-W_{R'})=o
\end{aligned}\right\}\quad(10.2)$$

10.4) $[FR]q_iq_o(\omega)$, $[PF]_{Wq_o}(\omega,u)$

(10.1)・(10.2) 式において，入力 (W_F, W_R, $W_{R'}$, $W_{R'}$) を $e^{i\omega t}$ とおいて解を求めることにより，$[FR]q_iq_o(\omega)$ が求められる．

上下縦揺系の変位に関する $[FR]q_oq_i(\omega)$ の値を一括して，つぎに示す．

$$[FR]q_oq_i(\omega)=\frac{\Delta q_iq_o}{\Delta}\qquad(10.3)$$

と書けば，

$$\left.\begin{aligned}
\Delta&=1+1.417S+7.718S^2+7.692S^3\\
&\quad+16.266S^4+10.481S^5+7.038S^6\\
&\quad+1.945S^7+.5507^8\\
\Delta W_FZ_O&=.52+.7367S+1.938S^2\\
&\quad+1.932S^3+.8691S^4+.2727S^5\\
\Delta W_FZ_O&=.48+.6640S+2.022S^2\\
&\quad+1.775S^3+.7369S^4+.2308S^5\\
\Delta W_F\theta&=-(.4+.5567S+1.589S^2\\
&\quad+1.595S^3+.72S^4+.2291S^5)\\
\Delta W_R\theta&=.4+.5667S+1.808S^2\\
&\quad+1.596S^3+.6626S^4+.21S^5\\
\Delta W_FZ_F&=1+1.417S+6.028S^2+5.298S^3\\
&\quad+9.022S^4+3.463S^5+1.591S^6\\
\Delta W_RZ_F&=-(.05662S^2+.08021S^3\\
&\quad+0.2831S^4)
\end{aligned}\right\}\quad(10.4)$$

$$\Delta W_F Z_R = -(.06690S^2 + .09479S^3 + .03345S^4)$$
$$\Delta W_R Z_R = 1 + 1.417S + 4.108S^2 + 4.853S^3 + .6775S^4 + 2.235S^5 + 1.010S^6$$

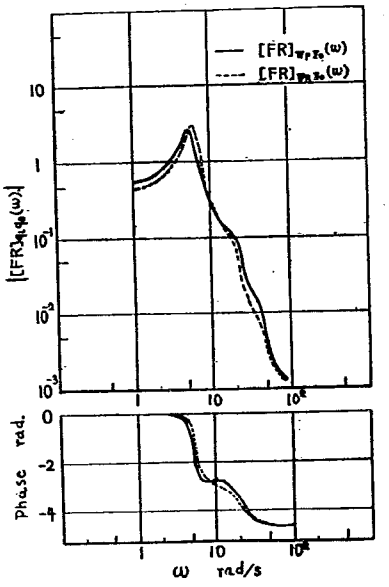
ただし，

$$S = \frac{i\omega}{10}$$

(10.4) 式によつて，系の変位に関する周波数応答が求められる．

10.5) 路面走行時の振動のパワスペクトル

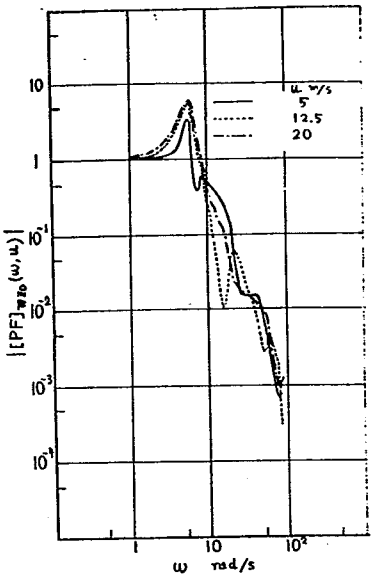
路面凹凸のパワスペクトルと，系の周波数応答函数が得られたので，第5章の取扱い方にしたがつて，系の振動のパワスペクトルが求められる．図—8～11に



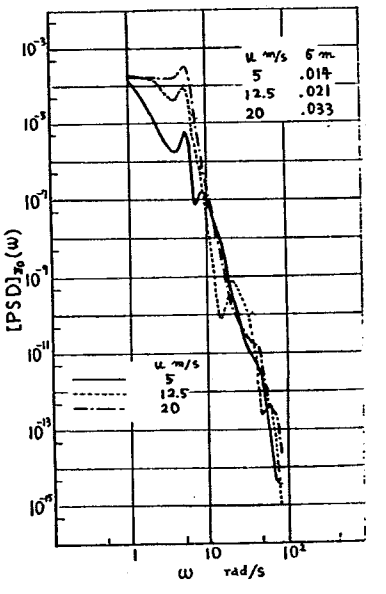
図—8 $[FR]_{W_F Z_O}(\omega), [FR]_{W_R Z_O}(\omega)$

$[FR]_{q_1 q_0}(\omega)$・$[PF]_{Wq_0}(\omega, u)$ および $[PSD]_{q_0}(\omega)$ の計算結果の一部を図示した．この場合，(5.8) 式の計算に必要な $[ACC]_W(d)$ の値は，参考文献2）の資料から直接に読み取つた．

車体重心点の上下変位および加速度の二乗平均値は，図—10, 11 中に記載した．加速度の二乗平均値は，速度 5m/s (18km/h) で 0.012g, 20m/s(72km/h) で 0.07g 程度であり，非常に少さい値と考えられる．加速度について，(5.17) 式を用いて，毎秒当りの

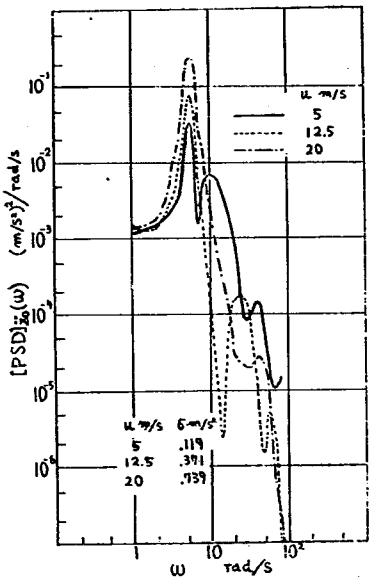


図—9 $[PF]_{WZO}(\omega, u)$

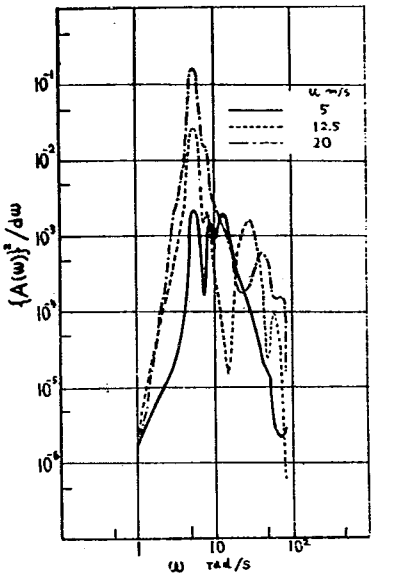


図—10 $[PSD]_{ZO}(\omega)$

$N[\ddot{Z}_O]$を計算した結果を表—6に示す．表—6から判るように，この路面を速度 20m/s で走行する場合には，1時間に 0.3g 以上の加速度を約1回，0.22g 以上の加速度を約38回うけることになる．



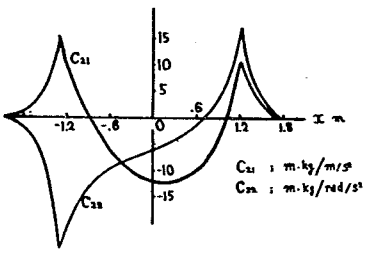
図—11 $[PSD]_{\ddot{Z}_0}(\omega)$



図—12 $A(\omega)$

表—6 $N[\ddot{Z}_0]$

u m/s		5	12.5	20
$\sigma[\ddot{Z}_0]$ m/s²		.119	.371	.739
$\ddot{Z}_0$	σ	1.13	.65	.572
	2σ	.25	.15	.13
	3σ	.021	.012	.0105
	4σ	.00062	.00036	.00032



図—13 C_{21}, C_{22}

10.6) 乗心地

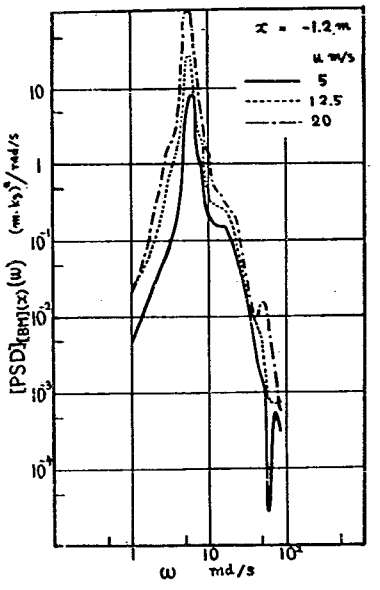
振動のパワスペクトル $[PSD]_{z_0}(\omega)$ と図—5に示した乗心地限界値から，第6章の取扱い方にしたがって，乗心地が求められる，$A(\omega)$ の値を図—12 に示す．(6.2) 式により $A(\omega)$ から求めた乗心地係数は，走行速度 5 m/s のときに 0.14，12.5 m/s のときに 0.27，走行速度 20 m/s のときに 0.50 であつた．これらの値は非常に良い値と思われる．

10.7) 走行荷重のパワスペクトル

表—5 に示された質量分布について，(7.1)～(7.4) 式を計算して得られた C_{21}・C_{22} の値を図—13 に示す．(7.5)・(7.6) 式を計算して得られた曲げモーメントのパワスペクトルを図—14に示す．ただし，パワスペクトルは $x=-1.2$m の位置について計算した値である．

曲げ応力は，(7.7) 式を用いて曲げモーメントから求められる．(5.17) 式によつて，曲げ応力について $N[\sigma_B]$ を求めた結果を表—7 は示す．すなわち，この路面を速度 20m/s で走行する場合には，1時間に 2.4kg/mm² 以上の曲げ応力を平均 0.014回，1.9kg/mm² 以上を約1回うけることになる．

128



図—14 $[PSD]_{(BM)(x)}(\omega)$

表—7 $N[\sigma_B]$

u m/s		5	12.5	20
$\sigma[\sigma_B]$ kg/mm²		.145	.262	.486
σ_B	σ	.85	.79	.67
	2σ	.20	.175	.153
	3σ	.016	.0145	.125
	4σ	.00049	.00043	.00037
	5σ	.0000055	.0000048	.0000041

11. 註

i) 系の出力の間の相関

Z_F と $Z_{F'}$ との相関は，つぎのようにして求められる．

Z_F の値は，上下縦揺系の入力 W_F と W_R によつて決まる．$Z_{F'}$ の値は，横揺系の入力 $W_{F'}$ と $W_{R'}$ によつて決まる．まず，おのおの系の入力 W_F・$W_{F'}$，および W_R・$W_{R'}$ の間の関係を調べてみる．

W_F は (3.2) 式で示されたように，

$$W_F(t)=W_{FT}(t)+W_{Fl}(t) \qquad (11.1)$$

$W_F(t)$ の値を固定した場合における $W_{FT}(t)$ あるいは $W_{Fl}(t)$ の値は，$W_{FT}(t)$ と $W_{FT}(t)$ がともに定常確率過程で，その平均値・標準偏差・パワスペクトルが同一であるので，つぎのようになる．

$$E[_{FT}(t)]_{WF(t)}=E[W_{Fl}(t)]_{WF(t)}=\tfrac{1}{2}W_F(t) \qquad (11.2)$$

$W_F(t)$ の値を固定した場合の $W_{F'}(t)$ の値は，(3.2) (11.2) 式より，つぎのようになる

$$E[W_{F'}(t)]_{WF(t)}=E[W_{FT}(t)-W_{Fl}(t)]_{WF(t)}$$
$$=E[W_{FT}(t)]_{WF(t)}-E[W_{Fl}(t)]_{WF(t)}$$
$$\therefore E[W_{F'}(t)]_{WF(t)}=0 \qquad (11.3)$$

すなわち，$W_F(t)$ の値を固定した場合の $W_{F'}(t)$ の値は，平均値 0 のまわりに分布している確率変数である．このことは，$W_F(t)$ と $W_{F'}(t)$ の間の相関が 0 であることを意味する．同様に $W_R(t)$ と $W_{R'}(t)$ の間の相関も 0 である．

それゆえ，2個の系の入力の間に相関がないから，したがつて，それぞれの出力の間にも相関が存在しない．

外国文献抄訳

車輪と路面の間に作用する動的な力とその路面荷重に対する影響

(Untersuchung über die dynamischen Krafte zwischen Rad und Fahlbahn und ihre Auswirkung auf die Beanspruchung der Straße)*

Dr.—Ing. Otto Svenson[1)]
橋倉勝已[2)] 訳

1. 路面に垂直に作用する力

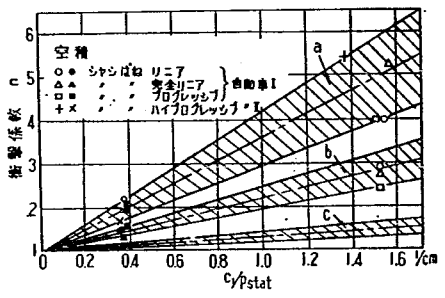
垂直方向の路面荷重は，車輪静荷重 Pstat とこれに重畳する動的付加荷重とからなつている．

1.1. 動的付加荷重

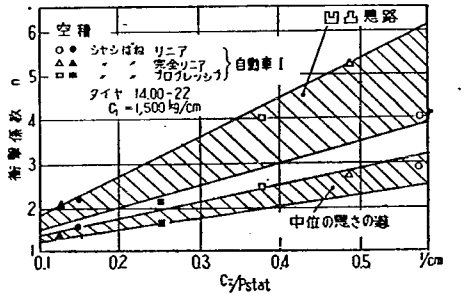
タイヤの研究[(1)~(5)]で明らかにされているようにタイヤばね定数は動的荷重に支配的な影響をおよぼす．第1近似的に，衝撃係数，$n=(Pstat+Pdyn)/Pstat$ はファクタ $C_1/Pstat$ できまる．(C_1 半径方向タイヤばね定数，Pstat 静荷重，Pdyn 動的付加荷重) 第1図は Laboratorium für Betriebsfestigkeit で測定された n と $C_1/Pstat$ との関係を示す．分布値の平均値は近似的に $n=1+K\cdot C_1/Pstat$ で表わされる．K は路面状態を示す一つの尺度で，平均値からの偏差は ±20%．中位の悪さの道路の値は [(4)] の結果とよく合う．測定値のばらつきは，シャシばねかたさ，質量比，車速などに影響される．シャシばねは各種類のものに交換して行なつた．第2図の $C_2/Pstat$ (C_2 シャシばね，ばね定数) と衝撃係数との関係から，シャシばねは大きな影響をもつことがわかる．第1図のばらつきも，その大部分はばねのかたさの影響によるものと考えられる．

現在の自動車における普通の値は第1図で示されていると考えられる．中位の悪さの道で K=1.2±20% で表わされる．耐久性を考える場合などは，K=2.6±20% 程度まで考慮する必要がある．K は長さの次元をもち，凹凸 H の最大値に関係がある．$n=1+K\frac{C_1}{Pstat}$ から動的付加荷重 $Pdyn=KC_1$ が導かれる．荷重に無関係でタイヤばね定数に比例することがわかる．([(6)] の理論解析結果と一致)

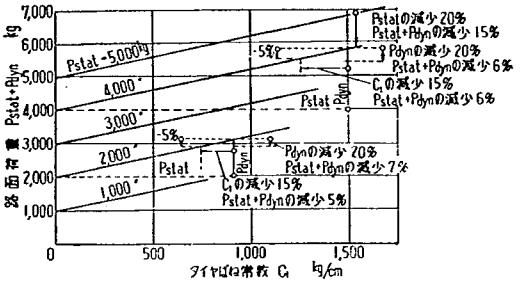
1.2. 路面に作用する動荷重



第1図 衝撃係数 $n=1+k$, $C_1/Pstat$ と $C_1/Pstat$ との関係
C_1 タイヤばね常数 kg/cm
Pstat 静荷重
a. 凹凸悪路，K=2.6±20% 障害高さ~12cm
b. 中位の悪さの道，K=1.2±20% 〃 ~3cm
c. 良路，K=0.3±20%



第2図 衝撃係数 n と $C_2/Pstat$ との関係
C_2 シャシばね，ばね定数 kg/cm



第3図 動的路面荷重とタイヤばね常数との関係
K=1.2 (中位の悪さの道路)

1) Laboratorium für Betriebsfestigkeit, Darmstadt Eberstadt
2) 工業技術院機械試験所
*Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnik 1959, Ht. 130.

/30

路面動荷重は 0 から Pstat+Pdyn の間で変化する．C_1 の関数として示すと第3図のようになる．各 Pstat に共通な傾斜は K を表わし，道路の状態によってきまるものである．第3図では K=1.2 で中位の悪さの道路の場合である．これまでの諸結果から，やわらかいタイヤ，大きい車軸ダンピング，小さいばね下質量がそれぞれ，動的付加荷重の減少に有効であるといえる．実際には，もちろん，設計上の制約が多いと考えられる．

1.2.1. タイヤばね定数の影響　　現用タイヤでは，タイヤ空気圧を減らして，ばね定数を下げると，タイヤの寿命に悪影響をおよぼす．ある程度までは，ばね定数の減少が達成される．第3図の例では，タイヤばね定数の減少は15% ほどで，これにより Pstat+Pdyn の値は，最大約 5% 低下するにすぎない．(中位の悪さの道)

1.2.2. 車軸ダンピングの影響　　適当なダンパの設計によって，動的荷重を平均 20～30% 程度減少させることができる．[6][8][4] 第 3 図の例では，付加荷重の 20% 減を示し，これによる路面荷重の減少は 6～7% の程度である．

1.2.3. 車軸質量の影響　　他の数値をそのままとし，ばね下質量を 60% 軽くすると，動的付加荷重は約 15% 減少する．[5] 実際には，強度的に設計不可能である．

1.2.4. 実現可能な路面荷重の減少　　タイヤばね定数および，ばね下質量の低下によってはあまりよい結果はえられない．もっとも有効なのは，ダンパの装着と，その最適値の決定である．これによる動的付加荷重の減少は，最大約 30% に達する．これに対応する動的荷重 Pstat+Pdyn の減少は 10% にすぎない．悪路ではこの効果は当然大きい．極端な悪路を除き 10～20% の減少が期待できる．

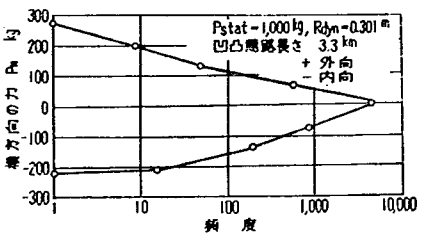
2. 横方向の力

2.1. 路面および自動車に対する横方向の力の意味

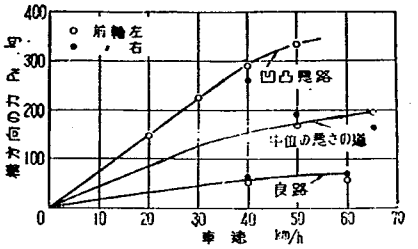
道路建設者には，横方向の力に対する認識がまだ充分ではないが，これが大きな値に達する場合には，道路の破損に対する影響を認めざるをえない．第一に急カーブのときに表われるが，直進時においても，路面凹凸によって相当大きな横方向の力が現われ，既存の路面損傷を促進する可能性がある．自動車設計者は，横方向の力のデータに関心がある．たとえば，車軸では横方向の力により，きわめて大きい走行中の応力を生ずる．垂直方向の力は，横方向より大きいがレバアームが小さいから，応力としては小さい．

懸架装置設計の場合に，車輪に働く力の大きさ，頻度だけでなく，時間的関係すなわち，その大きさ，方向，頻度の継続的変化の全体を知ることが必要である．この方向における評価結果も，すでにあるが，設計に役立つほどには充分でない．したがって，最初単純化された方法を利用するのが適当と考えられる．

測定は曲げモメントについて行なったが，タイヤ有効径から横方向の力を推定する．実際の横方向の力はこの推定値より約 15% 小さい．また内側および外側向きの横方向力は近似的に等しい大きさと頻度をもつはずである．第4図はこれに対する例を示す．



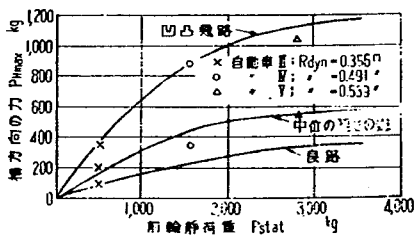
第 4 図　横方向の力の頻度分布，直進，前輪右側
Rdyn：車輪有効半径



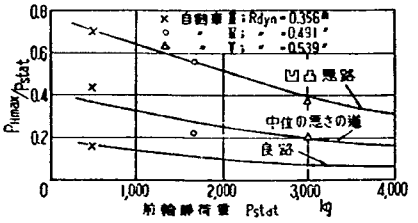
第 5 図　車速と横方向の力との関係
Pstat=475 kg，Rdyn=0.356

2.2. 直進時における横方向の力：測定結果

垂直方向と同様に，横方向の力も，車速，とくに道路の悪さに著しく影響される．横方向の力と車速の関係の一例を第5図に示す．これらは多数の実験による結果である．約 40 km/h までは比較的荷重の増大がはげしく，高速域では一般に増大が少ない．運転状態で発生する横方向の力の推定最大値に関して，第6図は最初の足がかりとなるものである．各種程度の試験コース，各種道路について測定した最大値が，静荷重について示されている．第7図は，横方向荷重と車軸静荷重との比 (Phmax/Pstat) を静荷重に対して示す．これらの測定値はまだ充分な結論を与えない．とくに自動車の構造形式



第 6 図　前輪に働く横方向の力と荷重との関係



第 7 図　横方向の力の静荷重に対する比（前輪）

あるいはばね（横方向のばねも含む）について，まだ明確な発表がなされていない．第 6, 7 図に報告された値は，全負荷の自動車についての値で，懸架装置あるいはその部品の寸法設計に利用できるものである．車輪面から離れた位置に生ずる応力，あるいは道路の総合的荷重評価のためには，以上の他に，長手方向の力の経過が知られる要がある．これらの関係の解明は，たとえば Sjöström によりすでに著手されたように，[9] より広汎な研究によつてはじめて可能である．

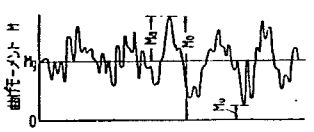
3. 路面の疲労強度の問題について

1.2.4. から自動車の設計によつては，路面荷重を 10～20% 下げうることがわかつたが，これは道路の保護という見地から，何を期待しうるだろうか．道路の寿命と荷重との関係が知られてはじめてその答えがえられる．これに関する知見は現存なお充分ではないが，この方向で一つの目安をうるため，金属材料の疲労に関する経験から，つぎのように検討される．

3.1. 疲労強度の実験的調査について

路面体の強さをきめる因子が多いことが，研究を困難にしている．公共道路での値を系統的に把握することによつて，短時間に路面荷重と寿命の関係を充分明らかにすることはあまり期待できない．多数の実験のくりかえしによつて，統計的に確かな値を求めることが必要である．ある程度の時間内に，少なくともおおよその目安の値をうるには，実際の関係に一致する大きさ，頻度で荷重を加えることのできる試料試験によつてのみ可能である．この種の研究方法は自動車，航空機，運搬機械，物揚機械，橋梁などの設計など各種の技術的分野に適用されて成果があげられている．

道路に対しても，同様な方法が適用できると考えられるが，これにはつぎのような反論がある．



第 8 図　走行中の非周期的荷重波形の例[10]
Ma=Mo−Mg or Mg−Mu
Ma　モーメントの振幅

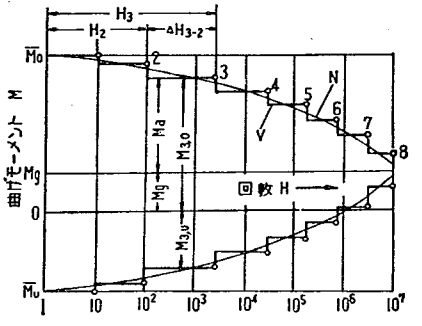
a) 道路の材料は均一性がない．修復作業が表面構造の性質におよぼす影響が大きい．道床の性質も変化が大きい．結果のばらつきが多く，一義的な結論を下せるかどうか疑問である．

b) 道路の試料試験は実際の諸関係とくに路床に関して近似的にしか結果がえられない．

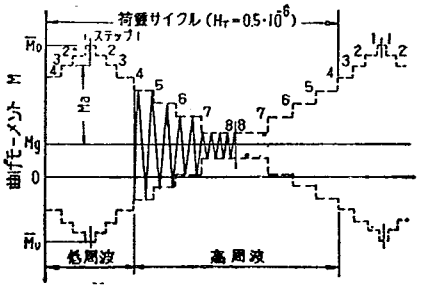
第一の異論に対しては，非常に大きい分散値でも，統計的手法によれば，数量的な結論がえられる．（平均値および分散の表示[13]）第二の反論は，道路の寿命と荷重の大きさ，頻度との関係の根本的問題に関連する．これに対しては，このような強度的諸問題の実験的取扱いが，いかなる可能性をもつかを，自動車の一例について示そう．

3.2. 自動車における研究方法

道路から自動車に作用する力は，いろいろな発生頻度をもつた，大小の振幅の不規則系列を示す．（第 8 図）走行中にはたらく力の大きさと頻度の関係は頻度曲線第 9 図によつて示される．測定が充分長時間おこなわれれば頻度曲線の再現性がよいことが知られている．頻度曲線はいわゆる使用状態における強度の研究の基礎となつており，その際階段状の試験荷重によつて，不規則な荷重経過が近似される．（第 10 図）ある負荷荷重の集合はその集合の最大値，頻度の分布，全荷重の発生回数で表わ



第 9 図　階段曲線による度数曲線の等価的表示
N　走行荷重の度数曲線
V　試験荷重の度数曲線（荷重集合）
M　荷重集合最大値
H_2　$M_{2,o}$, $M_{2,u}$ を越える頻度
H_3　$M^3{}_{,o}$, $M_{3,u}$ をこえる頻度
H_{3-2}　試験荷重 $M_{3,o}$, $M_{3,u}$ の頻度



第 10 図　疲労試験の荷重経過（10）第 9 図に対応

される．疲労強度の研究を，いろいろの最大値で，発生頻度を実際条件と同じにして行なえば，破かい，あるいは最初のキレツ発生までの負荷繰り返えし数と集合最大値との関係がえられる．(第11図) この図形的ないしは式で表示した集合最大値と寿命との関係は寿命関数とよばれる．このような多数の疲労試験結果で，上の関係は広範囲にわたりほとんど直線で表わされることが示された．$L=(P_0/P)^{\kappa}\cdot L_0$ で表わされ κ は直線の傾斜を示す．κ の大きさは集合の形式に依存する．材質の影響に関しては，データがまだ不充分である．金属材料部品の場合，多くは $\kappa=6\sim8$ である．したがつてわずかな荷重変化も大きな影響がある．荷重集合に含まれる小さい荷重も，その大きな発生頻度により，寿命に対して著しい影響を示す．金属材料では，集合最大値の約 5% 以下の荷重だけが軽視できる．

他の諸影響とならんで，疲労も道路損傷の主要原因をなすものとすれば，機械あるいは自動車で確かめられた試料試験に関する研究あるいは評価方法が，この分野にも導入されるとは，意義深いことと考えられる．上述の概説は，この意味で一つの提案である．

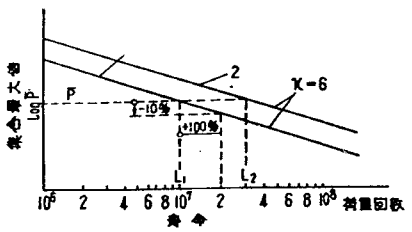
4.3. 路面に作用する荷重の集合と路面の耐久性

耐荷重性と道路の損傷に関して，絶対値を明らかにすることは困難であるが，比較値により重要な説明ができると考えられる．すなわち，対応する荷重集合で行なわれた試料試験から，寿命関数に関する充分なデータがあれば，おそらく比較的迅速に相対的評価尺度を見出すことができよう．

第 11 図において，試料 2 は試料 1 の 3 倍の寿命を有することがわかる．ここで寿命 L_1, L_2 の比は集合荷重最大値 Pmax の絶対値に無関係である．

以上のことから，道路の材料についての信頼性ある寿命関数のデータが必要であり，とくに関数の指数が必要である．指数 $\kappa=6$ の場合は，荷重集合の減少が 10～20% とすると，道路の寿命は 2～3 倍になる．実際上は，比較的軽量車において，のみ，寿命をはなはだしく損じている動的荷重の大きな減少が可能である．

道路の許容車輪荷重を 8～10 t に制限する問題に関していえば，これによる道路の寿命に対する大きな効果は期待できない．



第 11 図 寿命関数 (n=6 に対する説明図)

5. 道路の荷重集合

前項で詳論した荷重の頻度分布は，道路の強度問題をとりあつかう上で基本となるものである．新しい道路では，ほぼ純粋に，垂直方向の路面荷重集合で負荷される．

路面における荷重集合に対する最初の足がかりは，ある道路を運行する自動車の形式から，ある計算により比較的容易にもとめられる．自動車の変動する荷重状態は厳密に評価することができ，また基礎的集合に導入することができる．この場合，前章に述べた理由から，軽量車をただちに無視することはゆるされない．

時間の経過とともに，路面凹凸の程度が変わると $Pdyn=KC_1$ が変わり，荷重集合の形式が変わつてくる．道路が次第に悪くなつてくることについては多くの実験があり，これに基づいて，K の増大，ひいては動荷重の増加を確定することができる．これから比較的容易に道路の荷重集合に対する予想がえられる．路面体そのものにおける荷重集合を精度よく測定することもさらに重要なことである．また路面全幅にわたる応力分布を知ることも必要である．

5. 測定方法の詳細

5.1. 採用した測定，評価方法

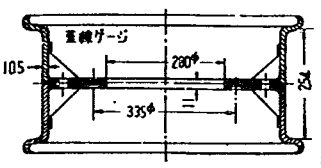
5.1.1. 垂直方向動的荷重の測定

a) 測定方法　　車輪と地面との間に働く力は，車輪のリム応力を測定することによつて求めた．タイヤの挙動は，車輪荷重とリム応力との関係を一義的に表わすのに問題がないとした．これはタイヤの弾性的挙動に関する研究で確認されている．

横方向の力の影響は，車輪の中心面で対称に分割したリムにより除去された．(第 12 図)

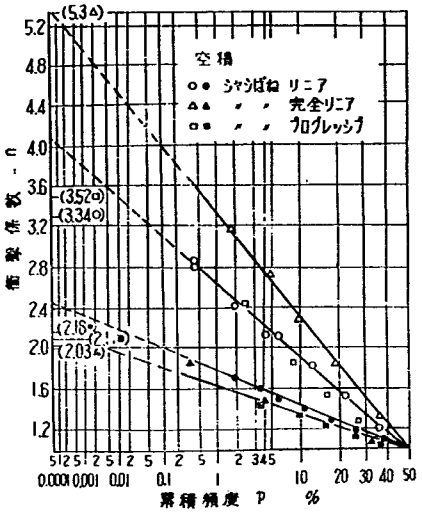
路面凹凸が測定結果におよぼす影響については，高さ，幅 100 mm までの，長手あるいは横方向におかれた障害物乗越しの場合，測定リム較正曲線に大きな影響をおよぼさないことを確めた．信号の伝達にはスリップリングを使用した．

b) 測定値の評価　　この測定では，車輪荷重の時間経過が示されるのではなく，タイヤが転がる区間においてサンプリングを行なう意味になる．これによる荷重集合の最大値は，測定回数が充分大きいとき，車軸における荷重集合のそれに等しい．



第 12 図　測定用分割式リム 10.0-22

実際の走行中に発生する荷重の最大値を推定するのにすべての測定値の累積頻度を確率紙に画く．荷重頻度曲線は直線に示



第 13 図　確率グラフ上に示した測定結果
( ) 内数字は実測最大値
測定区間：非常な凹凸悪路
車　　速：40～50 km/h

6.2.1. 横方向の力の測定

リムによる測定では，多数の自動車に適用するのに不便であり，第 14 図のようにした．この方法は，こる部分に摩擦を生じ，測定精度が悪く，上下方向の荷重との間に位相おくれも生じた．

結局，前車軸軸受の付近で曲げモーメントを測定することとした．車軸の構造により，車軸の上面か，下表面に近かい小孔[12]に歪計がはられた．

6.2. 試験車

以上の結果は，象徴的に述べられているが，多くの試験車について行なわれたものである．これらの試験車 (I～V) の主要諸元はつぎの第 1 表のとおりである．

7. むすび

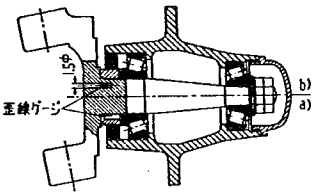
車輪と路面間に作用する垂直方向の動的荷重は，±20% の精度で，簡単な近似式で表わされる．

車輪と路面間に作用する横方向の力は，曲線走行時ばかりでなく，直進時にも著しい．

またその値は悪路で重量車の場合，静荷重の 30%．

第 1 表　供　試　車

項　目	単位	試験車 I	II	III	IV	V
車　種	—	トレーラトラック	トレーラトラック	トラック	トレーラバス	バス
前軸荷重						
空	kg	1,710		920	1,970	3,300
積	kg	4,890		950	3,110	5,600
後軸荷重						
空	kg	1,890		1,050	1,750	4,500
積	kg	8,030		2,250	3,000	5,800
タイヤ	—	14.00—20	14.00—20	6.00—20	9.00—20	380-Bf-20
空気圧						
前	atü			2.5	5.25	4.5
後	atü	7.0	7.0	3.0	5.25	4.5
タイヤ有効半径	m			0.356	0.491	0.539
タイヤばね定数 B_1	kg/cm	1,500	1,500			
有効シャシばね定数						
空	kg/cm	560/475/364	540			
積	kg/cm	560/475/1,000	850			

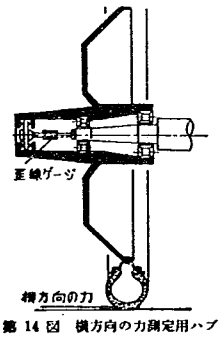


第 15 図　前車軸の大きな応力部分における曲げモーメントの測定　ゲージを表面 (a) または孔 (b) に貼る．Gustafsson (12)

同じく軽量車の場合 70% に達する．

また上下方向の荷重と同じ発生頻度をもち，懸架装置の耐久性にとつて重要である．

タイヤばね定数の小さいこと，車軸ダンパの強いこと，ばね下質量の小さいことなどが，動的荷重軽減の手段である．



第 14 図　横方向の力測定用ハブ (12)

される．(第 13 図)

正負方向別動荷重の繰り返し総計は理想的な場合，累積頻度 50% になる．数百 m と数百 km の測定区間をとり両者を比較すると，推定最大値について，よい近似が示された．(0.0001% の相対頻度を外そう推定して比較した．したがつてこの実験は，確率 10^{-6} まで有効である)

これらの動的荷重と路面寿命との関係は未解決であるが，金属材料の疲労と同じとりあつかいが可能と思われる．この際，頻度の大きい小振幅の荷重は寿命の推定の場合に無視できない．荷重集合はすべての荷重を総合的に表示しうる．

10～20% の路面動的荷重の減少によつて，道路の耐久寿命を 2～3 倍にすることができよう．これには，ダンパの装着がもつとも有効である．しかし，道路に加わる荷重集合を考えた場合，自動車の設計によつて道路の耐久性を改善する余地は少ないようである．

134

文　献

(1) v. Bomhard, F.J.; Verfahren zur Messung der dynamischen Radlasten beim Kraftwagen. München 1956.
(2) Esers, E.; Fahrzeuggewichte-Bahnkräfte-Straßenschädigung. ATZ 1956, S. 1 u. S. 47.
(3) Kotitschke, I.; Die dynamischen Radlasten von Kraftfahrzengen; ihre Messung und ihre Einflußfaktoren. Dissertation T.H. Aachen 1957.
(4) Koeßler, P. u. J.J. Beermann; Reihenuntersuchungen über die dynamischen Lasten von strassenfahrzeugen. ATZ 1958, S. 1.
(5) Mitschke, M.; Schwingungsverhalten und Sicherheit eines Kraftfahrzeuges. ATZ 1958, S. 168.
(6) Mitschke, M.; Luftfederung, ihre schwingungstechnischen Vorteile und ihre Forderungen an die Dämpfung. ATZ 1958, S. 275.
(7) Zoeppritz, H.P.; Einfluß von Reifendruck und Geschwindigkeit auf die Fahrsicherheit. ATZ 1958, S. 213.
(8) Marquard, E.; Untersuchung über den Einfluß der Stoßdämpfer auf die zwischen Rad und Fahrbahn auftretenden dynamischen Bodenkräfte; Dtsch. Kraftfahrtforsch. u Straßenverkehrstechnik, H. 104.
(9) Sjöström, S.; Belastungsanalysis. Teknisk Tidskrift 1957, S. 461.
(10) Gaßner, E.; Betriebsfestigkeit. Eine Bemessungsgrundlage für Konstruktionsteile mit statistisch wechselnden Betriebsbeanspruchungen. Konstruktion 1954, S. 97.
(11) Menger. R.; Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Fahrzeugreifen. Dissertation T.H. Braunschweig 1955.
(12) Svenson, O.; Anwendung des Dehnungsmeßstreifens für Beanspruchungsmessungen im Fahrzeugbau. In: Fink, K.: Grundlagen und Anwendung des Dehnungsmeßstreifens. Düsseldorf 1952.
(13) Weibull, W.; Transactions Royal Inst. Techn. Stockholm. No 27 (1949).

(287 頁よりつづく)

海外技術文献紹介（続）

▶噴射ポンプのプランジャとバレル間のすきまが油もれにおよぼす影響　Ю.Н. Воронцов, Б.А. Крук; Зависимость гидравлической плотности от зазора между плунжером и втулкой, с. 33～35, 図 5, 表 1.

ボッシュ型噴射ポンプのプランジャとバレルとのすきまおよび穴の位置が油もれにおよぼす影響を理論的に検討し，実験結果ともよく合うことを示している．穴がボッシュ式に同一高さで2個向かい合つているもの，それが1個になつたもの，2個でもその高さの違うものを比較している．筆者は НАМИ の燃料装置部所属．

▶瞬時燃料消費量の記録装置　М.И. Лурье, В.В. Алешин, К.Ю. Сытин; Прибор для записи мгновенного расхода топлива, с. 35～36, 図 3.

円すい形の燃料計測フラスコの内部に微少電流を通じた直径 0.05 mm の銅線を垂直に張つておく．燃料油面を境にして一方は燃料に，他方は空気に接しているため，油の高さによつて，この熱線の抵抗が変化する．この熱線をブリッジ回路に入れてオッシログラフを作動させ，油面の高さを連続的に記録させ，これから瞬燃料消費量を知ることができる．筆者等は НАМИ 所属．

▶インベストメント鋳造の機械化とその自動化の方法　С.Е. Богданов; Механизация литья по выплавляемым моделям и пути его автоматизации, с. 36～38.

インベストメント精密鋳造工場の複合機械化用諸設備として，どんなものが，どこの研究所や工場で，研究あるいは製造されているかを概括的にのべたもの．筆者は Гипроавтопром 所属．

▶シリンダブロック運搬の機械化　Б.И. Куховаренко, М.И. Панеев; Механизация транспортировки блока цилиндров, с. 38～39, 図 2.

ゴーリキー自動車工場で行なわれているガズ-51 型機関のシリンダブロックを，チェーンコンベヤからおろして，ローラーコンベヤにのせ，組立ラインに流す自動装置の説明．筆者等は同工場所属．

▶精密穴あけ加工用工具　Л.Г. эрекранц; Инструменты для обработки точных отверстий, с. 39～43, 図 9, 表 2.

ゴーリキー自動車工場で作られた高生産性，高耐久性，仕上げ表面あらさの小さい穴あけ用工具の詳細な紹介．筆者は同工場所属．

▶燃料用エル・ベ・エフ型紙製フィルタ　Н.Н. Захаров, Т.И. Васильев, Н.Н. Квашнин; Бумажный Фильтр ЛБФ для тонкой очистки топлива, с. 43～44, 図 5.

ディーゼル機関用フィルタのエレメントの紹介．НАМИ 考案のもので，細長い紙袋を折りたたんだ特殊な形をしている．従来のフェルト型との，新品および汚損していつた場合の抵抗比較を示している．筆者等は НАМИ 所属．

▶自動車工場，研究所において行なわれた実験および研究（摘要 No. 1, 1960) Научно-исследовательские и экспериментальные работы, выполненные институтами и заводами автомобильной промышленности. Перечень Но. 1, 1960 г., с. 44～45. НАМИ の研究項目 45 個を摘記している．

▶書評　自動車用往復圧縮機．評者 Н.М. Гиршберг（ハリコフ自動車道路研究所所属）; Л.А. Егоров и В.Г. Розанов, Автомобильные поршневые компрессоры. Машгиз, 1958.

▶新書紹介　自動制御の検出装置（便覧的資料）．機械部品の強度計算．機械製造企業における生産技術上の諸準備の組織化．金属切削工作機械のプログラム制御．鋼の脆性．金属切削工作機械と機械加工の精度の問題．総合的計画による技術上の改良．金属の欠陥発見法．金属切削の高生産的加工法の研究．光学的温度測定装置．金属加工における化学の応用．けい光式金属欠陥検査法．荷上げ装置．金属のクリープと疲労の理論．材料研究上のX線の応用．自由ピストン式ディーゼル圧縮機．以上の簡単な紹介．　（浅野）

STUDY ON AUTOMOBILE VIBRATION ENVIRONMENT

by Katsumi HASHIKURA & Tsuyoshi SUGIMOTO

Abstract

A stationary random vibration excited from road uneveness covers a grater parts of the overall vibration in the most vehicles through their lives.

The studies were conducted to give a contribution for the establishment of vibration test procedures and design criterion of automobile parts. The earlier part of this report includes (a) Statistical property of random vibration on automobile, (b) Statistical property of road uneveness and measuring device of power spectrum of road surface uneveness, (c) Study on tape recording system, and power spectrum analyzer.

These measuring systems were adopted to analyze the vibration of passenger cars, buses, trucks and motorcycles, and the vibration environments under various operating conditions have been revealed.

At the last parts of this report, some considerations connected with the ride feeling and the vibration test rig for the random vibration were taken.

U. D. C.. 534. 6 : 625. 03 : 629. 113. 07 : 681. 89

自 動 車 の 振 動 測 定

目　　次

1. 序　論……(1)
1·1 研究の目的および経過……(1)
1·2 オシログラフ記録その他による振動記録計測とその整理方法……(1)
1·3 ランダム振動の取扱い……(2)
2. 振動記録および分析装置……(4)
2·1 磁気テープ振動記録装置および再生装置……(4)
2·1·1 構成および作動……(4)
2·1·2 記録再生装置の特性……(6)
2·1·3 記録再生装置の利用……(7)
2·2 分析用装置……(8)
2·2·1 周波数分析器……(8)
2·2·2 rms メータ……(10)
3. 路面凹凸スペクトル測定……(12)
3·1 容量変化を用いた路面凹凸の測定……(12)
3·1·1 車体振動の影響……(12)
3·1·2 測 定 回 路……(12)
3·1·3 総 合 特 性……(14)
3·1·4 長周期振子……(14)
3·2 測 定 結 果……(15)
3·2·1 波状路の測定……(15)
3·2·2 周回路—コンクリート舗装路の測定……(15)
3·2·3 凹凸振幅の頻度および分析結果……(15)
3·3 第3章の総括……(16)
4. 自動車の振動環境測定……(17)
4·1 自動車振動の性質……(17)
4·2 乗用車の振動……(20)
4·3 トラック荷台上の振動……(23)
4·4 バスの床上振動……(25)
4·4·1 オーバオール rms レベル……(25)
4·4·2 周波数スペクトル……(26)
4·4·3 エンジン振動……(27)
4·5 2輪車の振動……(29)
4·5·1 走行中の振動レベル……(30)

4·5·2 走行中の振動の周波数分析結果……(30)
4·5·3 エンジン振動……(33)
4·6 第4章の総括……(34)
5. 乗心地評価についての一調査結果……(35)
5·1 実験の要領……(35)
5·1·1 試乗者の分類……(35)
5·1·2 道　　路……(35)
5·1·3 供 試 車……(35)
5·1·4 評 価 区 分……(35)
5·2 結　　果……(35)
5·3 第5章の総括……(36)
6. 振 動 試 験……(37)
6·1 狭帯域の場合……(37)
6·2 広帯域の場合……(37)
7. 総　　括……(39)
付 録　ランダム振動の定量的取扱い……(39)

1. 序　　論

自動車の振動は，車体のローリング，ピッチング，バウンシングなど，各振動モードにしたがって分類することが可能である．自動車の振動を理論的に取扱う上に重要であるこのような分類のほかに，耐久強度設計および室内試験の基準をもとめること，あるいは振動乗心地の評価などのためには，つぎのようにその波形から分類することが重要である．

自動車の振動
- 周期性振動：エンジン振動，プロペラシャフト，ホィールなどのアンバランス，波状路の走行
- ランダム振動
  - 衝撃性：障害物の通過
  - 連続性：常時，路面から伝達される定常不規則振動

周期性振動は単一波形の場合もあり歪波形の場合もあるが，一定の条件下では，その振幅は一定で，これを計測し，分析評価することが容易である*．これに対してランダムな性質をもつ振動で，とくにその連続性のものは，車の一生を通じて，車体や懸架装置の寿命あるいは乗心地に影響するところが大きいと考えられる．自動車の分野においては，ランダム振動の定量的測定，分析および整理方法などについての研究は不十分で，合理的な方法が実用化されていない現状と言える．

1·1　研究の目的および経過

自動車の振動環境を把握する上にランダムな振動の統計的な測定整理がおこなわれなければ合理的な結果と言い難い．このため自動車におけるランダムな振動の統計的な性質を検討し，その定量的計測方法を確立するのをこの研究の主目的とした．また従来の振動計測に利用されているオシログラフ記録に代わる磁気テープ記録装置がどこまで安定に車上で使用できるか，その精度，耐久性などについても，一般の利用に先立つて経験することによつて，計測の合理化に寄与することを目的とした．

研究の方法として，まず自動車の振動計測用に適する仕様をもつた磁気テープ振動記録および再生装置を試作し，その精度と安定性の向上をはかつた．測定波形の分析をおこない，パワスペクトルを得るためのフィルターの検討およびその際に必要な rms レベル測定回路を試作検討した．つぎに路面の凹凸について，その振幅頻度の統計的性質を検討し，これらの路面走行中の自動車の振動加速度についても同様なことを調査した．以上によつて，この装置の有用性をたしかめたので，各種の自動車について，機会あるごとに計測をおこなってきた．この報告には，これらの測定結果の代表的なものを集録した．

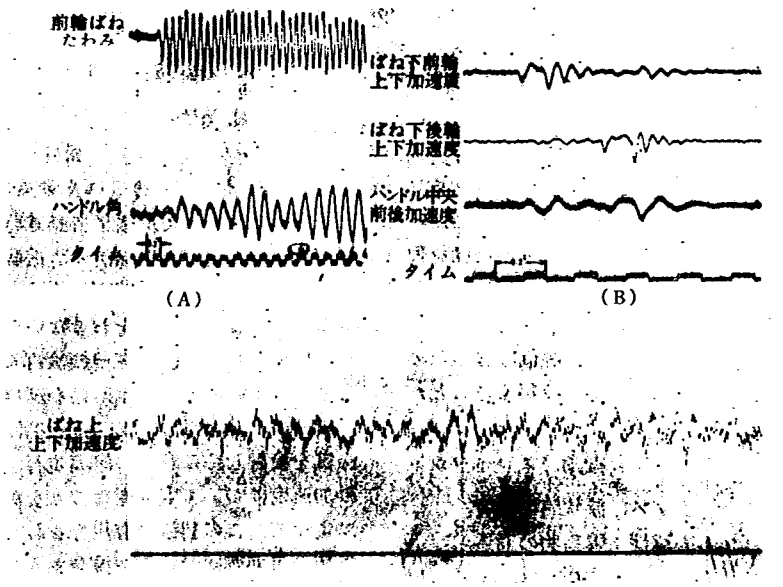
1·2　オシログラフ記録その他による振動計測とその整理方法

振動計測に現在もっとも多く利用されているオシログラフ記録による方法では，つぎにのべるような整理方法がとられている．

測定しようとする波形は第 1·1 図に示すような例で代表される．Aは定常正弦波に近く．Bは過渡的現象を示す．これらの場合には，その整理方法についての疑問は少ない．しかし一般の使用条件で記録される波形はCのような不規則波形で示される場合が多い．

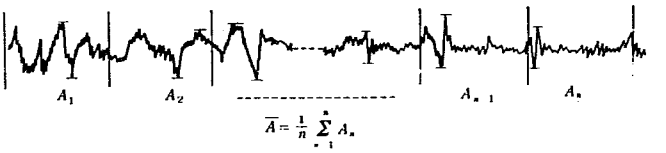
これらの波形から，振幅の平均値，振動数などを整理，評価することは，非常に労力を要し，精確には不可能の場合がある．整理の仕方の一例を示すと第 1·2 図のように，ある計測区間の記録を適当な区間に等分割し，各分割区間内の最大値（図の場合はオーバオール全振幅）をとり，全区間について算術平均をとる．目視で判別できる主要周波数成分について，これをおこなう場合もある．これは，各分割区間の最大値が正規分布していることから，その算術平均をとることに意味があるとされている[1]．これらの整理結果は，第 1·3 図のように車速に対してプロットし，なお詳しく

* むしろ高速走行時の騒音の問題につながる複雑な対策研究に困難な問題があると考えられる．



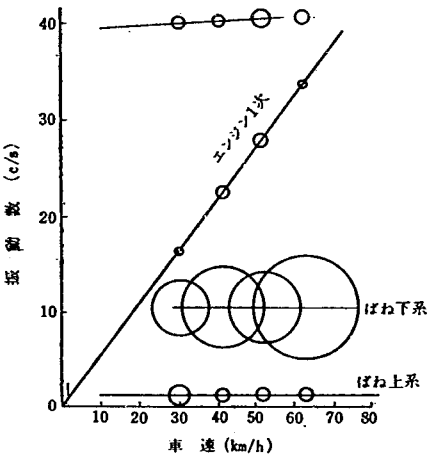
第 1·1 図　オシログラフ記録波形例

(C)



第 1·2 図　平均値のとり方

は，第 1·4 図のように横軸に車速，縦軸に周波数をとり，振幅値を円の大きさで示す．いわゆる丸解析図[2] として表示されている．



第 1·3 図　丸 解 析 図

第 1·1 図の下方に示すのは，機械試験所，試験道路の波状路における記録波形であるが，この場合も，共振時をのぞいて，高調波成分が大きく，その整理はオーバオール波形の振幅をとる程度になり周波数応答を知ることを目的にする場合などでは，きわめてあいまいな結果しかえられない．

オシログラフ記録方式のほか，指示計によって，振幅ピーク値の平均値を読みとる測定器などがあるが，統計的な意味が不明確であり，メータの時定数，測定器の周波数範囲など自動車用として十分な検討がなされていない現状と考えられる．

1·3　ランダム振動の取扱い

振動環境を統計的に扱うことは，ジェットノイズの問題，ロケットの振動，滑走路上の航空機の振動などでおこなわれており[3][4]，自動制御系の外乱の問題もこの方法で評価される[5]．自動車にお

/40

いても，主として疲労の問題と関連した動的応力の統計的性質が調査され，路面凹凸の測定や自動車振動系における振動伝達の計算[6][7][8][9]がおこなわれている．

ランダムな振動を定量的に取扱うことは，Stationary Random Process 理論の成果におうところが大きい[10][11][12]．定常不規則な振動とは，一定継続時間のどの区間をとつても，波形変化がある一定の確率法則に従つて表示され，その平均値の予測が可能であるようなものをいう．また，振幅の直線瞬時値の時間平均値と集合平均値が等しい．フーリエ級数成分のエネルギはいずれも全エネルギに対して低く，各位相は不規則である．

定常不規則振動のうちで，確率法則がガウス分布である場合をとくにガウス型振動とよぶ．定量的なとらえ方は，パワスペクトル密度をもって，各周波数成分のレベルを規定する．これはパワスペクトル密度が，ある確率法則にしたがう集合の評価尺度となることによっている．しかも，直線系の入出力パワスペクトルは定常周期振動と同様に計算ができる．

自動車の振動波形の統計的性質を調査した他の報告について，その概要を示せばつぎのごとくである．

応力波形についての結果が多いことは，疲労強度と直接関連性のあることから当然といえよう．オーバオール波形の極値頻度，最大値頻度などをオシログラムから計数したもの，頻度計数装置を利用しておこなった結果などである．計数装置も最大値頻度をとるもの，各段の設定レベルを正の傾斜で切る回数を計数するもの，および極値頻度をとるものなどの形式にわかれる．

ばね上応力では，オーバオール波形が設定レベルを切る頻度をもとめた結果[13]は，大体正規分布を示し，同じく最大値，極大値頻度をとった結果[14]もばね上では正規分布に近い場合があることを検定している．

ばね下加速度では，極大値頻度および極小値頻度を別々にとった結果[15]があり，この場合はポアソン分布的のものになることをのべている．また，その他の例[16]でもポアソン分布で第1近似できるとしている．ばね下応力の設定レベルを切る回数の統計結果[13][17]では正規分布に近いグラフを示している．また，一定の高応力レベルの発生確率はポアソン分布になることを示している．[13]

車体と車軸間の相対速度最大値頻度を求めた結果[18]では，ばねの圧縮および伸張方向共にゼロライン近くで頻度がやや減少し，0.2～0.4m/s のレベルで最も頻度の高いレーレー分布に近い傾向が示されている．

以上いずれもオーバオール波形を対象として分析しているが，後述のこの研究では，一定条件での走行振動記録波形を周波数分析し，その成分について統計的性質をしらべ，平均振幅を評価する尺度をもとめることとした．これにより，振幅の頻度分布だけでは得られない周波数に関する情報があきらかになり，振動環境をより合理的に評価できる等である．

研究速報（1）

U. D. C. 629. 113 : 534. 1 : 621-272 : 681. 142

アナログ計算機を使用した四輪車の上下振動に関する解析

（昭和 37. 1. 16. 受理）

岩崎茂夫[1] 千島和夫[2]

四輪車の上下振動を低速度型アナログ計算機で解析を行なつた．演算に用いたアナログ模キ回路は，ばね下，ばね上質量，ばね定数，ショックアブソーバの減衰力，タイヤばね定数などを考慮した 4 ないし 2 自由度系の振動回路である．

Analogue Simulation of Pitching and Bouncing for Four-Wheel Vehicle Suspension System

by S. IWASAKI and K. CHISIMA

We analysed the motion of a vehicle under the action of four wheel system by using a D-C analogue computer.

The block diagram of a D-C analogue computer was set for the vibration of four degree of freedom, taking into account of mass of vehicle body, front and rear axle assembly; stiffness of springs, damping force of shock absorbers, and stiffness of tyres.

1. ま え が き

自動車の振動問題をアナログ計算機で，模擬回路をつくり解析を行なおうとした試みは古くからみられ，1952年の SAE Journal に 1 自由度型の問題解析についての演算結果が記されてある．(1)

その後，国内電子計算機メーカなどがアナログ計算機を使用して自動車の振動系の模擬演算を行なつた結果を 2，3 発表している．(2)(3)

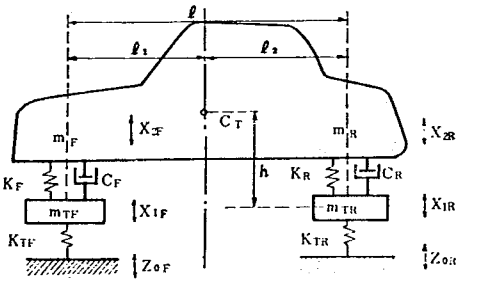
筆者らは，自動車の上下振動を 4 自由度の振動系と考え，当所に設置した低速度型アナログ計算機を使用して解析することを計画し，最初の段階として前後のばね，およびショックアブソーバの特性を線型とした場合と，非線型の場合との比較，前後輪を連成として計画した場合（4 自由度）と前後輪を非連成と考えた場合（2 自由度）の比較を行なつた．

2. 振 動 方 程 式

自動車の上下振動系を 4 自由度と考えた場合に完全な振動系を考えると前記したものの他に，次のようなものが必要であろう．

（1） 板ばねの場合は板間摩擦
（2） ジョイントまわりの固体および粘性摩擦
（3） タイヤの粘性減衰
（4） 重心およびばね下変位により生ずるばね定数，アブソーバの特性変化

その他，外力により上下振動する場合には，



第 1 図 四輪車の上下振動系

（5） タイヤの接地性の問題(4)
（6） リバウンドおよびストップにあたつたときのばね定数変化

しかし，今回は上に述べたものをすべて省略した系と考え，振動系の要素をばねは線型ばね，アブソーバは非線型アブソーバ，タイヤばね定数は線型として，連成，非連成の差異をできるだけ明解に知れるようにした．

またこれと同時に，非対称両効き，片効きなどの特性を対称両効きのような線型アブソーバに置きかえることが可能かどうかを調べた．

よつて振動系のモデルを第 1 図のように考えれば，振動方程式はつぎのごとくである．(5)

$$M_1\ddot{X}_{2F}+C_F(\dot{X}_{2F}-\dot{X}_{1F})+K_F(X_{2F}-X_{1F})-M_2X_{2F}$$
$$=-M_3\ddot{X}_{2R}-M_2\ddot{X}_{2R} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$M_4\ddot{X}_{1F}-C_F(\dot{X}_{2F}-\dot{X}_{1F})-K_F(X_{2F}-X_{1F})$$
$$=K_{TF}(Z_{0F}-X_{1F}) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$M_5\ddot{X}_{2R}+C_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})+K_R(X_{2R}-X_{1R})-M_2X_{2R}$$
$$=-M_3\ddot{X}_{2F}-M_2X_{2F} \quad \cdots\cdots(3)$$

1)・2). 三菱製材（株）・発条技術部

$$M_6\ddot{X}_{1R}-C_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})-K_R(X_{2R}-X_{1R})$$
$$=K_{T3R}(Z_{0R}-X_{1R}) \quad \cdots\cdots(4)$$

ここで 1～4 式の M_1～M_6 は車の諸元から決まる定数であつてつぎのように表わせる．

$$M_1=m_F\left\{1+\frac{h^2}{l_2^2}\cdot\frac{m_T\cdot m}{m_F(m+m_T)}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$M_2=\frac{mgh}{l^2} \quad \cdots\cdots(6)$$

$$M_3=m_{c1}\left\{1-\frac{h^2}{l^2}\cdot\frac{m_T\cdot m}{m_R(m+m_T)}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$M_4=m_{TF} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$M_5=m_R\left\{1+\frac{h^2}{l^2}\cdot\frac{m_T\cdot m}{m_R(m+m_T)}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$M_6=m_{TR} \quad \cdots\cdots(10)$$

また m_{c1}, m_F, m_R, m_T =,

$$m_{c1}=\frac{ml_1l_2-I_1}{l_2} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$m_F=\frac{ml_2^2+I_1}{l_2} \quad \cdots\cdots(12)$$

$$m_R=\frac{ml_2^2+I_1}{l_2} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$m_T=m_{TF}+m_{TR} \quad \cdots\cdots(14)$$

であつて，m, m_F, m_R は，

m：車両総重量　m_F：フロントばね上質量

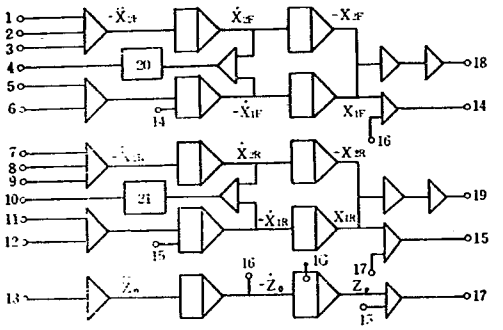
m_R：リヤばね上質量

また重心位置の上下変位を Z_G，ピッチング角を θ とすれば，

$$Z_G=\frac{l_2x_{2F}+l_1x_{2R}}{l} \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\theta=\frac{x_{2F}-x_{2R}}{l} \quad \cdots\cdots(16)$$

3. ブロックダイアグラム



1 $K_F(X_{2F}-X_{1F})$	2 $\ddot{X}_{2R}$	3 $C_F(\dot{X}_{2F}-\dot{X}_{1F})$
4 $C_F(\dot{X}_{2F}-\dot{X}_{1F})$	5 $C_F(\dot{X}_{2F}-\dot{X}_{1F}$	6 $K_F(X_{2F}-\dot{X}_{1F})$
7 $K_R(X_{2R}-X_{1R})$	8 $\ddot{X}_{2R}$	9 $C_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})$
10 $C_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})$	11 $C_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})$	12 $K_R(\dot{X}_{2R}-\dot{X}_{1R})$
13 $Z_0\sin\omega t$	14 $-(X_{1F}-Z_{0F})$	15 $-(X_{2R}-X_{1R})$
16 $=Z_0\sin\omega t$	17 $Z_0\cos(\omega t+\delta)$	18 $-(X_{2F}-X_{1F})$
19 $-(X_{2R}-X_{1R})$	20, 21 関数発生器	

第 2 図　ブロックダイアグラム強制振動

第 3 図　非対称両効き

第 4 図　片　効　き

振動方程式に四輪車の諸元を想定代入し，アナログ計算機用のブロックダイアグラムをつくれば第 2 図のごとくである．

この場合，実際の振動系の振動時間は非常に短かく，実時間演算を行なうことは計算機の精度上好ましくないので，演算時間を 20～40 倍に引伸して演算を行なつた．

ブロックダイアグラムには折線近似関数発生器が示してある．これは通常いわれているショックアブソーバの非対称両効き，片効きなどの減衰力を非線型特性に近似させるものである．

また，この非線型アブソーバと同一の散逸エネルギーを有する線型アブソーバもブロックダイアグラムを書き直して演算を行なつた．このアブソーバの特性を関数発生器によつて近似させた様子を第 3, 4 図にて示す．

加振力として上下方向のステップおよび，波長 0.75 m に相当する正弦波形を与え，それに対応する過渡振動ならびに強制振動の演算を行なわせた．

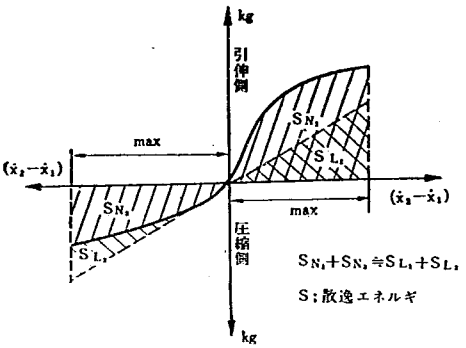
これらの演算は連成，非連成の差異および非線型，線型アブソーバの近似がばね上の重心地にどの程度影響するかを調べるために，ばね上の加速度，変位を主として問題にした．

4. 振動波形および演算結果

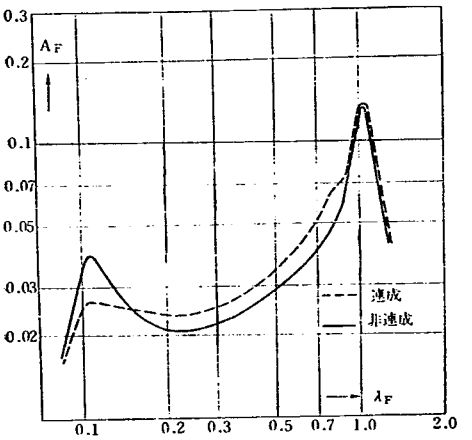
3. で説明したブロックダイアグラムで演算した結果を示せばつぎのごとくである．

4. 1. ばね上加速度共振特性

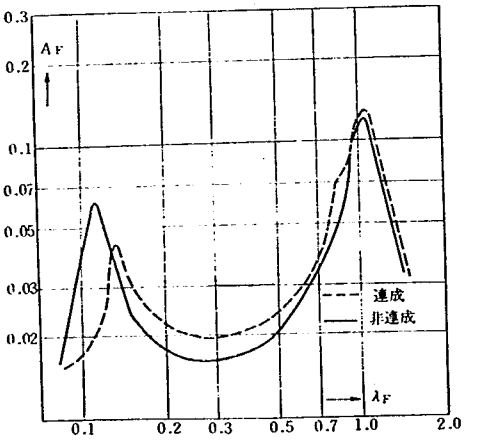
ショックアブソーバの減衰力を非線型にしたものと，この系を強制振動させ振動中に，発生した相対速度の最



第 5 図　等価減衰係数の算定法

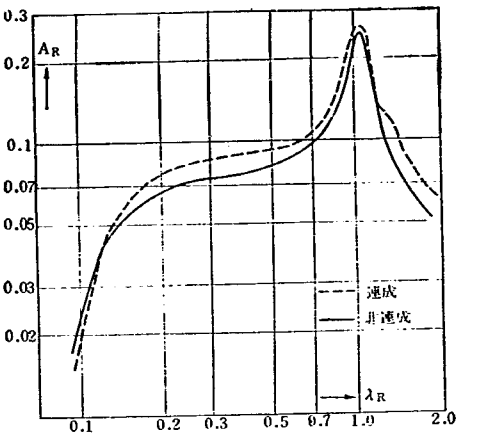


第 6 図　共振特性．非線型

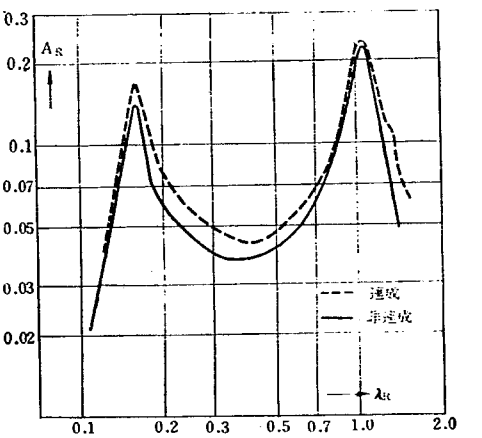


第 7 図　共振特性．等価減衰係数

大値に相当するエネルギと同一のエネルギを有する減衰力を線型におきかえたものを等価減衰係数と考え，二者のおきかえの良否および 4 自由度と 2 自由度の差異につ



第 8 図　共振特性．非線型



第 9 図　共振特性．等価減衰係数

いて検討した．結果を第 4,5,6,7 図に示す．

図の縦軸は，ばね下振動数の 2 乗に強制振幅を掛け合せて，これでばね上加速度を割つたものを A_F または A_R として表わした．

横軸は強制振動数をばね下固有振動数で割つたものを λ_F, λ_R として示した．

$$A_F=\frac{\ddot{X}_{2F(R)}}{\omega_{TF(R)}{}^2\cdot a} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\lambda_F{}^2=\frac{\omega^2}{\omega_{TF(R)}{}^2} \quad \cdots\cdots(18)$$

F：フロント，R：リヤ，ω：強制振動数

ω_T：ばね下固振動数，a：強制振幅

加速度共振特性における 4 自由度と 2 自由度の差異は特性曲線から次のようなことが認められる．

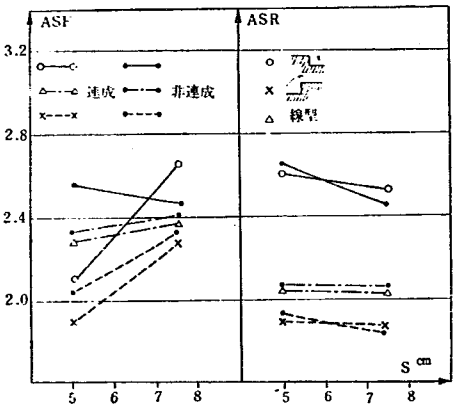
すなわち，連成度の低い四輪車などでも前後輪が多少連成し，ばね上共振点が，非連成のものに比べてずれていることが認められる．また，ばね下共振点のばね下加

速度の影響によつて，ばね上加速度の増加が認められる．

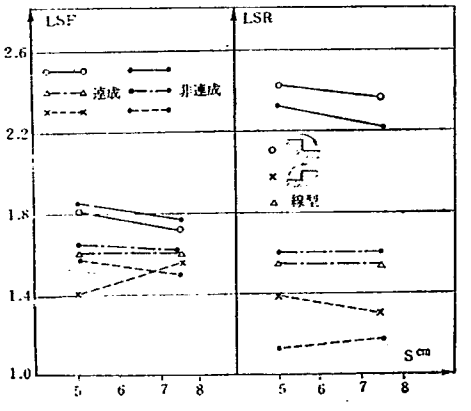
つぎに，非線型アブソーバを線型におきかえた結果，ばね上共振点のばね上加速度の最大値に多少差異が認められる．これは非線型アブソーバを線型アブソーバにおきかえたときに，ビストンスピードの遅いところ，すなわち 0.1～0.3 m/sec 付近の減衰力勾配の変化によつて生じたものと思われる．何故ならば，強制振動数を 15 cps 付近までの演算を行なわせて，その演算中に発生した最大相対速度を標準にして線型アブソーバの減衰力勾配を決定している．よつてビストンスピードの遅いところの減衰力勾配は，非線型の場合の勾配に比較すればかなり横にねている．そこで，ばね上共振点附近で発生する減衰力がかなり少なくなつているためであろう．

4. 2.　ステップ応答

ステップ応答の場合の外力の与え方は，4 自由度の場合は前後輪別々にステップを与え連成の影響を調べた．このときのばね上加速度，変位の値を第 10, 11 図に，波形を第 12, 13 図に示す．



第 10 図　ステップ応答による加速度値



第 11 図　ステップ応答による変位値

第 10, 11 図においては，縦軸にばね上固有振動数の 2 乗にステップの高さを掛けたもので過渡振動中に発生したばね上加速度の最大値を割つたものを $A_{SF(R)}$ として表わし，変位の場合も同じく最大変位をステップの高さで割つたものを $L_{SF(R)}$ で表した．

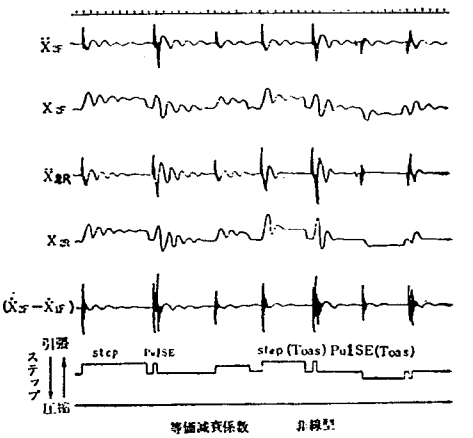
$$A_{SF(R)}=\frac{\ddot{X}_{2F(R)}}{\omega_{BF(R)}{}^2\cdot S} \quad \cdots\cdots(20)$$

$$L_{SF(R)}=\frac{X_{2F(R)}}{S} \quad \cdots\cdots(20)$$

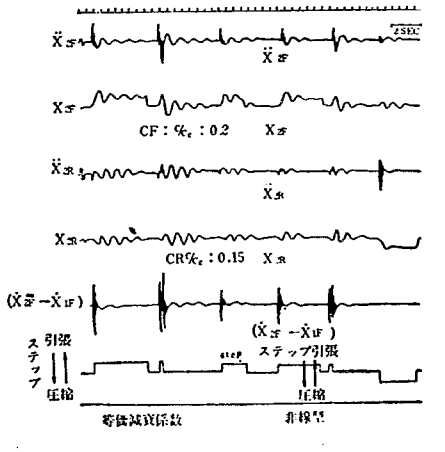
ω_B：ばね上固有振動数
S：　ステップの高さ
F：　フロント　　R：　リヤ

第 10 図は，ばね上加速度の最大値を示したもので，実線はステップに乗り上げた場合，一点サ線は非線型アブソーバを線型におきかえたときの値である．

また　×　印のついたものは 4 自由度であつて，無印



第 12 図　ステップ応答（非連成）



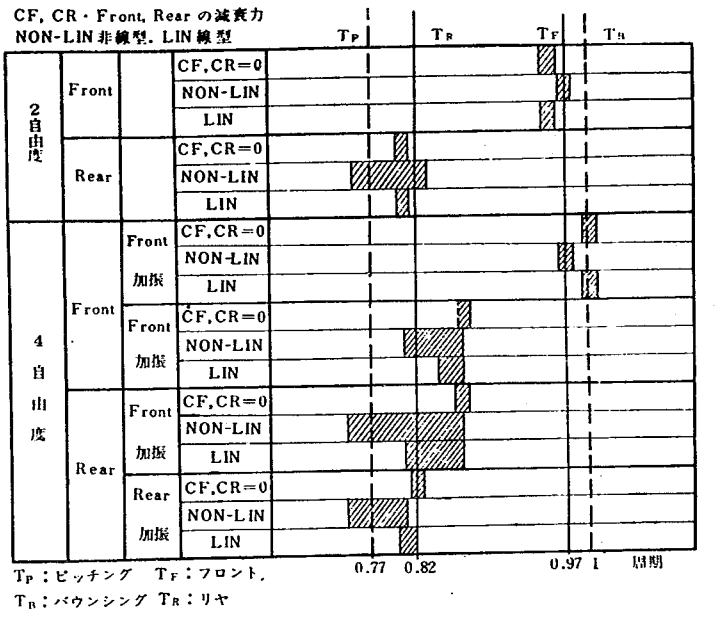
第 13 図　ステップ応答（連成）

のものは2自由度の値である．変位についてもこの記号は同一である．

さて，A_{NF}, A_{NR} から解るように，有印，無印の値に殆んど差異が認められないことは連成の影響があまりないことを示している．

またショックアブソーバの減衰力は普通，圧縮側に少なく，引張側に大なるため，ステップに落ちた場合が加速度が一番大で，線型近似したものがその次で，ステップに乗り上げたときものものが一番小さいようである．

このことは，リヤのアブソーバが片効きであるので，リヤのばね上加速度に顕著な傾向を表わしている．第9図の最大変位も，第11図のばね上加速度と同様な傾向を示している．



第 14 図 連成，非連成によるばね上周期

この第 10，11 図からわかる様に，ばね定数の低い四輪車，すなわちばねの復元力が比較的少なく，アブソーバの減衰力と同程度の場合は，アブソーバの減衰力がばね上加速度の増減を大きく左右するものと思われる．

4.3. 自由振動

4.1. と同様な条件で前後輪別々に強制変位をばね上質量に与えて自由振動を行なわせ，4 自由度と2自由度の差異を調べた．

このときのばね上振動周期の演算結果をフロント，リヤについて示したものが第 14 図である．

第 14 図において T_P, T_B, T_F, T_R は筆算値による値であつて，

T_P：ピッチング周期 } ……4 自由度の場合
T_B：バウンシング周期 }

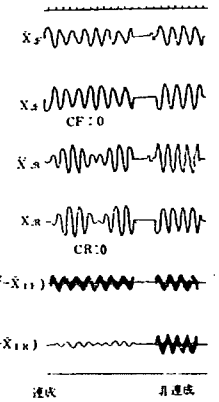
T_F：フロントばね上周期 } ……2 自由度の場合
T_R：リヤばね上周期 }

実線および点線で示してある．

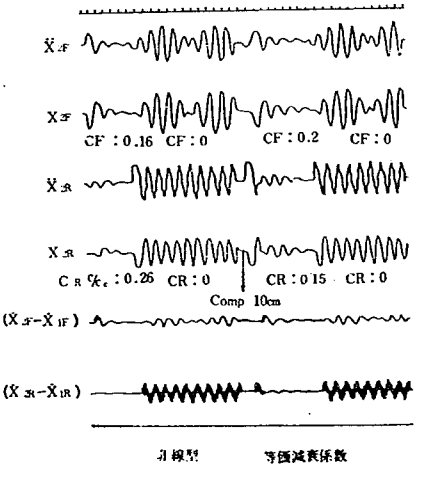
また，横軸はバウンシング周期を 1 としたときの T_P, T_F, T_R の値を示した．

演算値はシヤ線にて振動周期の範囲を示した．このように演算値の周期がある範囲を有するのは，演算精度によるものか，あるいはアブソーバの減衰力がばねの復元力に比較してかなり大きく，また非線型であるので，振動周期を左右しているのではないかと思われる．

つぎに，連成の影響としてリヤのばね上を加振したときに，フロントのばね上振動周期がリヤの振動周期に近い値を示している．このことは第7図のばね上加速度共振特性からも認められることであつて，リヤの振動系の影響によるものと思われる．その理由として



第 15 図 自由振動



第 16 図 自由振動

は，フロントの振動系よりもリヤの方が，ばねの復元力，ショックアブソーバの減衰力を合計したものが大きいためではないか．

その他，4 自由度の振動波形からは，前後輪にショックアブソーバがないと共振状態を起こして，ばね上加速度がかかり大きな値を示している．波形を第 15，16 図に示す．

5. あ と が き

以上の演算結果は四輪車の複雑な振動要素を省略した演算であつて，前述したような複雑な問題を含んでいないが，以下のようなことがいえるのではないか．

（1） 非運成条件を大略満足している乗用車などは，前後輪別々に演算を行なつてもよいのではないか．

（2） 非線型アブソーバを線型アブソーバに置きかえることは可能であるが，非線型を線型におきかえるため，ピストンスピードの遅いところの減衰力勾配が変化し，第 5，7 図の加速度共振特性から認められるように，ばね上共振点付近に問題を生じている．

また，ステップ応答からは，振動が減衰するまでの時間が線型におきかえた場合は，非線型のものよりもかなり長いことである．いいかえれば，ピッチングなどの車体振動を左右するものは，主としてアブソーバのピストンスピードの遅い範囲の減衰力勾配の立ち上がりに起因しているのではないかと思われる．(6)

参 考 文 献

（1） Allew Lange and John Dute; U. of Mtchi. Studies Vehicle Suspension with Analog. SAE Journal, Dec. 1952.
（2） 三浦武雄・沼倉俊郎；日立アナログ計算機とその展望．
（3） 日立アナコンシリーズ；二輪車の重心地解析 (3)．
（4） 御出・岡田；車体振動におよぼすばね下重量の影響．自動車技術．Vol. 15. 1961.
（5） 亘理厚，他；理論自動車工学．振動および重心地．
（6） 吉田・山田；車体ピッチングにおよぼす懸架特性の影響．トヨタ技術．Vol. 13, No. 2. Sep. 1961.

(181 ページからつづく)

（3） **乗用車**　乗用車は次の 3 種にわけて考察する．

（1） 大型自家用車（重量 4,000 ポンド，最高時速 80 マイル）

（2） 中型自家用車（重量 2,400 ポンド，最高時速 50 マイル）

（3） 大型タキシー車（重量 4,000 ポンド，最高時速 50 マイル）

これらの車のガソリン機関の代わりに，水素・酸素燃料電池を積むことは，(1), (2), (3) 共重量，体積，コストの点で不可能である．例えば，(1) の車は電池だけでガソリン機関の 15 倍（総重量では 2.5 倍）の重量となり，4～5 倍の体積(14)，9 倍の最初コスト，3 倍の運転費が必要となる．

しかし，将来開発が予想される炭化水素燃料電池について検討すると，必らずしも悲観的でない．すなわち，(1) の車についてはやはりガソリン車と太刀打ちできないが，(2) および (3) の車については，電池はガソリン機関とほぼ同じ重量およびコストとなり，体積は後者の約 $1/2$，運転費は $1/5$ と推定された．

6. む す び

現在開発されている最高性能の低温，低圧，水素・酸素燃料電池は小型トラックや産業用トラクタに関してはガソリン車よりも有利な線が出ているから，遠からず実用化されるものと思われるが，乗用車には到底問題にならない．しかし，数年後に開発の予想されるメタノールなどを燃料とする燃料電池では，これらの用途にある程度使用される見とおしがあり，さらにプロパン，ブタンなどの炭化水素を燃料とすることができるようになると，大型，高速の乗用車を除いて各種の自動車に燃料電池が使用される可能性がある．しかし，この推定には解決の容易でない基本的な問題を多く含んでいるから，その時期は今後少なくとも 10 年を要するであろうと思われる．

なお，燃料電池を車両用として実用化するためには，電池のみならず，車体にアルミニウム，プラスチックスなどを用いて軽量化することや，直流モーターにプリント配線を採用するなど，極力軽量化することが強く要望される．

参 照 文 献

（1） Elec. World, Mar. ('59) p. 23.
Business, Jan. ('60) p. 182.
（2） Rupp. Proc. 12th Ann. Batt. Res & Dev. Conf. ('58) p. 8.
Hunger. Proc 13th Ann. Batt. Res & Dev Conf. ('59) p 107.
（3） Elec. World, Apr. ('59) p. 20.
（4） Mech. Eng. Aug ('59) p. 77.
（5） De Zubay, SAE J. July ('60) p. 35.
（6） 川島・小川・田村：自動車技術，Vol. 15, No. 7, 1961. p. 136.
（7） Wynn, proc. 14th Ann. Power Sources Conf ('60) p. 52.
（8） Chem Week, Vol. 86, ('60) p. 58.
（9） Machine Design, June 9 ('60) p. 12
（10） American Gas J., Dec. ('59) p. 24
The Iron Age, Oct. ('59) p. 22.
（11） Yeager, Science, Vol. 134 ('61) p. 1178.
（12） "Fuel Cells, Power for the Future" Fuel Cell Res. Associates, Cambridge 38, Massachusetts ('6) p. 82
（13） Stevens, SAE Paper, 30 3A ('61).
（14） American Machinest, May ('60) p. 79

研究論文（2）

自動車の走行荷重に関する実験解析

Experimental Load Analysis of Automobiles in Actual Operations

（昭和 39. 4. 20. 受理）

川　合　平　夫[1)]
HIRAO KAWAI

1. まえがき

自動車が，実用走行時に受ける荷重の大きさや頻度はその環境条件や，車の応答性により，かなり広い範囲にしかも不規則に変化するものである．

筆者は，すでに走行時の荷重や応力履歴の実験解析について，基礎的な考察を行ない[1)-3)]，またこれに類する報告がかなりあるが[4)-9)]，実用走行時の荷重状態についてふれたものはない．実用走行時の荷重履歴を知るためには，特定路面状態における荷重履歴と同時に，それらに遭遇する確率についての情報もまた重要である．

いろいろな路面に遭遇する確率を求めることは，ぼう大な実験や測定が必要であるが，本報においては，出力応答と見なしうる加速度や応力などについて，実用走行時における履歴を実測し，これらの結果にもとづいてある程度検討を試みたので，その結果の一部について報告する．

2. 理論的基礎

実用走行時の荷重または応力変化過程は，単純な定常過程と考えることはできない．しかし，ある限定した範囲内では，定常とみることが可能である．そこで，自動車が実用走行時に受ける全荷重履歴は，単純な定常ガウス過程ではないが，ガウス過程の和として表わしうるものと考える．

いま考える過程が $i=1$ から k までの，k 個の単純ガウス過程の和で表わされるとすると，単位時間内に荷重がある値 a_n を越える平均回数 $\overline{M(a_n)}$ は，つぎのように表わすことができよう．

$$\overline{M(a_n)}=\sum_1^k p_i\cdot N_i(a_n) \tag{1}$$

ここに p_i は i 番目の単純ガウス過程の，全体に対する割合，$N_i(a_n)$ は i 番目の過程のみを考えた時，単位時間あたり，ある値 a_n を越える回数である．ところで，$N_i(a_n)$ は Rice[10)] により，つぎのように与えられる．

$$N(a_n)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\int_0^\infty \omega^2\phi(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty \phi(\omega)\,d\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{a_n^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

ここに $\phi(\omega)$ はランダム変数 $a_n(t)$ のパワスペクトル密度，σ^2 は2乗平均値である．

いま，自動車の応答特性を固定し，また入力としての路面スペクトルの形は変わらず，その強さだけが変化すると仮定すると，(2)式の係数は常数とみられ，これを C とすると

$$N(a_n)=C\cdot e^{-\frac{a_n}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

ここに，C は $a_n(t)$ が単位時間あたり正の傾斜をもつて0を通過する回数の期待値である．(3)式から

$$L=C_1-\frac{a_n^2}{2\sigma^2} \tag{4}$$

ここに，$L=\log_e N(a_n)$，$C_1=\log_e C$ である．

上式は，$L=\log_e N(a_n)$ が傾斜 $-1/2\sigma^2$ をもつ a_n^2 の線形関数であることを示している．すなわち，定常ガウス過程では，片対数目盛で a_n^2 の関数として表わした，あるレベルを越える平均回数の直線の傾斜から，その過程の2乗平均値が求まることがわかる．

さて，(3)式を(1)式に代入すると，

$$\overline{M(a_n)}=C\sum_1^k p_i e^{-\frac{a_n^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

となる．そこで，走行速度も平均値的なものを考えると，$\overline{M(a_n)}$ は単位距離あたり，ある値を越える平均回数とみなすことができる．以上が，以下に述べる荷重データ解析の基礎となるものである．

3. 実験および測定方法

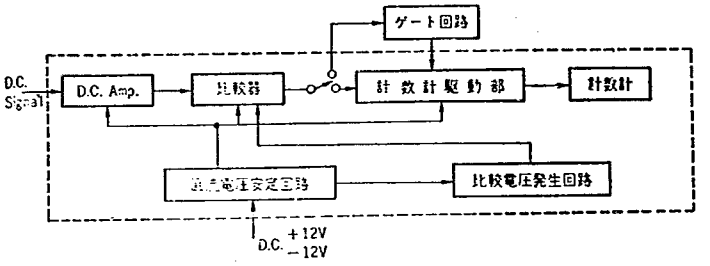
以上に述べた考察から，実用走行時における荷重状態を知るには，全走行区間にわたつて，ある荷重レベルを越える平均回数を求めればよい．このようなデータが，種々の道路またはルートについて得られれば，自動車が実用状態で受ける荷重条件が，ある程度定量的に表わしうることになる．

ところが従来の計測方法や計測器では，その測定データの整理に多大な時間を要するので，筆者はつぎに述べるような，車内に装備し直接頻度を計数できる，新しい計数装置を開発した．これにより走行を終わつた瞬間に，必要な荷重レベルにおける頻度が得られることになつた．

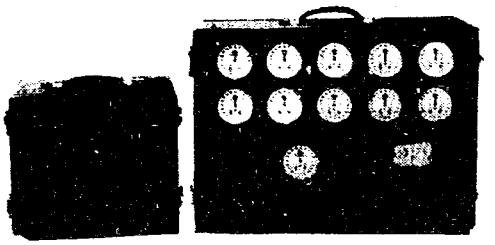
3.1. 開発した新しい頻度計

本計器は動歪計と組み合わせて，電気信号に変換され

1). 三菱重工業(株)名古屋自動車製作所・技術部．（名古屋市港区大江町 2）



第1図　計数器のブロック線図



第2図　携帯用頻度計

た歪または応力振幅の大きさを分類計数する，可搬形の頻度計で，±5 レベルと，0 レベル，合計 11 個の計数部をもつものである．計測方法は経過レベル頻度計数と，アダプタ利用により，最大値頻度計数とのいずれかが可能なようになつている．

可搬形とし，かつ長時間連続使用の必要から，本器の増幅部，スライスレベル設定部，比較器などすべてトランジスタを使用した．また，計数器は指針形電磁カウンタを用いたので，電源は 24V バッテリだけで動作させることができる．本器のブロック線図を第1図に，外観を第2図に示す．

3.2.　測定方法

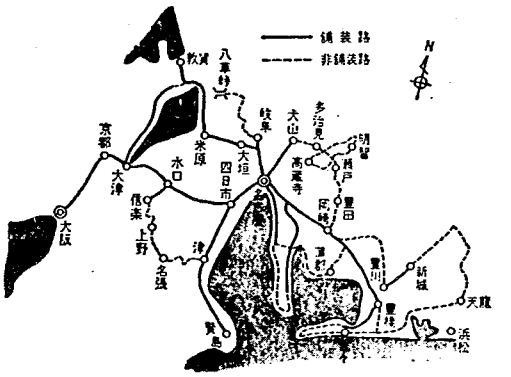
以上に述べた計数装置から，実走行状態でいろいろのルートについて計測を行なつた．計測は，自動車の各構造部分の応力，加速度，変位その他適当なトランスジューサを用いることにより，いろいろな量について可能であるが，本報ではその中の重心付近の上下加速度についての結果を，代表的に取り上げることとする．

実用走行時のデータとしては，かなり広範囲にわたつて計測を行なう必要があるが，とりあえず代表的と思われるルートを選んで，実験測定を進めることにした．実測を行なつたルートを第1表および第3図に示してある．これらのルートはかなり良好な道路から，かなり悪いものまでを含んでいるものとみてよい．測定はすべて同じ自動車(小型乗用車)を用いて行なつた．これは一応自動車の応答を固定する意味からである．

4.　測定結果とその一整理法

第1表に示した各ルートを実際に走行して得られた，重心付近の上下加速度頻度の計測結果を第2表に示す．また，$\overline{M(a_n)}$ を単位距離あたりの平均回数とみなし，$\log \overline{M(a_n)}$ を縦軸に，a_n^2 を横軸にとつて，これらの結果をプロットした例が第4，5図である．前述したように，ある値を越える回数で表わされる実際の荷重履歴は，このように直線にはならない．すなわち，単純なガウス形分布でないことがわかる．

これらの実測曲線が，いくつかの直線で表わされる分



第3図　実測ルート

第1表　実走行ルート

ルート No.	経路	距離 (km)	平均車速 (km/h)	路面状況 舗装 (%)	路面状況 非舗装 (%)	備考
1	名古屋～四日市～大津～京都～茨木～大阪	213.1	36.8	100	—	
2	大阪市内 中心部	40.2	13.7	100	—	ラッシュアワー走行
3	名古屋～大垣～米原～敦賀～塩津～大津～四日市～名古屋	392.6	42.2	~100	—	一部石だたみ道
4	名古屋～四日市～津～伊勢～鳥羽（往復）	329.5	37.7	~100	—	
5	名古屋～大高～半田～阿崎～常滑～名古屋	138.6	33.3	80	20	
6	名古屋～岐阜～揖斐～八草峠（往復）	245.7	27.1	64	36	
7	名古屋～四日市～津～名張～～上野～信楽～水口～四日市～名古屋	301.4	37.4	63	37	
8	名古屋～笠寺～神部～豊田～瀬戸～多治見～太田～鵜沼～名古屋	256.0	33.2	65	35	
9	岡崎～桧坂峠～豊川～新城～長岡～天竜～三ケ月～白須賀～百々～豊橋～岡崎	270.9	39.1	20	80	
10	鹿乗橋～品野～杁野～遠山追分～明智～多治見～定光寺～鹿乗橋	102.8	33	—	~100	

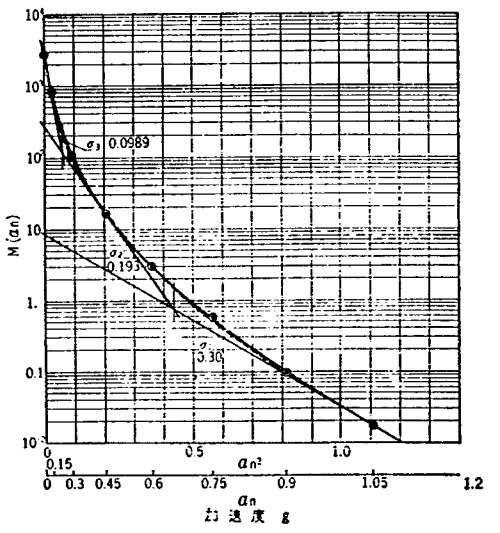
第 2 表　1 km あたりの加速度頻度（正負両側を含む）

ルート No. / g レベル	km 当たり回数									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 ～	2800	4022	1945	2600	1940	2951	2502	2080	2700	1961
0.15～	805	1211	885	510	549	635	816	800	1700	1100
0.3 ～	111	192	163	128	147	99.3	414	320	849	584
0.45～	16.1	24.1	30.3	32	39.8	40.1	190	121	310	280
0.6 ～	2.93	4.03	6.4	7.7	10.6	13.8	74.3	47.6	107	118
0.75～	0.588	0.7	1.7	1.9	3.65	5.44	23.6	18	39	47
0.9 ～	0.094	0.125	0.555	0.581	1.37	2.64	5.73	7.15	13.4	16.5
1.05～	0.016		0.229	0.235	0.592	1.42	2.88	2.7	4.7	5.8
1.2 ～			0.116	0.119	0.332	0.769	1.80	1.03	1.66	1.95
1.35～			0.0642	0.057	0.209	0.413	1.20	0.39	0.73	0.8
1.5 ～			0.0382	0.028	0.144	0.227	0.833	0.148	0.369	0.36
1.8 ～			0.0166	0.0084	0.0729	0.0685	0.432	0.0213	0.233	0.111
2.1 ～						0.0219	0.239		0.16	0.0545
2.4 ～						0.00109	0.136		0.114	0.0292
2.7 ～							0.0629		0.08	0.0165
3.0 ～							0.0498		0.0591	0.00973
3.3 ～							0.0305			
図	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

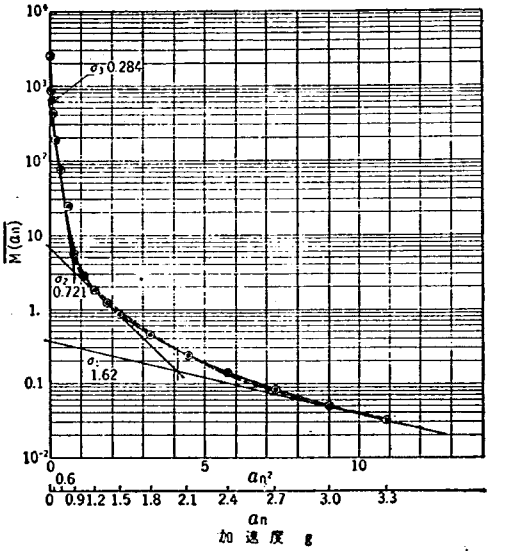
布の和として表現しうるかどうか検討しよう．結果の例を同じく第 4，5 図に示してある．これらをみると，わずかの直線成分によつて，良好な近似が得られていることがわかる．これらは，三つのガウス形分布の和として示されているが，この直線成分の決め方はつぎのようにして行なつた．

まず，最初の直線は，実測分布曲線の最終端付近の傾斜から求まる．つぎに，この直線上の値が，これと対応する実測曲線上の点の値の，ちようど半分になるようなところをとおり，実測曲線に接する直線を引くと，2 番目の直線が得られる．以下必要に応じて同様の方法を繰り返えし，3 番目，4 番目の直線を得ることができる．

以上で，実走行における重心付近の上下加速度の大きさの分布は求まつたが，全走行距離に対し，これらの分



第 4 図　ルート No. 1（名古屋――大阪）における加速度頻度分布．
(213.1 km, 347 分　$\bar{V}$=36.8 km/h)



第 5 図　ルート No. 7（名古屋――津――上野――水口――名古屋）における加速度頻度分布．(301.4 km, 483 分，$\bar{V}$=37.4 km/h)

第 3 表　各ルート別に求めた σ_i, p_i の値

ルート No.	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	p_1 (%)	p_2 (%)	p_3 (%)	p_4 (%)
1	0.30	0.193	0.0989	—	0.30	9.25	85.7	—
2	0.282	0.176	0.0599	—	0.522	15.4	83.3	—
3	0.813	0.367	0.197	—	0.0072	0.617	20.6	—
4	0.541	0.369	0.203	0.0933	0.0269	0.462	15.0	76.9
5	0.83	0.335	0.169	—	0.0309	2.24	36.1	—
6	0.76	0.47	0.202	—	0.0295	0.576	18.6	—
7	1.62	0.721	0.284	—	0.0148	0.266	18.0	—
8	0.524	0.348	0.159	—	0.385	9.13	72.1	—
9	1.75	0.461	0.269	—	0.0104	1.78	43.1	—
10	1.27	0.515	0.308	—	0.00765	1.27	40.8	—

布がどのような割合で出現するかを知る必要がある．いま，実際の荷重履歴が (5) 式で表わされることが，実測結果からわかつたが，(5) 式の和の各項は一般に

$$M_i(a_n)=Cp_ie^{-\frac{a_n^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

によつて与えられるから

$$p_i=M_i(a_n)/Ce^{-\frac{\sigma_n^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

いま　$a_n=0$　とすると

$$p_i=M_i(0)/C \tag{8}$$

ここに，C は正の傾斜をもつて 0 を通過する回数であり，$M_i(0)$ は σ_i なる直線が，$a_n=0$ における値であるから，前者は 0 レベルの計測値から，後者は図により求めることができる．各測定ルートごとに σ_i p_i を求めた結果を**第 3 表**に示した．

5. 結果の考察

前項に述べた結果は，実用走行時における荷重頻度が，比較的少ない単純ガウス形分布の和で近似され，かつそれらの割合も同時に求まることを示したものである．

換言すれば，実走行時における荷重分布は，数個の離散的な r. m. s. 値をもつガウス形分布が，ある割合で組み合わさつたものであることを示す．

そこで，これからどのような組み合わせであるかを見るために，得られたデータから σ_i と p_i との関係をプロットしてみたのが**第 6 図**である．いま，路面のほとんどが良好な舗装である場合 (A) と，大部分が非舗装で，一部かなりおうとつのはげしい部分が含まれている．もつとも，苛酷な道路条件と考えられる場合 (B) の代表として第 6 図を参照し，**第 4 表**の値をとつてみる．この両極端の代表とみられる (A)，(B) 二つの場合について，両者の割合をいろいろ変えて，上下加速度頻度を計算してみたのが**第 7 図**である．

一方，測定したルートを

(a)　ほとんど全部が舗装のもの

(b)　一部舗装を含む非舗装ルート

(c)　全部の測定値

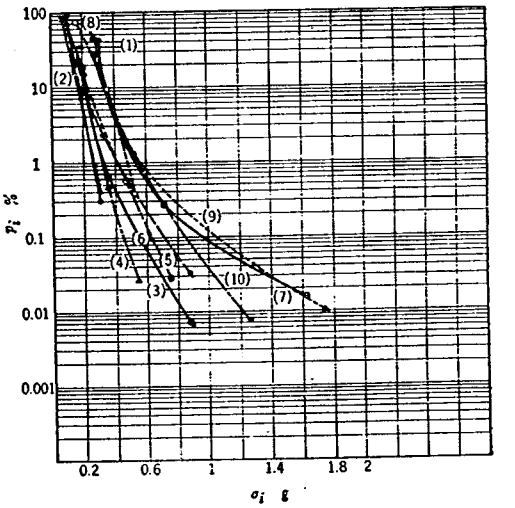
にわけ，それぞれを総合しこれを第 7 図の中にプロットしてみた．自動車が，主として都会および主要幹線道路において用いられる場合は (a)，反対に主として非舗装路において用いられる場合は (b)，その中間を (c) と考えれば，同図から (a) (b) (c) はそれぞれつぎのような組み合わせで表わされると見てよい．

(a):　0.96A+0.04B

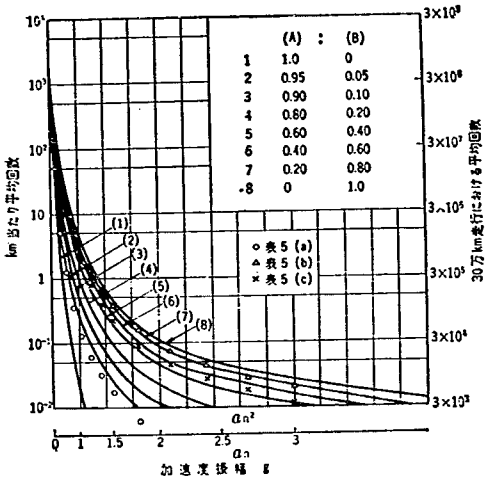
第 4 表　路面状態による代表値

	舗装良路代表 (A)		非舗装悪路代表 (B)	
i	σ_i	p_i (%)	σ_i	p_i (%)
1	0.30	0.7	1.80	0.01
2	0.18	30.0	0.60	1.00
3	0.12	69.0	0.30	68.00
4	—	—	0.20	20.00
5	—	—	0.15	10.4

ただし C=2800 とする．



第 6 図　実測ルートの σ_i–p_i 関係



第7図　第4表の(A)(B)両代表分布の組み合わせ分布

(b)：　0.2A+0.8B

(c)：　0.5A+0.5B

以上の検討から，実際に車が使用される場合の荷重頻度は，第4表の二つの代表分布を適当な割合で組み合わすことにより，近似的に得ることができる．組み合わせの割合はどのような路面を，どの程度考えるかで変わるが，第1表あるいは，(a), (b), (c) の値などが参考になると思う．

また，耐用走行キロ数をかりに 30万km とすると，その間における上下加速度頻度は，第7図右側目盛りによりただちに求まる．

このような値を，応力，変位その他の諸量について求めると，車の耐用期間における強度や寿命を，かなり合理的に推定することが可能となる．

6. むすび

以上，述べた諸結果をまとめるとつぎのようになる．

(1)　実用走行時の荷重頻度は，数個のガウス形分布がある割合いで加え合わされたもので表わしうる．

(2)　代表的と思われる路面状態における，実用走行時の荷重頻度を計算することができ，その例を示した．

(3)　このような方法によつて，荷重頻度のみならず，応力，変位，速度などについても，実用走行時における状態が表現しうるので，動的諸現象を推定する有用な資料が得られる．

(4)　実車の耐久試験パターンを決める，有力な資料が得られる．

なお，今後この種のデータを集積するとともに，自動車の応答特性による差，さらには応答特性を除いた，r.m.s. 入力としての表示を検討し，一般化を考えたい．これについてはあらためて報告する予定である．

〔昭和38年5月15日自動車技術会春季学術講演会において発表〕

参考文献

(1) 川合：自動車技術会論文集，Vol. 13, No. 7, 1959.
(2) 川合：自動車技術，Vol. 14, No. 7, 1960.
(3) 川合：新三菱重工技報，Vol. 2, No. 1, 1960.
(4) 松本：自動車技術会論文集，Vol. 14, No. 2, 1960.
(5) Pinolini F. Zandona L. Assoc. Tech. Auto. 14 (10) 1961.
(6) Серенсен С. В. Вестник Машиностроения, 1960. (10)
(7) Серенсен С. В. Вестник Машиностроения, 1961. (11)
(8) Mitschke M. V. D. I-Verlag, 1959.
(9) Chiesa A: S. A. E. Paper, 490 C 1962.
(10) Rice S. O.: Bell Sys. Tech. Jour. 23 (3), 1944. 24 (1), 1945.

U.D.C. 629. 113. 073: 534. 4

自動車走行時振動のパワスペクトル解析

Power Spectral Analysis of a Vehicle Vibration by Road Surface Roughness

(昭和 39. 1. 23. 受理)

兼 重 一 郎[1]
ICHIROH KANESHIGE

自動車の振動のうち路面の凹凸によって生ずるものはランダム振動であるが本報告はそれを定常確率過程のサンプル関数であり，かつ自動車は近似的に線型系であると仮定して車体の振動記録からその自己相関関数を求め，フーリエ変換によって路面凹凸のパワスペクトルを解析するものである．

すなわち，ばね下加速度のパワスペクトルと，振動試験で得たばね下振動周波数特性によって推定した路面パワスペクトルは，正確に求めた路面プロフィルから計算したパワスペクトルとかなりよく一致するので，ばね下振動記録によって数種類の路面スペクトルを求めて，一般に凹凸パワスペクトル $\pi(\omega)$ は，$\pi(\omega)\fallingdotseq c\omega^{-n}$ (c, n は常数) で近似できることを得た．

また，入力と伝達関数が定まれば，その出力である車体の振動は決まるので，自動車を3質量振動系で近似して，エンジンマウンティングの特性を変更するとばね上振動，エンジン振動が変化し，防振ゴムの減衰係数を増すと有利であることをアナログコンピュータで明らかにし，通常の防振ゴムを用いた場合の振動パワスペクトルの比較をベルギアン路上で各車速において計算および実験で求めた．計算値と実験値を比較すると概ね一致した傾向であるので，3自由度系のモデルでも十分実用性があること，エンジンマウントの改善でアナログコンピュータによる予測どおりの改善が得られることがわかつた．

Summary

If we assume a random vehicle vibration, caused by road surface roughness, is a sample function of a stationary stochastic process, then we can treat analytically the vibration using power spectral procedure.

In this report we analyze power spectra of vehicle vibration and road surface roughness by the Fourier transform of auto-covariance function of vehicle vibration record, assuming approximate linearity of the vehicle vibration system.

Namely, the power spectrum of a road surface roughness estimated by the power spectrum of the unsprung mass vibration and its transfer function fairly coincides with the power spectrum estimated from precisely measured road surface profile, then it would be possible to estimate power spectra of road roughness by this procedure. And measured road roughness power spectra $\pi(\omega)$ are approximated by

$$\pi(\omega)\fallingdotseq c\omega^{-n} \text{ where } c,\ n \text{ are constants}$$

As is well known, input and transfer function of a system definite the output, vehicle vibration, so we approximate the vehicle by 3-mass system and calculate the influence of engine mounting characteristics to the frequency responce of the vehicle. Calculated results by analog computer shows that the increased damping coefficient of mounting rubber is advantageous to the vibration of sprung mass and engine comparing to conventional damping. Calculated power spectra and measured power spectra of sprung mass and engine vibration on pavé belgique show same tendency so it would be possible to say that 3-degrees of freedom system is a sufficient approximation for such analysis and the improvement of sprung mass and engine vibration estimated by power spectra is certified by experiment.

1). いすゞ自動車(株)研究部．(神奈川県川崎市大師河原下殿町 5931)

153

1. まえがき

自動車の振動は原動機による振動と，路面凹凸による振動に大別できる．原動機による振動は近似的には正弦波振動でとりあつかうことができ，厳密な議論をする場合もたかだか数項のフーリエ級数であつかうことができるが，路面の凹凸による振動はランダム振動であるので，解析的にあつかうのは困難であるが，一つの方法としてその振動が定常確率過程のサンプル関数であると仮定して，そのパワスペクトル密度を用いて解析することができる(1)．きわめて良好な道路を高速で走行する場合を除いて，一般の走行時には路面凹凸による振動の影響が大きいので(2)，振動乗心地や強度などの研究にはこのパワスペクトル解析が必要なことである．

従来はこの解析例がすくなく，振動台，波状路，障害板などの上での定常振動，または過渡振動の計測で車の振動性能を推定していたが，これで得られる周波数応答特性またはインパルス応答特性と実際の使用状態とを結ぶためには，自動車に対する入力である路面凹凸パワスペクトルと出力の振動パワスペクトルの計測が必要である．パワスペクトルの推定法はいろいろ発表されており(3)，バンドパスフィルタ使用例(4)もあるが，相関関数を求めてそれをフーリエ変換する方が，スペクトルの精度，分解能などのデザインが自由であり，またクロススペクトル解析(5)が可能な点ですぐれているから，本研究では振動の自己相関関数から路面と自動車振動のパワスペクトルを求める方法をとることにする．

2. 記　号

f c/s	周波数	ω c/m	路面周波数
l m	距　離	t sec.	時　間
V m/s	車　速		
$Z(l)$ mm	距離に対する路面凹凸		
$x(t)$ mm	通過時間に対する路面凹凸		
$y(t)$ m/s²	ばね下振動加速度		
$Z(t)$ m/s²	ばね上振動加速度		
$E(t)$ m/s²	エンジン振動加速度		
$G_y(f)$ (m/s²/mm)	路面振幅 1 mm に対するばね下振動周波数特性		
$G_Z(f)$ m/s²/mm	ばね上振動周波数特性		
$G_E(f)$ m/s²/mm	エンジン振動周波数特性		
$A_y(t)$ m/s²/mm	ばね下インパルス応答関数		
$A_Z(t)$ m/s²/mm	ばね上インパルス応答関数		
$A_E(t)$ m/s²/mm	エンジン振動インパルス応答関数		
$\Pi(\omega)$ mm²/c/m	路面周波数に対する路面凹凸パワスペクトル密度		
$p_x(f)$ mm²/c/s	時間周波数に対する路面凹凸パワスペクトル密度		
$P_y(f)$ (m/s²)²/c/s	ばね下振動パワスペクトル密度		
$P_Z(f)$ (m/s²)²/c/s	ばね上振動パワスペクトル密度		
$P_E(f)$ (m/s²)²/c/s	エンジン振動パワスペクトル密度		
$C(\tau)$	自己相関関数（連続形式）		
C_r	自己相関関数（離散形式）		
L_j	C_r の cos 変換		
P_j	パワスペクトル密度		
a_r	Hamming の係数		

3. 解析の準備

はじめに $Z(l)$ は定常確率過程のサンプル関数であると仮定する．また $G_y(f)$，$G_Z(f)$，$G_E(f)$ は線型性を持つと仮定する．ある路面上を自動車が一定速度 V で走行すると

$$Z(l)=Z(Vt)=x(t) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=A_y(t)*x(t)\\ Z(t)&=A_Z(t)*x(t)\\ E(t)&=A_E(t)*x(t)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで $*$ は convolution を示す．

$y(t)$ の自己相関関数は

$$\begin{aligned} C_y(\tau)&=E\{y(t)\cdot y(t+\tau)\}\\ &=E\left\{\int\int_{-\infty}^{\infty}A_y(\tau_1)x(t-\tau_1)x(t+\tau-\tau_2)A_y(\tau_2)d\tau_1d\tau_2\right\}\\ &=\int\int_{-\infty}^{\infty}A_y(\tau_1)C_x(\tau+\tau_1-\tau_2)\cdot A_y(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $\tau_2=\tau_1+\lambda$ とおくと

$$\begin{aligned} C_y(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}C_x(\tau-\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty}A_y(\tau_1)A_y(\tau_1+\lambda)d\tau_1\right]d\lambda\\ &=C_x(\tau)*A_y(\tau)*A_y(-\tau) \end{aligned} \tag{4}$$

(4) 式をフーリエ変換して

$$\begin{aligned} P_y(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}C_y(\tau)e^{-i2\pi f\tau}\cdot d\tau\\ &=P_x(f)|G_y(f)|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

E は期待値の作用素である．

同様に

$$\left.\begin{aligned} P_Z(f)&=P_x(f)\cdot|G_Z(f)|^2\\ P_E(f)&=P_x(f)\cdot|G_E(f)|^2\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

実際にはエルゴード的な定常過程を仮定するから，

(3) 式は　$C_y(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)y(t+\tau)dt$ (7)

$C_x(\tau)$，$C_Z(\tau)$，$C_E(\tau)$ も同様である．

観測される現象は実関数であるから

$$P_y(f)=2\int_0^{\infty}C_y(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau \tag{8}$$

$P_x(f)$，$P_Z(f)$，$P_E(f)$ も同様である．

また ω と f の間は車速によつて変換が行なわれるから

$$\Pi(\omega)=VP_x(f)=VP_x(V\omega) \tag{9}$$

実際の観測記録に対する計算は第 1 図に示す方法によ

る.

4. 路面凹凸パワスペクトルの推定

4.1. 路面凹凸パワスペクトル推定の方法

自動車に対する入力となる路面凹凸パワスペクトルの推定は重要なことで，従来からいろいろな方法で行なわれている.

(1) 適当な間隔で水準器とロッドによつて1点ずつの高さを測定して，路面プロフィルを求めてパワスペクトルを計算する[6].

(2) 道路測定用のゲージに車輪をつけ，路面プロフィルを測定する方法でいろいろあるが一長一短である[7].

(3) 試験車のサスペンションスプリングのたわみ記録，または車体と路面の距離の変化を記録して，それを路面プロフィルとする[7].

(1) の方法は正確ではあるが，所要時間が大きいことと，砂利道ではやりにくいこと，交通量の多い道路上では測定が危険で困難なことが欠点である. (2) の方法は測定機自身の長さ以上の波長が計測できないので，車両の高速化に対応させるためには長大な測定機を必要とする欠点がある. (3) の方法では，道路の周波数特性と車の周波数特性の合成されたものをはかるので，路面スペクトルそのものが得られない.

筆者の行なう方法は，ばね下質量の上下振動から前章の (5) (9) 式によつて路面凹凸パワスペクトルを推定することであつて，振動系を線型系と仮定しているための精度の問題を別にすれば，上記 (1), (2), (3) の欠点を補なえるものである.

4.2. ベルギアン路パワスペクトルの推定

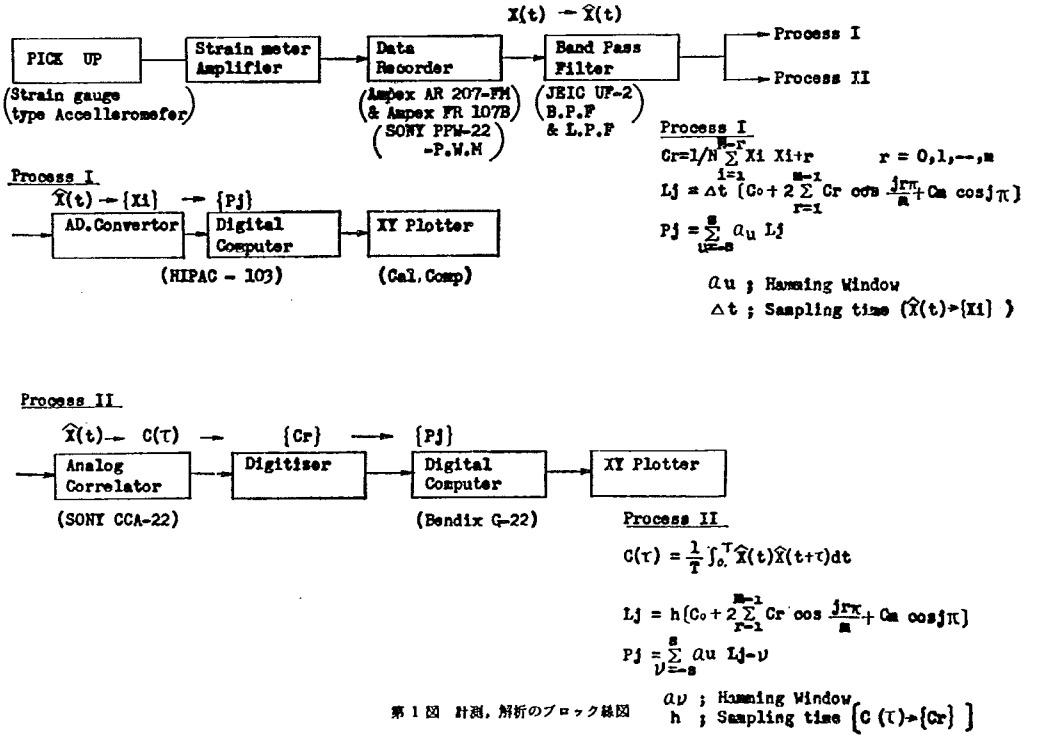
精度についての検討をするために，路面プロフィルのわかつている路面を走行したときの，ばね下質量の振動から推定した路面スペクトルと，路面プロフィルから計算したスペクトルの比較を行なつてみる.

試験車は線型性の仮定にできるだけ近づけるために，固体摩擦の少ない空気ばねトラックを用い，前車軸中央の上下方向加速度記録から第1図のブロック線図のような系で $P_y(f)$ を求める. $G_y(f)$ は線型性を仮定して振動試験機の測定値により，$P_x(f)$, $\Pi(\omega)$ を求めて路面プロフィルから計算した $\Pi(\omega)$ との比較をしてみると，第2図に示すように，低周波側を除き良好な一致がみられるので，この方法で路面パワスペクトルの計測をすることは可能であると考える.

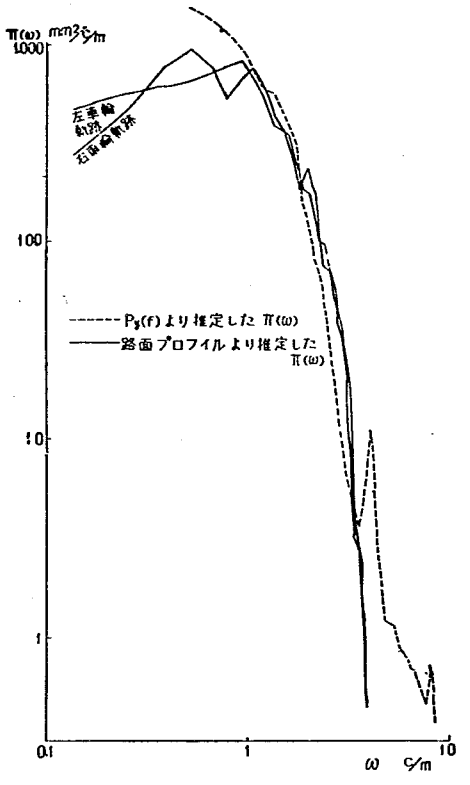
4.3. 各種路面パワスペクトルの推定

この方法は自動車振動系の線型性を仮定しているが，もちろん実際の自動車は，線型系ではないから測定値が車速によつて一致しないのではないか，という懸念が生じる.

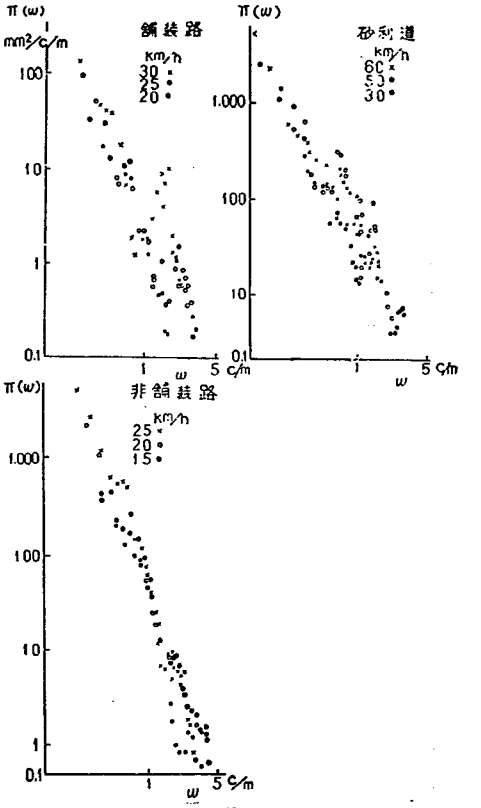
ここで，同一路面を数種類の車速 V で走行したとき



第1図 計測，解析のブロック線図



第 2 図　ベルギアン路，路面凹凸パワスペクトル



第 3 図　3 種類の路面のパワスペクトル

の $P_y(f)$ から推定した $\Pi(\omega)$ が，われわれの問題とする範囲内で一致すれば，線型性の仮定はさしつかえないし，これによつて推定した $\Pi(\omega)$ は一般性を持つて使用することができる．

第 3 図に 3 種類の路面を 3 ないし 4 種の車速で走行したときの，路面凹凸パワスペクトルを示すが，この結果からつぎのことがいえる．

(1)　ばね下質量の走行時振動記録から，路面凹凸パワスペクトルを推定することは可能である．

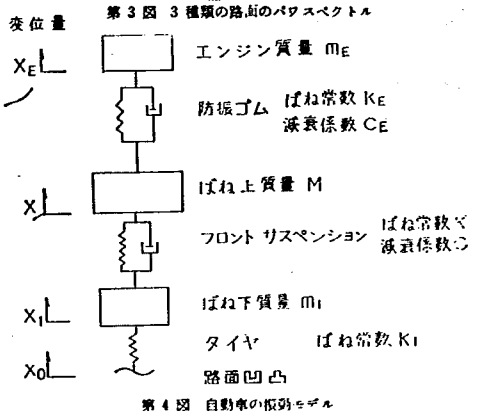
(2)　通常の走行速度の自動車に影響する周波数範囲では，路面凹凸パワスペクトルは

$$\Pi(\omega) \fallingdotseq c\omega^{-n} \qquad (10) \qquad c, n \text{ は常数}$$

で近似できる．ここで n は 2～4 で，$n=2$ については 2, 3 の文献[8]があり，$n=4$ は武田氏が理論的モデルを提案している．

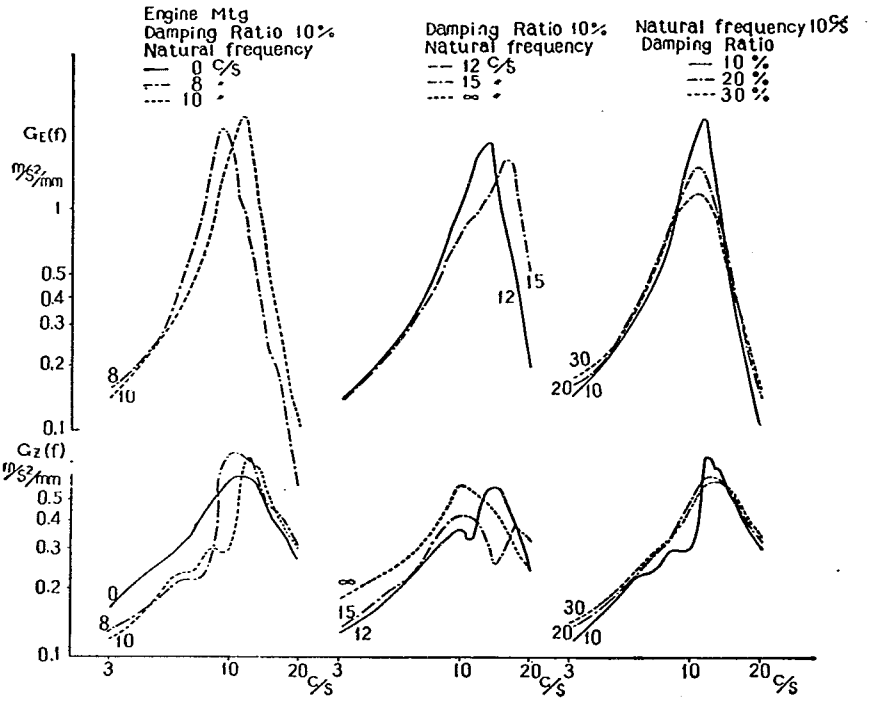
5.　エンジンマウントの特性変化による自動車の乗心地とエンジン振動のパワスペクトル解析

5. 1. エンジンマウントを考慮した自動車の周波数特性



第 4 図　自動車の振動モデル

乗用車では，エンジンの質量はばね上質量に対して相当大きいので，エンジンマウントの特性を選択することによつて，ばね上質量に対するばね下振動のダイナミックダンパとして作用することが期待できる．この問題の解析を簡単にするために，自動車を第 4 図のごとき剛体三質量系で近似すると，この系の運動方程式は



第5図
3自由度モデルのばね上質量およびエンジンの振動周波数特性（アナログコンピュータによる計算値）

$$\left.\begin{aligned} &m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-C\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+K_1(x_1-x_0)\\ &\quad -K(x-x_1)=0\\ &M\frac{d^2x}{dt^2}+C\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+C_E\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_E}{dt}\right)\\ &\quad +K(x-x_1)+K_E(x-x_E)=0\\ &m_E\frac{d^2x_E}{dt^2}+C_E\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_E}{dt}\right)+K_E(x-x_E)=0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

この系の周波数特性の計算をアナログコンピュータで行ない，エンジンマウントの特性を

$1/2\pi\sqrt{\frac{K_E}{m_E}}=0, 8, 10, 12, 15, \infty$

$C_E/2\sqrt{m_E K_E}=0.1, 0.2, 0.3$

として求めた計算結果を**第5図**に示した．計算を3c/sから20c/sに限定したのは，エンジンマウントの影響する範囲だけに計算，実験を限定し，計算の簡単と計測時のS-N比の向上をはかつたのである．この計算結果から

(1) 通常の減衰係数 10％の防振ゴムでは，ばね上振動のピーク値がもつとも低いのは固有振動数 15c/s のゴムである．

また，エンジン上下振動のピーク値も 15c/s のものがもつとも低い．しかし，固有振動数を15c/sとするとエンジンアイドリング時の爆発周波数 20c/s に近くて防振性能がよくない．一方，防振性能の点で望ましい10c/s 程度のエンジンマウントは，エンジンマウントの共振点付近ではばね上振動の振幅が低いけれども，その周波数の前後では逆にエンジンなし (0c/s)，エンジン固定 (∞c/s) の場合より，はるかに高いピークを持つので好ましくない．

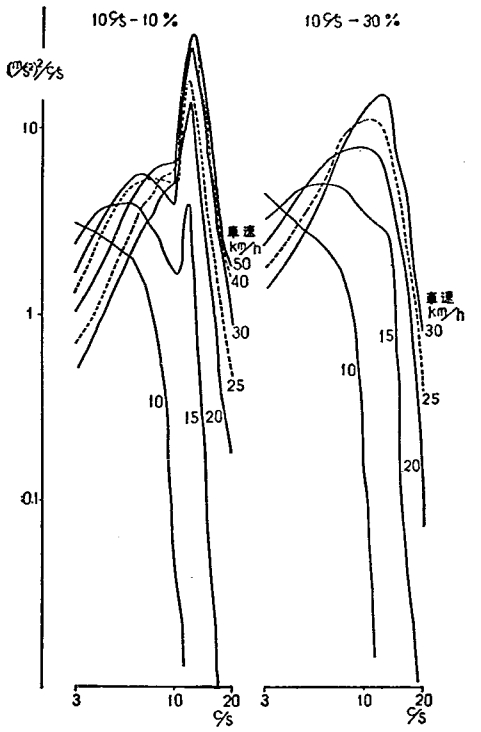
(2) 同一支持剛性では，減衰係数が大きいほどばね上振動，エンジン振動とも減少する．10c/s のエンジンマウントでも減衰係数 30％のものは，エンジンなしの場合より全域でばね上振動が小さい．

5.2 走行時の振動パワスペクトルの予測

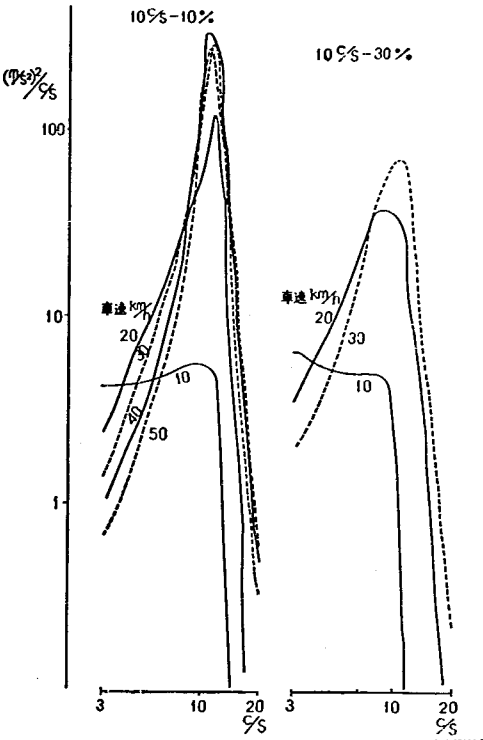
第4図の3自由度系モデルの近似度がよければ，実際の路面走行中の振動パワスペクトル，$P_y(f)$，$P_z(f)$，$P_E(f)$ は (5), (6) 式の予測に近いはずである．

ベルギアン路の $H(\omega)$ を用いて，走行時のパワスペクトル $P_z(f)$，$P_E(f)$ を計算すると**第6，7図**のようになり，

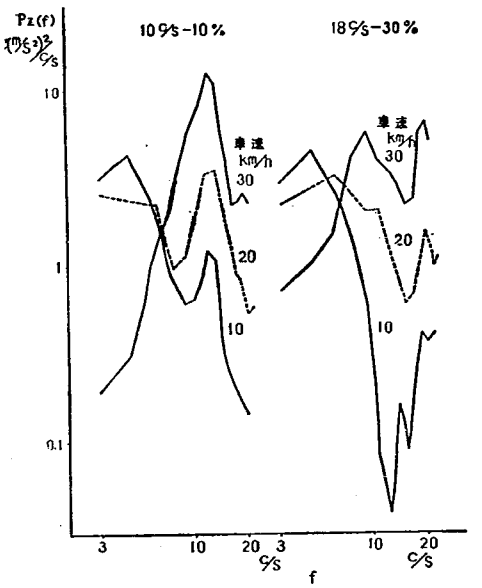
(1) 同一支持剛性で減衰係数のみ 10％と 30％ の2種類にした場合，走行速度 10 km/h ではほとんど両者の差はなく，車速の増大とともに両者の差は急激に増大し，30 km/h ではエンジン振動のパワスペクトル密度のピークは減衰率 30％のものが 10％のものの 1/4，同じくばね上振動のパワスペクトル密度のピークは 1/2 で



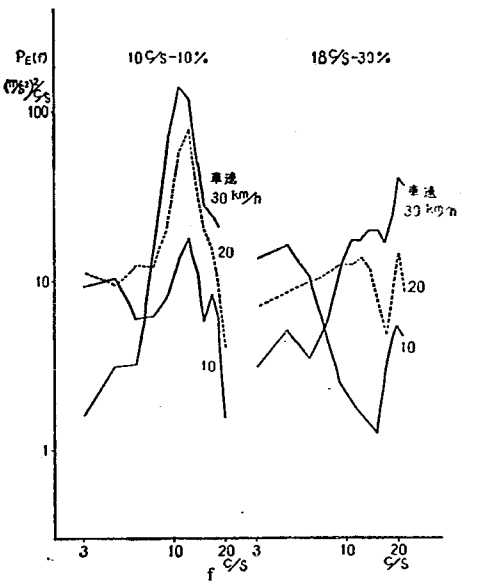
第 6 図　ベルギアン路におけるばね上振動パワスペクトル（計算値）



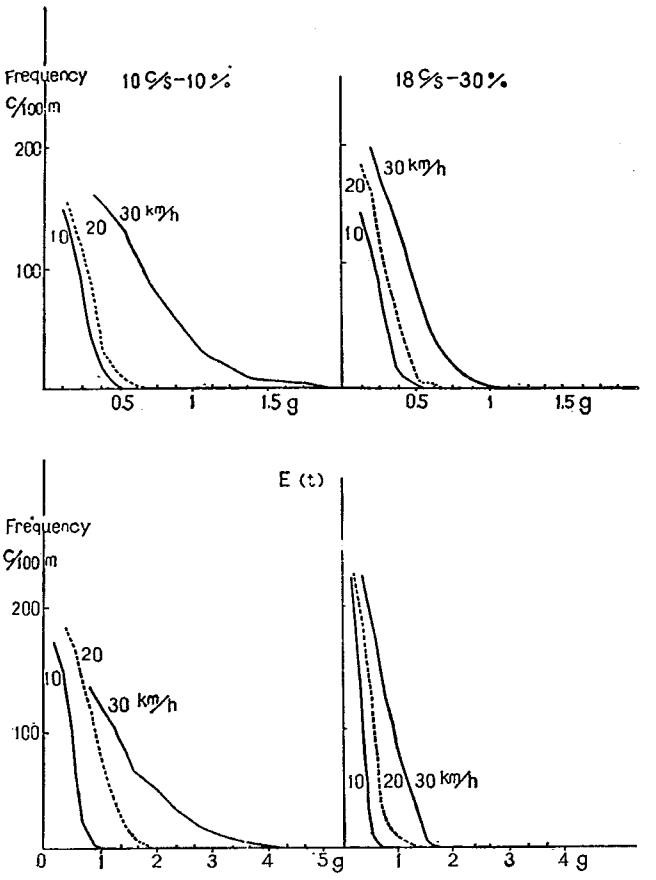
第 7 図　ベルギアン路におけるエンジン振動パワスペクトル（計算値）



第 8 図　ベルギアン路走行時のばね上振動パワスペクトル（実験値）



第 9 図　ベルギアン路におけるエンジン振動パワスペクトル（実験値）



第 10 図　ベルギアン路上の振幅累積頻度（実験値）

ある．

(2)　30 km/h をこえると振動のピークの増大は，わずかとなり 40 km/h をこすとむしろ減少してくる．

5.3. 走行時の振動パワスペクトルの予測

前節の予測結果をしらべるために，実車でベルギアン路上を 10～30 km/h で走行実験をし，防振ゴムは通常の 10 c/s で 10 % のゴムと 18 c/s で 30 % のものを用いた．(18 c/s になつたのは使用したゴム硬度が通常のものより高く，さらに動的ばね常数の静的ばね常数に対する比が大きかつたので，予定よりはるかに硬いものとなつた．)

第 8, 9 図に測定結果のパワスペクトル，第 10 図に振幅の累積頻度を示すが，この結果から

(1)　前節の推定のように，20 km/h 以上で減衰率 30 % のゴムは特性がよく，支持剛性の相違を考慮すれば，計算による予測と近い結果である．

(2)　振幅の頻度も，パワスペクトルの比較と同じく 20 km/h 以上の大振幅回数の差がいちじるしく増大している．

このことから 3 自由度のモデルによるパワスペクトル密度の推定で，実用上ほぼ十分なことがあきらかなので，一般の $\Pi(\omega) \fallingdotseq c\omega^{-n}$ の路面上で減衰率の大きいゴムを用いることが有利であることがわかる．

6. 結　　論

(1)　路面凹凸のパワスペクトル密度推定を，自動車のばね下質量の振動から行なうことは実用上十分な精度が得られ，かつ自動車に影響する周波数範囲ではその特性は，$\Pi(\omega) \fallingdotseq c\omega^{-n}$ で近似できる路面が多い．

(2)　ばね上振動に対するエンジンマウントの影響を，3 自由度系で近似して走行時の振動スペクトルを推定した値と実測値は同じ傾向を示す．

(3)　エンジンマウントの影響の計算，および実験結果から防振ゴムの減衰係数を増すことは，ばね上乗心地およびエンジンマウントの強度の点で有利である．

7. あ と が き

本研究の解析に関しては，統計数理研究所の赤池博士のご指導によるところが多く，心からの謝意をのべさせていただく次第である．

参 考 文 献

(1)　高橋安人; 自動車技術, Vol. 7, No. 11～12, 1953.
M. Mitschke; V. D. I. Z, Bd. 104, Nr. 8, März. 1962.
兼重一郎; いすゞ技報, No. 33, 1960.
(2)　川合平夫; 新三菱技報, Vol. 16, No. 1, 1964.
(3)　R. B. Blackman & J. W. Tukey: The Bell System Technical Journal, 1958.
H. Akaike; Annals of the Inst. of Statistical Math, Vol. 14, 1962.
(4)　A. Chiesa; ATZ 1962.
(5)　I. Kaneshige & H. Akaike; Proc. of the 12th N. C. T. A. M, 1962.
(6)　H. Press. J. C. Houbolt. & J. H. Walls; NACA Tech, Note. 3305, 1954.
(7)　F. N. Hveem; Highway Research Board Bulletin 254, 1960.
(8)　H. Akaike; Annals of the Inst. of statistical Math. Vol. 14, 1962.
武田　峻; 運研報告, Vol. 8, No. 6, 1961.

Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten.

Von **A. Schallenkamp** in Augsburg.

1. Einleitung. Die Differentialgleichung der Trägerschwingungen bei rollenden Lasten hat man bisher auf zwei Wegen näherungsweise gelöst. Entweder vernachlässigte man die träge Masse der Brücke und nahm nur die träge Masse der Last in Rechnung (**Stokes**[1], **Zimmermann**[2], **Steuding**[3]) oder umgekehrt, man berücksichtigte

[1] **G. G. Stokes,** Math. Phys. Papers 2 S. 179.
[2] **H. Zimmermann,** Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin 1896.
[3] **H. Steuding,** Ing.-Arch. 5 (1934) S. 275; Ergänzung hierzu Ing.-Arch. 6 (1935) S. 265.

160

die Trägheit der Brücke und nahm eine trägheitslose äußere Kraft an (**Kriloff**[1], **Timoshenko**[2]). Diese Methoden sind in dem Falle unbrauchbar, wo die Trägheitskräfte der Brücke und der Last von gleicher Größenordnung sind. Ein Näherungsverfahren, das darin besteht, daß man die Trägheitskraft der bewegten Last als Störungsglied betrachtet, divergiert in den meisten Fällen.

Auf Anregung von Herrn Prof. **M. Schuler** habe ich das Problem der bewegten Einzellast, d. h. einer schweren und trägen Masse, untersucht und hierfür eine strenge Lösung entwickelt. Diese Methode ist auch anwendbar auf mehrere in gewissen Abständen bewegte Lasten, jedoch wird die Rechnung hier sehr umfangreich. Bei mehreren Lasten habe ich mich daher auf eine Näherungslösung beschränkt, die an einem Beispiel mit zwei Lasten, deren Abstand gleich der halben Trägerlänge ist, zahlenmäßig durchgeführt wird. Ferner sind in dieser Arbeit die Trägerschwingungen für die Zeit untersucht, wo die Kraft den Träger bereits verlassen hat.

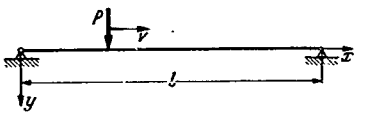


Abb. 1.

Hierfür gebe ich eine einfache und übersichtliche Lösung. Gleichzeitig wird diese Lösung zu einer Erörterung des Falles benutzt, wo eine Anzahl Kräfte nacheinander einen Träger überschreitet. Von der Dämpfung des Trägers durch Reibung in den Auflagern und im Material ist dabei allerdings abgesehen.

Dem Schwingungsvorgang liegt die Differentialgleichung

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{F\gamma}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t)-\left[\frac{p(x,t)}{g}\frac{d^2y}{dt^2}\right] \tag{1}$$

zugrunde [EI = Biegesteifigkeit = Elastizitätsmodul mal Trägheitsmoment des Querschnittes F um die Querachse des Trägers senkrecht zur (x, y)-Ebene, γ = spezifisches Gewicht]. Die Durchbiegung y ist, wie aus Abb. 1 ersichtlich, nach unten positiv gerechnet. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im linken Auflagerpunkt.

Im folgenden ist der Fall des frei gestützten Trägers behandelt, der von einer Einzellast P mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit v befahren wird. Die Lösung von (1) muß demnach folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\text{a) } y_0=0, \qquad \text{b) } y_l=0, \qquad \text{c) } \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}=0, \qquad \text{d) } \frac{\partial^2 y_l}{\partial x^2}=0. \tag{2}$$

Die Funktion $p(x, t)$ ist folgendermaßen definiert:

$$p(x,t)=0 \quad \text{für} \quad vt-\frac{\varepsilon}{2}>x,$$

$$p(x,t)=\frac{P}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad vt-\frac{\varepsilon}{2}\leqq x\leqq vt+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$p(x,t)=0 \quad \text{für} \quad vt+\frac{\varepsilon}{2}<x,$$

wobei die Strecke ε gegen 0 geht.

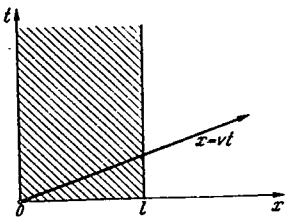


Abb. 2. Bereich der Lösung.

Verlangt wird eine Lösung für alle Punkte im Gebiet $0\leqq x\leqq l$ und $t\geqq 0$. (Abb. 2, schraffiertes Gebiet).

St. Venant[3] hat eine andere Formulierung des Problems gegeben, wobei er die zu (1) gehörige homogene Differentialgleichung zugrunde legt und vier Übergangsbedingungen für die nullte, erste, zweite und dritte Ableitung von y im Lastpunkt aufstellt. Diese Übergangsbedingungen können leicht erhalten werden, wenn wir die

[1] **A. N. Kriloff,** Math. Ann. 61 (1905) S. 169.

[2] **S. Timoshenko,** Schwingungsprobleme der Technik. Berlin: Julius Springer 1932. Weitere Hinweise auf das umfangreiche Schrifttum finden sich in der Arbeit von **H. Steuding** und in dem Buch von **S. Timoshenko.**

[3] **St. Venant** in der französischen Übersetzung des Werkes von **Clebsch,** Elastizitätstheorie fester Körper, S. 597ff. Paris 1883. Siehe auch die zitierte Arbeit von **Steuding.**

Differentialgleichung (1) über das Gebiet ε wiederholt integrieren. Gleichzeitig folgt daraus, daß die Übergangsbedingung für die dritte Ableitung vollkommen ausreicht zur Formulierung des Problems. Die anderen Übergangsbedingungen folgen ja aus dieser durch wiederholte Integration.

Die Schwierigkeit der Lösung von (1) liegt in dem Glied $\frac{p(x,t)}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$. Führt man die Differentiation aus, so erhält man für die Trägheitskraft

$$\frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{p}{g}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right).$$

Sie besteht also aus Kräften, die 1. auf die Beschleunigung in der y-Richtung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, 2. auf die Coriolisbeschleunigung $2v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ und 3. auf die Zentrifugalbeschleunigung zurückzuführen sind.

Bei einer bewegten Kraft verschwindet dieser Ausdruck, dieser Fall führt auf die Lösung der inhomogenen Stabschwingungsgleichung und ist bereits von **Kriloff** und **Timoshenko** mit Hilfe der Theorie der Eigenfunktionen behandelt worden.

Als Eigenschwingungen eines Trägers definiere ich wie üblich diejenigen Lösungen der Gleichung (1), die sich als Produkt einer reinen Orts- und Zeitfunktion darstellen lassen:

$$y(x,t)=X(x)\cdot T(t).$$

Man kann dann zeigen, daß sich die freien Schwingungen eines beiderseits aufliegenden Trägers in der Form darstellen lassen

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l}. \tag{3}$$

Setzt man nämlich $y=X(x)\,T(t)$ in die zu (1) gehörige homogene Gleichung ein, so erhält man für X und T zwei Differentialgleichungen. Aus diesen folgt zunächst

$$T=A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t;$$

p_i ist die i-te Eigenfrequenz des Trägers, A_i und B_i sind Konstanten, die aus den Anfangsbedingungen, Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit folgen.

Ferner erhält man aus der Differentialgleichung für $X(x)$ die Eigenfunktionen

$$X(x)=C_1'\sin kx+C_2'\cos kx+C_3'\,\mathfrak{Sin}\,kx+C_4'\,\mathfrak{Cof}\,kx.$$

Die C_1' bis C_4' lassen sich aus den Randbedingungen ermitteln. Schreibt man die Eigenfunktionen in der Form

$$\begin{aligned}X(x)=&C_1(\cos kx+\mathfrak{Cof}\,kx)+C_2(\cos kx-\mathfrak{Cof}\,kx)\\&+C_3(\sin kx+\mathfrak{Sin}\,kx)+C_4(\sin kx-\mathfrak{Sin}\,kx),\end{aligned}$$

so folgt aus den Randbedingungen a) und c), daß C_1 und C_2 verschwinden. Aus den Bedingungen b) und d) folgt $C_3=C_4=C$ und $\sin kl=0$, d. h. $kl=i\pi\,(i=1,2,\ldots)$. Es ist also

$$X_i=C_i\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Die i-te Eigenschwingung des Stabes lautet demnach

$$y_i(x,t)=\sin\frac{i\pi x}{l}(A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t).$$

Setzt man den Klammerausdruck gleich q_i, so erhält man durch Überlagerung der Eigenschwingungen den allgemeinen Ausdruck der freien Stabschwingungen

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Von den erzwungenen Schwingungen bestrachte ich diejenigen, die sich zur Zeit t in Fourierreihen darstellen lassen, für die also ebenfalls gilt

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{i \pi x}{l} \quad \text{mit} \quad q_i(t) = \frac{2}{l} \int_0^l y(x, t) \sin \frac{i \pi x}{l} \, dx .$$

Es liegt nun nahe, die q_i als generalisierte[1] Koordinaten einzuführen, d. h. als unabhängige Größen, die den Bewegungsvorgang vollständig bestimmen. Man kann die kinetische und potentielle Energie des Stabes als Funktionen des Ortes und der Zeit berechnen und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art anwenden. Die potentielle oder Biegungsenergie eines Stabes ist gegeben durch

$$V = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

und die kinetische durch

$$T = \frac{F \gamma}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2 \int_0^l X_i^2(x) \, dx .$$

Setzt man hierin $X_i = \sin \frac{i \pi x}{l}$ ein, so lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{q}_i + \frac{i^4 \pi^4 a^2}{l^4} q_i = \frac{2g}{F \gamma l} Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

mit $a^2 = \frac{EIg}{F\gamma}$. Hierbei ist Q_i die generalisierte Kraft, die bei einer Verschiebung δq_i die Arbeit $P \delta y$ leistet.

Die Lösung von (4) lautet

$$q_i = A_i \cos \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + B_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + \frac{l^2}{i^2 \pi^2 a} \frac{2g}{F \gamma l} \int_0^t Q_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1)}{l^2} \, dt_1 . \tag{5}$$

Für eine konstante wandernde Kraft folgt daraus

$$y = \frac{2 g P l^3}{F \gamma \pi^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i \pi x}{l}}{i^2 (i^2 \pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i \pi v t}{l} - \frac{v l}{a \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i \pi x}{l}}{i^3 (i^2 \pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} \right] . \tag{6}$$

Das ist die strenge Lösung von (1) mit den Randbedingungen (2), wenn das Trägheitsglied, also die eckige Klammer, in (1) verschwindet, und zwar für $0 \leqq t \leqq \frac{l}{v}$. Soweit ist das Problem bereits von **Kriloff** und **Timoshenko** streng gelöst worden. Ich habe mir nur die Aufgabe gestellt, auch den Einfluß der eckigen Klammer in (1) zu berücksichtigen.

Für unser Problem ist folgende Tatsache wichtig. Die Einzelkraft P braucht keine Konstante zu sein, sondern sie kann eine im physikalischen Sinne beliebige Funktion der Zeit sein. Man kann sie ja im Intervall $0 \leqq x = vt \equiv \eta \leqq l$ in eine Fourierreihe entwickeln, also in die Form $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \frac{\nu \pi \eta}{l}$.

Für jede sinusförmige Kraft kann man (1) mit (2) lösen; nach dem hier gültigen Superpositionsprinzip also auch für die Summe. Für eine sinusförmige Kraft konst. $\cdot \sin \frac{\lambda \pi \eta}{l}$ folgt aus (5)

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{\text{const} \cdot l^3}{EI \pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i \pi x}{l} \Bigg[& \frac{-\cos (i + \lambda) \frac{\pi \eta}{l}}{i^4 - (i \alpha + \lambda \alpha)^2} + \frac{\cos (i - \lambda) \frac{\pi \eta}{l}}{i^4 - (i \alpha - \lambda \alpha)^2} + \\ & + \frac{\cos \frac{i^2 \pi \eta}{\alpha l}}{i^4 - (i \alpha + \lambda \alpha)^2} - \frac{\cos \frac{i^2 \pi \eta}{\alpha l}}{i^4 - (i \alpha - \lambda \alpha)^2} \Bigg] \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{v l}{a \pi} . \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

[1] Eine Einführung in die Theorie der generalisierten Koordinaten gibt das zitierte Buch von **Timoshenko**.

Für den vorliegenden Fall einer Einzellast genügt es, die Lösung längs der Graden $x = vt$, d. h. den Lastweg zu kennen. Dann ist es nämlich möglich, die auf den Träger wirkende äußere Kraft, die aus Schwere- und Trägheitskräften besteht, in Fourierreihen darzustellen, und nach dem eben Gesagten kann man dann die Lösung für beliebige x und t berechnen.

Ein von **Jeffcott**[1] benutztes Näherungsverfahren besteht darin, daß man zunächst die eckige Klammer in (1) vernachlässigt. Dann erhält man (6) als Lösung. Mit diesem y_0 berechnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer und diese nunmehr bekannte äußere Kraft gibt eine Lösung y_1. Mit diesem y_1 kann man wiederum die eckige Klammer berechnen und damit ein y_2 usw. Dieses iterative Verfahren konvergiert aber in vielen Fällen nicht, da der zweite Differentialquotient nach t in der Klammer steht.

2. Strenge Lösung für den Fall einer Einzellast. Der Gang der hier durchgeführten Rechnung ist der, daß man die auf den Träger wirkende Kraft (konstante Schwerkraft + Trägheitskraft) formell in eine Fourierreihe entwickelt mit vorerst noch unbestimmten Koeffizienten. Durch Anwendung des linearen Superpositionsprinzipes erhält man für die Fourierkoeffizienten ein System linearer Gleichungen. Kennt man aber die äußere Kraft, d. h. $\frac{d^2 y}{d \eta^2}$, so erhält man daraus durch zweifache Integration den gesuchten Lastweg.

Man sieht sofort aus (5): Ist die generalisierte Kraft Q_i als gleichmäßig konvergente Reihe $Q_i = \sum_k Q_{ik}$ gegeben, so ist

$$q_i = \sum_k q_{ik} \quad \text{und} \quad y = \sum_k y_k,$$

wenn

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} q_{ik} \sin \frac{i \pi x}{l}$$

ist, d. h. es gilt das lineare Superpositionsprinzip.

Nun ist die auf den Träger wirkende Kraft, wenn eine Last von P kg hinüberrollt,

$$P - \frac{P}{g} \frac{d^2 y}{d t^2} = P - \frac{P v^2}{g} \frac{d^2 y}{d \eta^2}. \tag{8}$$

Die zweite Ableitung $\frac{d^2 y}{d \eta^2}$ kann man formal in eine Fourierreihe entwickeln. Dabei nehmen wir, um eine reine Sinusentwicklung zu erhalten, das Periodenintervall von $-l$ bis $+l$ und denken uns $\frac{d^2 y}{d \eta^2}$ von 0 bis $-l$ ungerade fortgesetzt, so daß gilt

$$\frac{d^2 y (+\eta)}{d \eta^2} = - \frac{d^2 y (-\eta)}{d \eta^2}.$$

Dann lautet die Reihenentwicklung für (8)

$$P - \frac{P v^2}{g} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \frac{\nu \pi \eta}{l}.$$

Diese Kraft generalisiert man: Es muß sein

$$\left(P - \frac{P v^2}{g} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \frac{\nu \pi \eta}{l} \right) \delta y_i = Q_i \delta q_i.$$

Nach (3) ist

$$\delta y_i = \delta q_i \sin \frac{i \pi x}{l} = \delta q_i \sin \frac{i \pi \eta}{l}.$$

[1] **H. H. Jeffcott**, Philos. Mag. (Ser. 7) 8 (1929) S. 66.

Es ist demnach

$$Q_i = P \sin\frac{i\pi\eta}{l} - \frac{Pv^2}{g}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\sin\frac{i\pi\eta}{l} \tag{9}$$

die generalisierte Kraft, die bei einer Verschiebung δq_i die Arbeit $Q_i \delta q_i$ leistet.

Nehmen wir nur eine mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegte sinusförmig pulsierende Kraft $a_\lambda \frac{Pv^2}{g}\sin\frac{\lambda\pi\eta}{l}$ an, so erhalten wir für den Lastweg nach (7)

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{a_\lambda l^3 P v^2}{EI\pi^4 g}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi\eta}{l}\Bigg[&\frac{-\cos\left(\frac{i\pi}{l}+\frac{\lambda\pi}{l}\right)\eta}{i^4-(i\alpha+\lambda\alpha)^2} + \\ &+\frac{\cos\left(\frac{i\pi}{l}-\frac{\lambda\pi}{l}\right)\eta}{i^4-(i\alpha-\lambda\alpha)^2} + \frac{\cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^4-(i\alpha+\lambda\alpha)^2} - \frac{\cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^4-(i\alpha-\lambda\alpha)^2}\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Bezeichnet hierin $q_{i\lambda}$ der Kürze halber den Faktor von $a_\lambda \sin\frac{i\pi\eta}{l}$, also

$$q_{i\lambda} = \frac{l^3 P v^2}{EI\pi^4 g}\left[\frac{-\cos(i+\lambda)\frac{\pi\eta}{l}}{i^4-(i\alpha+\lambda\alpha)^2} + \frac{\cos(i-\lambda)\frac{\pi\eta}{l}}{i^4-(i\alpha-\lambda\alpha)^2} + \frac{\cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^4-(i\alpha+\lambda\alpha)^2} - \frac{\cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^4-(i\alpha-\lambda\alpha)^2}\right],$$

so erhält man für den Lastweg, wenn die äußere Kraft (9) wirkt,

$$y = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda q_{i\lambda}\sin\frac{i\pi\eta}{l} + \sum_{i=1}^{\infty} P q_i \sin\frac{i\pi\eta}{l}. \tag{11}$$

Dabei ist q_i die generalisierte Koordinate (bis auf den konstanten Faktor P) für eine bewegte konstante Kraft P:

$$q_i = \frac{2l^3}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{l}}{i^2(i^2-\alpha^2)} - \alpha\frac{\sin\frac{i^2\pi}{\alpha l}\eta}{i^3(i^2-\alpha^2)}\right].$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}$$

durch zweimalige Integration

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} -a_\nu \frac{l^2}{\nu^2\pi^2}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}. \tag{12}$$

Nun entwickelt man (11) in Fourierreihen nach $\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}$, wobei man sich y im Intervall von 0 bis $-l$ ungerade fortgesetzt denkt:

$$\left.\begin{aligned} y = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\lambda \frac{2}{l}\int_0^l q_{i\lambda}\sin\frac{i\pi\eta_1}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta_1}{l}\,d\eta_1\cdot\sin\frac{\nu\pi\eta}{l} \\ +\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} P\frac{2}{l}\int_0^l q_i\sin\frac{i\pi\eta_1}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta_1}{l}\,d\eta_1\cdot\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Durch Gleichsetzen von (12) und (13) erhält man für die Fourierkoeffizienten a_ν ein System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{l^2}{\nu^2\pi^2}a_\nu = &-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \frac{2}{l}\int_0^l q_{i\lambda}\sin\frac{i\pi\eta}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\,d\eta \\ &+P\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l q_i\sin\frac{i\pi\eta}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\,d\eta \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\nu^2}\,a_\nu - \sum_{i,\lambda} a_\lambda \frac{2}{l}\,\frac{l\,P\,v^2}{EI\,\pi^2 g}\int_0^l q_{i\lambda}^{*}\sin\frac{i\pi\eta}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\,d\eta \\ &\quad = -P\sum_i \frac{2}{l}\,\frac{2l}{EI\,\pi^2}\int_0^l q_i^{*}\sin\frac{i\pi\eta}{l}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\,d\eta \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wobei

$$q_{i\lambda}^{*} = \frac{EI\,\pi^4 g}{l^3 P v^2}\,q_{i\lambda} \quad \text{und} \quad q_i^{*} = \frac{EI\,\pi^4}{2\,l^3}\,q_i$$

wird. Dieses Gleichungssystem ist von der Form

$$\begin{aligned} (1-\mu c_{11})\,a_1 \quad &-\mu c_{12}\,a_2 \quad - \ldots = \xi\,b_1, \\ -\mu c_{21}\,a_1 \quad &+\left(\tfrac{1}{4}-\mu c_{22}\right)a_2 - \ldots = \xi\,b_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit

$$\mu = \frac{l\,P\,v^2}{EI\,\pi^2 g}, \qquad \xi = \frac{2\,P\,l}{EI\,\pi^2}.$$

Man kann leicht zeigen, daß die Elemente der Gleichungsdeterminante absolut genommen alle unter einer endlichen Schranke liegen. Da nun die Fourierkoeffizienten a_λ gegen 0 konvergieren, kann man sich auf ein System mit n Unbekannten beschränken. Je größer n gewählt wird, desto genauer wird das Ergebnis.

Ich möchte hier auf die Ähnlichkeit mit Eigenwertproblemen aus anderen Gebieten der Physik hinweisen. Schreibt man in Anlehnung an die Berechnung sogenannter säkularer Störungen in der theoretischen Astronomie $\lambda = \frac{1}{\mu}$ (dieses λ ist nicht mit dem oben benutzten Index λ zu verwechseln), so ist die Determinante des Gleichungssystems bis auf den konstanten Faktor $(-\mu)^n$ die Säkulardeterminante:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \ldots . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & c_{23} \ldots . & c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{n1} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man zunächst den homogenen Fall verschwindender rechter Seite in (14), d. h. die freien Schwingungen des Systems betrachtet, so muß die Gleichungsdeterminante verschwinden. Es muß also sein

$$\begin{vmatrix} (1-\mu c_{11}) & -\mu c_{12} & \ldots & -\mu c_{1n} \\ -\mu c_{21} & \left(\frac{1}{4}-\mu c_{22}\right) & \ldots & -\mu c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\mu c_{n1} & -\mu c_{n2} & \ldots & \left(\frac{1}{n^2}-\mu c_{nn}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra für n Wurzeln μ_k möglich. Die Determinante ist hier nicht wie in vielen Fällen der theoretischen Physik hermitesch, d. h. die Elemente sind nicht symmetrisch zur Hauptdiagonalen ($c_{ik} \neq c_{ki}$); die dort gültigen Schlüsse über die Eigenwerte und Eigenfunktionen können also hierauf nicht übertragen werden. Die n Wurzeln der Gleichungsdeterminante brauchen von vornherein nicht reell und voneinander verschieden zu sein, ebenso können die zugehörigen Eigenfunktionen komplex sein.

Läßt man n gegen unendlich gehen, so ist $\mu = 0$ eine Wurzel. Das erkennt man sofort, wenn man sich die Determinante in der Form geschrieben denkt

$$A_0 + A_1\mu + A_2\mu^2 + A_3\mu^3 + \cdots.$$

Dann ist

$$A_0 = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Das verschwindet für $n \to \infty$. Das Absolutglied der Determinante verschwindet demnach, und der in μ homogene Ausdruck verschwindet für $\mu = 0$.

Die Wurzel $\mu = 0$ ist sogar eine mehrfache Wurzel; denn man kann zeigen, daß A_1 auch verschwindet. Ob allerdings alle Wurzeln Null sind, kann man nicht ohne weiteres einsehen.

Zu dem Eigenwert $\mu = 0$ gehört die Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$. Der zugehörige Lastweg ist also die gerade Linie $y(\eta) = 0$. Das ist physikalisch betrachtet die einzig mögliche Lösung; denn der Fall, daß Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit nicht verschwinden, führt auch bei verschwindender äußerer Kraft zum inhomogenen Gleichungssystem, wie später noch gezeigt wird.

Die Frage nach den Nullstellen der Determinante möchte ich offen lassen und gemäß der physikalischen Betrachtung annehmen, daß $y(\eta) = 0$ die einzige Lösung ist, die aus dem homogenen Gleichungssystem folgt. Dann ist $\mu = 0$ auch die einzige Nullstelle der Gleichungsdeterminante. Unter dieser Voraussetzung kann man von dem Problem der erzwungenen Schwingungen, wo also die rechte Seite des Gleichungssystems (14) nicht verschwindet, auf Grund der Sätze über lineare Gleichungssysteme folgendes aussagen:

1. Es gibt eine und nur eine Lösung, die in Fourierreihen darstellbar ist. Für $\mu = 0$ ist der Lastweg gleich dem Kraftweg.

2. Diese Lösung ist linear abhängig von der äußeren Kraft P, was ja auch ohne weiteres aus der Differentialgleichung folgt.

3. Die Lösung ist nicht proportional zu μ oder zur trägen Masse P/g.

Zur Berechnung der Integrale in dem Gleichungssystem (14) benutzen wir die Formeln

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\eta} \cos p\eta_1 \sin q\eta_1 \sin r\eta_1 \, d\eta_1 = &-\frac{\sin(p+q+r)\eta}{4(p+q+r)} + \\ &+\frac{\sin(p-q+r)\eta}{4(p-q+r)} - \frac{\sin(-p+q+r)\eta}{4(-p+q+r)} + \frac{\sin(p+q-r)\eta}{4(p+q-r)}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\eta} \sin p\eta_1 \sin q\eta_1 \sin r\eta_1 \, d\eta_1 = &\frac{\cos(p+q+r)\eta - 1}{4(p+q+r)} - \\ &-\frac{\cos(p-q+r)\eta - 1}{4(p-q+r)} - \frac{\cos(-p+q+r)\eta - 1}{4(-p+q+r)} + \frac{\cos(-p-q+r)\eta - 1}{4(-p-q+r)}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Verschwindet in einem der Ausdrücke in (16) der Nenner für gewisse p, q, r, so ist der Ausdruck Null. Mit Hilfe der Formel (15) findet man

$$\frac{2}{l}\int_0^{l} \cos p\eta \sin q\eta \sin r\eta \, d\eta = \left\{\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2} \text{ für } (p+q+r) = 0, \\ &+\tfrac{1}{2} \text{ für } (p-q+r) = 0, \\ &-\tfrac{1}{2} \text{ für } (-p+q+r) = 0, \\ &+\tfrac{1}{2} \text{ für } (-p-q+r) = 0. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Die erste dieser vier Möglichkeiten kommt nicht in Frage, da p, q, r positiv sind. Für alle anderen Werte von p, q, r verschwindet das Integral.

3. Normierung und Anwendung dieser Methode. Für die praktische Berechnung ist es zweckmäßig, die Integrale der Gleichungen (14) in einer Tabelle für die ersten i, λ, ν und gewisse Werte von $\alpha = \frac{vl}{a\pi}$ zusammenzustellen, wodurch die Aufstellung des Gleichungssystems für eine Menge Fälle normiert wird. Die Größe α durchläuft als Funktion der Geschwindigkeit kontinuierlich alle Werte. Im allgemeinen müssen

also die Formeln (15) und (16) zur Berechnung der Integrale verwandt werden. Ist aber $\alpha = 1/n$, wo n die ganzen Zahlen durchläuft, so kann man die spezielle Formel (17) anwenden.

In den folgenden Tabellen sind die Integrale

$$c_{\nu\lambda} = \frac{2}{l}\int_0^l \sum_{i=1}^{2} q_{i\lambda}^{*} \sin\frac{i\pi\eta}{l} \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\, d\eta$$

für $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}25$, $\alpha = 0{,}2$ aufgestellt; λ und ν laufen bis 4 bzw. 5 bzw. 6.

Ebenso sind die diesen α-Werten entsprechenden Integrale

$$b_{\nu} = \frac{2}{l}\int_0^l \sum_{i=1}^{2} q_{i}^{*} \sin\frac{i\pi\eta}{l} \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\, d\eta$$

tabuliert.

Tabelle 1a.
Werte der $c_{\nu\lambda}$ für $\alpha = 0{,}5$.

ν \ λ	1	2	3	4
1	1,943	1,067	−0,177	0,000
2	−1,067	0,371	1,067	0,400
3	−0,177	−1,067	−0,375	−0,305
4	0,305	0,400	−0,305	−0,391

Tabelle 1b.
Werte der b_{ν} für $\alpha = 0{,}25$.

ν	b_{ν}
1	1,177
2	−0,453
3	−0,802
4	0,194

Tabelle 2a.
Werte der $c_{\nu\lambda}$ für $\alpha = 0{,}25$.

ν \ λ	1	2	3	4	5
1	1,730	0,000	−0,593	0,000	−0,083
2	0,000	1,772	0,305	−1,143	−0,305
3	−0,802	−0,610	1,003	0,254	0,129
4	0,000	−1,143	−1,016	0,322	1,016
5	0,134	0,610	−0,404	−0,254	−0,992

Tabelle 2b.
Werte der b_{ν} für $\alpha = 0{,}25$.

ν	b_{ν}
1	0,948
2	0,052
3	−0,150
4	−0,171
5	−0,040

Tabelle 3a.
Werte der $c_{\nu\lambda}$ für $\alpha = 0{,}2$.

ν \ λ	1	2	3	4	5	6
1	1,658	0,000	−0,595	−0,038	−0,032	0,038
2	0,000	1,397	0,000	−0,885	0,000	0,071
3	−0,564	0,000	2,048	0,286	−1,389	0,317
4	−0,095	−1,041	−0,794	1,890	2,524	0,258
5	−0,032	0,000	−1,389	−1,010	0,318	1,010
6	0,095	0,228	0,794	−0,523	−2,524	−0,709

Tabelle 3b.
Werte der b_{ν} für $\alpha = 0{,}2$.

ν	b_{ν}
1	0,919
2	0,000
3	−0,100
4	0,000
5	−0,172
6	0,000

Zur Berechnung der Tabellen ist noch zu bemerken, daß in einigen Gliedern des Ausdruckes $q_{i\lambda}^{*}$ die Nenner verschwinden. Durch Grenzübergang erhält man z. B. für $\alpha \to 0{,}5$

$$\left[\frac{-\cos(i+\lambda)\frac{\pi\eta}{l} + \cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^2 - (i\alpha + \lambda\alpha)^2}\right]_{i,\lambda=1;\ \alpha\to 0{,}5} = \left[\frac{\frac{\pi\eta}{\alpha^2 l}\sin\frac{\pi\eta}{l}}{-2\alpha\cdot 2^2}\right]_{\alpha\to 0{,}5} = -\frac{\pi\eta}{l}\sin\frac{2\pi\eta}{l}$$

und

$$\left[\frac{\cos(i+\lambda)\frac{\pi\eta}{l}-\cos\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l}}{i^2-(i\alpha-\lambda\alpha)^2}\right]_{\substack{i=1;\,\alpha\to 0{,}5\\ \lambda=3}}=\frac{\pi\eta}{l}\sin\frac{2\pi\eta}{l}.$$

Wegen dieser Ausdrücke gebraucht man also zur Berechnung der Integrale noch folgende Formel, die durch partielle Integration erhalten wird:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^l a\eta\sin p\eta\sin q\eta\sin r\eta\,d\eta=&\Big[a\eta\Big(\frac{\cos(p+q+r)\eta-1}{4(p+q+r)}-\frac{(\cos p-q+r)\eta-1}{4(p-q+r)}-\\&-\frac{\cos(-p+q+r)\eta-1}{4(-p+q+r)}+\frac{\cos(-p-q+r)\eta-1}{4(-p-q+r)}\Big)\Big]_0^l-a\int_0^l\Big(\frac{\cos(p+q+r)\eta-1}{4(p+q+r)}-\\&-\frac{\cos(p-q+r)\eta-1}{4(p-q+r)}-\frac{\cos(-p+q+r)\eta-1}{4(-p+q+r)}+\frac{\cos(-p-q+r)\eta-1}{4(-p-q+r)}\Big)d\eta.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Die Berechnung der Tabellen mit Hilfe der Formeln (17) und (18) bietet keine rechnerischen Schwierigkeiten; aber sie ist recht umfangreich, und es ist zweckmäßig, sie nach folgendem Schema durchzuführen. Zunächst berechnet man ein Integral der ersten Zeile, z. B. c_{12} in Tabelle 1a, womit das zweite Integral der ersten Zeile bezeichnet sei. Es ist

$$c_{12}=\frac{2}{l}\int_0^l\Big(-\sin\frac{\pi\eta}{l}\frac{\cos\frac{3\pi\eta}{l}}{-1{,}25}\sin\frac{\pi\eta}{l}-\sin\frac{\pi\eta}{l}\frac{\cos\frac{\pi\eta}{l}}{0{,}75}\sin\frac{\pi\eta}{l}+\sin\frac{\pi\eta}{l}\frac{\cos\frac{2\pi\eta}{l}}{-1{,}25}\sin\frac{\pi\eta}{l}-$$
$$-\sin\frac{\pi\eta}{l}\frac{\cos\frac{2\pi\eta}{l}}{0{,}75}\sin\frac{\pi\eta}{l}-\sin\frac{2\pi\eta}{l}\frac{\cos\frac{4\pi\eta}{l}}{12}\sin\frac{\pi\eta}{l}++\sin\frac{2\pi\eta}{l}\frac{1}{16}\sin\frac{\pi\eta}{l}\Big)d\eta.$$

Mit Hilfe der Formel (17) findet man

$$c_{12}=\frac{1}{2{,}5}+\frac{1}{1{,}5}-1{,}0666.$$

Zur Berechnung von c_{22}, c_{32}, c_{42} usw., also der Integrale in derselben Spalte, braucht man nur den dritten Faktor $\sin\frac{\pi\eta}{l}$ in jedem Glied durch $\sin\frac{2\pi\eta}{l}$ $\sin\frac{3\pi\eta}{l}$, $\sin\frac{4\pi\eta}{l}$ usw. zu ersetzen und die Formel (17) zu benutzen.

Im folgenden ist ein Beispiel zahlenmäßig durchgerechnet. Dabei habe ich mich auf ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten, also auf die Bestimmung der drei ersten Fourierkoeffizienten des Lastweges beschränkt.

Es sei gegeben (alles in kg, cm und sek):

$$EI=348,\ M=0{,}135,\ F\gamma=1{,}56\cdot10^{-3},\ P=0{,}015,\ l=100,\ v=2{,}32\cdot10^{2},\ \mu=0{,}216,$$
$$\xi=0{,}873\cdot10^{-3}.$$

Dabei ist M die träge Masse und P die Kraft der wandernden Last. M und P unterscheiden sich nicht um den Faktor der Erdbeschleunigung. Die Zahlenwerte beziehen sich auf das später zu besprechende Versuchsmodell. Bei diesem war die Kraft P durch eine Feder erzeugt und deshalb unabhängig von der Masse M. In diesem Falle ist $\alpha=0{,}5$, so daß man die Tabelle 1 verwerten kann. Schreibt man das Gleichungssystem (14) in der übersichtlichen Form

$$\begin{aligned}C_{11}a_1+C_{12}a_2+C_{13}a_3&=B_1,\\C_{21}a_1+C_{22}a_2+C_{23}a_3&=B_2,\\C_{31}a_1+C_{32}a_2+C_{33}a_3&=B_3,\end{aligned}$$

so findet man mit Hilfe der Tabelle 1a

$$\begin{aligned}C_{11}&=1-\mu c_{11}=\ \ 0{,}580,\\C_{12}&=-\ \mu c_{12}=-0{,}230\end{aligned}$$

und ebenso die übrigen C_{ik}. Wenn man entsprechend die B_r mit Hilfe der Tabelle 1b berechnet, erhält man somit folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0{,}580\,a_1 - 0{,}230\,a_2 + 0{,}038\,a_3 &= -\,1{,}027\cdot 10^{-3},\\ 0{,}230\,a_1 + 0{,}170\,a_2 - 0{,}230\,a_3 &= \;\;0{,}395\cdot 10^{-3},\\ 0{,}038\,a_1 + 0{,}230\,a_2 + 0{,}192\,a_3 &= \;\;0{,}169\cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Die Lösung hiervon lautet

$$a_1 = -\,0{,}926\cdot 10^{-3}, \qquad a_2 = 1{,}917\cdot 10^{-3}, \qquad a_3 = -\,1{,}220\cdot 10^{-3}.$$

Nach Gleichung (12) erhält man daraus den Lastweg

$$y = 0{,}93\sin\frac{\pi\eta}{l} - 0{,}48\sin\frac{2\pi\eta}{l} + 0{,}13\sin\frac{3\pi\eta}{l}$$

(Tabelle 4 und Abb. 3).

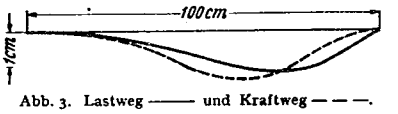


Abb. 3. Lastweg —— und Kraftweg — — —.

Tabelle 4.

$\frac{\eta}{l}$	y (3 Fourierglieder)	y (4 Fourierglieder)	y (Kraftweg)
0,1	0,11	0,04	0,04
0,2	0,22	0,14	0,14
0,3	0,34	0,30	0,39
0,4	0,52	0,49	0,78
0,5	0,79	0,77	1,20
0,6	1,08	1,04	1,41
0,7	1,25	1,18	1,25
0,8	1,13	1,12	0,75
0,9	0,68	0,63	0,24

Die gestrichelte Linie in Abb. 3 stellt den Kraftweg dar bei Vernachlässigung der trägen Masse M. Der wahre Lastweg liegt im ersten Teil über und im letzten Teil unter der gestrichelten Kurve, was ja auch, physikalisch gesehen, einleuchtet. Die dritte Spalte in Tabelle 4 gibt den Lastweg y mit vier Fouriergliedern, die vierte Spalte den zugehörigen Kraftweg bei Vernachlässigung der Trägheit der Last.

Da man nun die auf den Träger wirkenden Kräfte (Schwere- und Trägheitskräfte) kennt, ist es möglich, die Lösung $y(x, t)$ für beliebiges x und t anzugeben. Man braucht nur die Durchbiegung infolge der Schwerkraft und der nunmehr bekannten Trägheitskraft mit Hilfe der Formeln (6) und (7) zu berechnen und zu überlagern.

4. Die Lösung für $vt > l$. Die Lösung (5) gilt nur für $0 \leqq \eta \leqq l$. Natürlich kann man jetzt die Lösung für $\eta > l$ aufstellen, indem man die Lösung (5) für $\eta = l$ als Anfangsbedingung nimmt und das zugehörige Anfangswertproblem der Stabschwingungsgleichung löst. Durch einen Kunstgriff kann man diese Arbeit umgehen. Zunächst betrachtet man den Fall einer bewegten konstanten Einzelkraft; die entsprechende generalisierte Koordinate lautet für $0 \leqq \eta \leqq l$

$$q_i = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{l}}{i^3(i^2-\alpha^2)} - \alpha\,\frac{\sin\frac{i^2\pi}{\alpha l}\eta}{i^3(i^2-\alpha^2)}\right].$$

Daß diese Lösung nur für $0 \leqq \eta \leqq l$ gilt, sieht man deutlich an dem ersten Resonanzfall, also für $i = 1$, $\alpha = 1$. Hier erhält man

$$q_1 = -\frac{Pg}{\gamma F\pi v^2}\,\eta\cos\frac{\pi\eta}{l} + \frac{Pgl}{\gamma F\pi^2 v^2}\sin\frac{\pi\eta}{l}.$$

Wie man sieht, würde q_1 mit η dauernd wachsen; das hat seinen Grund darin, daß die äußere Kraft generalisiert wurde. Es war doch $Q_i = P\sin\frac{i\pi\eta}{l}$. Mit wachsendem η ändert demnach Q_i sein Vorzeichen und wir haben so gerechnet, als ob zur Zeit $\eta = l$ eine neue Kraft von links auf den Träger komme, die für $i = 1$ der ersten entgegengesetzt gleich ist. Soll unsere Formel auch für $\eta > l$ gültig bleiben, so muß

man so rechnen, als käme zur Zeit $\eta = l$ eine der ersten gleiche Kraft von links auf den Träger. In dem erwähnten Resonanzfalle muß man daher den Ausdruck

$$-\frac{Pg}{\gamma F \pi v^2}(\eta - l)\cos\left(\frac{\pi\eta}{l} - \pi\right) + \frac{Pgl}{\gamma F \pi^2 v^2}\sin\left(\frac{\pi\eta}{l} - \pi\right)$$

zu q_1 noch hinzufügen, so daß wird

$$q_1 = -\frac{Pgl}{\gamma F \pi^2 v^2}\cos\frac{\pi\eta}{l}.$$

Und die erste Grundschwingung des Trägers ist demnach im Resonanzfalle gegeben durch

$$y_1 = -\frac{Pgl}{\gamma F \pi^2 v^2}\cos\frac{\pi\eta}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Die allgemeine Vorschrift lautet: Wenn eine Kraft über einen Träger gelaufen ist, so ist die generalisierte Koordinate auf Grund von (5) für $\eta > l$

$$\left.\begin{aligned} q_i = A_i\cos\frac{i^2\pi^2 a\eta}{l^2 v} + B_i\sin\frac{i^2\pi^2 a\eta}{l^2 v} + \frac{2gl}{i^2\pi^2 aF\gamma}\int_0^{\eta/v}\frac{1}{v}Q_i(\eta)\sin\frac{i^2\pi^2 a(\eta-\eta_1)}{vl^2}d\eta_1 + \\ + \frac{2gl}{i^2\pi^2 aF\gamma}\int_0^{\eta/v}\frac{1}{v}\bar{Q}_i(\eta)\sin\frac{i^2\pi^2 a(\eta-\eta_1)}{vl^2}d\eta_1. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Der letzte Summand wurde hinzugefügt, um die Wirkung der generalisierten Kraft Q_i für $\eta > l$ aufzuheben. Dabei ist $\bar{Q}_i$ so zu wählen, daß

$$\bar{Q}_i(\eta) = -Q_i(l + \eta).$$

Die allgemeine Formel (20) auf die bewegte konstante Einzelkraft angewandt gibt für $\eta > l$

$$q_i = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{l}}{i^2(i^2-\alpha^2)} - \alpha\frac{\sin\frac{i^2\pi}{\alpha l}\eta}{i^3(i^2-\alpha^2)} + \frac{\sin\left(\frac{i\pi\eta}{l} - \pi\right)}{i^2(i^2-\alpha^2)} - (-1)^{i+1}\alpha\frac{\sin\left(\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l} - \frac{i^2\pi}{\alpha}\right)}{i^3(i^2-\alpha^2)}\right]$$

oder

$$q_i = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\frac{\alpha}{i^3(i^2-\alpha^2)}\left[-\sin\frac{i^2\pi}{\alpha l}\eta - (-1)^{i+1}\sin\left(\frac{i^2\pi\eta}{\alpha l} - \frac{i^2\pi}{\alpha}\right)\right]. \quad (20a)$$

Daraus folgt für $\alpha = 1/n$ und $\eta > l$:

1. Die erzwungenen Schwingungen verschwinden alle.
2. Bei geradem n bleiben die erste, dritte, fünfte usw. Eigenschwingung bestehen und ihre Amplitude ist für $\eta > l$ doppelt so groß wie für $\eta < l$.
3. Für ungerades n und $n \neq 1$ verschwinden die Eigenschwingungen.

Wenn demnach eine Anzahl Kräfte nacheinander einen Träger überschreitet, so können sich die Schwingungen, die von den einzelnen Kräften hervorgerufen werden, im Falle 3. nur solange gegenseitig beeinflussen, als sie gleichzeitig auf den Träger wirken. Die Kräfte, die den Träger verlassen haben, haben keinen Einfluß mehr auf den Schwingungsvorgang. Anders ist das im Falle 2. Ist der gegenseitige Abstand der Kräfte gerade gleich l oder einem ganzzahligen Vielfachen von l, so überlagern sich die Schwingungen, die von den einzelnen Kräften herrühren. Ist $\alpha = 1/2$ und der Kräfteabstand $\frac{1}{2}l$, so sind die von den einzelnen Kräften herrührenden Schwingungen entgegengesetzt, sie interferieren miteinander. Für $\alpha = 1/4$ kommt es beim Abstand $l/2$ wieder zu einer Überlagerung der Schwingungen. Das Verhalten des Trägers für andere Kräfteabstände und Werte von α kann man sich leicht an Hand der Formel (20a) überlegen.

5. Der Fall mehrerer in gewissen Abständen bewegten Lasten. Die Lösung dieses Problemes erhält man mit Hilfe des linearen Superpositionsprinzipes. Dieses sagt aus: Die durch mehrere Kräfte hervorgerufene Durchbiegung eines Trägers erhält man durch Addition der zu den einzelnen Kräften gehörigen Durchbiegungen.

Es mögen n Kräfte P_k mit der Geschwindigkeit v in gewissen Abständen über den Träger rollen. Dann ist die Durchbiegung infolge einer Einzelkraft nach (6) gegeben durch

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} P_k q_{ik} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Hier berechnet sich q_{ik} aus (5); dabei ist die untere Integralgrenze der Zeitpunkt, wo die k-te Kraft auf den Träger kommt. Die Trägerschwingung ist demnach gleich der Summe der y_k:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Dabei ist zu beachten, daß die q_{ik} für die ersten $h-1$-Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_{k-1}$ nach den vorhergehenden Ausführungen auch für $\eta > l$ zu berechnen sind.

Auch hier kann man für den Fall bewegter Lasten wie bei einer Einzellast eine strenge Lösung gewinnen, indem man für jeden Lastweg eine Fourierentwicklung ansetzt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l^2}{\nu^2 \pi^2} a_\nu^{(k)} \sin \frac{\nu \pi \eta}{l} \qquad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Doch wird hier die Rechenarbeit erheblich größer, da die Zahl der zu bestimmenden Fourierkoeffizienten $a_\nu^{(k)}$ entsprechend den n Lastwegen ver-n-facht ist. Es handelt sich hier um gekoppelte Schwingungen von n Massenpunkten, es müssen daher die $a_\nu^{(k)}$ aus einem einzigen System linearer Gleichungen berechnet werden.

Die Berechnung der $a_\nu^{(k)}$ ist recht umständlich, und hier ist es zweckmäßig, sich nach einer Näherung umzusehen. So habe ich im folgenden ein Beispiel mit zwei Lasten durchgerechnet, wobei ich bei der Berechnung des Lastweges 1 die träge Masse M_2 vernachlässigt und deren Schwerkraft P_2 mitberücksichtigt habe. Und ebenso habe ich bei Berechnung des Lastweges 2 die träge Masse M_1 vernachlässigt. Dadurch wird erreicht, daß beide Lastwege einzeln berechnet werden können. Für den ersten Lastweg lautet nun das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{\nu^2} a_\nu^{(1)} - \sum_{i,\lambda=1}^{\infty} a_\lambda^{(1)} \mu_1 \frac{2}{l} \int q_{i\lambda}^*(\eta) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta \\ = -\xi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^*(\eta) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta \\ - \xi_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^*(\eta - \varepsilon) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Das Gleichungssystem des zweiten Lastweges lautet entsprechend

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{\nu^2} a_\nu^{(2)} - \sum_{i,\lambda=1}^{\infty} a_\lambda^{(2)} \mu_2 \frac{2}{l} \int_0^l q_{i\lambda}^*(\eta) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta \\ = -\xi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^*(\eta + \varepsilon) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta \\ - \xi_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^*(\eta) \sin \frac{i\pi\eta}{l} \sin \frac{\nu\pi\eta}{l} \, d\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und zwar ist

$$\left.\begin{aligned} q_{i\lambda}^*(\eta - \varepsilon) = 0 \\ q_i^*(\eta - \varepsilon) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \eta \leq \varepsilon, \quad \mu_1 = \frac{l M_1 v^2}{EI\pi^2}, \quad \mu_2 = \frac{l M_2 v^2}{EI\pi^2}, \quad \xi_1 = \frac{2 P_1 l}{EI\pi^2}, \quad \xi_2 = \frac{2 P_2 l}{EI\pi^2};$$

$q_i^*(\eta + \varepsilon)$ muß auch für $\eta + \varepsilon > l$ berechnet werden.

Die Integrale in diesen Gleichungssystemen kann man für gewisse α-Werte den Tabellen 1 bis 3 entnehmen bis auf die Ausdrücke

$$b_\nu^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^* (\eta - \varepsilon) \sin\frac{i\pi\eta}{l} \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\, d\eta,$$

$$b_\nu^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l q_i^* (\eta + \varepsilon) \sin\frac{i\pi\eta}{l} \sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\, d\eta.$$

Diese Größen hängen u. a. vom Abstand ε der beiden Lasten ab. Nimmt man $\varepsilon = 0{,}5\,l$ und $\alpha = 0{,}5$, so findet man für $b_\nu^{(1)}$ und $b_\nu^{(2)}$ nach Formel (15) und (16)

Mit diesen Werten von $b_\nu^{(1)}$ und $b_\nu^{(2)}$ ist folgendes Beispiel berechnet:

$EI = 348$, $M_1 = M_2$ 0,03, $F\gamma = 1{,}56 \cdot 10$,
$P_1 = P_2 = 0{,}015$, $l = 100$, $v = 2{,}32 \cdot 10$,
$\mu_1 = \mu_2 = 0{,}048$, $\xi_1 = \xi_2 = 0{,}873 \cdot 10$.

ν	$b_\nu^{(1)}$	$b_\nu^{(2)}$
1	0,048	0,048
2	−0,079	0,983
3	0,083	0,083

Diese Werte in (21) und (22) eingesetzt liefern

$a_1^{(1)} = -1{,}05$, $a_2^{(1)} = 2{,}21$, $a_3^{(1)} = 0{,}06$,
$a_1^{(2)} = -1{,}27$, $a_2^{(2)} = -1{,}41$, $a_3^{(2)} = 1{,}39$.

Tabelle 5.

$\frac{\eta}{l}$	Lastweg 1 y_1	Lastweg 2 y
0,1	0,01	0,47
0,2	0,10	0,94
0,3	0,33	1,31
0,4	0,67	1,50
0,5	1,05	1,42
0,6	1,32	1,09
0,7	1,38	0,74
0,8	1,15	0,27
0,9	0,65	0,06

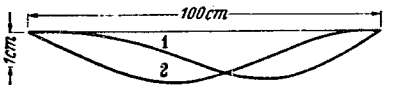


Abb. 4. 2 Lasten im Abstand $\frac{l}{2}$.

Nach Gleichung (12) erhält man für den ersten Lastweg

$$y_1 = 1{,}05 \sin\frac{\pi\eta}{l} - 0{,}55 \sin\frac{2\pi\eta}{l} + 0{,}01 \sin\frac{3\pi\eta}{l}$$

und für den zweiten

$$y_2 = 1{,}27 \sin\frac{\pi\eta}{l} + 0{,}35 \sin\frac{2\pi\eta}{l} - 0{,}15 \sin\frac{3\pi\eta}{l}$$

(Tabelle 5 und Abb. 4).

6. Anwendungsbereich der entwickelten Methode. Die hier am Beispiel des frei gestützten Trägers dargelegte Methode läßt sich ebenso auf den Fall des beiderseits eingespannten Trägers anwenden. Auch hier kann man entsprechend der Gleichung (3) und den Überlegungen von S. 184 zunächst die allgemeine Form der Schwingungen aufstellen und dann die Funktionen von t als generalisierte Koordinaten einführen und durch die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art bestimmen. Hat man auf diese Weise die Lösung für konstante und harmonische äußere Kräfte gewonnen, so kann man die Methode von S. 186 für bewegte Lasten übertragen.

Das gleiche Verfahren kann auch zur Bestimmung von Plattenschwingungen infolge bewegter Lasten verwandt werden. Ebenso kann man hiermit die Schwingungen von Saiten und Membranen berechnen, die durch bewegte Lasten hervorgerufen werden. Ganz allgemein kann man diese Methode zur Lösung aller derartigen Probleme benutzen, wenn nur der Anfangs- und Endpunkt des Lastweges bekannt ist, so daß der Lastweg in Fourierreihen dargestellt werden kann. Das ist z. B. nicht der Fall beim einseitig eingespannten Träger.

In dieser Arbeit ist der Einfachheit halber die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Trägers immer gleich Null gesetzt. Das ist nicht unbedingt erforderlich. Man kann die Lösung einer beliebigen Anfangsbedingung anpassen. Zu dem Zwecke

braucht man nur in dem Gleichungssystem (14) auf der rechten Seite die Fourierkoeffizienten des Weges hinzuzufügen, den ein von Schwere- und Trägheitskräften freier Punkt mit der Geschwindigkeit der Last beschreiben würde.

7. Die experimentelle Ermittlung von Lastwegen und ihr Vergleich mit den berechneten. Das hier behandelte Problem ist von großer Wichtigkeit für den Brücken- und Eisenbahnoberbau. Überhaupt wurden von dieser Seite her zuerst derartige Untersuchungen gemacht[1].

Ich habe nun an Hand eines Modellversuches geprüft, wie weit die in dem Ansatz (1) und (2) steckende Idealisierung des Problemes gerechtfertigt ist. Unter anderem werden zwei wesentliche Voraussetzungen gemacht: die Dämpfung wird vernachlässigt und es wird vorausgesetzt, daß die Last am Träger haften bleibt. Dies ist natürlich nur so lange der Fall, wie die Trägheitskraft geringer als die Schwerkraft ist, wenn nicht beide Kräfte gleich gerichtet sind.

Zunächst sei das Versuchsmodell beschrieben. Die Anordnung ist aus Abb. 5 zu erkennen. Ein Wagen läuft sauber geführt auf Schienen. Dieser trägt in einem Kugellager k drehbar die Masse M, die in erster Linie aus einem Hebelarm H besteht, der eine Rolle r trägt. Der Hebelarm ist nach der r entgegengesetzten Seite verlängert und trägt an seinem Ende eine kleine Glühbirne b. Eine Feder f drückt die Masse seitlich an die Führungsschiene F bzw. den Träger T. Die seitliche Belastung des Trägers hat den Vorteil, daß seine Ruhelage durch eine Gerade gegeben ist, was ja auch in der Praxis des Brückenbaues angestrebt wird. Die Dimensionen des Trägers entsprechen den Daten in den Beispielen auf S. 191 und 195. Der Träger ist 0,1 cm hoch, 2 cm breit und 100 cm lang. Der Träger ist an zwei Zapfen z_1 und z_2 drehbar befestigt. Der Zapfen z_2 am auflaufenden Ende ist so konstruiert, daß der Träger sich in seiner Längsrichtung gleitend ausdehnen und verkürzen kann, so daß das System statisch bestimmt wird.

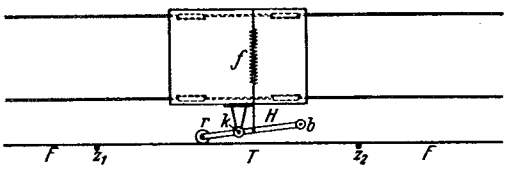


Abb. 5. Versuchsanordnung.

Der Wagen wird beschleunigt durch ein Fallgewicht. Das Gewicht setzt bereits auf, bevor die Masse den Träger erreicht. Um die Reibungsverzögerung des Wagens zu vermeiden, war die ganze Bahn ein wenig geneigt, so daß die Reibungskraft gerade überwunden wurde.

Die Geschwindigkeit des Wagens wird elektrisch gemessen, indem der Wagen zwei Kontakte betätigt, wodurch mittels eines elektromagnetisch bewegten Schreibstiftes zwei Zeichen auf einen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit laufenden Papierstreifen entstehen.

Die Aufnahmen wurden in der Weise gemacht, daß zunächst der Maßstab photographiert wurde. Alsdann wurde im verdunkelten Zimmer die Blende des Photoapparates geöffnet und die Glühbirne b eingeschaltet. Die Photographien geben also den Weg der Glühbirne wieder. Zu den Abb. 6 bis 9 ist folgendes zu bemerken:

Abb. 6 gehört zu $M = 0{,}135$ kg, $v = 225$ cm/sec. Bei etwa $0{,}85\,l$ ändert die Krümmung ihr Vorzeichen, es wird $\frac{d^2y}{d\eta^2} = \frac{P}{M v^2}$. Hier entfernt sich die Last vom Träger und fliegt über das rechte Auflager hinweg.

Abb. 7 gehört zu $M = 0{,}135$ kg, $v = 245$ cm/sec. Die Wendetangente ist verschwunden. Ein Vergleich mit Abb. 6 zeigt den großen Einfluß, den eine geringe Änderung der Geschwindigkeit ausübt.

Abb. 8 gehört zu $M = 0{,}280$ kg, $v = 225$ cm/sec. Die Masse ist ungefähr doppelt so groß und die Geschwindigkeit die gleiche wie in Abb. 6. Der Lastweg verläuft

[1] Über die Geschichte des Problemes siehe das auf S. 183 zitierte Buch von St. Venant.

im ersten Teil flacher und das Maximum ist weiter nach rechts verschoben. Etwa bei 0,92 l entfernt sich die Last vom Träger und fliegt hoch über das rechte Auflager hinweg.

Abb. 9 gehört zu $M = 0{,}135$ kg, $v = 115$ cm/sec. Am rechten Ende hat sich die Masse M ein wenig über die Nullage erhoben.

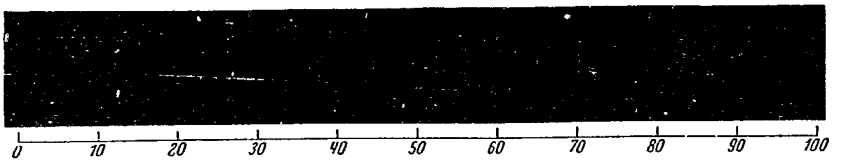


Abb. 6.

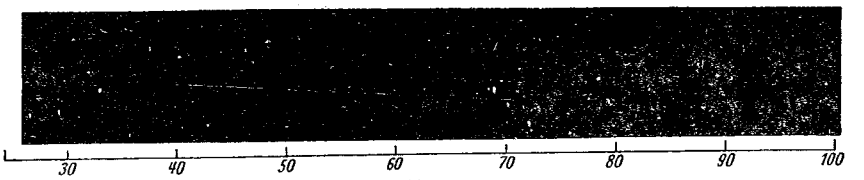


Abb. 7.

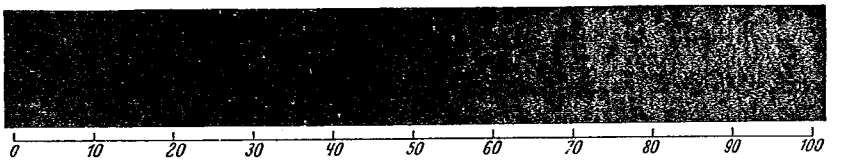


Abb. 8.

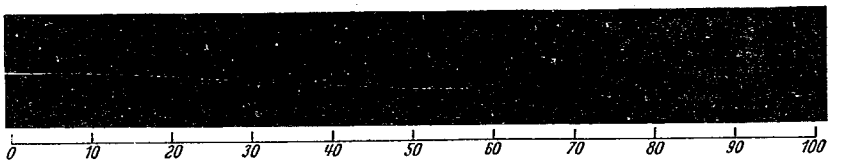


Abb. 9.

Die Nullkreise in Abb. 10 geben den Verlauf der experimentellen Kurve aus Abb. 9. Die ausgezogene Linie ist der mit vier Fouriergliedern berechnete Lastweg. Bei etwa 0,8 l liegt eine Wendetangente.

Abb. 10 zeigt eine recht gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch, wenn man bedenkt, daß beim Versuch außer der erwähnten Abweichung vom Idealzustand eine Reihe Größen gemessen werden muß, wodurch Fehler entstehen. Die Messung der Geschwindigkeit v in der beschriebenen Weise bringt den größten Fehler mit sich, der sich besonders stark auswirkt, da die Geschwindigkeit quadratisch in die Rechnung eingeht. Bei v ist ein Fehler von etwa 5% zu erwarten. Die Biegesteifigkeit EI wird aus der Schwingungsdauer des Trägers gemessen und ist außer mit einem kleinen Beobachtungs- mit einem prinzipiellen Fehler behaftet, da die Dämpfung vernachlässigt wird. Ein geringer Fehler entsteht auch beim Ausmessen der Lichtbilder.

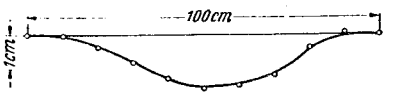


Abb. 10. Vergleich zwischen Rechnung ——— und Messung o.

Dem Werte $\alpha = 0{,}5$ entspricht in unserem Versuch, der an einem Träger von 0,1 cm Höhe und 100 cm Länge ausgeführt wurde, eine Geschwindigkeit von 232 cm/sec.

Bei einem Normal-I-Träger von 80 cm Höhe und 1000 cm Länge entspricht diesem α eine Geschwindigkeit von 250 m/sec. Diese Geschwindigkeit wird jedoch herabgesetzt, wenn der Träger durch Schienen, Schwellen und sonstige Brückenaufbauten, die EI unverändert lassen, aber $F\gamma$, das Gewicht je Längeneinheit, vergrößern, vorbelastet wird.

Die Versuche wurden im Institut für angewandte Mechanik in Göttingen durchgeführt. Herrn Prof. **Schuler** bin ich für wertvollen Rat zu großem Dank verpflichtet.

Göttingen, Institut für angewandte Mechanik.

(Eingegangen am 18. März 1937.)

Über die graphische Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bei beliebigem Gesetz für Dämpfung, Rückstellkraft und Antriebskraft.

Von **E. Braun** VDI in Stuttgart.

Als Grundlage für das Folgende behandeln wir:

1. Erzwungene Schwingung mit linearem Gesetz für Dämpfung und Rückstellkraft und rein harmonischer Antriebskraft. Bezeichnet x den Schwingungsausschlag, t die Zeit D, R, ε, ω Konstante, so lautet die Gleichung für die erzwungene Schwingung bekanntlich

$$\ddot{x} + D\dot{x} + Rx = E \sin \omega t \tag{1}$$

und ihre Lösung

$$x = x_1 + x_2 = a\, e^{\beta t} \sin (n t + \nu) + A \sin (\omega t - \lambda) \tag{2}$$

mit

$$\beta = -\frac{D}{2}, \qquad n = \sqrt{R - \frac{D^2}{4}},$$

$$A = \sqrt{\frac{E^2}{(R-\omega^2)^2 + \omega^2 D^2}}, \qquad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega D}{R - \omega^2}.$$

Das Glied x_1 stellt bekanntlich die gedämpften Eigenschwingungen des Systems dar, a und ν sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Eigenschwingungen verschwinden bei vorhandener Dämpfung mit wachsender Zeit mehr und mehr. Das zweite Glied stellt die erzwungene Schwingung dar, die praktisch vorzugsweise interessiert und die nach längerer oder kürzerer Zeit allein übrig bleibt.

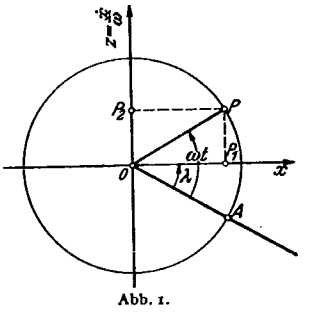


Abb. 1.

Die erzwungene Schwingung stellen wir nun graphisch dar, indem wir als Abszissen x, als Ordinaten $z = \frac{\dot{x}}{\omega}$ auftragen (Abb. 1). Wir erhalten dann, da $x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2$, als (x, z)-Linie einen Kreis mit dem Halbmesser A. Ziehen wir einen Vektor OP, dessen Betrag A ist und der mit dem durch den Winkel λ bestimmten Nullstrahl OA den Winkel ωt bildet, so ergibt sich x als Projektion von OP_1 auf die x-Achse, z als Projektion von OP_2 auf die z-Achse. P durchläuft den Kreis mit der unveränderlichen Kreisfrequenz ω. Trägt man auf dem Kreise noch eine Zeitteilung für gleiche Teile

Dynamic Load Analysis and Design of Highway Bridges

CHARLES F. SCHEFFEY, Assistant Professor of Civil Engineering
University of California

Live loads on highway bridges produce three types of dynamic effects of interest to the designer: (1) those due to the speed at which the load rolls smoothly across the span, (2) those due to shock effects of deck irregularities or obstructions, and (3) those involving a resonance effect due to repetition of load at or near the natural frequency of the structure. This paper first discusses a rational approach to the determination of the effects of the smoothly rolling loads. The approach is to solve the general nonlinear partial differential equation which results from consideration of the essential factors involved by a step-by-step process, in which it is reduced to a linear ordinary equation with constant coefficient for short intervals of time. The constant coefficients for this equation are obtained by a quantitative analysis of the manner in which the coefficients of the basic equation vary. The application of the analysis to structures with simple and continuous spans is discussed, and the results are compared to field tests. A brief analysis of shock loads and of resonance effects produced by certain axle spacings, spacing of vehicles, and deflections in the floor system is given. The paper concludes with a discussion of this analysis method to the design problem and suggests the lines along which the author believes specifications' clauses whould be developed to permit more-rational design for dynamic effects.

● THEORETICAL methods for investigation of the effects of dynamic loadings on highway bridges have two important objectives: (1) the explanation or prediction of these effects on existing structures and (2) the formulation of proper allowances for these effects on structures being designed. Much excellent work has been and is being done on the first of these objectives, which perhaps we should call the fundamental investigation. Great refinement in the analysis is necessary in order that the investigator may be confident that he has the proper explanation for the observed behavior in all of its detail. However, it is the opinion of the author that the state of knowledge of this phase has now progressed far enough that a cautious approach to the second objective can be made by the use of some approximate methods of dynamic load analysis.

This paper will analyse the influence of various dynamic effects of live load on typical modern highway bridges and their significance from a standpoint of design. The effect of smoothly rolling loads will be considered first, then the effects of vehicle springing, impact of wheels passing over obstructions, and dynamic effects induced by varying stiffness of the floor system. The relative importance of each of these effects for various spans of structure will be developed, and then the significance of the results in terms of design will be discussed.

ANALYSIS FOR SMOOTHLY ROLLING LOADS WITHOUT SPRINGING

The fundamental problem which must be solved in any dynamic load analysis is the solution of the differential equation of motion for a rolling mass moving at uniform velocity across a structure which in its simplest form consists of a simply supported beam of uniform mass and moment of inertia (Figure 1). The differential equation in which the effect of the mass of the load as well as the mass of the beam and the damping of the structure is included (but in which only the first mode of vibration of the structure is considered) is:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 4\pi n_b m\frac{\partial y}{\partial t} + M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2}{\ell}\left[Mg - M^a\right]\sin 2\pi\, nt \sin\frac{\pi x}{\ell}$$

In which the notation, borrowed from C. E. Inglis (1) has the following meaning.

171

EI = Elastic constant of the beam
m = mass per unit length
$4\pi n_b m$ = damping constant, in which n_b has the dimensions of a frequency
g = acceleration of gravity
α = vertical acceleration of the load due to movement of the beam, taken positive when downwards

$$n = \frac{v}{2L} = \frac{\text{speed of vehicle}}{2 \times \text{length of beam}}$$

By assuming a solution of the form:

$$y = f(t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

We can, by substitution of an appropriate expression for α as a function of f(t), derive an ordinary differential equation of the form:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\,\Omega \frac{df(t)}{dt} + 4\,\pi^2 N_o^2 f(t) = \frac{Mg}{\beta} \sin 2\pi nt$$

The coefficients of this equation are not constants but are a function of the position of the load on the span, and consequently a function of time, as follows:

$$\Omega = \frac{2\pi \left(n_b + n \frac{M}{M_G} \sin 4\pi nt\right)}{\left(1 + 2\frac{M}{M_G} \sin^2 2\pi nt\right)}$$ The "equivalent damping"

$$N_o = n_o \sqrt{\frac{M_G}{M_G + 2M \sin^2 2\pi nt}}$$ The "equivalent natural frequency"

where n_o = unloaded natural frequency

and $\beta = 1 + 2 \frac{M}{M_G} \sin^2 2\pi nt$ The "equivalent" total mass factor

An exact solution of this equation can be obtained by the use of infinite series, but fortunately there is no need to do this for the purposes at hand.

Let us consider the actual amount by which these coefficients vary for the range of modern highway bridges. To to this we need to have some idea of the typical dynamic parameters of these structures. Figure 2 shows the typical variation of the weight per foot, the centerline moment of inertia, and the dead load to live load ratio for highway bridges for spans from 20 to 300 feet. These curves were developed by preliminary designs for two lane structures with H20-S16 loadings, according to usual AASHO specifications. The effective moment of inertia was based on an allowance for composite action of roadway slab where appropriate (2). The corresponding parameters for railway bridges taken from Inglis's work are also shown to point out the fact that, although the investigations of the dynamics of railway bridges are fruitful sources of insight into the highway-bridge problem, they must be carefully interpreted due to the great difference in the dead load to live load ratio.

The resulting natural unloaded and loaded frequencies are shown in Figure 3, which also shows an estimated damping factor. The frequencies shown by these curves are merely indicative of average values for each type of bridge. However, it will be noted that the abrupt discontinuities in the curves at which a change in type occurs do not cause changes of frequency of more than about 20 percent. Of further significance is the fact that the loaded frequencies do not differ appreciably from the unloaded values.

The estimated damping factor ρ, the ratio of successive residual deflections, is quite frankly an educated guess, since little data is available on this problem. It was arrived at by a study of the variation of damping in railway bridges reported by Inglis, taking particular note of the fact that much of the high damping for short span railway bridges was found to result from the friction of the track on the ballast, a factor completely lacking in highway bridges. A few spot checks were made on this curve with

results which indicate it is of the correct order of magnitude.

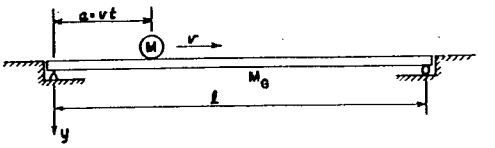


Figure 1. Smoothly rolling mass on a beam of uniform cross-section.

Returning now to our equation of motion for the case of the smoothly rolling load, we will use these estimated dynamic characteristics to evaluate the range of variation of the equivalent damping Ω, the equivalent natural frequency N_o, and the equivalent mass factor, β.

Figure 4 indicates the results of studies of a 20-foot span, such a short span being most sensitive to these variations. It will be noted that the effect of the second term of the equivalent damping factor is to increase the damping as the load moves toward the center of the span, absorbing energy by participating in larger oscillations, and then decreases the damping as it leaves the span by feeding energy back into the structure. It will also be noted that the effect on the equivalent natural frequency for this span is quite large, reducing it by some 30 percent when the load is at the middle of the span.

These coefficients do not vary over nearly so wide a range when the span length increases, as is shown by Figure 5. The equivalent damping not only decreases in absolute value but also the range of variation decreases rapidly up to spans of about 100 feet, after which both the absolute value and range are quite small. The variation curve

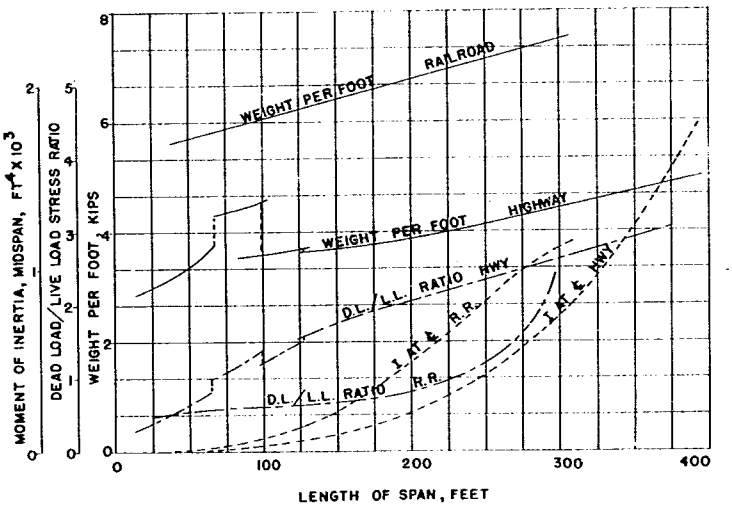


Figure 2. Design characteristics of steel highway and railway bridges.

for the equivalent natural frequency also reaches a rather stable value for spans above 100 feet. The discontinuities in this curve are due to taking successively larger live loads to represent the rolling mass M as the span increases.

Having established that the variation of the coefficients is important primarily for spans under 100 feet, we may now obtain an approximate solution for our equation for even a quite short span by considering the coefficients as constants for very short intervals of time.

Under these conditions, the solution of our equation within any such time interval is like the familiar solution for a one degree of freedom system with damping.

$$y = \left[e^{-\Omega t}(A \sin 2\pi N_o t + B \cos 2\pi N_o t) + C \cos 2\pi nt + D \sin 2\pi nt\right] \sin \frac{\pi x}{L}$$

Which may be rewritten, after ignoring a slight phase shift and modification of one term

by damping, which can be shown to be negligible for even high speeds and short spans, and by introducing proper boundary conditions, as:

$$y = \delta_{St.}\left[\frac{1}{1-(\frac{n}{n_o})^2}\right]\left[\sin 2\pi nt - e^{-\Omega t}(\frac{n}{n_o})\sin 2\pi N_o t\right]\sin\frac{\pi x}{L}$$

where $\delta_{St.}$ = Static deflection at a given position for the same position of the load.

The physical interpretation of this expression can be best studied by a reference to Figure 6, which depicts the results of applying this analysis to a 20-foot span with a single axle moving at 60 mph. In this figure we have plotted the centerline deflection against time. The shape of this curve for a slowly moving "crawl" load is shown by the dotted line.

The effect of the first term of the expression above is to produce a slight increase in the amplitude of the maximum deflection, in the amount of $\frac{1}{1-(\frac{n}{n_o})^2}$ of the static deflection, resulting in the dashed line curve. The effect of the second term is to add a free oscillation to the system to meet the starting condition of zero velocity, producing the solid line curve. The frequency and amplitude of this oscillation vary in accordance with the variations of Ω and N_o discussed above. The results in this case were computed by correction of these values every one half cycle, making ten steps of calculations to trace the behavior all the way across the span. These same oscillations are isolated in the lower part of the figure to show the effects of these variations.

Some conclusions as to the importance of smoothly rolling load effects can be drawn by a study of this figure plus Table 1. Since the effect of the equivalent damping during the period the load is approaching the center is always to reduce the free oscillations, the assumptions of constant damping is conservative. The effect of the variable frequency has little significance with regard to amplification of static deflections, since a small change of velocity can shift the peaks of the oscillations so that a maximum downward oscillation occurs as the load is near the center of the span. It is only the envelope of this oscillation which is important. The dynamic increments under these conditions are dependent on the aforementioned amplification factor and upon:

$$y = \delta_{st}(\frac{n}{n_o})\, e^{-2\pi\frac{n_b}{4n}}$$

These quantities are tabulated in Table 1 and it can be seen that the smoothly rolling effects of a single axle load are quite small for all except short spans.

TABLE 1

MAXIMUM DYNAMIC INCREMENTS FOR SINGLE AXLE SMOOTHLY ROLLING LOADS

Span ft.	$\frac{n}{n_o}$	$e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\eta_b}{n}}$	Dynamic Increments Free Oscillations	Forced Component %	Totals
20	0.101	0.690	6.9	1.02	7.9
50	0.0937	0.755	7.1	0.8	7.9
100	0.0809	0.800	6.5	0.6	7.1
200	0.0652	0.774	5.0	0.4	5.4
300	0.0553	0.668	3.7	0.3	4.0

EFFECTS OF VEHICLE SPRINGING

The previous discussion of the dynamic effects due to a smoothly rolling load gives results which are in some respects more severe and in other respects less severe than

when the effects of vehicle springing are included. Spring mounting of the load has three important effects on the response of the structure: (1) if the load enters the span with its springs in the equilibrium position, it may be set into motion by the vibrations of the structure, absorbing some of the energy; (2) if the load enters the span with its springs in any position other than that of equilibrium, the potential energy thus available will be partly transmitted to the structure, adding to the effects of the smoothly rolling load; (3) the presence of the spring-borne load changes the frequency of the system and provides a second point of energy dissipation if heavy damping is present in the spring system.

Before discussion of how these effects are produced, it is necessary to select some typical vehicle characteristics for study and to establish the range of variation of these characteristics which are of importance.

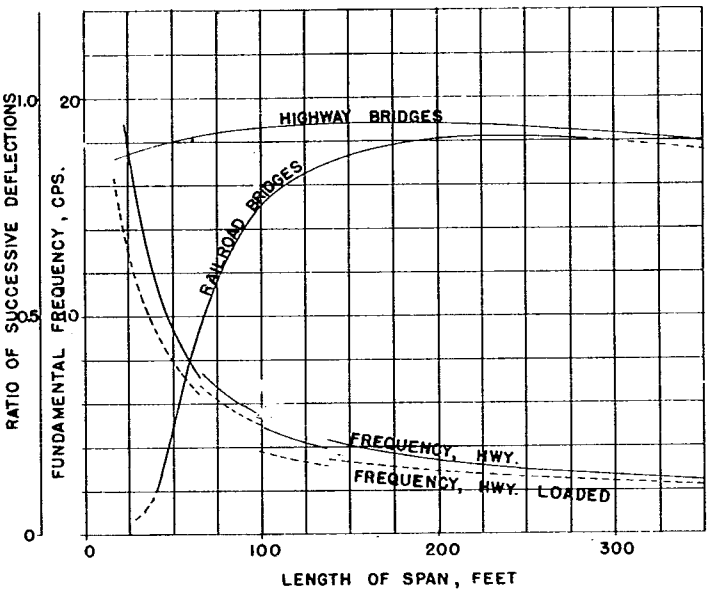


Figure 3. Dynamic characteristics of highway bridges.

Since we are ultimately concerned in this study with dynamic effects significant from a design standpoint, we will confine our interest to those types of vehicles which can produce maximum live load stresses; namely, the heavy truck and truck-trailer combinations. We shall exclude vehicles of extreme axle weights or special equipment which would travel under permit and, hence, supposedly under controlled conditions. Information on this problem is scattered and incomplete and the best that can be offered is the following estimate for axles corresponding to an H20-S16 loading:

Sprung weight per wheel	12,000 lb.
Unsprung weight per wheel	4,000 lb.
Spring constant per wheel	2,000 lb. per inch
Spring damping factor	0.7 (Ratio of residual oscillations, equivalent viscous)
Force to initiate spring action	1,600 lb. per wheel
Natural frequency of spring mass on springs	1.28 cps.

Since the tires of the vehicle also have spring characteristics which may be involved, it is well to indicate average values for these (for the same H20-S16 axle):

Tire spring constant	21,400 lb. per in.

Tire damping constant	0. 6 (greatly variable)
Natural frequency of unsprung mass on tires	7. 20 cps.
Natural frequency of total mass on tires	3. 60 cps.

It must be emphasized that considerable range for all of these factors must be anticipated, particularly when such matters as the possibility of resonance with the structure are considered.

Let us now consider the beneficial effects of vehicle springing for the case where the load comes on to the span in the equilibrium condition. In this event, the vehicle will act somewhat as a dynamic vibration absorber. Inglis has shown, in his work on railway bridges, that a good approximation of this effect can be obtained by mounting this spring-borne mass at the center of the bridge in a stationary position. For the effect of springing of the vehicle upon the oscillations induced in highway bridges, we can make a similar approximation by considering a simple two degrees of freedom system in which one mass is the mass of the girder plus the unsprung weight and the other mass is that of the sprung weight.

Now assume that the structure has begun to oscillate in its own fundamental frequency due to a rolling load entering the span. Initially the springs of the vehicle will remain locked and the load will follow the structure since at the end of the bridge the amplitudes of the fundamental mode vibrations are small and produce small accelerative forces. At any position of the load along the span, maximum value of these forces may be expressed approximately as:

$$\text{Force} = M\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{\text{max.}} = Me^{-2\pi n_b t} 4\pi^2 n_o^2 \left(\frac{n}{n_o}\right) \sin\frac{\pi x}{L}\left[\delta st\right] \quad \text{or,}$$

neglecting damping,

$$\text{Force} = M\left[4\,\delta st\,\pi^2 n_o^2 \left(\frac{n}{n_o}\right)\right] \sin\frac{\pi x}{L}$$

That is, the accelerations to which the load is subject are the maximum accelerations of the structure at its centerline multiplied by the factor $\sin\frac{\pi x}{L}$. Spring action will not be initiated until this product equals the force necessary to overcome friction.

Based on the average dynamic characteristics of structures and vehicles presented above, the significance of this will be found by inspection of Table 2. The results of this calculation for the assumed spring initiation force of 1, 600 lb. shows that the free oscillations of the spans are far too mild to bring the springing into play except for the short spans under about 40 feet. Even if a low value of the force is taken, say 240 lb. or 2 percent of the sprung mass, the effect is still nonexistent except for spans under 100 feet.

For these short spans where spring action is initiated, the system may be idealized as shown in Figure 7. The symbols used in this figure are those common in dynamic theory, except for the little link "F", which represents the frictional force in the springs which keeps them locked until the acceleration forces are large enough to initiate spring movement. This is a rather incomplete analogy of the Coulomb type friction damping, but will serve its purpose for our present problem.

Initially, both masses will oscillate together as a single degree of freedom system. At some instant of time "a", the link F is broken, after which the system behaves as a two degree of freedom system. The displacements and velocities of the two masses at the instant "a" determine what happens during this second phase. The general solution for the two degrees of freedom system without damping in terms of the generalized coordinates q_1 and q_2 is:

$$q_1 = A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + B_1 \cos(p_2 t + \alpha_2)$$

$$q_2 = A_2 \cos(p_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(p_2 t + \alpha_2)$$

where p_1 and p_2 are the two real positive solutions of the frequency equation derived from Lagrange conditions,

$$M_G M_p^4 - \left[(M + M_G) K_s + M K_G\right] p^2 + K_s K_G = 0$$

and the constants A_1, A_2, B_1, B_2 are determined from the boundary condition with respect to time. For example, if we consider a span of 50 feet and the effects of a single 32,000 lb. axle, of which 24,000 is sprung weight, we have:

$$M = \frac{24000}{g} = 747 \text{ slugs} \qquad M_G = \frac{16700 + 8000}{g} = 5430 \text{ slugs}$$

$$K_s = 2(12)(2000) = 4.8 \times 10^4 \text{ lb./ft.} \qquad K_G = 5.58 \times 10^6 \text{ lb./ft.}$$

By substitution of these values in the frequency equation we find that:

$$p_1^2 = 65 \quad p_1 = 8.04 \qquad f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = 1.28 \text{ cycles per second}$$

$$p_2^2 = 1037 \quad p_2 = 32.1 \qquad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 5.12 \text{ cycles per second}$$

TABLE 2

POSITION OF LOAD IN SPAN TO INITIATE SPRING ACTION

Based on a Sprung Mass of 12 Kips per wheel

Span	Static Deflection 64k Load	Natural Frequency n_o	Centerline Maximum Accelerations	Maximum Centerline Force/Wheel	Position as Fraction of Length to Initiate Spring Action	
					F=1,600 lb.	F=240 lb.
ft.	ft.	cps.	ft/sec^2	lb.		
20	0.0120	21.75	22.40	8,340	0.061	0.0092
50	0.0115	9.38	3.78	1,410	No action	0.055
100	0.0123	5.43	1.17	436	"	0.186
150	0.0119	4.01	0.54	201	"	No action
200	0.0119	3.37	0.37	138	"	"
250	0.0117	2.96	0.27	101	"	"
300	0.0113	2.66	0.16	60	"	"

Let us now assume that the spring frictional forces are released as the structure reaches the peak of a downward oscillation at the instant of time "a". This will impose boundary conditions with respect to time on the two degree of freedom system as follows, introducing a new variable t' which is the time after instant "a". When t' = 0; q_1 = amplitude of the free oscillation of the structure, D

$$D = \delta_{1\,\text{Kip}} (\text{Load}) \left(\frac{n}{n_o}\right) = 0.000179\,(32)\,(0.094) = 5.38 \times 10^{-4} \text{ ft.}$$

$$q_2 = 0$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$$

The resulting motion is governed by the following equations, and is presented graphically in Figure 7.

$$q_1 = D\left[-0.012 \cos(8.04t') + 1.012 \cos(32.1\,t')\right]$$

$$q_2 = D\left[-1.077 \cos(8.04t') + 1.077 \cos(32.1\,t')\right]$$

The oscillations of both the vehicle and the structure now consist of two superimposed

sinusoidal vibrations, the periods of which correspond closely to the natural periods of structure and vehicle. It can be seen that if no damping is present in the vehicle springing, no beneficial effect is produced on the oscillations of the structure. The more-complete treatment of the problem, using equivalent viscous damping to approximate the Coulomb friction effects, yields equations nearly identical to those above, except that each term is modified by a time decay function and a small phase angle is introduced as follows:

$$q_1 = D\left[-0.012\,e^{-0.425t'}\cos(8.04t'-\alpha_1) + 1.012\,e^{-0.645t}\cos(32.1t'-\alpha_2)\right]$$

$$q_2 = D\left[-1.077\,e^{-0.425t'}\cos(8.04t'-\alpha_1) + 1.077\,e^{-0.645t}\cos(32.1t'-\alpha_2)\right]$$

where $\alpha_1 = 3.03$ deg.
$\alpha_2 = 1.15$ deg.

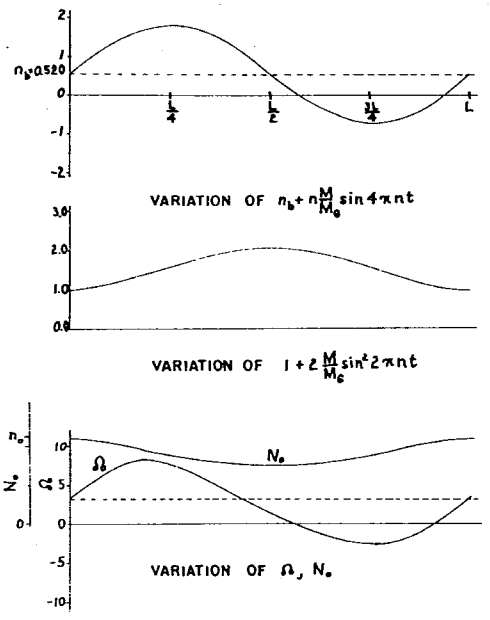


Figure 4. Variation of equivalent damping and frequency of 20-ft. span with 60 mph. load.

The results of these effects upon the centerline deflection of the structure are depicted in Figure 8. As can be seen, the number of oscillations which take place while the deflection is near a maximum is small for these short spans in which spring action can be initiated, and consequently, the reduction of amplitude of the oscillations with time due to damping is of little importance.

If we now consider what takes place when the springs of the vehicle are compressed or the vehicle is oscillating as the load enters the span, we will find an entirely different situation. As regards the length of span in which this effect will be important, we must consider spans for which the natural frequency of the structure will be close to the natural frequency of the load on its springs, since this will permit a resonance condition loading to large amplitudes.

Suppose that we take the same single axle load of 32,000 lb. as before and select a span as near the same natural frequency as that of the sprung mass as possible. Now, for the average vehicle and bridge characteristics assumed in this discussion, the longest spans considered do not have natural frequencies below 2 cps., hence, complete resonance is not possible. If we presume that the vehicle frequency may go as high as 1.5 cps. and that a structure of 200-foot span may have a frequency of as low as 2 cps. we will be about as close to resonance as we can get.

Let us further assume that the cause of the initial oscillation of the load, whether it be due to deck roughness, or to some type of self excited vehicle oscillation, shall continue to supply the energy necessary to keep the vehicle oscillating at constant amplitude. Under these conditions we have a problem almost identical to that of the hammer blow effect of locomotives on railway bridges. The one difference is that the magnitude and frequency of the pulsating force is independent of the speed of the vehicle. This leads to a peculiar paradox: The dynamic increment of deflection is greatest for a moderate speed, since this allows the pulsating force to apply more increments of energy to the structure.

The differential equation which governs the motion of the span under the influence of the primary component of the oscillating force is:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 4\pi n_b m\frac{\partial y}{\partial t} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2}{L}\left[\sin 2\pi nt \sin\frac{\pi x}{L}\right]\sin 2\pi Nt$$

where the notation is that used in the analysis of the smoothly rolling load except that:

N = Frequency of oscillation of sprung load.

The solution for this equation has been developed by Inglis and is of the form:

$$y = \frac{D_p}{2}\left[\frac{\cos\left\{2\pi(N-n)t - \Phi\right\} - e^{-2\pi n_b t}\left\{G\sin 2\pi n_o t + I\cos 2\pi n_o t\right\}}{\left\{\left[1-\left(\frac{N-n}{n_o}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2n_b(N-n)}{n_o^2}\right]^2\right\}^{1/2}}\right]\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$-\frac{D_p}{2}\left[\frac{\cos\left\{2\pi(N+n)t - \Psi\right\} - e^{-2\pi n_b t}\left\{H\sin 2\pi n_o t + J\cos 2\pi n_o t\right\}}{\left\{\left[1-\left(\frac{N+n}{n_o}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2n_b(N+n)}{n_o^2}\right]^2\right\}^{1/2}}\right]\sin\frac{\pi x}{L}$$

In which:

D_p = static deflection due to a load equal to pulsating force P applied at centerline.

$$\Phi = \text{Tan}^{-1}\frac{2n_b(N-n)}{n_o^2 - (N-n)^2}$$

$$\Psi = \text{Tan}^{-1}\frac{2n_b(N+n)}{n_o^2 - (N+n)^2}$$

The coefficients G, H, I and J of the free oscillations to satisfy initial conditions are:

$$G = \frac{N-n}{n_o}\sin\Phi + \frac{n_b}{n_o}\cos\Phi \qquad I = \cos\Phi$$

$$H = \frac{N+n}{n_o}\sin\Psi + \frac{n_b}{n_o}\cos\Psi \qquad J = \cos\Psi$$

A calculation of the constants and coefficients for spans of 20, 50, 100, 200, and 300 feet indicates: (1) the second term of the denominator is always negligible with comparison to the first; (2) the coefficients G and H are always small; and (3) the coefficients I and J are almost exactly equal to one since the phase angles Φ and Ψ have maximum values of about 5 deg. A summary of these results is given in Table 3. Because of these facts, a simplified solution of high accuracy can be written for the centerline deflection as:

$$y_{\mathbb{Q}} = \frac{D_p}{2}\left[C_1\cos 2\pi(N-n)t - C_2\cos 2\pi(N+n)t - e^{-2\pi n_b t}(K\sin 2\pi n_o t + L\cos 2\pi n_o t)\right]$$

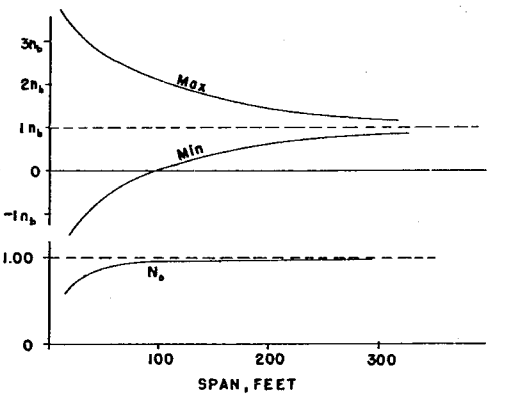


Figure 5. Range of variation of equivalent damping and equivalent frequency for spans 20 ft. to 300 ft.

In which: $C_1 = \frac{1}{1-\frac{(N-n)}{n_o}^2}$ $C_2 = \frac{1}{1-\frac{(N+n)^2}{n_o}}$

$K = C_1G - C_2H \qquad L = C_1 - C_2$

The values of these new constants and the frequencies and periods of the oscillations induced for the same series of spans are given in Table 4. The result of the superposition of these oscillations is shown graphically in Figure 8. In this figure, only the first few cycles of oscillations are shown for the free vibrations of the structure, since these are rapidly damped into insignificance with respect to the forced oscillations. It is best to look first at the effects on the 300-foot span, since here the repetitive "beating" pattern of oscillation has had time to fully develop. Under these conditions, the maximum dynamic affect of the pulsating load is produced by the superposition of the two main oscillations in phase, so that the amplitude is

$$y = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\, D_p$$

The value of this amplitude in terms of D_p is also given in Table 4. A better appreciation for the significance of this amplitude can be obtained by assuming that the pulsating force is some reasonable percentage of the total spring load on the axle, say 25 percent. The ratio of the dynamic increment to the total deflection for this assumption is given in the last column of Table 4. Thus, it is seen that the effect of a single oscillating load can be taken at its static equivalent for short spans but must be markedly

TABLE 3

FACTORS FOR CALCULATION OF EFFECTS OF OSCILLATING LOADS ON VARIOUS SPANS

Span	Structure		Moving Load					
	n_o	n_b	N	n(40 mph)	$1-\left(\frac{N-n}{n_o}\right)^2$	$\frac{2n_b\,(N-n)}{n_o^2}$	$1-\left(\frac{N+n}{n_o}\right)^2$	$\frac{2n_b\,(N+n)}{n_o^2}$
ft.								
20	15.00	0.520	1.5	1.465	1.000	0.0000	0.961	0.0137
50	7.05	0.157	1.5	0.586	0.983	0.0008	0.912	0.0018
100	4.79	0.063	1.5	0.293	0.938	0.0014	0.859	0.0021
200	3.09	0.036	1.5	0.147	0.807	0.0033	0.714	0.0040
300	2.55	0.038	1.5	0.098	0.696	0.0064	0.605	0.0073
200 Sp.	2.00	0.036	1.5	0.147	0.538	0.0122	0.320	0.0148

Span	Φ	Ψ	$\frac{n_b}{n_o}$	G	H	I	J
ft.	deg.	deg.					
20	0.00	0.82	0.0347	0.0347	0.0375	1.0000	0.9999
50	0.33	0.84	0.0223	0.0299	0.0265	1.0000	0.9999
100	0.40	0.65	0.0131	0.0149	0.0174	1.0000	0.9999
200	0.71	0.98	0.0117	0.0172	0.0209	0.9999	0.9998
300	1.38	1.75	0.0149	0.0282	0.0340	0.9997	0.9995
200 Sp.	2.58	5.28	0.0180	0.0486	0.0942	0.9990	0.9958

TABLE 4

AMPLITUDES AND FREQUENCIES DUE TO OSCILLATING LOAD

Span	C_1	C_2	(N-n)	(N+n)	K	L	$\frac{1}{2}(C_1+C_2)$	Percent δ st.
ft.								
20	1.000	1.040	0.035	2.965	-0.0043	-0.040	1.020	25.6
50	1.017	1.097	0.914	2.086	0.0013	-0.080	1.057	26.4
100	1.065	1.165	1.207	1.793	-0.0044	-0.100	1.125	28.1
200	1.240	1.401	1.353	1.647	-0.0080	-0.161	1.320	33.0
300	1.438	1.652	1.402	1.598	-0.0156	-0.214	1.545	38.6
200	1.858	3.125	1.353	1.647	-0.2002	-1.267	2.492	62.3

increased for longer spans. Moreover, present designs of highway bridges of spans of about 300 feet are getting quite close to the condition of resonance for oscillations of heavy vehicles, which would accent this effect greatly, unless some type of heavy damping is incorporated into the structure.

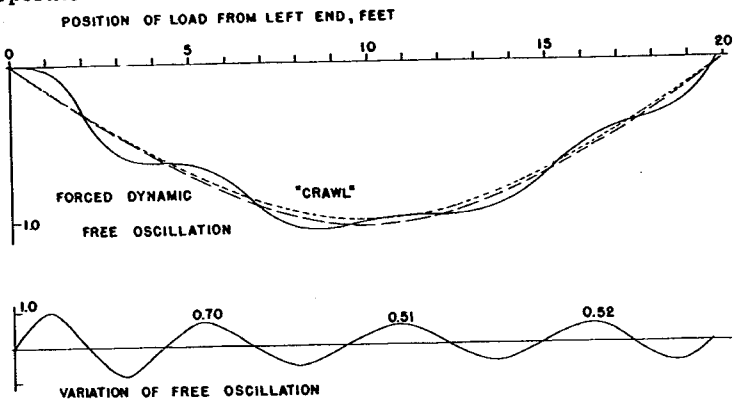


Figure 6. Response of a 20 ft. span to single axle at 60 mph.

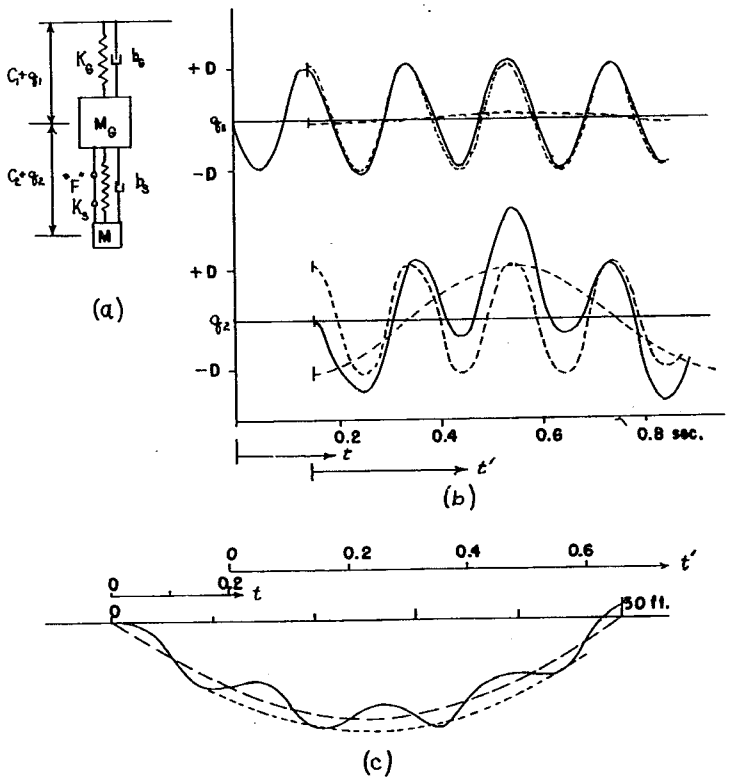


Figure 7. Effect of vehicle springing upon oscillation of the structure.

In closing this section it would be well to mention a study which was made of the possibility of induced oscillations of effective contact force between load and deck due

to differential deflections in the deck system for various positions of the load. It was found that it was quite possible to obtain a pulsating force of about 3 percent of the live load with a frequency dependent on the vehicle speed, hence the possibility of resonance exists. The dynamic increments of deflections produced under a condition of resonance with the springing effect of the vehicle included is about 30 percent of the total axle load.

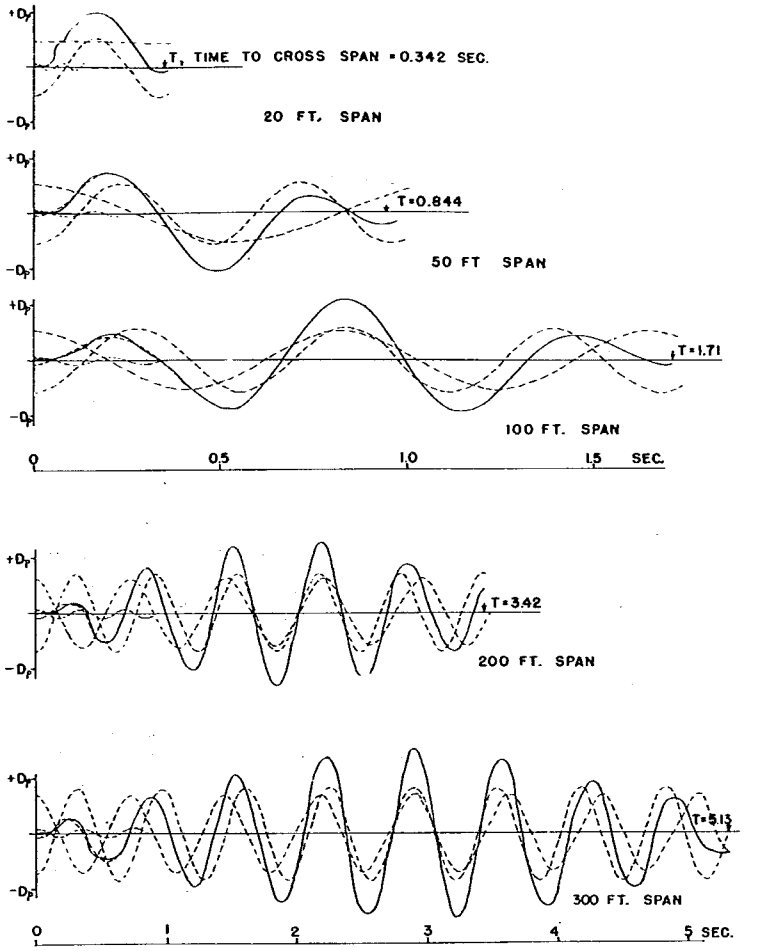


Figure 8. Oscillations produced in spans by oscillating load.

SHOCK EFFECTS OF DECK ROUGHNESS AND OBSTRUCTIONS

The presence of small irregularities in the running surface will have as their chief effect the production of vehicle oscillation and its maintenance as discussed above. Sharp defects or obstructions will have a more direct and somewhat different effect. A study was made of this effect by assuming the simplified system shown in Figure 9. Here the tire of the vehicle is replaced by a massless roller and an elastic spring, upon which rests the unsprung mass of the vehicle. The sprung mass of the vehicle is assumed to follow a horizontal path during the short interval that the wheel is passing over the obstruction, hence the force of the spring acting down on the unsprung mass can be represented as shown. The sinusoidal bump represents an idealized path of the hub of the wheel in passing slowly over a 1-by-2-inch board.

The analysis of this system has shown that the contact force between the wheel and the surface becomes negative at the rather moderate speed of 15 mph., that is, the

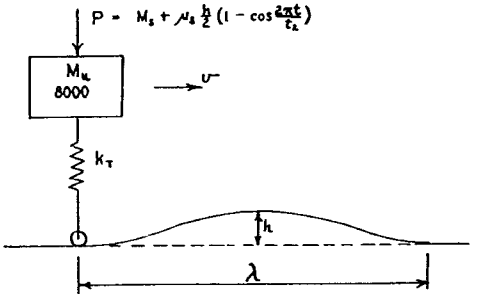


Figure 9. Simplified system representing vehicle passing over obstruction.

the tire leaves the surface and follows a trajectory in space. This is the case of most interest, since the shock on the structure which occurs as the wheel returns to the surface is much greater than the initial shock of contact with the bump.

What happens in this case is illustrated qualitatively by Figure 10. The effect of the initial shock is ignored, since it is rather small compared to what follows. As the wheel leaves the surface, the structure is without any load; hence it begins to return to a no-load position at its own natural frequency of vibration. If the wheel is out of contact with the surface for a time just equal

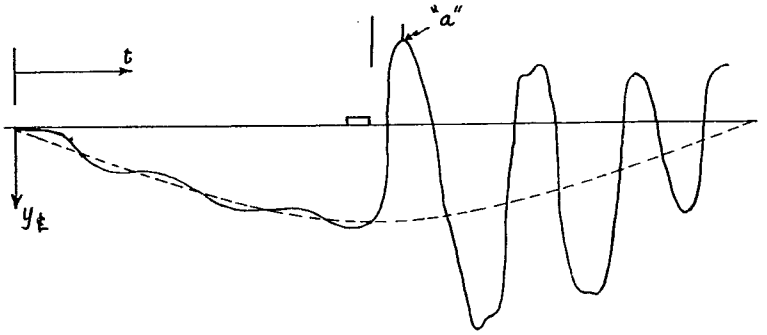


Figure 10. Qualitative behavior of structure as wheel passes over obstruction.

to half of a natural period for the structure, the maximum effect will be produced. This is possible for short spans, where this time is of the order of from 0.03 to 0.10 sec. and the vehicle would have moved only 1.60 to 6.00 feet. In this event, the structure would have just reached the maximum upward deflection represented by point "a" on the figure. At this instant we have the sudden application of the load, which is augmented by the downward velocity of the unsprung mass.

Under these conditions it would be possible to get the theoretical 100 percent impact of the classic analysis of a suddenly applied load, followed by oscillations of the structure and vehicle. Actual tests of a structure in which these conditions were approached gave an increment of about 60 percent.

It will be noted that the shock effects of single axles will be greatly reduced for spans beyond about 100 feet, since incomplete recovery of the structure to its no load position will have taken place. The natural frequency of heavy tires is of the order of 7 cps., giving a half period for the tire of about 0.07 sec., and the half period for the oscillation of the unsprung mass against the vehicle springs is about 0.195 sec., which would be the upper bound of the length of time the tire would not be in contact with the surface.

SIGNIFICANCE OF THE VARIOUS DYNAMIC EFFECTS IN DESIGN

The designer is faced with two problems in making proper allowance for the dynamic effects of live loads. The first of these is the establishment of a suitable allowance in terms of percentage of the static affect of the live load to provide a proper stress margin. The second one, not yet always recognized, is to prevent resonance effects which are dangerous to the structure, or are psychologically disturbing to the users.

In the previous portions of this discussion, we have considered separately the various

dynamic effects which can be produced by single-axle live loads. We must now relate this information to the first design problem, namely, the stress problem. We shall begin by recapitulation of the magnitude of these separate effects for spans of various lengths, as presented graphically in Figure 11.

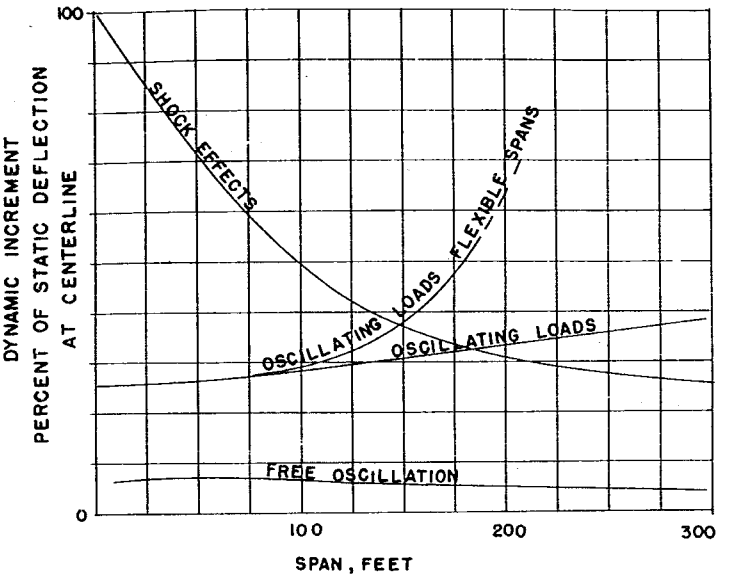


Figure 11. Variation of singl -axle effects with span length.

The "forced" oscillation due to the smoothly rolling load is so small as to be negligible for all spans. The free oscillation due to the smoothly rolling load decreases with span length due both to frequency relationship conditions and due to the fact that in the longer spans the damping will have had time to be effective. The effects of an oscillating single axle load become more and more pronounced as the frequency of the span approaches the frequency of the vehicle, a tendency which exists for either longer spans or more flexible structures.

Obstructions and sharp deck irregularities can produce large effects in short spans. The curve presented for this effect is intended to indicate maximum possible resulting deflections, because it will be later developed that its significance is not nearly as great as would appear.

Obviously one should not combine the percentages of each effect to get the total allowance or equivalent additional static load. Rather, the allowance must be based upon the following considerations: (1) the ratio of the maximum stress produced by a single axle load to the total design live load stress; (2) the probability of the simultaneous occurrence of effects, and the relative phase of the separate oscillations; (3) the possible beneficial effects of the presence of live loads other than the single axle being considered; and (4) the relationship of stress in the member to centerline deflection of the structure.

The first of these factors is perhaps the most important of all, as will be seen by reference to Table 5. The rapid decrease of the percentage of total live load furnished by any one axle for spans in excess of 100 feet greatly reduces the importance of the effects of oscillating loads and shock effects for these spans.

The matter of the probability of simultaneous occurrence of the various dynamics effects or of the superposition of the effects of a number of axles in phase is a most difficult problem to treat quantitatively on the basis of presently available data. It is related to the more general problem of the scientific treatment of safety factors as discussed by A. M. Freudenthal (3) and others. At present, the best which the writer can offer is based on estimated probability for each type of effect and the combination of

TABLE 5

RATIOS OF SINGLE AXLE TO FULL LIVE LOAD FOR VARIOUS SPANS
TWO LANE H20-S16 BRIDGES

Span	Composition of Assumed Full Live Load	Full Live Load Moment	Single Axle Moment	Ratio
ft.		ft. Kip	ft. Kip	
20	One 32 Kip axle per lane	320	160	0.500
50	One H20-S16 vehicle per lane	1,040	400	0.389
75	One H20-S16 vehicle per lane	1,940	600	0.309
100	Two H20-S16 vehicles per lane	2,690	800	0.298
150	640 lb. per ft. plus 18 Kip per lane	4,950	1,200	0.242
200	" " " " " " " "	8,200	1,600	0.195
250	" " " " " " " "	12,250	2,000	0.163
300	" " " " " " " "	17,100	2,400	0.140

these probabilities by the elementary algebraic methods.

To begin with we must recognize that the probability of ever getting full design live loads on a span decreases rapidly as the span length increases. Anyone who has had the experience of trying to find enough heavy vehicles to apply a full design live load to a structure will be convinced of this. Therefore, we should not be overly conservative with the manner in which we pile on dynamic effects, since we are probably already dealing with small probabilities.

If we assume that we have all truck traffic and that vehicles equivalent to the H20-S16 vehicle account for about 5 percent of this traffic, then the probability of full live load on both lanes of spans of various lengths is as given in Table 6.

TABLE 6

PROBABILITY OF FULL LIVE LOAD ON VARIOUS SPAN LENGTHS

Span	Probability p, in n Loadings
ft.	
20	0.0250
50	0.0125
100	0.0062
150	0.0042
200	0.0031
250	0.0025
300	0.0021

These probabilities are large enough to make certain that the structure will receive its full load at some time during its life. The value of this listing will come only in connection with combining these probabilities with those due to dynamic effects.

Here we must assume an order of magnitude of probability of reaching full design stress which is considered proper. Based on the use of allowable stresses in the AASHO specifications, a probability of not greater than 1×10^{-4} would appear to be generously adequate. This is admittedly the weakest point in our analysis, since we are mixing the concept of equal probabilities of failure with those of allowable stress. We must also assume some reasonable probabilities for superposition of individual axle effects.

Suppose that: (1) 0.25 is the probability that the free oscillations introduced in a structure by two successive axles will be in phase; (2) 0.25 is the probability that one axle will be oscillating with a pulsating force of 25 percent of static load; (3) 0.25 is the probability that the oscillations produced by two successive oscillating axles will be in phase; and (4) 0.01 is the probability that a fully loaded axle will strike an obstruction in each of two lanes at the same time.

Further assume that only one obstruction of importance exists in each lane and that the probability of its being within the midspan one fifth of the structure is 0.2. Based on these assumptions, we will make allowances at full effect for any combinations which give combined probabilities of greater than 1×10^{-4} and reject those which give less than this probability. For instance, suppose we wish to determine for various spans the number of axles which should be assumed to induce free vibrations of the

TABLE 7

VARIATION OF EFFECTIVE DYNAMIC INCREMENT OF CENTERLINE DEFLECTION FOR VARIOUS SPANS

Span	Free Oscillations Axles	Per Axle	Eff.	Shock Effects Axles	Per Axle	Eff.	Vehicle Oscillation Axles	Per Axle	Eff.	Combined Eff.	AASHO "Impact"
ft.	No.	%	%	No.	%	%	No.	%	%	%	%
20	1	6.9	3.4	1	100	50.0	1	25.6	12.8	53.4	30.0
50	2	7.1	5.5	1	70	26.9	2	26.4	21.0	29.6	28.5
100	3	6.5	5.8	1	50	14.9	2	25.0	14.9	16.6	22.2
150	3	5.8	4.2	1	25	6.0	2	24.6	11.6	13.0	18.2
200	3	5.0	2.9	1	25	4.9	2	22.0	8.5	9.5	15.4
250	3	4.3	2.1	1	25	4.1	2	21.6	7.1	7.8	13.3
300	3	3.7	1.5	1	25	3.5	2	19.3	5.4	5.9	11.8

structure which are in phase. The probability of getting any five axles so superimposed when full live load is on a 300 foot span is:

$$p = (0.0021)(0.25)^4 = 8.4 \times 10^{-6}$$

which would not be used. Three axles would give a probability of 1.32×10^{-4} which is within our limit. The increment of live load moment, based on full live load moment would be:

$$3(3.7)(0.140) = 1.55 \text{ percent}$$

For the superposition of oscillating load effects, the probability of four axles being in phase on this same span is:

$$p = (0.0021)(0.25)(0.25)^3 = 8.4 \times 10^{-6}$$

Thus, for this effect we must take only two axles, for which the probability is 1.32×10^{-4} and the dynamic increment is:

$$2(38.6)(0.140) = 10.8 \text{ percent}$$

For the possible shock effects we have the following probability that a fully loaded axle will strike an obstruction at the same instant in each lane near the center of the bridge when full live load is on the structure and that the resulting oscillations will be in phase:

$$p = (0.0021)(0.01)(0.2)(0.25) = 1.05 \times 10^{-6}$$

which is rejected.

Using only one axle, the resulting shock effect is:

$$1(0.25 \text{ percent})(0.140) = 3.5 \text{ percent}$$

It is also possible to combine these effects in such a way that the combined probability is greater than 1×10^{-4}, as long as any effects combined are not physically incompatible, as is the case with combining oscillating loads with obstruction effects where only two axles can be near the center of the span at one time. The following combinations are proposed: (1) free oscillations for one axle plus obstruction effect for one axle and (2) free oscillations for one axle plus forced oscillations for two axles.

Before indicating how this approach affects the establishment of live load dynamic allowances, let us consider the third problem mentioned above, namely, the beneficial effects of having the structure loaded. These are of particular importance in considering the effects of vehicle oscillations. An analysis made earlier indicated that the springing of vehicles had little benefit in reducing the forced oscillations of the structure. However, for those oscillations induced by bouncing vehicles, the presence of the vehicles on the span of nearly the same frequency would provide an excellent dynamic vibration absorber. This would only be true for spans beyond about 75 feet, because for shorter spans the induced vibrations have frequencies much higher than those of the oscillating vehicle. It will be assumed in what follows that this absorption of energy is roughly proportioned to the number of vehicles which are on span other than the one supplying the energy, with percentage reduction as follows: 10 percent at 75 feet, 25 percent at 150 feet, and 50 percent at 300 feet.

The result of applying these limiting probabilities and other modifications to the

single-axle live load effects shown previously in Figure 11 is given in Table 7. Here the percentage allowance based on total live load for each effect and for certain combinations is given. The currently used AASHO impact allowance formula is also shown for comparison.

The allowances computed by the above methods are based on the assumption that the increase in stress in any member is proportional to the increase of centerline deflection. This is a good approximation for simple spans composed of rolled shapes or plate girders of moderate length, in which the centerline bending moment controls the design. The assumption is also good for quarter point moment. The assumption is not nearly so good for shearing forces at the end of the structure as the length of the span increases. It is also questionable in its application to the members of the web system of a truss, in which the live load would be placed only on a portion of the influence line but for which any dynamic forces due to inertia of the span would be distributed throughout the span length in sinusoidal fashion. For instance, the oscillation of a structure due to a shock effect at the center of the span produces practically no shear at this point. The use of the concept of loaded length for such a member in determining the allowance for dynamic effects is also questionable, since the response of the member is primarily a function of the frequency of the supporting element of which it is a part, namely, the main truss.

In conclusion, it is suggested that the rational treatment of dynamic stress allowances for highway bridges should involve the following steps, some of which can be greatly aided by proper specification clauses and by prepared tables and charts for making estimates: (1) estimation of the fundamental frequency of vibration of the structure, taking into account the type of material, structural system and span length; (2) selection of the reasonable combinations of dynamic effects which are probable with full live load, considering span length, class of load and number of lanes; (3) computation of the probable percent increase of centerline deflection due to dynamic effects; (4) relating dynamic stress increase in each member to increase in centerline deflection; and (5) checking structure after completion of design for resonance and near resonance effects.

ACKNOWLEDGMENTS

The material of this paper is drawn from three sources: (1) a thesis written by the author in 1951 for the Division of Civil Engineering, University of California; (2) the research project on the San Leandro Creek Bridge conducted by the Institute of Transportation and Traffic Engineering of the University of California; and (3) the data collected by the Committee on Deflection Limitations of Bridges of the American Society of Civil Engineers, of which G. S. Vincent is chairman. The author gratefully acknowledges the encouragement and assistance of the many investigators with whom he has been associated in this work.

References

1. C. E. Inglis, "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges," Cambridge University Press (1934).
2. L. E. Vandegriff, "Vibration Studies of Continuous Span Bridges," Bul. 119, Engr. Exp. Station, Ohio State University.
3. A. M. Freudenthal, "The Safety of Structures," Trans. ASCE, V. 112, p. 125 (1947).

橋の衝撃係数に関する確率論的一考察

正員　小西一郎*
正員　山田善一**
正員　篠塚正宣***
正員　小堀為雄****

STOCHASTIC STUDY ON COEFFICIENT OF IMPACT IN DESIGN OF HIGHWAY BRIDGE

By Dr. Eng., Ichiro Konishi, C.E. Member, Yoshikazu Yamada, C.E. Member, Masanobu Shinozuka, C.E. Member and Tameo Kobori, C.E. Member

Synopsis: Dynamic behaviors of a bridge under the several pulsating forces show the resultant vibration as the results of combination of each individual vibration. In such case, the phase differences of fundamental vibrations from each other have a certain influence upon the resultant oscillation of the bridge. Therefore, in this paper, the authors consider that these phase differences occur *at random* under the various traffic conditions, and they stochastically clarify that the values of the impact coefficients are reduced successively according to the loading length.

要旨　橋に周期力をもついくつかの荷重が載荷される場合，橋の振動はそれぞれ個個の荷重による振動の合成振動として表わされる。ここで問題となるのは，それぞれ個個の振動の位相差によつて橋の合成振動の振動性状が異なることである。本研究では橋に作用する周期的荷重の位相差が at random であることに注目してこの位相差を確率変数と考え，確率論の立場より衝撃係数が橋の載荷長によつて逓減されることを示そうとするものである。

1. 緒　　言

橋の衝撃係数は通常スパン長による逓減関数として与えられる。この根拠については従来多くの理論的，実験的研究が行われているが，本研究では振動学を加味した確率論の立場から橋のスパン長と衝撃との関係について基礎的研究を行つた。まず，われわれは橋の載荷荷重を桁に静力学的影響をおよぼす静的力 P と動力学的影響をおよぼす周期力 $P_0 \sin(\omega t+\delta_i)$ の 2 つの力からなるものと考え，桁は静タワミの外にこの周期力によつて強制振動を生ずるものとする。さて，このような荷重が数個同時に桁に作用するとき桁はそれぞれ個個の周期力による振動の合成振動をなし，その振幅，すなわち桁の動タワミは，周期力 $P_0 \sin(\omega t+\delta_i)$ の位相差 δ_i によつて異なるものと考えられる。本研究ではこの位相差は，個個の周期力によつてなんら拘束されることなく at random に取り得ると考えて考察を行つている。すなわち，位相差 δ_i を確率変数と考え各スパン長に対するある動タワミの生ずる確率を求め，逆にある確率となるような各スパン長に対する動タワミを算出し，これと静的力による静タワミとの比を衝撃係数と考え，この衝撃係数が載荷長によつて逓減する事の妥当性について論じたものである。

2. 本研究に用いた仮定

われわれは橋および載荷荷重について次のような仮定を用いた。この仮定については多少の問題点があり今後改良の余地が多いと考えられるが研究の第1段階としては許されるであろう。

（1）　橋を等断面をもつ単純支持バリとする。

（2）　載荷荷重の重量は走行荷重の質量による慣性力を無視し単に力 P とおき，個個の荷重について一定とする。

（3）　載荷荷重長 s は一定とし，10 m とする。また，s の中央 $(s/2)$ に全重量が載荷されるものと考える。

（4）　荷重は橋の全載荷長に満載されるものとする。すなわちスパン 20 m の橋には2台，スパン 30 m の橋には3台，……載荷されることになる。

* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室，** 京都大学助教授，工学部土木工学教室
*** 京都大学大学院学生，工学研究科土木工学専攻（米国コロンビヤ大学留学中），**** 神戸市調査室

（5） 荷重は載荷された位置で橋桁に対し，自重 P の外に周期力 $P_i=P_0\sin(\omega t+\delta_i)$ をおよぼすものとする。つまり走行荷重による動的作用は一応この周期力でおきかえられると考える。ここに $P_0=\alpha P=$constant とし，α は周期力の最大値 P_0 と荷重の自重 P との比であり，いいかえれば，自重の α% が橋桁に動的作用をおよぼすと考える。ここでは個個の荷重について α は一定であるとする。

（6） この周期力 $P_0\sin(\omega t+\delta_i)$ の振動数 ω は個個の周期力について一定とし，位相差 δ_i は走行荷重が橋を通過する際の種種の条件，すなわち，初期条件，橋面の凹凸，荷重そのものの振動性状などにより at random であると考えるものとする。

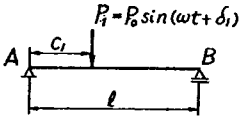
3. 橋桁のタワミ振動

2. の仮定に従えば，荷重の橋桁におよぼす力 P_i' は

$$P_i'=P+P_i=P+P_0\sin(\omega t+\delta_i)=P+\alpha P\sin(\omega t+\delta_i) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots) \tag{1}$$

式（1）の第1項の P は静荷重を表わし，第2項は橋に振動を生ぜしめる強制力である。まず，第2項の周期力 $P_0\sin(\omega t+\delta_i)$ によつて生ずる橋桁の強制振動について考察を進める。一般に単純支持された橋桁の振動は線型微分方程式で表わされる。このとき，橋桁スパン中央断面 c（以下スパン中央点 c と書く）の振動振幅は個個の周期力 $P_0\sin(\omega t+\delta_i)$ による振幅の合成で求められる。いま 図—1 のようにある1個の周期力 $P_1=P_0\sin(\omega t+\delta_1)$ が支点 A より距離 c_1 なる位置に作用する場合，一般座標 q_n を用いて，タワミ曲線を，

図—1



$$y=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2}$$

と表わす。このとき，一般力 Q_n は，

$$Q_n=P_1\sin\frac{n\pi c_1}{l}=P_0\sin\frac{n\pi c_1}{l}\sin(\omega t+\delta_1) \tag{3}$$

となり，式（3）を用いると一般座標 q_n に関する橋桁の運動微分方程式はつぎのように表わされる。

$$\ddot{q}_n+2\beta_n p_n\dot{q}_n+p_n^2q_n=\frac{2P_0g}{w}\sin\frac{n\pi c_1}{l}\sin(\omega t+\delta_1) \tag{4}$$

ここに，β_n：減衰定数，p_n：橋桁の n 次円振動数，g：重力加速度，w：橋桁の重量，l：載荷長

式（4）の特解として強制振動の項のみを取り，一方 q_1 にくらべて $q_2, q_3,\cdots\cdots q_n$ は小さく，本問題ではとくに桁のタワミについて考察を進めるものとして，q_2 以下を省略し式（2）は，

$$y=q_1\sin\frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

となり，q_1 はスパン中央点 c のタワミとなるから，ここでは，$q_1=y_c$ と書く。さて，式（4）の特解は，

$$y_c=q_1=\frac{2P_0g\sin\frac{\pi c_1}{l}}{w\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4\beta^2p^2w^2}}\sin(\omega t+\varphi_1)=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\sin\frac{\pi c'}{l}\sin(\omega t+\varphi_1) \tag{6}$$

ここに，

$$\frac{1}{\alpha'}=\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2+4\beta^2\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} \qquad \varphi_1=\delta_1-\gamma \qquad \gamma=\tan^{-1}\frac{2\beta\left(\frac{\omega}{p}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}=\text{constant}$$

ここで，δ_{st} は荷重 P がスパン中央点 c に載荷したときの載荷点の静タワミを表わす。以上は，周期力が1個載荷される場合であるが，さらに，2 個以上の周期力 $P_1(=P_0\sin(\omega t+\delta_1))$ $P_2,\cdots\cdots P_n$ によるスパン中央点 c の動タワミ y_{cn} は "重ね合わせの原理" を用いて，次のように表わされる。

$$y_{cn}=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\sum_{i=1}^{n}a_i\sin(\omega_i+\varphi_i) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots n) \tag{7}$$

ここに，　$\varphi_i=\delta_i-\gamma=$random quantities,　　$a_i=\sin\frac{\pi c_i}{l}$

式（7）は，橋桁の合成振動の式である。

4. 確率論的考察

式（7）に示されているようにスパン中央点 c の動タワミは $y_{cn}=f(t,\varphi_i)$ である。いま，ある時刻 t_1 について

のみ考慮すれば $y_{cn}=f(a_i,\varphi_i)$ となり，スパン中央点 c の動タワミ y_{cn} は φ_i のみの関数となる。ところで，個個の周期力の位相差 δ_i の分布は仮定（6）により，at random であると考えられ，一方式（6）から r は constant であるので φ_i の分布もまた at random である。ゆえに，われわれは φ_i を確率変数としてスパン中央点 c の動タワミ y_{cn} の確率分布を求めることができる。その分布の範囲はもし位相差 $\varphi_1=\varphi_2=\cdots\cdots=\varphi_i=0$ であれば，それぞれの合成振動である y_{cn} は最大値として $\left|\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\Sigma a_i\right|$ を示すが，φ_i は random quantities であることからして，実際の合成振動振幅はこの値より小さい。

ここで新たに媒介変数 r を用い，この r を式（8）のように定義する。

$$\Sigma a_i \sin(\omega t+\varphi_i)=r_i\sin(\omega t+\theta) \quad \cdots\cdots(8)$$

式（8）の $a_i\sin(\omega t+\varphi_i)$ を正弦成分とするベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とする。すなわち，

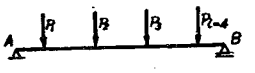
$$|\boldsymbol{a}_i|=a_i, \qquad \text{Arg. } \boldsymbol{a}_i=(\omega t+\varphi_i)$$

である。図—2 のように $\boldsymbol{a}_i$ の和を $\boldsymbol{r}_i$ とすると，

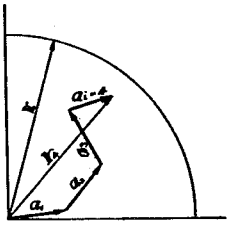
$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{a}_i \quad \cdots\cdots(9)$$

となり，$r_i=|\boldsymbol{r}_i|$ である。

図—2



このような r を用いてベクトル表示すればスパン中央点 c の動タワミ y_{cn} は r_i に変換されることになる。ここで r_i が任意の r より小さい確率 $P_r(r_i<r)$ を求めれば，これはまた，周期力 $P_1\cdots\cdots P_n$ によるスパン中央点 c の最大タワミ $_{max.}y_{cn}$ が任意の $_{max.}y_c$ より小さい確率となる。ここで，$_{max.}y_{cn}$，$_{max.}y_c$ の suffix $_{max.}$ としたのは，y_c は時間とともに変化する値でそのうちの最大値，すなわち，式（7）の右辺 $\sin(\omega t+\varphi_i)=1$ となるようなスパン中央点 c の動タワミという意味である。



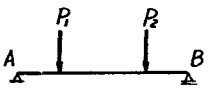
さて，確率 $P_r(r_i<r)$ を求めるのであるが，われわれは計算の便宜上橋桁のスパン長さに従つて次の三種の計算方法を用いることにする。（1）幾何学的関係式（l=20～30 m）（2）Kluyver の分布式（l=40～60 m）（3）Rayleigh の式（l=70～120 m），これらの方法の詳細については 5. で説明する。

5. 確率 $P_r(r_i<r)$ の計算式

（1） 幾何学的関係式

スパン l=20～m30 m の橋については簡単な幾何学的関係より求めることができる。

図—3



（a） l=20 m　仮定 (1)，(2)，(3)，(4) に従えば，スパン 20 m の橋には 2 個の荷重が載荷され，図—3 に示すように，周期力として $P_1[=P_0\sin(\omega t+\delta_1)]$，$P_2[=P_0\sin(\omega t+\delta_2)]$ が作用し，スパン中央点 c の振動振幅を表わす式（7）の Σ に関する項をベクトル表示すれば図—3 のようである。すなわち，

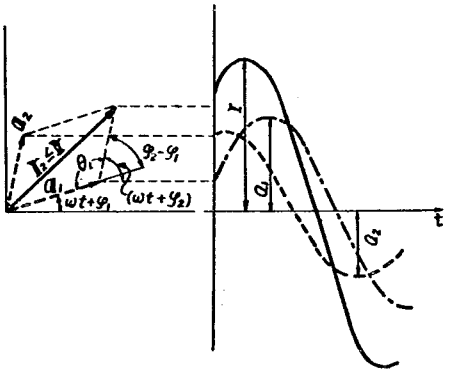
$$\left.\begin{aligned} a_1\sin(\omega t+\varphi_1)&=a_1\\ a_2\sin(\omega t+\varphi_2)&=a_2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(10)$$

のように表わされ，これを重ね合わせると，

$$a_1\sin(\omega t+\varphi_1)+a_2\sin(\omega t+\varphi_2)=r\sin(\omega t+\gamma)$$

ここに，

$$\tan\gamma=\frac{a_1\sin\varphi_1+a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1+a_2\cos\varphi_2}$$



これより r を求めれば，

$$r^2=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\varphi_2\sim\varphi_1)=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta_1 \quad \cdots\cdots(11)$$

ここに，$\theta_1=2\pi-(\varphi_2-\varphi_1)$。

式(11)より，r_2 が任意の r より小さい確率，いいかえれば，図—3 において任意の半径 r 内に合ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ の存在する確率は，

$$P_r(r_2<r)=\frac{1}{2\pi}\int d\theta_1=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{a_1^2+a_2^2-r^2}{2a_1a_2} \quad \cdots\cdots(12)$$

196

ただし，

$$P_{r(r_2<r)}=1\begin{cases}\dfrac{a_1^2+a_2^2-r^2}{2a_1a_2}<-1\\ r>(a_1+a_2)\end{cases}\qquad P_{r(r_2<r)}=0\begin{cases}\dfrac{a_1^2+a_2^2-r^2}{2a_1a_2}>1\\ r<(a_1\sim a_2)\end{cases}$$

であり，これはまた，4. でも述べたように周期力による動タワミ y_{c2} の確率でもある。

(b)　$l=30$ m　同様にスパン 30 m の橋には，3個の荷重が載荷されるものとする。このとき，確率分布 $P_{r(r_3<r)}$ は式 (12) を拡張して，

$$P_{r(r_3<r)}=\frac{1}{4\pi^2}\iint d\theta_1\ d\theta_2$$

$$=\frac{1}{\pi^2a_1a_2}\int_{(a_1-a_2)}^{(a_1+a_2)}\frac{r_2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1^2+a_2^2-r_2^2}{2a_1a_2}\right)}}\cos^{-1}\frac{a_3^2+r_2^2-r^2}{2r_2a_3}\,dr_2\cdots\cdots(13)$$

をうる。

以上，式 (12)，(13) について，r に適当な数値を代入して，それぞれの r に対する確率 $P_{r(r_2<r)}$，$P_{r(r_3<r)}$ を数値計算により求めた。

(2)　Kluyver の分布式[1]

$l=40\sim60$ m の橋についても（1）の幾何学的関係を拡張すれば求められるが，計算が非常に複雑となる。

そこでこの種の問題については 1905 年 Pearson は確率モデルの一つとして，「Aが1点0から出発して直線的に距離 a を進み，そこで方向を勝手にかえて，第2の直線上を a だけ進む。Aはこの行動を n 回繰返す。n 回後出発点0から距離 r 内にAのいる確率を求む」という，いわゆる酔歩の問題を提案した。これに対し Kluyver は Bessel 関数の積分公式を用いて確率分布式 (14) を求めた。このモデルはわれわれの求めようとしている問題と一致している。すなわち，直線上を進む距離 a は式（7）の a_i にあたり，進む方向は $\sin(\omega t+\varphi_i)$ であり，at random である。われわれはスパン 40 m 以上についてつぎの Kluyver の確率分布式を用いることにする。

$$P_{r(r_i<r)}=\frac{1}{(2\pi)^{i-1}}\int\cdots\cdots\int d\theta_{i-1}\,d\theta_{i-2}\cdots\cdots d\theta_1$$

$$=r\int_0^\infty J_1(rt)J_0(a_1t)J_0(a_2t)\cdots\cdots J_0(a_it)dt\cdots\cdots(14)$$

ここに，$J_1(rt)$，$J_0(a_it)$ は Bessel 関数

われわれは任意の $r(=1.0\sim5.0)$ に対する $P_{r(r_i<r)}$ を図式解法にて求めた。なお，$J_{0(at)}$ は $J_{0(0)}=1$ から減幅する振動関数であり $at\sim0$ の近くが大きく i が大きくなるとその傾向が顕著となり，計算に好都合であつた。しかしわれわれがこれを $l=30$ m 以下の橋に適用するときは，J_0 の減衰が遅く図式解法で求めることは，計算に手数を要し，誤差も大きく，不可能であつた。

(3)　Rayleigh の式[2]

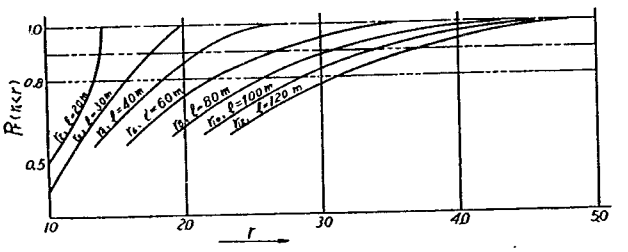
スパン 70 m 以上についても（2）の Kluyver の式を用いて同様に求められるが，多くの調和振動が合成された場合の合成振動振幅に関する確率分布式は

$$P_{r(r_i<r)}=1-\exp.\left(\frac{-r^2}{n_1a_1^2+n_2a_2^2+\cdots\cdots+n_ia_i^2}\right)\cdots\cdots(15)$$

で表わされることがすでに示されているので[2]，ここでは式 (15) を用いる。ただし，$n_1=n_2=\cdots\cdots=n_i=1$ である。なお，スパン 70 m で式 (14) と式 (15) の間には誤差はほとんど認められない。

以上の三種の方法で求めた r と $P_{r(r_i<r)}$ の関係を 図—4 に示した。

図—4　各スパン長さに対する確率 $P_{r(r_i<r)}$ と r との関係



6. 衝撃係数の逓減率について

2. 仮定 (2),(3),(5),(6) で仮定された n 個の荷重

$$P_i'=P+P_i=P+\alpha P\sin(\omega t+\delta_i) \qquad (i=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots n)$$

が橋に満載される場合，橋のタワミ曲線を $y=y_c\sin(\pi x/l)$ と仮定するとスパン中央点 c の静タワミ y_{scn} は次式のように表わされる。

$$y_{scn}=\delta_{st}\sum\sin\frac{\pi c_i}{l} \qquad (i=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots n) \cdots\cdots(16)$$

ここに，δ_{st} は静荷重 P が中央点cに載荷された場合の載荷点の静タワミである。c_i は支点Aよりそれぞれの荷重載荷点までの距離である。一方周期力による動タワミは式 (7),(8) より，

$$y_{cn}=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\sum a_i\sin(\omega t+\varphi_i)=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}r_i\sin(\omega t+\theta) \cdots\cdots(17)$$

いま，われわれは衝撃係数について論じているのでスパン中央点cの動タワミが最大となるような時刻 t_1 における動タワミを問題にする。このとき式 (17) は，　$\sin(\omega t_1+\theta)=1$ で，

$$\max y_{cn}=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}r_i \cdots\cdots(18)$$

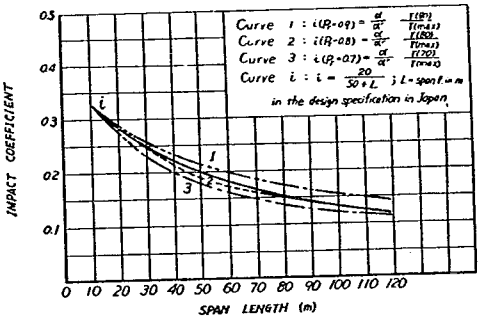
ところで，衝撃係数は動的倍率動タワミと静タワミの比で表わされるから

$$i=\frac{\max.\ y_{cn}}{y_{scn}}=\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{r_i}{\sum\sin\frac{\pi c_i}{l}} \cdots\cdots(19)$$

となる。さて，われわれは **5.** において各スパン長さに対する任意の r より r_i の小さい確率 $P_{r(r_i<r)}$ を求めた。この結果は 図—**4** に示されている。図—**4** において，例えば，スパン 30 m の橋で $P_{r(r_3<r)}=1$, $r=2.0$ というのは，この橋の動タワミに比例する変数 r_3 はすべて $r=2.0$ 内に含まれることを意味し，また，$P_{r(r_3<r)}=0.8$, $r=1.6$ ということは，この橋の動タワミに関する変数 r_3 の取り得る値の 80% は 1.6 内にふくまれ，これより大きい値の取り得る確率は 20% であることを意味する。いまわれわれは確率を 90%，80%，70% にえらびそれぞれの値に対する各スパンの r を求めこれを式 (19) の r_i に代入し，さらに鋼道路橋設計示方書にとられている逓減率と比較するために式 (19) の α/α' の値を $l=30$ m で示方書の衝撃係数と式 (19) より求めた衝撃係数 i と一致するようにえらんで，各確率における衝撃係数 i の値を求め 図—**5** に示した。

この 図—**5** より，橋に作用する周期力 $P_0\sin(\omega t+\delta_i)$ の位相差 δ_i を確率変数と考え，衝撃係数 i の確率を 90%，80%，70% とえらぶことによつて衝撃係数が橋の載荷長によつて逓減することがわかる。

図—5　鋼道路橋設計示方書の衝撃係数の逓減率との比較



7. 結　　語

以上，橋に作用する動的荷重の位相が at random であるという仮定のもとに，確率論的考察を行い，桁の動的倍率がスパン長さとともに変化することを明らかにした。もちろん この考察だけから橋の衝撃係数を決定することは不可能であるが，基礎的な考え方の一つとして考察を行つたものである。

参 考 文 献

1) 伏見康治："確立論及統計論", pp. 212 (昭 25)
2) Lord Rayleigh: "Theory of Sound", vol. 1 pp, 35～42.

(昭. 33. 1. 28)

Ib2

Brückenschwingungen unter Verkehrslasten

Vibrações nas pontes sob a acção de cargas móveis

Les vibrations dans les ponts soumis à des charges mobiles

Vibrations in bridges submitted to the action of moving loads

Dr-Ing. BRUNO BRÜCKMANN
Bundesbahnoberrat im Bundesbahn-Zentralamt
München

1. *Einleitung*

Bei der Überfahrt von Verkehrslasten über Brücken entstehen ausser den statischen Wirkungen aus ständigen Lasten, den jeweiligen Verkehrslasten und sonstigen Lasten auch noch Schwingwirkungen infolge des Bewegungszustandes und der Arbeitsweise der Verkehrslasten. Die Grösse dieser Schwingwirkungen ist abhängig von den schwingungstechnischen Eigenschaften des elastischen Bauwerkes je Art, Baustoff und Gewicht, von Bauart, Gewicht, Anordnung, Aufeinanderfolge, Geschwindigkeit und Schwingfähigkeit der Fahrzeuge, ferner von der Art und Grösse der Schwingerregungen, namentlich periodischer Art, während der Überfahrt. Die Gesamtheit aller dieser Einflüsse wird bei der Berechnung i.a. durch Vervielfachung der statischen Spannungen infolge der ruhenden Verkehrslasten mit «Schwingbeiwerten φ» berücksichtigt. Ihre — an sich komplexen — Grössen müssen möglichst treffend bestimmt werden, damit alle Beanspruchungen und Verformungen auch infolge der «Brückenschwingungen unter Verkehrslasten» mit Rücksicht auf die Betriebsfähigkeit und Wirtschaftlichkeit möglichst wirklichkeitsgetreu berechnet werden können. Bei der Vielfalt der Einflüsse folgen diese Schwingvorgänge sehr verwickelten Gesetzen. Nachstehend wird daher ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingvorgängen und Schwingbeiwerten bei erzwungenen Schwingungen infolge periodischer, ortsveränderlicher Erregungen in allgemeiner Form und mit dimensionslosen Grössen behandelt. Es beruht auf den gleichfalls kurz behandelten Gesetzen des Vertikalpendels und berücksichtigt die Masse der Brücke, die Masse und die Bewegung der fahrenden Verkehrslasten sowie die Federungs- und Dämpfungseigenschaften des gesamten Tragwerkes.

2. Die Brücke als mechanischer Schwingkreis

Bei einer Brücke sind Massen, Federn und Dämpfer in verwickelter Weise zu einem gedämpften mechanischen Schwingkreis mit vielen Freiheitsgraden zusammengeschaltet, der bei entsprechender Erregung zu freien und zu erzwungenen Schwingungen angefacht werden kann. Unter Schwingungen werden die den Gesetzen der Mechanik, insbesondere der «Kinetik» (1) folgenden, zeitlich veränderlichen Ausschläge a(t) der Spannungen und Verformungen der Federung oder der Bewegungen des Massenschwerpunktes um die zugehörige statische Gleichgewichtslage verstanden. Zu ihrer mathematischen Darstellung eignet sich als anschauliches Ersatzgebilde das einfache Vertikalpendel mit einem Freiheitsgrad, das mit dem ursprünglichen System in Federung und Eigenfrequenz übereinstimmen möge. Der Ersatzkreis besteht aus der massenlosen Feder c als Speicher für die potentielle Energie und dem angehängten Gewicht G mit der Masse $m = G/g$ als Speicher für die kinetische Energie und aus dem Dämpfer mit dem Widerstand ϱ. Seine ungedämpfte Eigenfrequenz

(2. 1) $f_o = \nu_o/2\pi$ in s^{-1} mit $\nu_o = 2\pi f_o =$ ungedämpfte Eigenkreisfrequenz folgt bei einer Amplitude a des Ausschlages entweder aus der Energiegleichung

(2. 2) $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (2\pi \cdot f_o)^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a^2$
oder aus der Kraftgleichung

(2. 3) $m \cdot a^2 \cdot (2\pi \cdot f_o)^2 = c \cdot a$ zu

(2. 4) $f_o = \nu_o / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{c/m}$ in s^{-1} (Hertz) .

Der Zusammenhang zwischen diesem Ersatzschwingkreis und der Brücke wird über die Eigenfrequenz und die Federkonstante der Brücke hergestellt. Denkt man sich ihre verteilte Elastizität und Massen in Teilfedern c_r und Teilmassen m_r in den Knotenpunkten r vereinigt, deren Auslenkungen y_r den statischen Durchbiegungen der Knoten infolge eines gegebenen Zustandes i mit den Knotenlasten $K_{ri} = m_{ri} \cdot g$ entsprechen, so ergibt sich nach Kull-Rayleigh aus der Energiegleichung für alle Knoten

(2. 5) $1/2 \cdot \Sigma (K_r y_r) = \frac{1}{2} \Sigma (K_r/g \cdot y_r^2) \cdot \nu_{oi}^2$

(2. 6) $f_{oi} = \nu_{oi} 2\pi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{g \cdot \Sigma (K_r \cdot y_r) / \Sigma (K_r \cdot y_r^2)}$.

als die ungedämpfte Eigenfrequenz der Brücke in Abhängigkeit vom beliebigen Lastzustand i. Hierfür lassen sich aus den

(1) Der Verfasser bezeichnet nach Klotter das gesamte Gebiet der Kräftelehre als «Dynamik» und unterteilt es in «Kinematik = Bewegungslehre ohne Kräfte, in «Statik» = Lehre von den ruhenden Kräften ohne Massenkräfte und in «Kinetik» = Lehre nur von den bewegten Kräften und Massenkräften aus Beschleunigungen und Verzögerungen und von den zugehörigen Schwingungen allein.

Einflusszahlen δ_{ik} die Durchbiegungen y_{ri} der Knoten r berechnen, wenn als Knotenlasten K_{ri} angesetzt werden
bei unbelasteter Brücke:
die Knotenlasten nur aus ständiger Last (g)

(2. 7) $$K_{ri} = K_{rg}$$

bei belasteter Brücke:

die Knotenlasten aus ständiger Last (g) und aus ruhender Verkehrslast (p_i) je nach Laststellung i

(2. 8) $$K_{ri} = K_{rg} + Kr_{pi}$$

Statt Gl (2. 6) kann bei bekannter Durchbiegung y_{mi} [cm] in Brückenmitte auch angesetzt werden:

(2. 9) $f_{oi} = 5{,}631 / \sqrt{y} \text{ in } s^{-1}$.

Die Eigenfrequenz f_{oi} ist also mit dem Lastzustand i veränderlich (Bild 1).

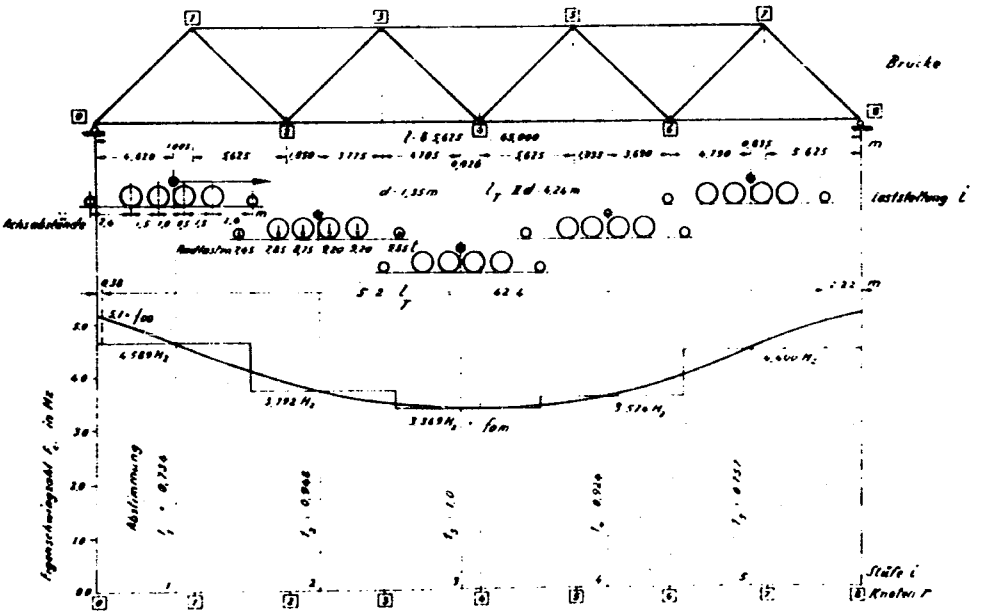


BILD. 1 Veränderlichkeit der Eigenfrequenz f_o einer befahrenen Brücke

Bei Anwesenheit von Dämpfung ergibt sich

(2. 10) $\nu_D = \nu_o \sqrt{1 - D^2} \text{ in } s^{-1}$

mit dem dimensionslosen Dämpfungsmass D nach Lehr

(2. 11) $$D = \rho/(2\,m\,\nu_0),$$

das zum logarithmischen Dekrement d zweier um eine volle Periode auseinanderliegender Amplituden die Beziehung hat

(2. 12) $$d = 2\pi \cdot D/\sqrt{1 - D^2}\,.$$

D liegt zwischen 0 und 1 und beträgt z. B. bei Brücken in Stahl oder Spannbeton 0,006 bis 0,05. Sein Einfluss auf die Frequenz ist gemäss Gl. (2. 10) zwar klein, nicht aber auf den Schwingausschlag selbst.
Als Federkonstante c_m der Brücke wird jene Kraft angesetzt, die in Brückenmitte m angreifend diese um 1 cm statisch durchbiegt; mit der Einflusszahl δ_{mm} ist somit

(2. 13) $$c_m = 1/\delta_{mm} \text{ in } {}^1/_{cm}\,.$$

Die schwingende Masse m_i folgt unter Berücksichtigung der Massen von Brücke und Verkehrslast je nach Lastzustand i aus Gl (2. 4) zu

(2. 14) $$m_i = c_m/\nu_{0i}^2 \text{ in } kg \cdot s^2/cm\,.$$

Mit c_m, f_{0i} und m_i ist somit die Brücke für jeden beliebigen Lastzustand i ersetzt durch einen Schwingkreis mit konstanter Feder c_m, aber mit je nach Lastzustand i veränderlicher Eigenfrequenz f_{0i} und Masse m_i einschliesslich der Dämpfung D. Versuchsmässig können f und D durch Aufnahme von Resonanz-Frequenz-Kurven bestimmt werden.

3. *Erregende Ursachen für erzwungene Schwingungen an Brücken*

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die wichtigen lotrechten Schwingungen durch Verkehrslasten auf geraden Brücken. Praktisch von Bedeutung sind nur die periodischen Erregungen, weil i. a. nur diese die Brücken zu grösseren Schwingausschlägen anfachen können. Die Deutung der Ursachen von vorgelegten Schwingvorgängen wird erleichtert, wenn man den zur vollen Schwingperiode T gehörenden Weg l_T der bewegten Verkehrslast aus der gemessenen Frequenz oder aus der gemessenen Fahrgeschwindigkeit v in m/s ermittelt, also

(3. 1) $$l_T = v/f = v \cdot T.$$

Dieser Weg l_T ist bei einer bestimmten periodischen Erregung und bei konstanter Geschwindigkeit v eine Konstante und entspricht i. d. R. einem bevorzugten Mass entweder an den Fahrzeugen (a) oder an den Brücken (b).

Folgende periodische Erregerursachen sind erkannt:

a) *Fahrzeugtechnisch:*

1. Abstandswirkungen aus der gleichmässigen Reihenfolge von Radlasten gleichen oder fast gleichen Abstandes a mit $l_T = a$;
2. Wirkungen aus Schwingungen (f_F) abgefederter Fahrzeugmassen mit $l_T = v/f_F$;
3. Wirkungen umlaufender oder hin und her gehender Maschinenteile ausserhalb der Räder (z. B. Motoren) mit Frequenzen f_M und mit $l_T = v/f_M$;
4. Wirkungen unrunder Räder vom Durchmesser d' mit $l_T = \pi d'$,

dazu bei Eisenbahnbrücken:

5. Wirkungen aus Fliehkräften von Ausgleichsgewichten in Treib- und Kuppelrädern der Triebfahrzeuge vom Durchmesser d mit $l_T = \pi d = v/f_D$;
6. Wirkungen bei Triebrädern aus den lotrechten Anteilen der Stangenkraft, z B bei Dampflokomotiven infolge des Dampfdruckes in den Zylindern und infolge von Beschleunigungs- oder Verzögerungskräften der hin und her gehenden Massen des Triebwerkes bei Frequenzen f_S mit $l_T = v/f_S$;

b) *Bautechnisch:*

7. Abstandswirkungen aus sich wiederholenden gleichen Längen b in Fahrrichtung (z · B · Abstände von Querträgern, kleinere Stützweiten hintereinander liegender Hauptträger, Hindernisse oder Löcher (Unebenheiten) im Fahrweg bei annähernd gleichen Abständen) mit $l_T = b$;
8. Fliehkraftwirkungen der gesamten Masse der Verkehrslast wegen Durchfahrens einer in lotrechter Ebene gekrümmten oder gewellten Fahrbahn,

dazu bei Eisenbahnbrücken:

9. Schwellenwirkung (ähnlich 7) bei gleichen Schwellenabständen s mit $l_T = s$.

Aus Gl. (3. 1) folgt bei bekanntem Weg l_T die einer bestimmten Frequenz f entsprechende Fahrgeswindigkeit

$$V = l_T \cdot f \cdot 3{,}6 \text{ in km/h} \tag{3.2}$$

und die zu einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit V gehörende Frequenz

$$f = V/(3{,}6 \cdot l_T) = v/l_T \text{ in } s^{-1}. \tag{3.3}$$

Bei den Abstandswirkungen ist zu bedenken, dass ein Auffahren von Lasten mit endlicher Geschwindigkeit stets Eigenschwingungen der

Brücke anfacht, weil — entgegen den Annahmen der Statik — in der Kinetik alle Lasten sofort in ihrer vollen Grösse wirken: Dadurch müssen beim schnellen Übergang einer Gleichgewichtslage in eine andere stets Ausgleichsschwingungen in der Eigenfrequenz auftreten. Erfolgen solche Übergänge periodisch, dann müssen erzwungene Schwingungen angefacht werden.

Da nun bei einer Brückenstützweite l die Zahl der bei einer Überfahrt möglichen Erregerperioden $= l/l_T$ meist nur klein sein kann, so verlaufen die durch Verkehrslasten erzwungenen Schwingungen infolge der gesamten periodischen Ursachen meist kurzzeitig nur als Einschwingvorgänge unter gleichzeitigem Auftreten von gedämpften Eigenschwingungen und nicht, wie z. B. Gebäudeschwingungen infolge von Maschinen mit Unwuchten, langzeitig im Beharrungszustand.

4. *Einschwingvorgang eines konstanten Schwingkreises*

Für die erzwungenen Schwingungen eines einfachen gedämpften Schwingkreises mit konstanter Feder c, konstanter Masse m Eigenkreisfrequenz $\nu_0 = 2\pi f_0$ (Gl. 2. 4) und Dämpfungswiderstand ϱ (Gl. 2. 11) lautet bei periodischer Erregung durch eine von ihrer Erregerkreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ abhängige Erregerkraft, z. B. durch die Sinusanteile einer Fliehkraft einer Masse m_0 am Hebel r_0, die Differentialgleichung

$$(4.1) \quad m \cdot \ddot{y} + \varrho \cdot \dot{y} + c \cdot y = m_0 r_0 \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

oder nach Kürzung mit $m \cdot \nu_0^2 = c$ allgemein

$$(4.2) \quad \ddot{y} + 2D \cdot \dot{y} + y = S \cdot \lambda^2 \cdot \sin \lambda \tau$$

mit den dimensionslosen Werten

$$(4.3) \quad \text{für die Zeit} \qquad \tau = \nu_0 \cdot t$$

$$(4.4) \quad \text{für die Frequenz} \qquad \lambda = \omega/\nu_0 = \text{«Abstimmung»}$$

$$(4.5) \quad \text{für die «Dämpfung»} \qquad D = \varrho/(2 m \nu_0).$$

Alle Ausschläge y hingegen werden auf den absoluten und konstanten Ausschlag

$$(4.6) \quad S = m_0 r_0 \cdot \nu_0^2/(m \cdot \nu_0^2) \ [\text{cm}]$$

der gegebenen Feder c bezogen, d. i. die statische Auslenkung der Feder c infolge der statischen Wirkung der Amplitude der Erregerkraft im Resonanzfall mit $\omega = \nu_0$.

Die allgemeine Lösung von Gl. (4. 2) lautet bei der beliebigen Abstimmung λ mit den Intergrationskonstanten A, B und C und dem Wert $\lambda_D = \nu_D/\nu_0$ gemäss Gl. (2. 10)

$$(4.7) \quad y = y_1 + y_2 = C_\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot \tau - \alpha) + e^{-D\tau}(A \cdot \cos \lambda_D \cdot \tau + B \cdot \sin \lambda_D \cdot \tau)$$

Dieser Schwingvorgang besteht also aus dem stationären Anteil y_1 einer erzwungenen Schwingung und dem exponentiell abklingenden Anteil y_2 einer gedämpften freien Eigenschwingung. Die nach dem Abklingen von y_2 übrig bleibende Schwingung y_1 heisst der «Beharrungszustand» und hat bei der Abstimmung λ die Amplitude

$$(4.8) \quad C_\lambda = V_\lambda \cdot S ,$$

wobei V_λ das Verhältnis der stationären Amplitude C_λ zum konstanten Ausschlag S ist und «kinetische Vergrösserung des Beharrungszustandes bei der Abstimmung λ» heisst mit dem dimensionslosen Wert

$$(4.9) \quad V_\lambda = C_\lambda / S = \lambda^2 / \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4 D^2 \cdot \lambda^2} .$$

V_λ wird durch die bekannten Resonanzkurven dargestellt, die im Resonanzfall mit $\lambda = 1$ bei Dämpfung D die Kuppe

$$(4.10) \quad {}_{max}V = V_{Res} \approx 1/(2D)$$

haben und bei höheren Abstimmungen $\lambda \gg 1$ sich asymptotisch dem Wert «1» nähern.

Solange aber ein Beharrungszustand nicht vorliegt, d. h. solange die gedämpften Eigenschwingungen noch nicht abgeklungen sind, weil — wie bei Brücken — nur wenige Erregerperioden gewirkt haben können, besteht der für Brücken so wichtige «Einschwingvorgang».

Bezieht man Gl (4. 7) und die von den Anfangsbedingungen abhängigen Integrationskonstanten A und B auf die konstante Amplitude C nach Gl (4. 8), so ergeben sich die Verhältniswerte
für den Ausschlag

$$(4.11) \quad y_\lambda / C_\lambda = y_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sin(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau} r \cdot \sin(\lambda_D \tau - \varphi_a)$$

und für die Schwinggeschwindigkeit

$$(4.12) \quad \dot{y} / C_\lambda = \dot{y}_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \lambda \cdot \cos(\lambda\tau - \alpha) - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos(\lambda_D \tau - \varphi_v) .$$

Aus der Zusammensetzung der beiden Teilschwingungen nach Gl (4. 11) folgt

$$(4.13) \quad y_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / C_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau) \quad h_\lambda \cdot \sin(\lambda\tau - \beta\tau)$$

mit der diese Ausschlagsverhältnisse *umhüllenden* Kurve der Verhältnisse

$$(4.14) \quad h_\lambda = H_\lambda / C_\lambda = H_\lambda / (V_\lambda \cdot S) = \sqrt{1 + (e^{-D\tau} r)^2 - 2 e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos \varphi_\tau}$$

205

In den Gleichungen (4. 11) bis (4. 14) bedeuten

(4. 15) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (4. 16) $\operatorname{tg} \varkappa = 2D\lambda/(1-\lambda^2)$ (4. 17) $\operatorname{tg} \psi_a = -a/b$

(4. 18) $\operatorname{tg} \psi_\tau = (a \cdot \lambda_D - b \cdot \lambda)/(a \cdot D - b \cdot \lambda_D)$

(1. 19) $\psi_\tau = (\lambda_D - \lambda)\,\tau = (\psi_a - \varkappa)$

(4. 20) $$\operatorname{tg} \xi_\tau = \frac{\sin \varkappa - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \sin(\psi_\tau - \varkappa)}{\cos \varkappa - e^{-D\tau} \cdot r \cdot \cos(\psi_\tau - \varkappa)}$$

Die Hilfswerte a und b ergeben sich aus den Integrationskonstanten A und B nach Gl. (4. 7). Für den Sonderfall der Ruhe als Anfangszustand ist

(4. 21) $a_0 = 2D \cdot V_\lambda/\lambda$ (4. 22) $b_0 = (1 - \lambda^2 - 2D^2) \cdot V_\lambda/(\lambda \cdot \lambda_D)$

(4. 23) $r_0 = \lambda/\lambda_D$

(4. 24) $\operatorname{tg} \psi_{a0} = 2D\lambda_D/(1 - \lambda^2 - 2D^2)$

(4. 25) $\operatorname{tg} \psi_\lambda = -(1 - \lambda^2) \cdot D \,/\, [(1 - \lambda^2) \cdot \lambda_D]$

Der für das Näherungsverfahren wichtige Wert h_λ nach Gl. (4. 14) stellt das Verhältnis der Ordinaten der Hüllkurven H_λ des Ausschlages zur Amplitude $C_\lambda = V_\lambda \cdot S$ des Beharrungszustandes λ dar. Sein Vektordiagramm bei den Anfangsbedingungen der Ruhe zeigt das Bild 2. Hiernach ergibt sich der jeweilige Wert h_λ mit der logarithmischen Spirale OME $e^{-D\tau} \cdot r$ als Leitkurve aus der Seite $\overline{AE}$ des umlaufenden Dreiecks AME (dargestellt für die «Zeit» $\tau = 30$). Das Verhältnis h_λ nach Gl. (4. 14) wird zu «1», d. h. $H_\lambda = C_\lambda$, wenn mit dem Ende des Einschwingvorganges E mit M zusammenfällt, d. h. der Beharrungszustand erreicht ist. ($\lambda = 0{,}95$, $D = 0{,}01$).

Bild 3 zeigt den zeitlichen Verlauf einzelner Hüllkurven-Verhältniswerte für verschiedene Abstimmungen λ und verschiedene Dämpfungen D.

Um diese Kurven hier untereinander vergleichbar machen zu können, sind alle Werte h_λ im Verhältnis V_λ /max V verkleinert, d. h. die kinetischen Vergrösserungen dieser ausgewählten Hüllkurven sind auf die grösstmögliche Vergrösserung max $V = 50$ im Resonanzfall mit der Dämpfung $D = 0{,}01$ (vgl. Gl. 4. 10) bezogen. Aus dem schwebungsähnlichen Verlauf der Hüllkurven nach Bild 3 ist ersichtlich, dass im Einschwingvorgang Spitzenwerte entstehen, die grösser als die Werte des zugehörigen Beharrungszustandes sind. Diese Überschwingungen im Einschwingvorgang, nicht die eigentlichen Resonanzschwingungen im

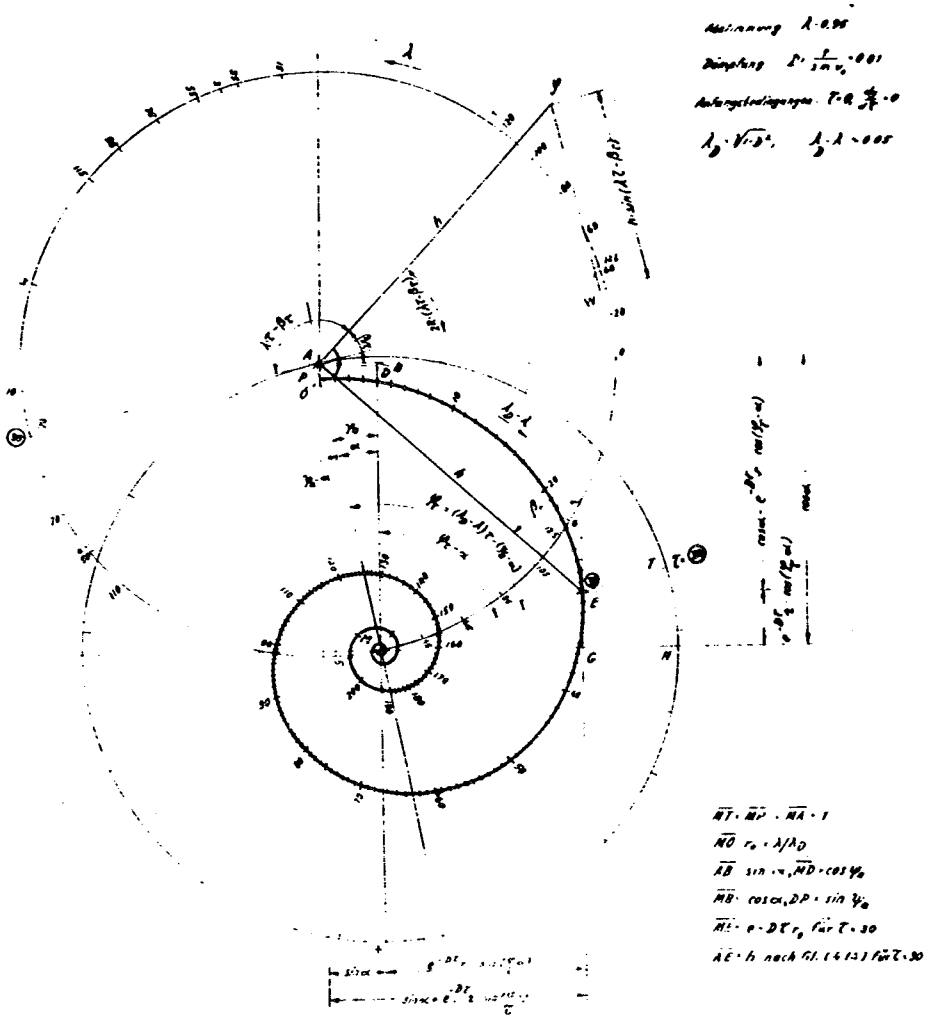


BILD 2. Vektordiagramm für den Einschwingvorgang einer erzwungenen gedämpften Schwingung eines konstanten Schwingkreises

Beharrungszustand, sind für die erzwungenen Schwingungen von Brücken unter Verkehrslasten besonders zu beachten.

Allgemein sind also die Hüllkurven des Ausschlages durch den statischen Ausschlag S nach Gl. (4. 6) und durch die kinetische Vergrösserung $h_j \cdot V_j$ darstellbar nach Gl. (4. 14) zu

$$(4.26)\quad H_j = h_j \cdot V_j \cdot S = \eta_j \cdot S.$$

5. *Einschwingvorgänge einer befahrenen Brücke als veränderlicher Schwingkreis*

Wird eine unter fahrenden Verkehrslasten schwingende Brücke nach Abschnitt 2 durch einen gedämpften Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Eigenfrequenz und veränderlicher Masse ersetzt (Bild 1), so muss ausserdem noch der Einfluss des Ortswechsels x_r der

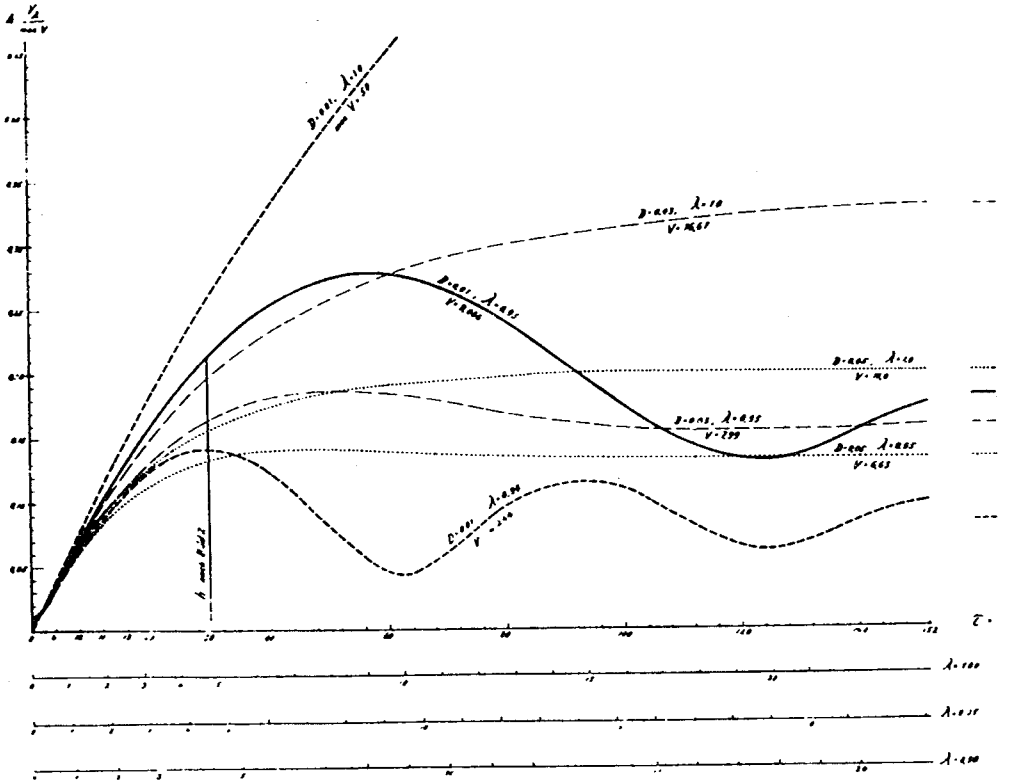


BILD 2. Kinetische Vergrösserungen bei Einschwingvorgängen mit verschiedenen Abstimmungen und Dämpfungen D

Erregerkraft auf die Durchbiegung in Brückenmitte berücksichtigt werden. Dies kann dadurch geschehen, dass die wandernde Erregerkraft mit konstanter Amplitude durch eine ortsfeste Errergerkraft mit veränderlicher Amplitude ersetzt wird. Als Umrechnungswert dient entweder das Verhältnis der Einflusszahlen δ für die Durchbiegung oder — bei Annahme

einer sinusförmigen Schwingform — der Wert $\sin \pi x_r/l$. Die Erregerkraft hat also die mit der Stellung veränderliche Amplitude

(5. 1) $$F_r = m_o r_o \cdot \omega_r^2 \cdot \eta_{mr} / \eta_{mm} = m_o r_o \omega^2 \cdot \sin \pi \cdot x_r / l .$$

Bei einer periodischen Erregung können die der Brücke aufgezwungenen Schwingungen, wenn wegen der üblichen Stützweiten nur wenige Erregerperioden aufgeprägt werden können, nur als Einschwingvorgang verlaufen. Für diesen bei Brücken nach obigen Darstellungen sehr verwickelten Fall liegt eine geschlossene Lösung noch nicht vor. Das nachfolgend beschriebene Näherungsverfahren, das die im Abschnitt 4 behandelten Gleichungen weiterentwickelt, führt aber zu brauchbaren Ergebnissen. Bezüglich der Erregerfrequenz wird dabei die Annahme gemacht, dass sie mit der kleinsten Eigenfrequenz zusammenfällt, die während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast über eine bestimmte Brücke überhaupt möglich ist, also

(5. 2) $$\omega = 2 \pi \cdot f_{om} = \min \nu_o = \nu_{om}$$

Diese Erfahrungstatsache wurde aus vielen Versuchsfahrten an Eisenbahnbrücken eindeutig gewonnen (vergl. Bild 1).

Beim Näherungsverfahren wird nun ein Teil der mathematischen Schwierigkeiten dadurch umgangen, dass grundsätzlich alle stetig veränderlichen Kennwerte des Schwingkreises nur noch in «Stufen» veränderlich angenommen werden. Die Stufen sollen je einen bestimmten Zeitabschnitt umfassen, z. B. von der Dauer einer Erregerperiode, und sind durch die augenblickliche Stellung i der Verkehrslast zur Zeit der Mitte i der Zeitstufe i gekennzeichnet. Der Schwingkreis i der Stufe i hat demnach die konstanten Stufenkennwerte

$$c_i , m_i , \nu_{oi} = 2 \pi f_{oi} , \lambda_i = \nu_{om}/\nu_{oi} , D_i = D_m/\lambda_i , S_i \text{ und } V_i ;$$

er wird gemäss Gl. (5.1 und 5.2) periodisch erregt durch

(5. 3) $$F_i = m_o r_o \cdot \nu_{om}^2 \cdot \eta_{mi} / \eta_{mm} \cdot \sin \nu_{om} \cdot t,$$

also durch eine Erregerkraft mit konstanter Frequenz ν_{om} und mit einer der Stufe i angepassten konstanten Amplitude.

Aus dem statischen Ausschlag der Feder c im Resonanzfall ν_{oi} der Stufe i

(5. 4) $S_i = m_o r_o \nu_{oi}^2 / c$ (vergl. Gl. 4. 6) folgt die auf Brückenmitte m umgerechnete statische Auslenkung für die Stufe i zu

(5. 5) $$S_{mi} = S_i \frac{\eta_{mi}}{\eta_{mm}} = \frac{S_m}{\lambda_i^2} \cdot \frac{\eta_{mi}}{\eta_{mm}}$$

209

und damit die kinetische Vergrösserung für den Beharrungszustand der Stufe i zu

(5. 6) $V_{mi} = C_i / S_m = \zeta_{mi} / \zeta_{mm} \cdot 1 / \sqrt{(1 - r^2)^2 \cdot 4 D_m^2}$.

Hierin ist die für alle Stufen gleiche Bezugsgrösse

(5. 7) $S_m = m_o r_o \cdot \nu_{om}^2 / c$

als statische Auslenkung für die massgebende mittlere Stufe i = m infolge der grössten Amplitude der Erregerkraft ohne weiteres errechenbar.

Auf jede einzelne dieser Stufen i können die Gleichungen des Abschnittes 4 angewendet werden, also auch für die Hüllkurven des Ausschlages. Beginnend mit den Anfangsbedingungen der Ruhe für t = 0 werden für den Endzustand der Stufe 1 zur Zeit t = T = $1/f_{mm}$ die Werte des Ausschlages y und der Geschwindigkeit $\dot{y}$ nach der Gl. (4. 11) und (4. 12) berechnet und als Anfangsbedingungen für die Stufe 2 zu Grunde gelegt und so fort. Mit den weiteren dimensionslosen Ansätzen nach Abschnitt 4 erhält man somit für die einzelnen Stufen i die einzelnen Äste der Hüllkurven stufenweise zu

(5. 8) $z_i = h_i \cdot V_{m,i}$

unter Beachtung der Gl. (5. 6), (5. 5) und (4. 14) mit der jeweiligen Abstimmung ζ_i als «Verstärkungszahlen des Ausschlages».

Als Folge der stufenweisen Veränderlichkeiten der Kennwerte müssen die einzelnen Äste der Hüllkurven Unstetigkeiten an den Stufenübergängen haben.

Auf diese Weise wurde folgendes Beispiel praktisch durchgerechnet.

Eine eingleisige Eisenbahnbrücke von l = 45 m Stützweite wird durch die lotrechten Anteile der Fliehkräfte aus den um 90° gegeneinander versetzten Gegengewichten in den Triebrädern einer Dampflokomotive von 100 t Gesamtgewicht und 2 Zylindern periodisch erregt. Bei 4 Triebachsen von je 16 t Achslast, 1,35 m Raddurchmesser oder 4,24 m Radumfang l_r und einer grössten Geschwindigkeit von 65 km/h beträgt die grösste sekundliche Drehzahl max f = 4,26/s und die Zahl der Stufen n = 6 mit i = m = 3 in der Mitte.

Mit der kleinsten Eigenfrequenz der belasteten Brücke min f = f_{mm} = 3,37/s nach Bild 1 beträgt die kritische Geschwindigkeit krit V = . 1,35 . 3,6 . 3,37 = 52 km/h und die Amplitude der Erregerkraft für i = 3 F_m = 0,15 . 8 . $\sqrt{2}$. $3,37^2/4,26^2$ = 1,064 t/Brücke und demnach die Bezugsgrösse des Ausschlages S_m = 0,0505 cm.

Mit der Dämpfung D = 0,0175 sind die Verstärkungszahlen für die einzelnen Äste der Hüllkurven des Ausschlages berechnet.

In Bild 4 sind für die Überfahrt in kritischen Geschwindigkeit für die Brückenmitte dargestellt *unten*: der zeitliche Verlauf der Verstärkungszahlen ζ_i für die einzelnen Äste der Hüllkurven des kinetischen Ausschlages in Brückenmitte, *oben*: der zeitliche Verlauf der statischen Durchbiegung stat y_m und der ihr überlagerten Schwingungen aus Messung und Rechnung. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

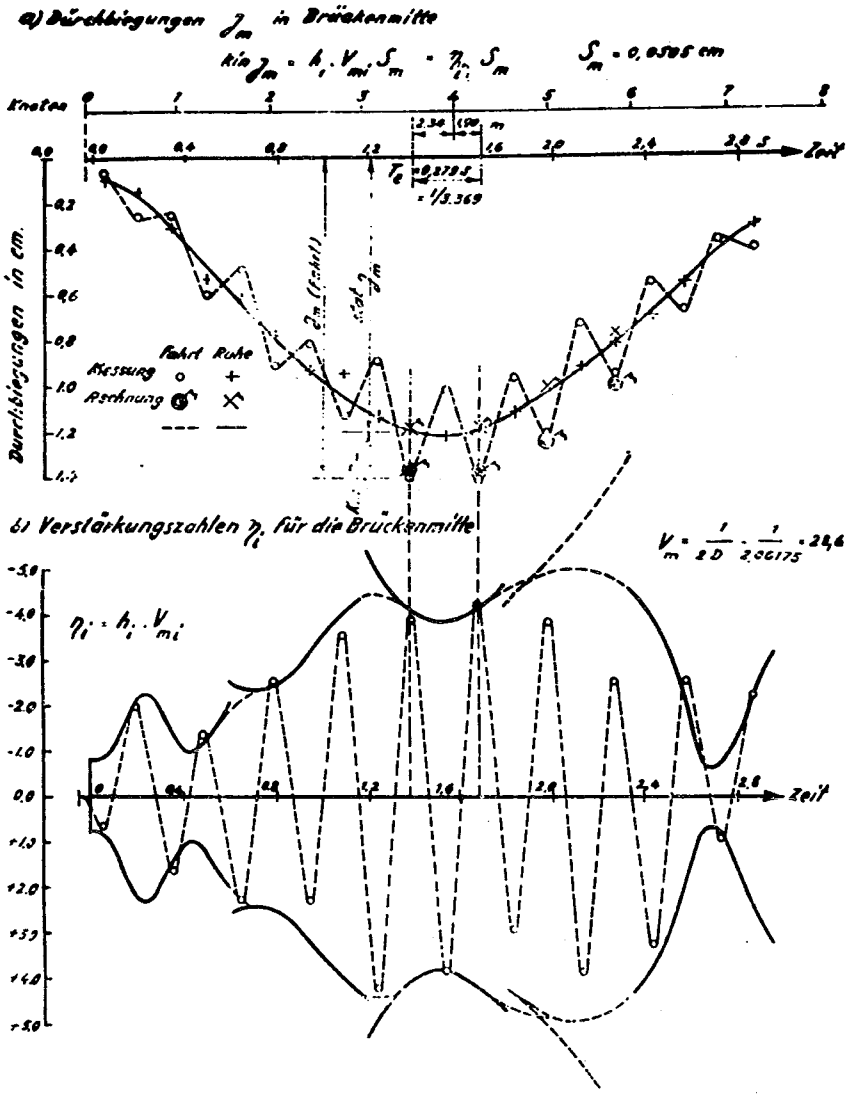


BILD. 4. Zeitlicher Verlauf der Durchbiegungen und der kinetischen Verstärkungszahlen der Hüllkurven des Ausschlages für die Brücke nach Bild 1

6. *Berechnung von Schwingbeiwerten*

6. 1 *Verhältnisse von zugeordneten Durchbiegungen oder Dehnungen.*

Sind die Duchbiegungen bei «Fahrt» und bei «Ruhe» der Brücke gemessen oder — z. B. nach vorstehendem Näherungsverfahren — gerech-

net, so ergibt sich der Schwingbeiwert zu

(6. 1) $\varphi = y\,(\text{Fahrt})/y\,(\text{Ruhe}) = (\text{stat } y \cdot \text{kin } y)/\text{stat } y$ aus Duchbiegungen

oder

(6. 2) $\varphi = \varepsilon\,(\text{Fahrt})/\varepsilon\,(\text{Ruhe}) = (\text{stat } \varepsilon \cdot \text{kin } \varepsilon)/\text{stat } \varepsilon$ aus Dehnungen

6. 2 *Ersatzlastenverfahren nach Krabbe*

Wenn an n Knotenpunkten r eines Tragwerkes gemessen sind

a) die statischen Einflusszahlen δ_{ik} infolge der Last 1,

b) die zugeordneten Durchbiegungen y_r bei Langsamfahrt und bei kritischen Schnellfahrten,

so sind für jeden beliebigen Zeitpunkt zugehörige Gruppen von jenen statischen Ersatzlasten P_r berechenbar, die in den Messpunkten r angreifend die gleichen Durchbiegungen erzeugen, die unter den Verkehrslasten bei Fahrt und bei Ruhe gemessen wurden.

Aus den n linearen n-gliedrigen Simultangleichungen

(6. 3) $y_i = \Sigma\,(P_r \cdot \delta_{ir})$

folgt nach Lösung der Matrix der δ-Werte, z. B. nach Gauss, mit den Lösungswerten

(6. 4) $\lambda_{ik} = f\,(\delta_{ik})$

(6. 5) $P_r = \Sigma \cdot y_i \cdot \lambda_{ir}$

je für Fahrt und für Ruhe.

Aus den zugehörigen Arbeitsladungen je Stellung i

(6. 6) $A_i = \Sigma\,(P_{ir} \cdot y_{ir})$ folgt

(6. 7) $\varphi = \max A_{\text{Fahrt}}/\max A_{\text{Ruhe}}$

6. 3 *Momentenverfahren nach Brückmann.*

Wenn durch Rechnung (siehe Näherungsverfahren) oder durch Messung die Durchbiegungen y_r aller n Knoten mit gleichen Knotenabständen a bekannt sind, so liefert die Differenzengleichung der Biegelinie zwischen den Durchbiegungen y und den Biegemomenten M von 3 aufeinander folgenden Knotenpunkten r — 1, r und r + 1 und mit dem Ansatz

(6. 8) $M_{r-1} \cdot \alpha_r - M_r \cdot \beta_r + M_{r+1} \cdot \alpha_{r+1} = C\,(-y_{r-1} + 2y_r - y_{r-1}) = C \cdot z_r$

n 3-gliedrige Simultangleichungen, aus denen sich die Biegemomente **M** unmittelbar berechnen lassen zu

(6. 9) $M_i = C \cdot \Sigma (z_r \cdot \lambda_{ir})$.

Die Werte α, β und C sind nur von den Abmessungen der Brücke abhängige Festwerte, die die Lösungswerte λ_{ir} der Matrix nach Gl. (6. 8) liefern. Demnach ergibt sich für den zu untersuchenden Fall

(6. 10) $\varphi = M_{Fahrt} / M_{Ruhe} = (\text{stat M} \cdot \text{kin M}) / \text{stat M}$.

7. *Allgemeine Erkenntnisse*

Die beschriebenen Vorgänge über Brückenschwingungen unter Verkehrslasten bei periodischer Erregung führ n zu folgenden allgemeinen Erkenntnissen:

1) Erzwungene Schwingungen von Brücken infolge Verkehrslasten verlaufen mit veränderlicher Abstimmung λ_i und wegen der meist geringen Zahl von aufprägbaren Erregerperioden nur als Einschwingvorgänge, bei denen zwar gefährlich hohe Ausschläge im Beharrungszustand des Resonanzfalles nicht zu befürchten sind, aber trotzdem wegen des schwebungsähnlichen Verlaufs gewisse Überschwingungen eintreten können.

2) Bei Veränderlichkeit der Eigenfrequenz als Folge der Bewegung der Verkehrslast wird die Brücke meist dann zu grösseren Schwingausschlägen aufgeschaukelt, wenn die Erregerfrequenz mit der kleinsten während der Überfahrt einer bestimmten Verkehrslast möglichen Eigenfrequenz übereinstimmt ($\omega = \min \nu_{min}$). Die Zeitdauer der Resonanzlage kann somit nur ein Bruchteil der Überfahrtzeit betragen.

3) Bezogen auf die statischen Wirkungen der Verkehrslast sind ihre kinetischen Wirkungen (Schwingausschlag und Schwingbeiwert) umso grösser, je leichter und kürzer sie ist, weil dann die Veränderlichkeit der Masse und der Eigenfrequenz am geringsten ist. Die Abstimmung λ_i bleibt hier verhältnismässig nahe bei 1, so dass grosse kinetische Ausschläge bei kleinen statischen Wirkungen eintreten.

4) Entsprechend (3) liefern schwerere Verkehrslastan kleinere Schwingbeiwerte. Bezeichnet man das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen einer Betriebslast B und der für die Brücke massgebenden Regellast R als «Belastungsgrad» λ (B/R), so gehören zu grossen Belastungsgraden kleine Schwingbeiwerte. Aus Versuchen mit Verkehrlasten kleinen Belastungsgrades gewonnene Schwingbeiwerte liegen daher bezüglich der Regellast auf sicheren Seite.

5) Der durch die Fahrgeschwindigkeit v und die Erregerfrequenz f bedingte Weg $l_T = v/f$ ist ein Kennzeichen für die Erregerursache und ein Massstab für die Zahl der Erregerperioden $n = l/l_T$. Zusammen mit min f nach (2) liefert er die kritische Geschwindigkeit krit $v = l_T \cdot \min f$ [m/s].

6) Brücken mit niedrigen Eigenfrequenzen haben kleinere Erregeramplituden. Weiche Brückenträger sind daher kinetisch günstiger.

7) Auf Grund obiger Erkenntnisse konnten in den deutschen Vorschriften die Schwingbeiwerte φ für die Hauptträger von Eisenbahn- und Strassenbrücken herabgesetzt werden. Für Fahrbahnträger sind nach dem jetzigen Stand der Untersuchungen ähnliche Ergebnisse zu erwarten.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Schwingbeiwerten für Schwingungen von Brücken unter Verkehrslasten beschrieben, wobei die Massen von Brücken und Verkehrslasten sowie die Dämpfung mitberücksichtigt werden. Eine befahrene und von periodischen Kräften erregte Brücke kann wegen der Ortsveränderlichkeit der Verkehrslasten und Erregungen als gedämpfter Schwingkreis mit konstanter Feder, aber veränderlicher Masse und Eigenfrequenz aufgefasst werden, der durch periodische Erregung mit konstanter Frequenz, aber veränderlicher Amplitude zu erzwungenen Schwingungen angefacht wird. Für das Verfahren wird dieser Schwingkreis in einen solchen verwandelt, bei dem sich die Veränderlichen nur stufenweise ändern, so dass während einer Stufe, z. B. gleich einer Erregerperiode, alle Werte konstant angenommem und auf diesem konstanten Schwingkreis die Gesetze des einfachen Vertikalpendels angewendet werden dürfen. Wegen der geringen Zahl von möglichen Erregerperioden verläuft der gesamte Vorgang als Einschwingvorgang, bei dem die anfangs mitangefachten und wegen der Dämpfung exponentiell abklingenden Eigenschwingungen mit ihren je Stufe veränderlichen Frequenzen von erzwungenen Schwingungen konstanter Frequenz, aber je Stufe veränderlicher Erregeramplitude zu schwebungsähnlichen Schwingungen überlagert werden. Die Grösse der möglichen Schwingausschläge wird durch die «Hüllkurven des Ausschlages» umschrieben, die dimensionslos als «kinetische Verstärkungszahlen der Hüllkurven» mathematisch entwickelt werden, während als absolute Bezugsgrössen der statische Ausschlag S_m der Feder durch die Amplitude der Erregerkraft in Brückenmitte dient.

Weiter werden einige Angaben über die Ermittlung von Schwingbeiwerten durch Rechnungen oder durch Versuche gemacht. Hierbei wird auch auf die Abhängigkeit des Schwingbeiwertes für eine bestimmte Verkehrslast und Brücke vom «Belastungsgrad» hingewiesen, unter dem das Verhältnis zwischen den statischen Wirkungen der jeweiligen Betriebslast und der für die Brücke massgebenden Regellast verstanden wird.

RESUMO

O autor descreve um método de cálculo aproximado permitindo determinar o coeficiente de vibração no caso de pontes submetidas à acção de cargas móveis. Este método considera não só a massa da ponte e das cargas como também o efeito do amortecimento. Uma ponte, sob a acção do trânsito e solicitada por forças de carácter periódico, pode comparar-se — em virtude da posição variável das cargas móveis e das forças que a solicitam — a um sistema oscilante amortecido de mola constante e massa e frequência própria variáveis, levado a vibrações forçadas por uma excitação periódica de frequência constante e amplitude variável. Para aplicar este método, transforma-se este sistema num outro em que as variáveis mudam de valor por patamares, de tal modo que num patamar, por exemplo durante um período de excitação, todos os valores são constantes e se podem portanto aplicar as leis do pêndulo simples. Dado o número reduzido de períodos de excitação possíveis, todo o processo decorre como um fenómeno transitório durante o qual as vibrações próprias inicialmente provocadas, e exponencialmente decrescentes em virtude do amortecimento, e de frequência variável em cada patamar, são levadas a batimentos por vibrações forçadas de frequência constante e amplitude variável em cada patamar. O valor das elongações é dado pela envolvente das elongações que se descrevem em matemática como «multiplicadores cinéticos sem dimensão das envolventes», enquanto que se utiliza como grandeza de referência absoluta a flecha estática *Sm* da mola provocada pela amplitude da força de excitação a meio da ponte.

O autor também dá algumas indicações acerca da determinação dos coeficientes de oscilação pelo cálculo e pela experiência. Também se refere à relação existente, para uma ponte e uma carga determinadas, entre esse coeficiente e o «grau de carga», a qual relaciona a acção estática da carga móvel com a carga de regulação da ponte.

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une méthode de calcul approchée permettant de déterminer le coefficient de vibration d'un pont soumis l'action de charges mobiles. Cette méthode tient compte, non seulement de la masse du pont et des charges, mais aussi de l'amortissement. Un pont, sous l'effet du traffic, et sollicité par des forces à caractère périodique peut être comparé — en vertu de la position variable des charges mobiles et des forces qui le sollicitent — à un système oscillant amorti, à ressort constant et à masse et fréquence propre variables, soumis à des vibrations forcées par une excitation périodique à fréquence constante et amplitude variable. Pour pouvoir appliquer cette méthode de calcul, ce système est remplacé par un autre, dans lequel les variables changent de valeur par paliers, de manière à ce que, au cours d'un palier, par exemple pendant une période d'excitation, toutes les valeurs soient constantes et que l'on puisse ainsi appliquer les lois du pendule simple. Étant donné le nombre réduit de périodes d'excitation possibles, tout le processus se déroule comme un

phénomène transitoire pendant lequel les vibrations propres à fréquence variable dans chaque palier, provoquées à l'origine, et décroissant comme un exponentielle grâce à l'amortissement, sont soumises à des battements par les vibrations forcées à fréquence constante et amplitude variable dans chaque palier. La valeur des élongations est donnée par l'enveloppe des élongations que l'on désigne en mathématique par «multiplicateurs cinétiques sans dimension des enveloppes», tandis que l'on utilise comme grandeur de référence absolue la flèche statique Sm du ressort provoquée par l'amplitude de la force d'excitation au centre du pont.

L'auteur donne également quelques renseignements sur la détermination des coefficients d'oscillation tant par le calcul que par l'expérience. Il mentionne également le rapport qui existe, pour un pont et une charge donnés, entre ce coefficient et le «degré de charge» du pont, et qui lie l'action statique de la charge mobile à la charge de réglage du pont.

SUMMARY

The author describes an approximate method to compute the value of the vibration coefficient in the case of vibration in bridges submitted to the action of moving loads. This method takes into account the mass of the bridge and of the loads as well as the effect of damping. A bridge submitted to traffic and to periodic forces can be compared — due to the variable position of the moving loads and to the forces — to a damped oscillating system, with constant spring and variable mass and natural frequency, taken up to forced vibrations by a periodic force with constant frequency and variable amplitude. In order to apply this method, the above system is transformed in another one where the variable quantities follow a step pattern in such a way that, along each step, i. e. during one period of loading, all values are constant and the laws of the simple pendulum can thus be applied. Due to the restricted number of possible periods of loading, the whole process takes place as a temporary phenomenon in the course of which beats take place between the initially started self-vibrations, through the action of constant frequency forced vibrations, the amplitude of which varies along each step; the decrease of these self-vibrations, due to the damping effect, obeys the exponential law and their frequency varies along each step. The value of the elongations is given by the enveloping curve of the elongations which can be mathematically described as «kinetic dimensionless multipliers of the enveloping curves». The absolute reference magnitude used is the statical deflection Sm of the spring, caused by the amplitude of the periodic force at mid-span.

The author also gives information regarding the experimental and theoretical determination of oscillation coefficients. He also refers to the existing relation, for a given bridge and loading, between this coefficient and the loading grade, linking the statical action of the moving load and the adjustment load of the bridge.

DEPARTMENT OF DESIGN

A Method for Introducing Dynamic Vehicle Loads into Design of Highways

B. E. QUINN AND R. VAN WYK
Mechanical Engineering School, Purdue University

To predict the dynamic load of a vehicle on a pavement, suitable methods are necessary for characterizing the highway profile and the vehicle suspension system. Highway profiles have been described by using Fourier series approximations or power spectral density techniques, and the resulting frequency domain descriptions indicate that a similar description of the vehicle would be useful.

The ratio of wheel reaction to wheel displacement (F/X) vs frequency is therefore investigated for several vehicles. Effects of shock absorbers and tire pressure are observed. The prediction of the dynamic load using the proposed vehicle characteristics is described. A mathematical expression for the frequency domain characteristic is used to obtain significant vehicle parameters.

Estimation of the dynamic vehicle load indicates that a study of the significance of this quantity in highway design is desirable, as well as experimental verification of the predicted values.

• IT IS evident that a highway must be designed to support the static weight of a fully-loaded vehicle. Additional forces are imposed upon the highway, however, when the vehicle is in motion. Of interest in this investigation is the reaction between the highway and a moving vehicle that is caused by variations in the surface of the highway. This reaction is designated as either the dynamic vehicle load or the dynamic force, and it depends upon the highway profile, the speed of the vehicle, and the vehicle characteristics.

Because the dynamic load varies with time it is convenient to consider the root mean square value of this force. This statistic can be determined from appropriate highway and vehicle characteristics. The significance of the value obtained relative to the life of the highway is, however, a question that may involve a study of the fatigue properties of highway materials under random loadings.

There is evidence to indicate that the dynamic load may vary considerably in magnitude and thus it may be very significant under certain conditions.

CHARACTERIZATION OF HIGHWAYS

The problem of describing highway profiles has been considered by

217

many investigators (*1*). In certain cases it is possible to represent the highway profile by a mathematical equation (*2*), but this can only be used in relatively simple situations. For highways having more complex variations in the profile a Fourier series approximation can be used if the profile exhibits well-defined periodicity. For those highways having random variations in the profile it is possible to use a power spectral density function as a means of characterization (*3*). Because both the Fourier series approximation and the power spectral density function give a frequency domain characterization it is desirable to seek a similar characterization for the vehicles.

CHARACTERIZATION OF VEHICLE

Various mathematical models have been used to describe vehicle suspension systems (*4*). These have varied in complexity depending upon the number of degrees of freedom that have been considered. Into these models it has been necessary to introduce the effects of springs and shock absorbers as well as to estimate the effective masses in various parts of the system. The determination of the necessary physical constants for these models has in some cases required a considerable amount of effort.

Inasmuch as highway profiles can be characterized in the frequency domain, it is logical to seek a similar description for the vehicle suspension system.

In obtaining a frequency domain description of a system it is customary to select two variables that are usually defined as input and output (*5*). Since the highway profile gives rise to the dynamic force, the input for a vehicle suspension system is thus considered to be the vertical displacement of the tire tread and is represented by X. Because the dynamic force is of interest it is reasonable to select the force of the tire against the highway as the output and to represent this quantity by F. With the input and output of the system defined it is instructive to consider the ratio of the output to the input (F/X) as a function of frequency.

Equipment was therefore built that was capable of imparting a steady state sinusoidal displacement to a wheel of a vehicle and of measuring the force that the vehicle wheel exerted upon the equipment at all times. Since both the displacement X and the force F continuously varied with time, the F/X ratio was established by using the maximum values F and X. It was possible to vary the amplitude and the frequency of the sinusoidal motion, and thus the ratio F/X could be determined under steady state conditions for a wide range of values.

Figure 1 shows the F/X ratio vs frequency for a 1955 Chevrolet. There is considerable difference in this ratio for various amplitudes of

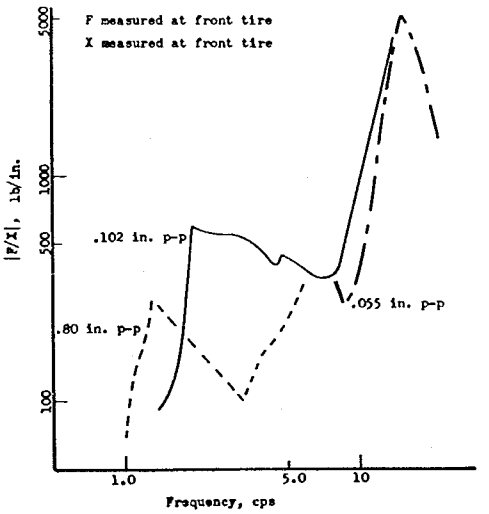


Figure 1. F/X ratio vs frequency—1955 6-cyl Chevrolet sedan.

displacement at the lower frequencies. This difference decreases as the frequency increases. The highest peak in the curve occurs at wheel-hop frequency, and the smaller peak occurs when there is considerable motion of the body of the car relative to the unsprung mass.

A comparison of the F/X ratio for an 8-cylinder Chevrolet sedan, a Ford station wagon and a Rambler station wagon is shown in Figure 2. Of considerable interest is the fact that the

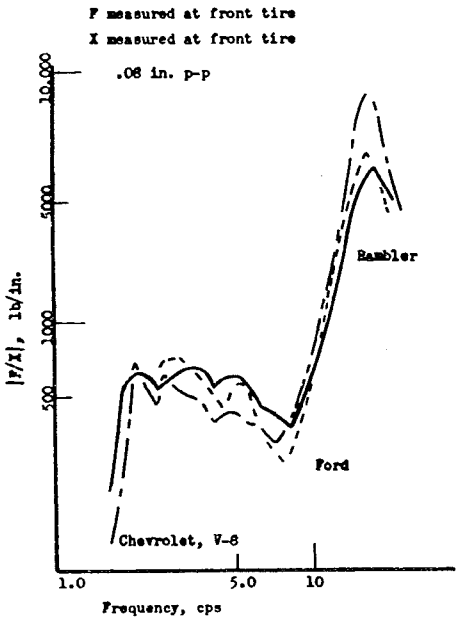


Figure 2. F/X ratio vs frequency for three automobiles.

characteristics of these vehicles all lie in a narrow region of the frequency domain. It is also evident that the wheel-hop frequency is almost the same for each car. These characteristics were obtained for an input displacement X of 0.08 inches (peak to peak value). Figures 1 and 2 are similar to characteristics shown in a previous paper (*6*).

The effect of shock absorbers is shown in Figure 3. The dotted curve indicates the response of the vehicle with the shock absorbers disconnected; the solid curve indicates the response with shock absorbers in the suspension system. The most significant difference occurs at the wheel-hop frequency where the F/X ratio without shock absorbers is approximately twice as much as that obtained with shock absorbers. In general it appears as if greater dynamic loads will result without shock absorbers, but the highway characteristics must be considered since large excitations at certain frequencies could produce the opposite effect.

The dynamic force that the vehicle exerts on the highway is influenced by the tire pressure. In Figure 4 the F/X ratio is shown for tire pressures of 24, 27, and 32 psig using an input displacement to the wheel of the vehicle of 0.109 inches (p-p). Considerable difference is observed in the force that the vehicle exerts upon the road at the wheel-hop frequency. Considering only the maximum value of F/X a more extensive set of tests was conducted in which the tire pressure was varied from approximately 15 psig to 40 psig (Fig. 5). These tests indicate that the greater the tire pressure the greater will be the dynamic vehicle load.

In attempting to predict the dynamic force, the question arises as to the effect of displacements at the other wheels upon the reaction of the wheel under investigation. Tests were therefore conducted to determine the effect on the F/X ratio at one wheel with the sinusoidal displacement applied to another wheel of the vehicle. In Figure 6, the force under the left front tire was measured while the right front tire was excited. It is evident that the magnitude of this effect is relatively small, and that at high frequencies the effect becomes almost insignificant.

The results of a similar test conducted on the rear wheels of the ve-

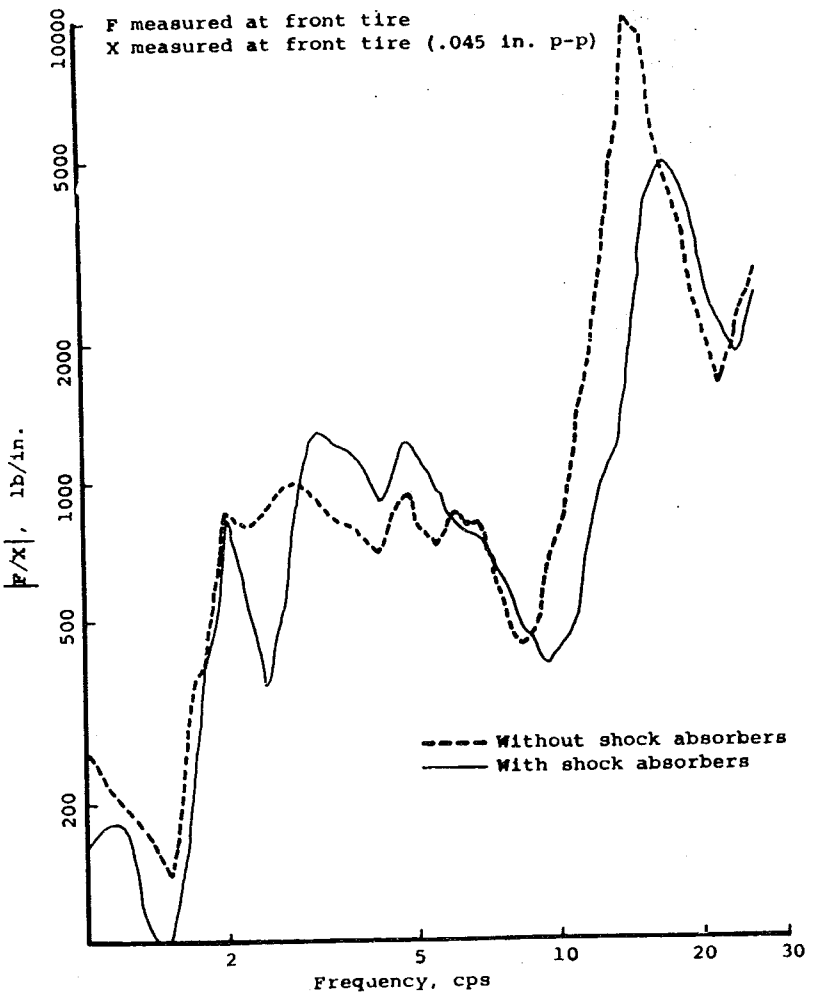


Figure 3. F/X ratio vs frequency—1955 6-cyl Chevrolet sedan.

hicle are shown in Figure 7. Here a more pronounced effect is evident when excitation is applied to the other wheel.

These tests indicate that frequency domain characteristics can be obtained that include the effects of all the components of the suspension system. It is also possible to evaluate the effect of modifying the system components as evidenced by the curve showing the vehicle response for various tire pressures. These curves should be useful in checking the validity of a mathematical model of the vehicle suspension system.

There are certain disadvantages, however, in determining vehicle response characteristics by the use of steady state sinusoidal excitation. It is necessary to have suitable equipment for exciting the vehicle and this equipment may be expensive for large vehicles such as trucks. Subjecting a vehicle to sustained vibration can cause damage if suitable precautions are not taken.

It is possible to obtain frequency

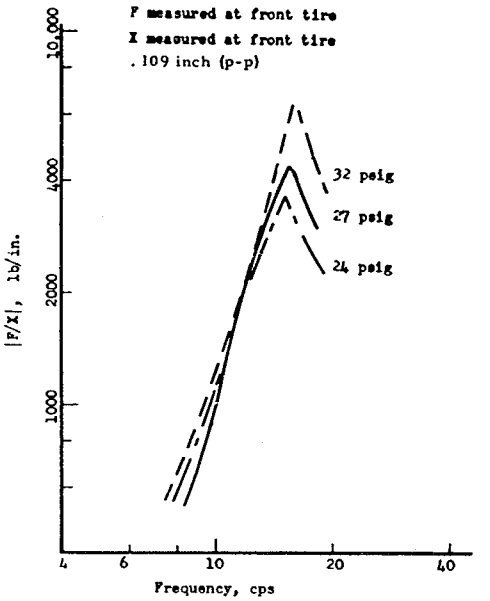


Figure 4. F/X ratio vs frequency—1955 6-cyl Chevrolet sedan.

domain characteristics by the use of impulsive excitation and this technique has been highly developed by investigators (*7*) in other areas. This method was applied to a one degree of freedom trailer for which it was more convenient to use accelerations as input and output variables rather than displacement and force. It appears possible to obtain F/X characteristics by impulsive methods, however, if suitable instrumentation is available. In Figure 8 the wheels of the trailer are shown resting on a steel beam to which is attached an accelerometer. Another accelerometer is mounted on the trailer. The left end of the beam was raised a short distance and dropped upon the sponge rubber.

Typical records from the two accelerometers are shown in Figure 9. By making the necessary computations the frequency characteristics (Fig. 10) were obtained. Curve 1 resulted when the beam was dropped 2 in. onto foam rubber. Curve 2 was obtained by dropping the beam 2 in. onto a sand bag. Curve 3 represents the characteristics obtained when the beam was dropped about 3 in. onto foam rubber. In Figure 11 the same characteristics (ratio of output acceleration to input acceleration) were obtained by steady state sinusoidal excitation at 3 different amplitudes. For this type of excitation a shift in the natural frequency was observed, although no such shift is evident in the same characteristics obtained by impulsive excitation. It is believed that a more accurate characteristic may result from the impulsive excitation because the relationships among the harmonics that are excited may be more realistic.

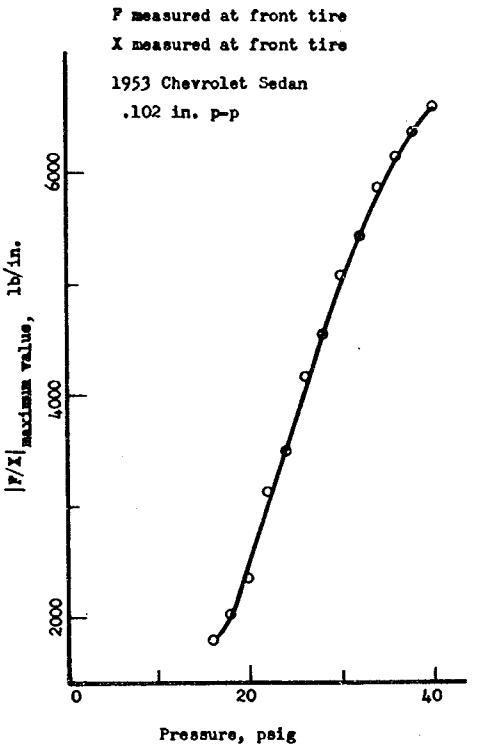


Figure 5. Maximum value F/X ratio vs tire pressure.

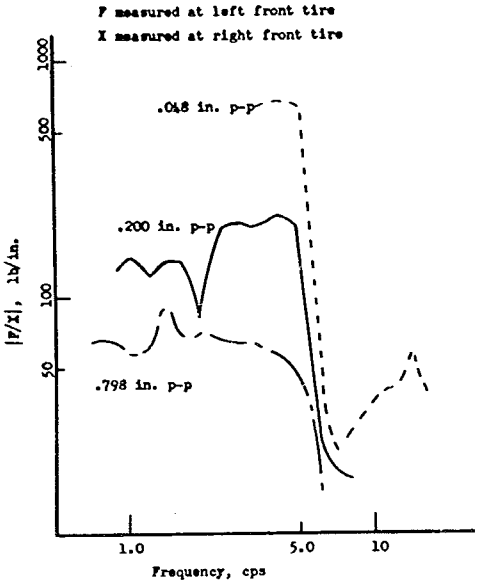


Figure 6. *F/X* ratio vs frequency—1955 6-cyl Chevrolet sedan.

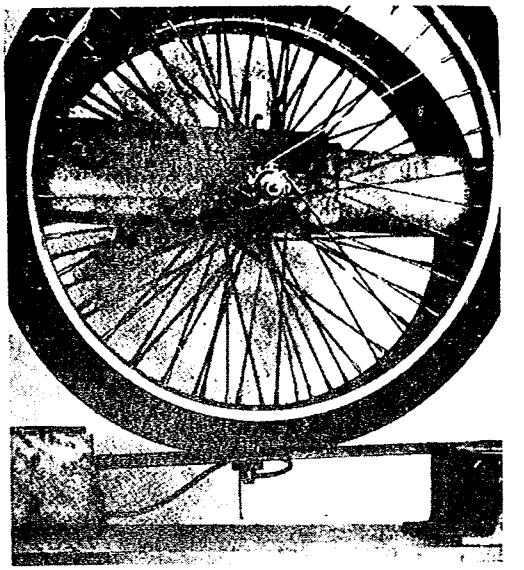


Figure 8. Instrumentation to measure transient response of a trailer.

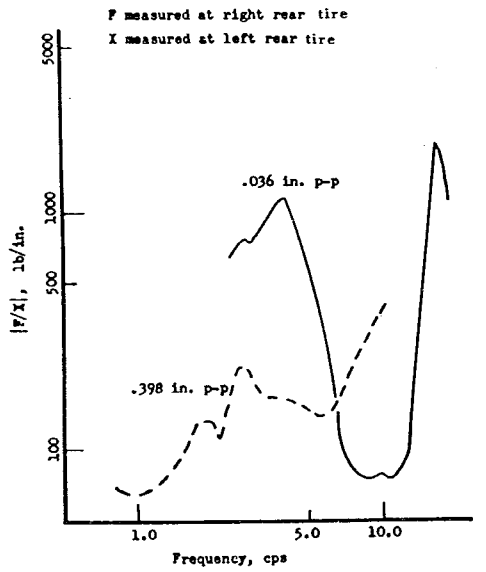


Figure 7. *F/X* ratio vs frequency—1955 6-cyl Chevrolet sedan.

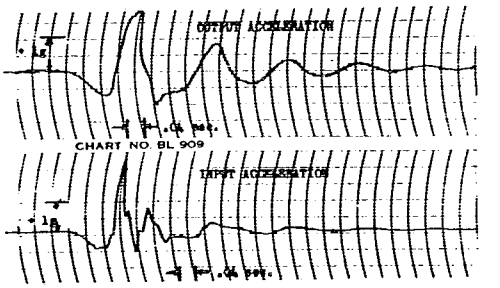


Figure 9. Transient records to obtain frequency response of trailer.

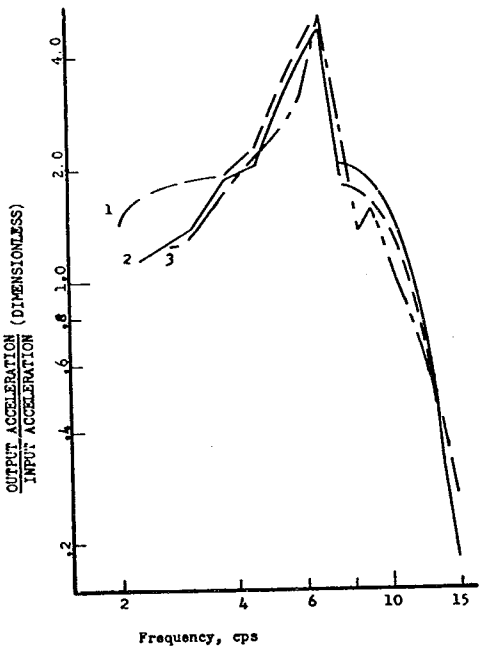


Figure 10. Frequency response of trailer from impulsive excitation.

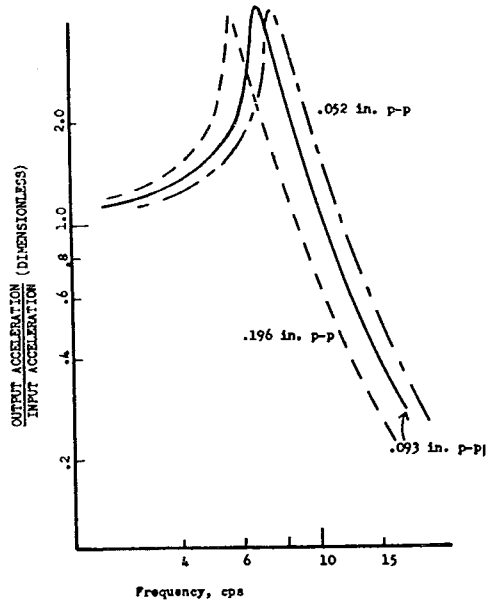


Figure 11. Frequency response of trailer from sinusoidal excitation.

MATHEMATICAL REPRESENTATION OF VEHICLE FREQUENCY DOMAIN CHARACTERISTICS

Because vehicle characteristics can be obtained in the frequency domain it is desirable to have a mathematical model that will include the significant parameters of these characteristics.

It is awkward to deal with characteristics solely in the form of experimental curves, particularly where subsequent mathematical operations are required. In other fields of engineering such characteristics have been represented by the following mathematical expression:

$$T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^m} \quad (1)$$

in which the constants a_1, a_2, $\cdots$, b_1, b_2, $\cdots$, are determined from the vehicle characteristics and s is a complex variable. Briefly, this technique involves the fitting of a polynomial to the experimental data by an appropriate method.

Applying this relationship to the frequency characteristics obtained for the trailer gives the curve shown in Figure 12. Here the experimentally determined values are shown by circles while the approximating polynomial is indicated by the solid line.

Applying the same technique to the frequency characteristics of an automobile yields the result shown in Figure 13 where the solid line represents the approximating polynomial given by

$$\frac{F}{X} = \frac{2215(s^2+24.5s+1190)(s^2+2.11s+47.5)}{(s^2+51.0s+6010)(s^2+12.7s+197)} \quad (2)$$

A reasonably close fit was secured for both the trailer and the automobile. After the polynomial has been determined it is possible to obtain

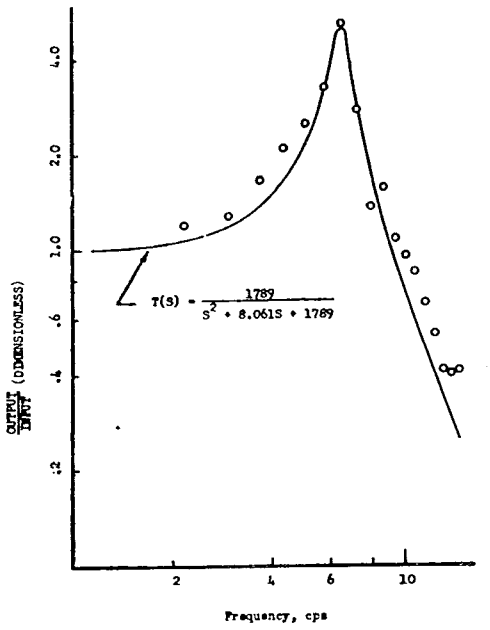
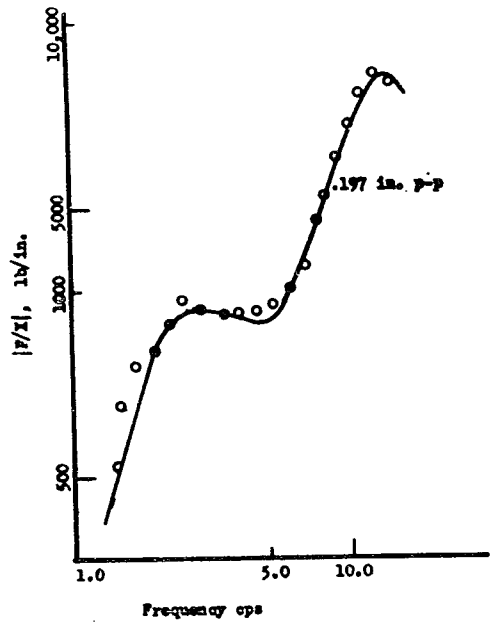


Figure 12. Polynomial approximation for trailer frequency response.

the characteristic roots which have physical significance and which contain valuable parameters of the system being described.

The physical significance of a root of the denominator of a polynomial is shown in Figure 14. In general these roots will have real and imaginary parts and therefore must be represented in the complex plane. The imaginary part of this root corresponds to the damped natural frequency of the system while the real part of the root is the product of the undamped natural frequency and the damping ratio. From this information it is possible to obtain the natural frequency as well as the damping associated with this frequency for the system under investigation. The existence of several roots indicates that several natural frequencies are present, and these can be determined from the polynomial.

It thus appears possible to use this



Fgure 13. Polynomial approximation for F/X ratio of automobile.

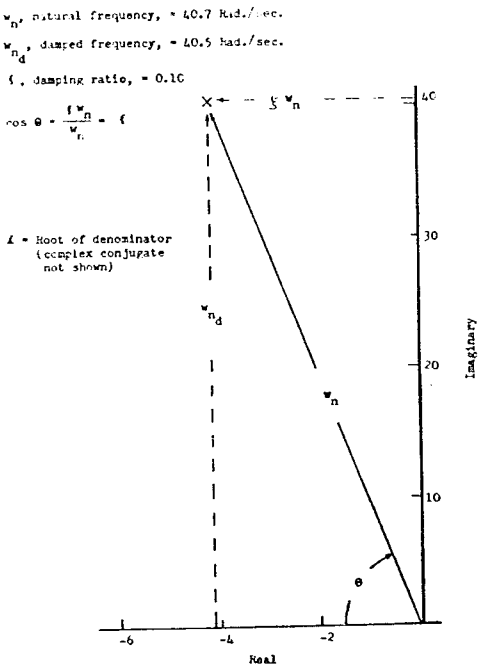


Figure 14. Physical significance of roots of polynomial.

technique to obtain a mathematical expression for vehicle characteristics in the frequency domain that will include significant parameters of the suspension system.

PREDICTION OF DYNAMIC VEHICLE LOAD

A frequency domain characteristic of both the highway and the vehicle make it possible to compute the mean square value and the power spectral density function of the dynamic force. This is done by means of the following relationship (*8*):

$$P_f(f) = P_H(f)|(F/X)(f)|^2 \qquad (3)$$

in which

$P_f(f)$ = power spectrum of the dynamic force.
$P_H(f)$ = power spectrum of highway profile elevations; and
$(F/X)(f)$ = frequency characteristic relating the dynamic force to the highway profile.

This procedure is shown schematically in Figure 15.

As an example, the dynamic load is calculated for a 1955 Chevrolet moving over a new highway in excellent condition. The power spectrum computed from highway profile elevation data is shown in Figure 16 by the solid line.

Because the vehicle characteristic varies with amplitude it is necessary to select a representative curve when making these calculations. The characteristic selected is shown in Figure 17, and represents the maximum envelope of the curves shown in Figure 1. It is evident that a more accurate way of selecting the proper characteristic is desirable.

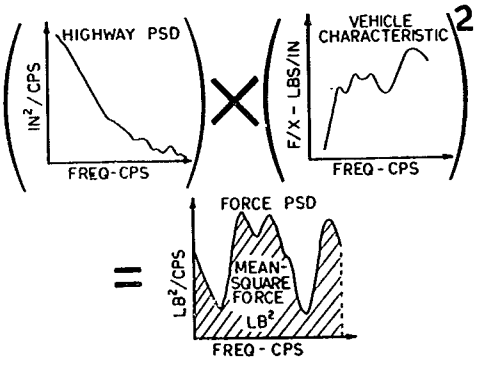


Figure 15. Procedure for computing dynamic force power spectrum.

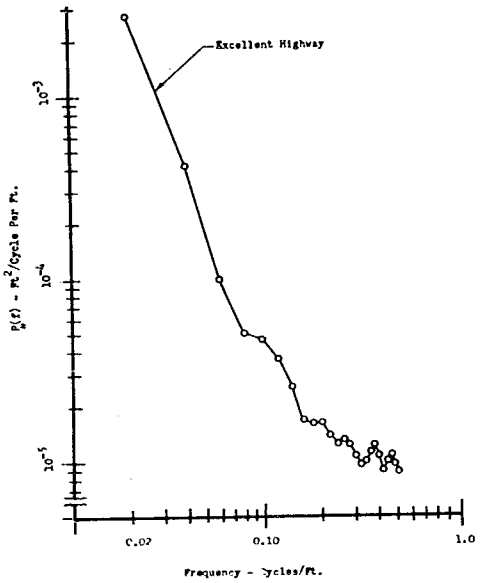


Figure 16. Power spectrum of highway profile elevations.

Performing the calculations indicated above for two vehicle velocities yields the dynamic force power spectra shown in Figure 18. At 60 mph the RMS value of the dynamic force is 130 lb; at 30 mph, 103 lb. These values pertain to the dynamic reaction of the right front wheel of the vehicle upon a highway when this same wheel is excited as shown in Figure 16. The effect of higher speeds on this highway are evident.

Since the RMS values have been computed it is possible to determine

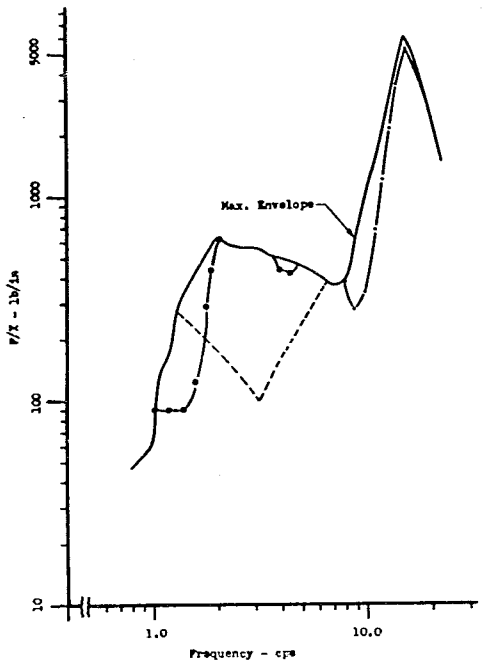


Figure 17. Maximum envelope for 1955 6-cyl Chevrolet sedan.

the probability density function of the dynamic force by using the following equation (assuming a normal distribution).

$$f(F) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{F - \bar{F}}{\sigma}\right)^2 \right] \quad (4)$$

in which

$\bar{F}$ = Static weight of vehicle (per wheel);
σ = Root mean square value of the dynamic force;
F = Static weight of vehicle ± dynamic force; and
$f(F)$ = Probability density function of F.

It is interesting to consider the probability density function of F for the 1955 Chevrolet traveling at 60 mph on an excellent highway. The characteristic of this highway is shown in Figure 16, and the probability density function of F is shown by the solid line in Figure 19. From this curve it is possible to estimate the probability that the value of F will lie between certain limits.

If the root mean square value of F is doubled, the resulting probability density function of F is shown by the dotted line (Fig. 19). It is evident that there is a greater probability of encountering larger values for this condition.

A root mean square value of F of approximately seven times that for the excellent highway has been computed for the same vehicle traveling over the rough terrain at one-half the speed. There is a need, therefore, for additional highway profile elevation data in order to determine the dynamic forces that are being encountered on various highways now in service.

If a highway is to be designed to give satisfactory service when the surface has undergone a certain amount of deterioration it must be

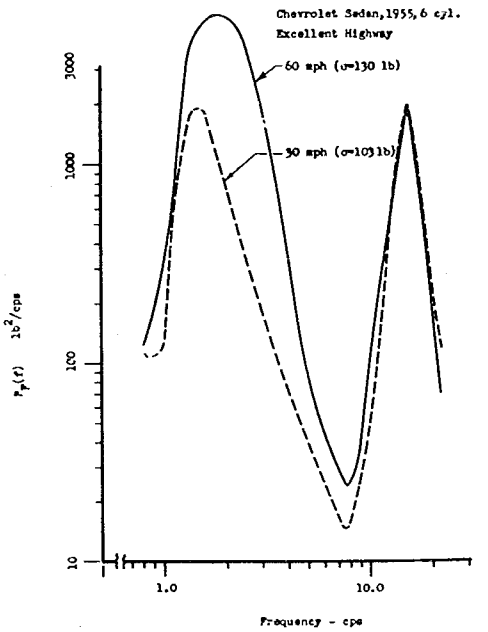


Figure 18. Dynamic force power spectra.

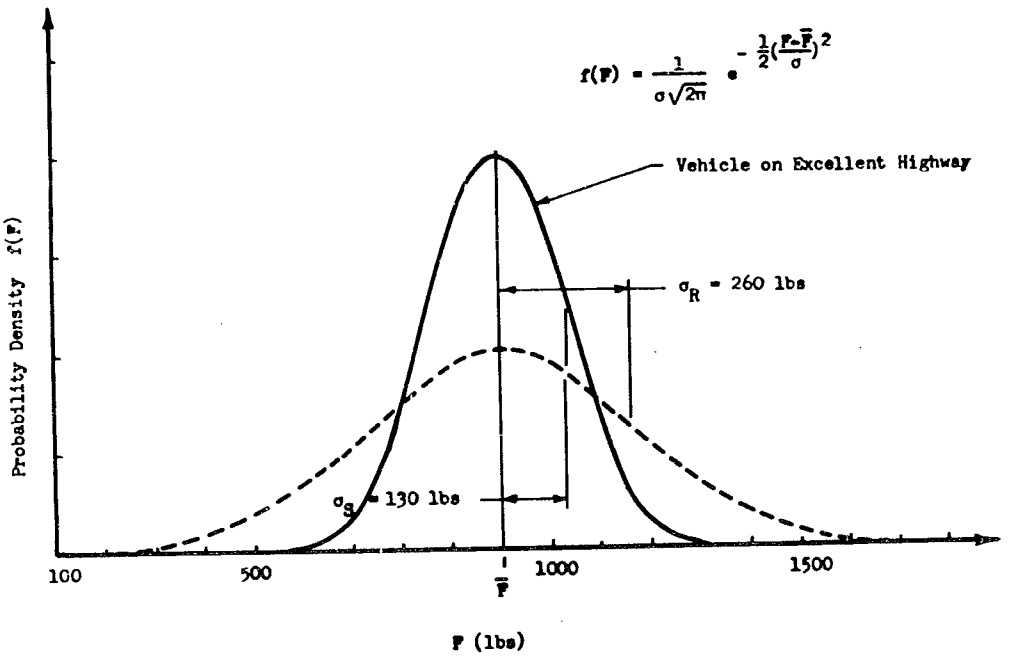


Figure 19. Probability density function for F.

capable of withstanding the greater dynamic forces that result when this deterioration occurs.

CONCLUSIONS

It is evident that frequency domain characteristics can be obtained for a vehicle by using either impulsive or sinusoidal excitation. Results to date indicate that characteristics obtained by impulsive excitation may be more realistic than those obtained by sinusoidal excitation.

The characteristics of the highway and the vehicle can be combined to give an estimate of the RMS value of the dynamic force exerted by the vehicle upon the highway. It is desirable to check these values experimentally in order to determine the accuracy with which they can be obtained.

From the power spectrum of the dynamic force it is possible to determine the range of frequencies that makes the greatest contribution to this force. This information may be valuable in investigating the fatigue strength of the highway. The assumption of a normal distribution for the dynamic force enables an investigator to determine the probability

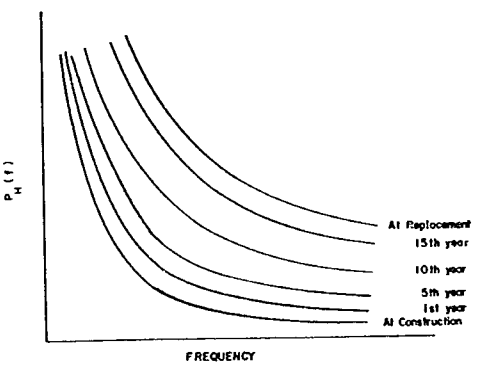


Figure 20. Typical power spectrum history of highway.

of occurrence for various ranges of magnitude of this force. This assumption requires experimental verification, however.

The biggest problem lies in evaluating the effect of the dynamic force on the life of the highway. The dynamic force shown in Figure 18 represents the smallest value that could be expected from the 1955 Chevrolet since the highway was in excellent condition. It is evident that values which are over 10 percent of the static load can be expected under even the best of conditions, and the RMS values are by no means the maximum values that are encountered. The fact that the dynamic load can be estimated indicates a need for further study of this quantity.

It may well be that the speed limits of tomorrow will be based upon the condition of the highway and the type of vehicle using the highway in order to keep the dynamic wheel load within acceptable limits.

ACKNOWLEDGMENTS

This investigation was made possible through support granted by the Bureau of Public Roads under contract CPR 11-6530. Appreciation is also expressed to the Highway Research Board and to various members of the AASHO Road Test staff for encouragement and assistance received during this investigation. The advice and cooperation of William N. Carey, Jr. and Paul E. Irick greatly contributed to the success of this project.

REFERENCES

1. CAREY, W. N., JR., AND IRICK, P. E., "The Pavement Serviceability-Performance Concept." HRB Bull. 250, p. 40-58 (1960).
2. TIMOSHENKO, S., "Vibration Problems in Engineering." D. Van Nostrand, 2nd Ed., p. 238, New York (1937).
3. WALLS, J. H., HOUBOLT, J. C. AND PRESS, H., "Some Measurements and Power Spectra of Runway Roughness." NACA Tech. Note 3305, Washington (Nov. 1954).
4. CARLSON, J. A., "Analytical and Experimental Studies of Vehicle Dynamic Behavior." Industrial Mathematics, Vol. 7, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich. (1956).
5. OLDENBURGER, R., "Frequency Response." Macmillan Co., New York, p. v. (1956).
6. QUINN, B. E. AND DE VRIES, T. W., "Highway Characteristics as Related to Vehicle Performance." HRB Bull. 250, p. 20-38 (1960).
7. SCHUMACKER, L. E., "Methods for Analyzing Transient Flight Data to Obtain Aircraft Frequency Response." MCRFT 2268 Memo. Report, Wright Patterson AFB, Dayton, Ohio.
8. LANING, J. H., AND BATTEN, R. H., "Random Processes in Aumatic Control." McGraw-Hill Book Co., p. 197, New York (1956).

DISCUSSION

CARL F. KOSSACK, *Statistics and Operations Research, IBM Corp.*— The work being carried out by Professor Quinn and his associates at Purdue University is significant. The problem of introducing dynamic vehicle loads into the design of highways is important, as it is the only way that one can really approach the highway problem as a system.

The writer has elected to explore the problem of how measures such as those obtained by the senior author could be used in highway design decisions, leaving some of the more detailed technical questions for another

time. Before discussing this design question, some technical questions, from a statistician's viewpoint, should be asked, recognizing that these may be obvious to the trained engineer.

1. How can the periodic and the random characteristics of a highway profile best be combined?
2. What is the implication of establishing the F/X ratio by using the maximum values of F and X?
3. In the study of the interacting effect of wheel excitation, could there be a significant interaction present if both wheels were simultaneously excited?
4. In the impulsive excitation approach to obtaining frequency domain characteristics, would the more complex systems exhibit the same similarities or response as seen in Figures 10 and 11?
5. Being unfamiliar with the polynomial fitting procedure used in fitting the experimental data, I could not even reproduce the curves given in the text, let alone appreciate the discussion of the physical significance of the roots of the polynomial.

As regards the system problem of highway design, if one can accept the power spectrum representation of a highway as being an adequate indicator of the performance of the highway, one may expect that the history of a highway could be represented by a series of such spectra. Thus we would have a typical power spectrum history of the highway (Fig. 20).

For simplicity let it be assumed that these spectra can be considered as belonging to a single parameter, α, family of curves, say hyperbolas, so that α ranges continuously from $\alpha=\alpha_0$ (excellent) to $\alpha=\alpha_1$ (inadequate). The highway design problem could then be simplified to that of predicting the behavior of the parameter α with respect to time. Two of the major factors that affect α are the weather or environment and the traffic, which of course have strong interacting effects. The problem of measuring the environmental factors are left to other research programs, such as the Road Test group. However, it appears that with an extension of the work done by Professor Quinn, one could, by knowing the characteristics of the traffic expected on the highway, evolve a prediction formula for the parameter α.

It follows from Quinn's work that for each vehicle described in terms of its frequency domain parameters, its tire pressure and speed, one can obtain the dynamic force power spectra for the present highway profile parameter value of α. The application of this force reduces (say) the profile parameter α in some infinitesimal way. The next vehicle, having its own characteristics, is acted upon by the new profile, thus creating a new dynamic force power spectrum that acts upon the highway, changing the α. This pattern continues throughout the life of the highway.

One needs to study the mechanisms of destruction, fatigue, etc., that give rise to this decline in α value, conditioned, of course, to the environmental conditions and the design characteristics of the highway. It is expected that aggregation of the traffic will be needed, but with the new methods of simulation now available using modern computers this may not be a critical problem.

It is hoped that this rough outline helps in some way to point out a direction for this type of research. The writer, being a statistician, would like to look at some past histories of highways where profile data and traffic information are available. It is just possible that through such a statistical study additional insight into the characteristics of these destructive mechanisms could be obtained.

B. E. QUINN and R. VAN WYK, *Closure.*—In attempting to predict

the interaction between a vehicle and a highway it is necessary to use appropriate vehicle and highway characteristics. One method of analysis is to select hypothetical characteristics for this purpose that are convenient to express mathematically and will fit well into subsequent mathematical analysis. If, however, actual vehicles and highways can not be accurately described by these hypothetical characteristics then the results of such an analysis may be of very limited value.

In this paper a different approach was taken to this problem, and highway and vehicle characteristics were used that were determined by experimental methods. As yet convenient mathematical expressions have not been obtained for these characteristics although techniques were discussed for establishing a mathematical vehicle model from experimental vehicle characteristics.

The authors agree with Mr. Kossack that it is desirable to obtain mathematical models that contain a few properly selected parameters to describe highways and vehicles. A fundamental problem in such an undertaking is that of selecting an appropriate criterion for measuring the goodness of fit between the experimental data and the mathematical model. Four such criteria were considered before the curves shown in the paper were selected. Disagreement with the results shown may be due to the use of a different criterion for establishing goodness of fit.

The proposed idea for showing the change in smoothness of a highway over a period of time is being undertaken on a modest scale in Indiana. The highway characteristic shown in Figure 16 was computed from highway elevation measurements obtained by the Indiana State Highway Department on a section of highway for which the location has been carefully recorded. Additional measurements at a later time are contemplated from which the power spectrum will again be computed. A comparison of the smoothness can then be made.

The ability to estimate the dynamic vehicle force raises the question as to the significance of the number thus obtained. What is an acceptable value for this force on present highways? Calculating the stress induced by this force does not resolve the problem since few data are available on permissible levels of random stresses in highway materials.

It is evident that additional information is needed before this design problem can be solved.

建設省土木研究所
47.6.3
図書室

ST-9
ST. Section

土木研究所資料 第七四三号 自動車の走行荷重と構造物の応答……文献(II) 昭和四七年三月 建設省土木研究所

土 木 研 究 所 資 料

第743号

自動車の走行荷重と構造物の応答に関する文献調査

文 献(II)

昭和47年3月

建 設 省 土 木 研 究 所
構造橋梁部 構造研究室

Effect of Pavement Condition on Dynamic Vehicle Reactions	B.E. Quinn, D.R. Thompson
種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用	平井一男
Random Response of Highway Bridges to Vehicle Loads	Chi Chao Tung
活荷重に対する道路橋の動的応答 ―衝撃係数―に関する考察	山田善一 小堀為雄
Non-Stationary Vibrations of Bridges Under Random Moving Load	Ladislav Fryba
構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について定常入力に対する過渡解	後藤尚男 亀田弘行
Response of Highway Bridges to Renewal Traffic Loads	Chi Chao Tung
Live Load Effect on Dynamic Response of Structures	A.R. Chandrasekaran
構造物の不規則振動に関する一考察 ―応答が一定レベルを超える回数の確率分布―	亀田弘行
荷重及び車頭間隔が不規則な分布をなす直路橋の応答解析	平鴨政治 多田一正
走行荷重による長大吊橋の動的応答	小西一郎 白石成人 北川貴一 角田尚志
Fatigue Life of Bridge Beams Subjected to Controlled Truck Traffic	John W. Fisher, Ivan M. Viest
Probability of Structural Failure Under Random Loading	Masanobu Shinozuka
プログラム荷重による疲労寿命の評価	青山咸恒 伊藤三史
Life Expectancy of Highway Bridges to Vehicle Loads	Chi Chao Tung
疲れ被害法則の展望	山田敏郎

実働応力と実働荷重およびその因子	星野次郎
ランダム荷重による疲れ寿命へのパワースペクトルの影響について	菊川真 城野政弘 溝口孝達
新しく試作した機械的方法によるランダム疲れ試験機と試験結果	河本実 石川浩
航空機の実働荷重と疲れ設計	竹内和之
自動車の疲れ設計	岸本秀弘
自動車の不規則振動による疲れの解析	望月晉男
Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation	T.K. Caughey, H.J. Stumpf
Statistical Engergy Analysis of Vibrating Systems	Eric E. Ungar

Effect of Pavement Condition on Dynamic Vehicle Reactions

BAYARD E. QUINN and DAVID R. THOMPSON, respectively, Purdue University and Lockheed Aircraft Corporation

A vehicle traveling over a highway containing surface irregularities experiences vertical motion as well as horizontal motion. Associated with the vertical motion are forces between the highway and the vehicle that are developed in addition to the static weight of the vehicle. These forces are frequently referred to as the dynamic reactions or the dynamic forces. They depend on the vehicle suspension characteristics, the condition of the pavement, and the velocity of the vehicle.

Laboratory tests were conducted to determine the frequencies of vibration at which passenger vehicles would develop large forces between the tires and the pavement. The relationship between force exerted by the tire and vertical displacement of the tire tread was measured at all frequencies at which any appreciable force was developed. The vehicle characteristic thus obtained included the actual effects of all components of the vehicle suspension system.

A criterion of pavement condition was established by making power spectral density analyses of highway elevation measurements. A brief description of the physical significance of this criterion is included.

A procedure is discussed for combining the vehicle characteristics with an elevation power spectrum (pavement condition criterion) at a selected vehicle velocity to obtain a dynamic force power spectrum. The usefulness of this result is discussed and curves of the root-mean squared value of the dynamic force vs vehicle velocity are included for three different pavement conditions.

By using the criterion of pavement condition as defined in this paper it is possible to estimate the dynamic force that one wheel of a vehicle will exert on a highway.

• A VEHICLE parked on a smooth, level highway will exert a force on the pavement that is equal to the combined weight of the vehicle and the cargo. This force is frequently referred to as the static force. If the vehicle moves at a constant velocity over the highway there will be no increase in this force if the tires of the vehicle are properly balanced.

If, however, the vehicle moves along a highway containing pavement irregularities, the vehicle will also experience vertical motion. This motion will be very abrupt if sudden discontinuities such as chuckholes or faults are present. The larger the highway discontinuities, the more violent will be the resulting vertical motion. If large vertical displacements are accompanied by large accelerations, it is evident that the vehicle must experience large forces that will have their origin in the highway. These forces will be in excess of the static force and will be referred to as the dynamic forces.

Although large discontinuities may produce large vertical accelerations and hence generate large forces between the vehicle and the highway, it is possible to reduce the magnitude of these forces by reducing the velocity of the vehicle. Thus, if the vehicle

travels slowly enough over a very rough highway, the increased force between the vehicle and the highway may be held within desired limits.

Large vertical accelerations can also result from smooth undulations in the highway. If the speed of a vehicle is increased sufficiently, a variation in the highway profile that may be unnoticed at a slower speed may result in a violent pitching of the vehicle at a higher speed. It is thus possible for the vehicle to experience large vertical forces from conditions other than discontinuities in the pavement.

Also, characteristics of the vehicle suspension system will influence the behavior of the vehicle. A vehicle with very hard tires will react much more violently to an irregularity than will a vehicle with soft tires. Moreover, the springing between the body of the vehicle and the axles will influence the response of the vehicle on the highway. It is thus evident that the dynamic reaction between a vehicle and a highway will be influenced by the condition of the pavement, the vehicle suspension characteristics and the velocity with which the vehicle is operated.

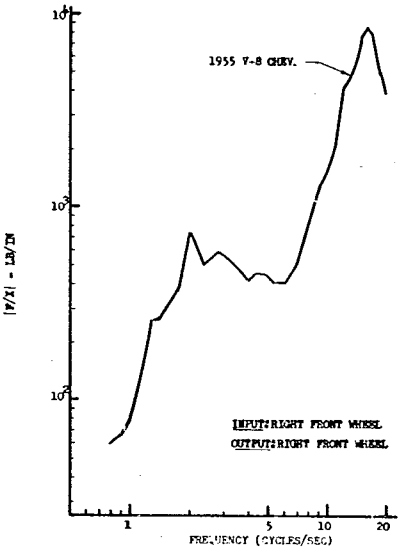


Figure 1. Maximum envelope vehicle response characteristics.

DETERMINING SIGNIFICANT WAVE LENGTHS IN PAVEMENTS

A highway profile contains a tremendous range of wave lengths; close examination reveals very small irregularities in the surface due to finishing. These may have a wave length in the order of a fraction of an inch and a correspondingly small amplitude. On the other hand, the highway may go over hills and down valleys containing wave lengths several miles in length. Between these extremes are undulations having intermediate wave lengths. It is, therefore, necessary to determine the wave lengths in the profile that will be significant in influencing the dynamic force that the vehicle exerts on the pavement.

To determine the significant wave lengths, it is necessary to determine the significant frequencies of vibration of the vehicle. To do this, it is convenient to consider the ratio of the force F which the vehicle exerts on the highway to the vertical displacement X of the tread of the tire. This can be done by constructing a platform that will move up and down with simple harmonic motion having a controlled frequency and an adjustable amplitude X. An electronic scale can be placed on the platform to measure the resulting reaction F. If a wheel of a vehicle is driven onto the platform and the platform is excited, the ratio of F to X can be obtained (1).

A typical vehicle characteristic is shown in Figure 1. It is evident that the vehicle responds to a much greater extent to certain frequencies of vibration than to others. When the wheel is excited at frequencies below 1 cycle per sec (cps), very little force is developed in excess of the static force. At 2 cps a relatively large force is generated, and as the frequency is increased, this force decreases slightly. At 7 cps the force again increases and reaches its maximum value at 15 cps. With a further increase in frequency the force decreases rapidly, and no further increase in force has been observed up to 20 cps. A curve of this type obtained experimentally thus describes the suspension characteristics of a vehicle and includes the effect of tires, springs, shock absorbers, and all other components of the vehicle.

Variations in the highway profile that will excite frequencies of 2 or 15 cps will thus generate large forces between the vehicle and the highway. These frequencies are therefore of interest in predicting the influence of the pavement on the reaction of the vehicle.

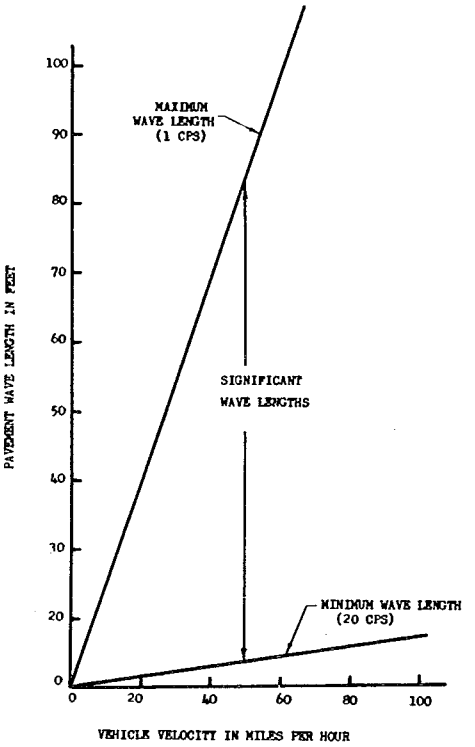


Figure 2. Pavement wave lengths exciting frequencies from 1 to 20 cps in vehicle.

The velocity of a vehicle will influence the frequency of excitation that is received from the highway. For example, a certain highway profile is an endless succession of sine waves each having a wave length of 5 ft. If the vehicle described in Figure 1 travels over this highway at 10 ft per sec it will pass over two complete sine waves per second. Excitation of the vehicle at 2 cps will thus result. If the velocity is increased to 75 ft per sec the vehicle will pass over 15 complete sine waves in 1 sec thus experiencing a 15 cps excitation. A fixed wave length can therefore induce any exciting frequency in the vehicle if the appropriate vehicle velocity is selected.

From Figure 1, it is evident that the range of frequencies causing large dynamic forces between the highway and the vehicle extends from 1 to approximately 20 cps. Wave lengths that excite frequencies of less than 1 cps will cause no appreciable increase in the dynamic force, and wave lengths that excite frequencies appreciably greater than 20 cps will also make very little contribution to this reaction. Thus, only frequencies lying between 1 and 20 cps are of much interest in predicting the dynamic force. A curve showing the significant wave lengths vs vehicle velocity is given in Figure 2. In this figure, the longest wave length of significance (which would generate a disturbance at 1 cps) and the shortest wave length (which would induce a disturbance of 20 cps) are shown by the two lines. At any given velocity the vertical distance between the two lines represents the range of wave lengths that are significant in inducing appreciable forces between the vehicle and the highway. From Figure 2 it is evident that the shortest wave length at 50 mph is of no interest at 80 mph, whereas the long wave length at 50 mph is still effective in producing dynamic force when the vehicle is traveling at 80 mph. It is also evident from Figure 2 that higher vehicle velocities introduce longer wave lengths into the response of the vehicle while eliminating the shorter wave lengths. Having the information shown in Figure 1 for any vehicle would therefore define the region of interest in Figure 2.

DESCRIPTION OF PAVEMENT CONDITION

A suitable criterion is needed to describe the condition of the pavement. This criterion should be based on measurements and should be of such a nature as to be readily used with the vehicle characteristic shown in Figure 1.

A statistical procedure (2) is available for describing random processes, and it is interesting to consider the possible use of this technique for describing pavement conditions. Although a pavement does not completely satisfy all of the requirements, it comes reasonably close in many respects. In the process of applying this procedure it is possible to check the extent to which the pavement fulfills an important necessary condition, and the analysis can be discontinued if the pavement does not display the proper characteristics.

The procedure under consideration is that of making a power spectral density analysis. Because many references (3, 4) are available that give detailed discussions of

this technique no attempt will be made to present these details in this paper. The important considerations in applying the procedure to highway problems will be presented, however.

Although this analysis can be applied to any type of measurement, it is instructive to apply it to highway elevation measurements made at 1-ft intervals using a rod and level. The spacing of these elevations is arbitrary and depends on the wave lengths that are to be resolved. Elevation measurements will not attenuate the long wave lengths that become increasingly important at higher vehicle velocities, and when made with this spacing include wavelengths down to 2 ft.

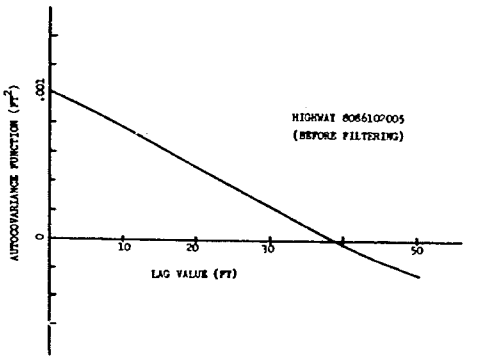


Figure 3. Typical pavement autocovariance function.

An initial data processing operation is necessary to obtain the difference between each elevation measurement and a properly selected base line. From the differences thus obtained the autocovariance function is computed. This can most easily be done on a digital computer, and a typical function for a highway is shown in Figure 3. This function should approach zero and remain at zero as the lag values increase, and the function should not be periodic. The extent to which the autocovariance function fulfills these conditions determines whether the pavement profile is sufficiently random to be described by this technique. An unsatisfactory autocovariance function can frequently be improved by performing a filtering operation on the original data to remove existing periodicity. Errors in the original data can usually be detected from this function. Having obtained the autocovariance function, it is then possible to compute the power spectrum.

To understand the physical significance of a power spectrum analysis of highway elevation measurements, it is important to realize that the power spectrum is computed from the variations in these measurements. If the highway is smooth and level so that the elevation measurements are all the same, all values for the power spectrum will be zero. It is thus evident that only variations in elevations spaced 1 ft apart will be obtained in this analysis. If between two successive elevation measurements a pavement surface should rise sharply and then return to its original elevation, the power spectrum would not be aware of this condition. At first thought, this may appear to be a very severe limitation on the accuracy of a power spectrum based on measurements made at 1-ft intervals to describe pavement conditions, as it is evident that there are irregularities in the highway profile that are smaller than 1 ft in length. Figure 2 shows, however, that at any appreciable velocity the very short wave lengths will have very little effect on the behavior of the vehicle. Thus, a pavement irregularity smaller than 1 ft in length would have to be of appreciable amplitude in order to have a discernable effect on the vehicle. It should thus be realized that the power spectrum contained in this paper can only account for pavement irregularities that would be detected by making elevation measurements at 1-ft intervals.

The variation in the elevation measurements (a measure of pavement roughness) is most easily measured in terms of feet squared, and the ordinates of the power spectrum curve are in terms of feet squared per cycle per foot. The abscissae are in units of feet per cycle, which is the reciprocal of the wave length. A highway power spectrum is thus a purely geometric quantity and does not contain any units of time. When the power spectrum is plotted, the total area under the power spectrum curve will represent the mean squared value of the variation in the elevation measurements, and this value can also be used as a criterion of pavement condition. Of greater importance is the fact that the area under the power spectrum curve between any two selected wave lengths will indicate the contribution to the total roughness or variation in the highway elevation measurements that this range of wave lengths produces. Thus, from the

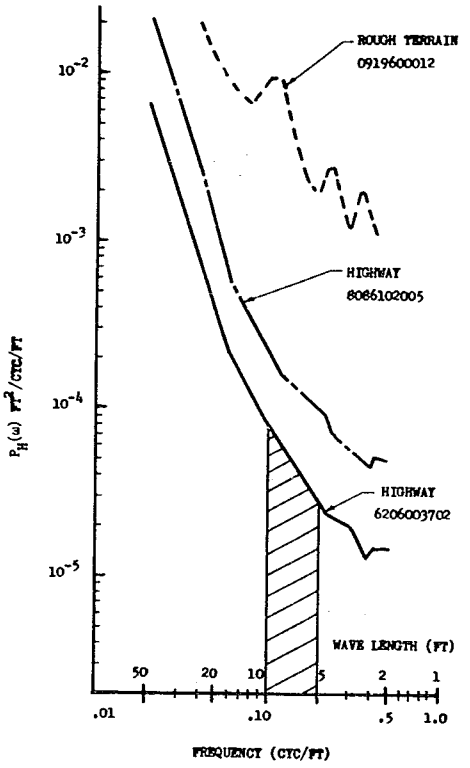


Figure 4. Highway power spectra.

power spectrum curve, it is possible to determine the wave lengths in the pavement that make the greatest contribution to the variation in the elevation measurements.

Typical power spectra curves are shown in Figure 4. The lowest curve in this figure is the power spectrum of an extremely smooth highway. This is to be expected because the area under this curve is less than the area under the other curves shown in the figure. The dotted curve shown at the top of the figure is the power spectrum for rough terrain comparable to a cow pasture. Two extremes are thus represented in Figure 4. Virtually all highways could be expected to lie between these two curves. A highway in fair condition is represented by the middle curve in Figure 4.

Along the horizontal axis is a special scale showing values of wave length. The wave length increases to large values moving from right to left along the horizontal axis. These curves indicate that the greatest variation in the elevation measurements is due to long wave lengths present in the highway. It can thus be seen that large variations are associated with long wave lengths and relatively small variations are associated with short wave lengths. The shaded area lying between wave lengths from 5 to 10 ft long represents the amount of irregularity or roughness that these wave lengths contribute to the total variation in the highway profile. Because at higher vehicle velocities the longer wave lengths become more significant as shown in Figure 2, it is a little disturbing to note that the longer wave lengths tend to increase the excitation to which the vehicle is subjected.

A highway elevation power spectrum can be used with the vehicle characteristics shown in Figure 1, if the velocity of the vehicle is introduced. This is done by multiplying the abscissae of the power spectrum curve by the vehicle velocity to obtain the frequency in cycles per second, and by dividing the ordinates of the power spectrum curve by the vehicle velocity to obtain the units of feet squared per cycle per second. A different curve will thus result for each velocity. By making this transformation, it is now possible to plot the power spectrum curve with the vehicle characteristic shown in Figure 1. This is done in Figure 5 where the vertical axis on the left side indicates the F/X ratio of the vehicle while the vertical axis on the right side indicates the power spectrum values for the highway. This has been done for two different vehicle velocities, and it is evident that as the velocity of the vehicle increases, the longer wave lengths make more of a contribution to the total excitation of the vehicle. Having the information shown in Figure 5, it is now possible to compute the dynamic reaction of the vehicle on the highway.

COMPUTING THE DYNAMIC FORCE

Another property makes these characteristics for the vehicle and the highway very useful. It is possible to combine them to obtain an estimate of the dynamic force that the vehicle will exert on the highway. To do this, it is first necessary to modify the highway characteristic by introducing the vehicle velocity as previously described. An additional

modification must also be made to convert the units of the highway power spectrum from feet squared to inches squared. If this is done, the relationship (5, p. 197) that can be used to determine a power spectrum of the dynamic force that the vehicle will exert on the highway is

$$P_F(f) = P_H(f) \mid F/X\ (f) \mid^2$$

in which

$P_F(f)$ = power spectrum of the dynamic force as a function of frequency in cycles per second (units: lb^2/cps);

$P_H(f)$ = power spectrum of the deviations of the pavement elevations as a function of frequency in cycles per second (vehicle velocity included, units: $in.^2$/cps); and

$F/X(f)$ = ratio of dynamic force to tire tread displacement (vehicle characteristic) as a function of frequency in cycles per second (units: lb/in.).

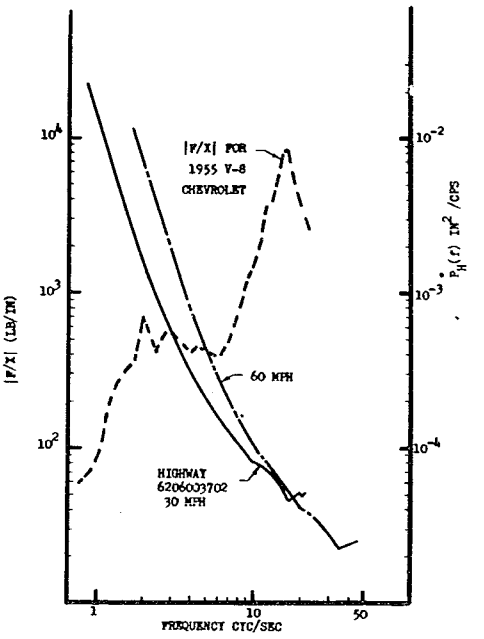


Figure 5. Pavement and vehicle characteristics shown as a function of frequency.

This procedure is shown in Figure 6. The vehicle characteristics must be squared when performing this mathematical operation. This results in extremely large peaks in the vehicle characteristic and makes the maximum values much more significant than they appear from the characteristic curve shown in Figure 1.

A typical result of these calculations is shown in Figure 7, in which the dynamic force power spectrum is plotted. The area under this curve represents the mean squared value of the force that the vehicle exerts on the highway. In addition, the curve shows the contributions to this mean squared force that are made by various ranges of frequency. From the curve in Figure 7, it is evident that two frequency bands make the largest contributions to the dynamic force. It is no coincidence that the center frequencies of these bands occur at the natural frequencies of the vehicle as determined from Figure 1. Also, a large amount of dynamic force is generated at the lower natural frequency of the vehicle as well as at the higher natural frequency. From Figure 1, it would be logical to expect the largest contribution to occur at the highest natural frequency. Allowing for the distortion that results from the use of the log-log plot shown in Figure 7, it is evident that the larger highway excitation occurring at the lower frequencies tends to develop a large amount of dynamic force at the lower frequency even though the vehicle is less responsive to this frequency. Large amounts of excitation at frequencies at which the vehicle is relatively unresponsive can produce a final result of the same order of magnitude as smaller amounts of excitation will produce at frequencies at which the vehicle is extremely responsive.

From Figure 7, it would appear that a record of dynamic force vs time would contain two predominating frequencies. This has been verified experimentally by making tire pressure measurements in which a record of tire pressure vs time was obtained for a typical passenger vehicle. This vehicle was not the same as the one shown in Figure 1 and thus exact agreement is not possible. Figure 8 shows that two frequencies predominate in the record. These two frequencies coincide fairly closely with the frequencies predicted by the power spectrum calculation shown in Figure 7. Steps are

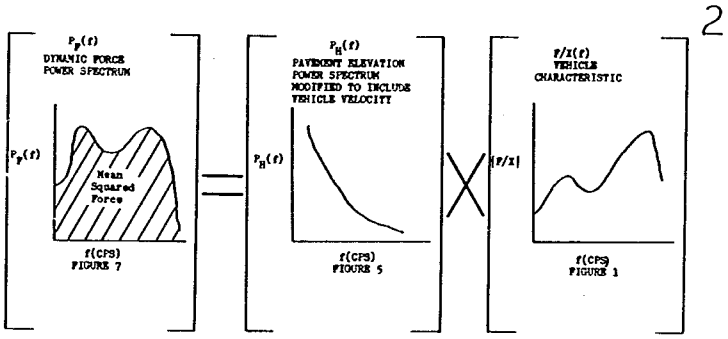


Figure 6. Procedure for computing dynamic vehicle reaction.

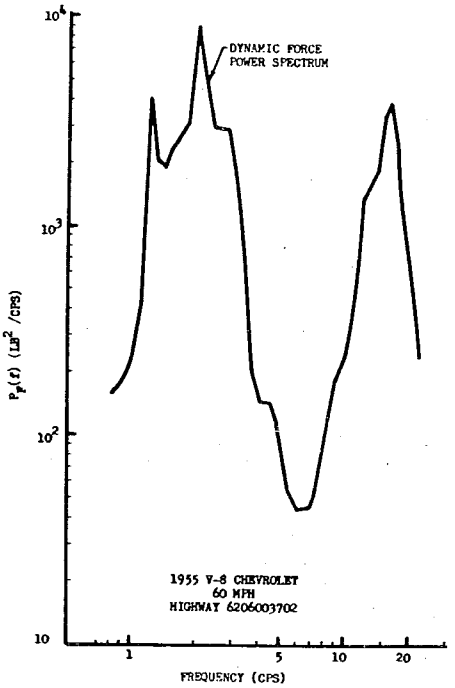


Figure 7. Right front wheel power spectrum.

being taken to obtain additional records of the type shown in Figure 8 so that an experimental check can be made of the predicted values of dynamic force obtained by using the vehicle and highway characteristics just described.

Having the mean squared value of the dynamic force it is easy to determine the root-mean squared value. Using this value, the results of operating the vehicle (shown in Fig. 1) over different highways at various speeds are shown in Figure 9. At certain vehicle velocities an increase in the speed will produce proportionally greater changes in the dynamic force than will occur at other velocities. There are also regions in which increasing the vehicle velocity will result in a decrease in the dynamic force. Using the curves shown in Figure 9, it would be possible to establish vehicle speeds that would result in the same value of dynamic force being generated for the same vehicle on different highways. Vehicle speed limits could thus be based on the allowable amount of dynamic force.

Inasmuch as root-mean squared values are shown, it is evident that larger values for the dynamic force must exist at any given velocity than those shown in the

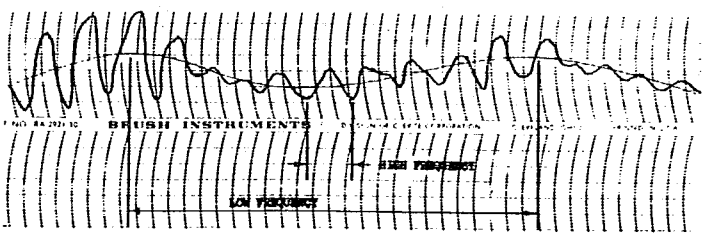


Figure 8. Record of tire pressure vs time on Highway 8086102005.

curves. It would be interesting to know how much larger these forces become and how frequently they reach these larger values. In addition, the curves are based on a pavement roughness criterion (power spectrum) that can only detect pavement variations through elevation measurements made 1-ft apart. Therefore, this calculation results in a conservative estimate of the dynamic force between the vehicle and the pavement, inasmuch as all of the pavement roughness will not be detected.

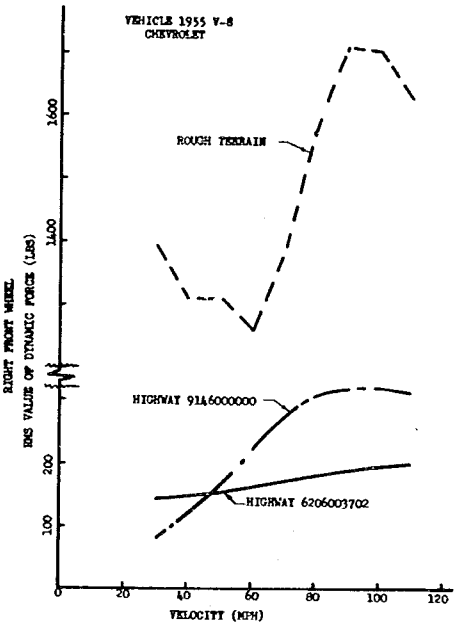


Figure 9. Root-mean squared value of dynamic force vs vehicle velocity.

CONCLUSIONS

By using the procedures described in this paper it is possible to obtain vehicle and pavement characteristics that can be used to compute the power spectrum of the dynamic force that a vehicle will exert on the pavement at any selected velocity. Because these characteristics are determined experimentally, there are relatively few assumptions involved in obtaining the dynamic reaction. Nevertheless the question as to the accuracy of the predicted dynamic force can still be raised. Fortunately, it appears possible to check this force experimentally by using the tire pressure measuring technique mentioned in connection with Figure 9, and steps are being taken to do so.

Although the root-mean squared value of the dynamic reaction can be found, the question as to the maximum value is still unanswered. The validity of assuming that this force has a normal distribution (6) is worthy of additional consideration so that the frequency of occurrence of larger values can be estimated. This can also be studied from tire pressure measurements.

A knowledge of the dynamic reaction between a vehicle and a highway may be of practical value in establishing permissible speed limits for various classes of vehicles. Of the three quantities that influence the dynamic reaction (pavement condition, vehicle characteristic, and vehicle velocity), the velocity of the vehicle is the easiest to change.

A paramount question remains to be answered, however: what is the significance of the dynamic vehicle reaction in terms of the effect on the highway? Is a large force associated with a high vehicle velocity more detrimental than a smaller force at a lower velocity? A knowledge of the behavior of the highway under these conditions is needed.

ACKNOWLEDGMENTS

The support of the Bureau of Public Roads through Contract CPR 11-7941 made possible the research investigation on which this paper is based. This support is gratefully acknowledged.

The authors also wish to thank the AASHO Road Test, William N. Carey, Jr., and Paul E. Irick for assistance in determining vehicle characteristics; E. A. Finney and his staff at the Michigan State Highway Department Laboratory, East Lansing, for assistance in making tire pressure measurements; the Indiana State Highway Department for obtaining elevation measurements from which highway power spectra were computed; and the Highway Research Board for including this paper in the program at the Annual Meeting.

REFERENCES

1. Quinn, B. E., and DeVries, T. W., "Highway Characteristics as Related to Vehicle Performance." HRB Bull. 250, 20-39 (1960).
2. Solodovnikov, V. V., "Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems." Dover (1960). (Translated by J. B. Thomas and L. A. Zadeh.)
3. Blackman, R. B., and Tukey, J. W., "The Measurement of Power Spectra." Dover (1958).
4. American Society for Quality Control and American Statistical Assoc., Technometrics, 3:No. 2 (May 1961).
5. Lanning, J. H., and Batten, R. H., "Random Processes in Automatic Control." McGraw-Hill (1956).
6. Quinn, B. E., and Van Wyk, R., "A Method for Introducing Dynamic Vehicle Loads into Design of Highways." HRB Proc., 40:111-122 (1961).

種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用

平　井　一　男*

要　旨　移動荷重をうける橋梁の振動解析は，従来多くの人によって研究されてきたが，一般にかなり困難な問題であった。この研究は，単純ばり・連続ばり・ゲルバーばり・格子桁などが種々の移動荷重をうける場合，その振動系の基礎微分方程式をたてるにあたって，便利な解析法を新たに提案し，この方法を利用して移動荷重が速度を変化しながら単純ばり上を移動する場合の動的たわみの解を求め，また，実在橋について数値計算を行ない，移動荷重の加速度の大きさが衝撃率にどのような影響を与えるかを合わせて調べてみたものである。

1. はしがき

移動荷重が橋梁上を走行するとき，橋梁に生じる動的影響を調べる問題は重要なことであるから，従来多くの人の研究対象となり，発表されている論文の数も非常に多い。これらの論文において取り扱っている解析法では，はりのたわみ振動の微分方程式

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=F(t,x)$$

を解いて求めるか，または，はりと移動荷重の運動エネルギーを求めて，これを Lagrange の運動方程式に代入して基礎方程式を直接求めるなどの方法がとられてきているようである。橋梁が単純ばりのような簡単な構造物で，かつ，移動荷重も一つの質量のみをもつと考えられるような簡単な場合には，上記の方法によって求めることも比較的簡単である。しかしながら，橋梁が連続ばり・ゲルバーばり・格子桁のようにいくつかのはりが組み合った複雑な構造で，かつ，移動荷重についても，自動車などのように前後車輪部のスプリングに生じる固定摩擦・タイヤなどの非線形の影響をも考慮せねばならないような複雑な振動系の場合となると，これらの方法によって基礎方程式を直接求めることも可能ではあるが，一般には非常に複雑な解析過程を必要とすることが予想される。

以上のようなわけで，筆者のこの研究では，基礎方程式をたてる際に，最初から荷重とはりとを同時に考慮した基礎方程式を直接求める方法をとらないで，まず第一段階としてはりの任意の固定点に $P(t)$ なる外力が作用するときの運動方程式を求めたのち，これを移動荷重が作用する問題に適用することにした。この方法によれば，あらかじめはりの固有振動数，振動モードが求められるかぎり，基礎方程式を比較的簡単に誘導することができるので非常に便利である。このことについてはあとにくわしく述べる。

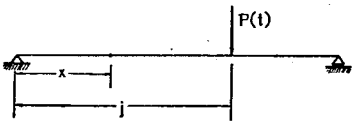
この研究では，まず提案の方法によって，移動荷重によりはりに生じる動的たわみを求める運動方程式を一般の場合について求め，つぎに特別な場合として荷重が単純ばり上を一定加速度で移動する問題を解析し，実在橋に対し数値計算を行ない，橋梁に生じる衝撃率が荷重の速度変化によってどのように変化するかを求めてみた。

2. 基礎方程式

(1) 集中荷重が移動する場合

移動荷重の問題を取り扱う前に，まず図—1に示すような単純ばり上の任意の固定点 $x=j$ に外力 $P(t)$ が作用するとき，任意の点 $x=i$ におけるレスポンスを求めることについて考えてみる。

Fig. 1



はりの自由振動の基礎微分方程式はよく知られているように式（1）で与えられる。

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，

EI：はりの曲げ剛性

ρ：はりの単位長さあたりの質量

上式より，単純ばりの境界条件を満足する条件から，固有角速度 ω_m，振動モード $\varphi_m(x)$ を求めると式 (2),(3) にて与えられる。

$$\omega_m=\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\varphi_m(x)=C\sin(m\pi x/l) \quad \cdots\cdots(3)$$

式（3）によって自由振動の振動モードは決定できるが，その振幅 C の値は任意に選ぶことのできる常数であるから，あとの解析に便利になるように正規化 (Normalize) の条件を満足するように以下の方法によって C を決定する[1]。はりが角速度 ω_m，振動モード $\varphi_m(x)$ なる自由振動を行なっているときには，このはりに分布している慣性力は $\rho\omega_m^2\varphi_m(x)$ で表わされる。

いま，はりに上式で示される m 次の振動モード $\varphi_m(x)$

* 正員　熊本大学助教授　工学部応用力学教室

に対応する慣性力を作用させ，これと n 次の振動モード $\varphi_n(x)$ に対応する変位とで仮想仕事をさせる。このときの仮想仕事 W_1 は次式で与えられる。

$$W_1=\int_0^l[\rho\omega_m^2\varphi_m(x)]\varphi_n(x)dx$$

同様に，n 次の振動モード $\varphi_n(x)$ に対応する慣性力 $\rho\omega_n^2\varphi_n(x)$ と，m 次の振動モードに対応する変位 $\varphi_m(x)$ とで仮想仕事をさせると，このときの仮想仕事 W_2 は次式にて与えられる。

$$W_2=\int_0^l[\rho\omega_n^2\varphi_n(x)]\varphi_m(x)dx$$

この W_1 と W_2 とは Betti's law によって等しいはずであるから

$$(\omega_m^2-\omega_n^2)\int_0^l\varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho\,dx=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

したがって，

$m=n$ のとき　：$\int_0^l\varphi_m^2(x)\rho\,dx=A=$常数

$m\neq n$ のとき　：$\int_0^l\varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho\,dx=0$

Aの値は，式 (3) における C の値によって任意に決められる常数であるから，あとの解析に便利になるよう正規化条件を満足するように定める。振動モード $\varphi_m(x)$ がこのような正規化条件を満足した大きさを持つとき，これを $\Phi_m(x)$ で表わすと上式は式（5）となる。

$$\left.\begin{aligned}&m=n\ \text{のとき}\ :\int_0^l\Phi_m^2(x)\rho\,dx=1\\&m\neq n\ \text{のとき}\ :\int_0^l\Phi_m(x)\Phi_n(x)\rho\,dx=0\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

はりがこのような正規化条件を満足した自由振動を行なうとき，このはりに作用している慣性力は式（6）から求めることができる。

$$L_m(x)=\rho\omega_m^2\Phi_m(x) \quad \cdots\cdots(6)$$

単純ばりの $\Phi_m(x)$ を求めてみると式（7）となる。

$$\Phi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{M}}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに，M：はりの全質量

任意の構造物に外力が作用するとき，構造物に生じる振動はその境界条件を満足する関数である必要がある。自由振動の振動モード $\Phi_m(x)$ は境界条件を満足するようにしてきめた関数であったから，外力が作用したとき構造物に生じる振動モードは，自由振動の振動モードと同じ形をとることが予想される。すなわち，外力が作用したとき構造物に生じる振動 $v(t,x)$ は式（8）のように自由振動の振動モード $\Phi_m(x)$ と時間の関数 $\mathcal{D}_m(t)$ との積の和として表わすことを考える。

$$v(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m=\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{D}_m(t)\psi_m\Phi_m(x) \quad \cdots\cdots(8)$$

ここに，ψ_m は式 (11) にて決定する常数である。

つぎに，作用する外力 $p(t,x)$ は，その分布の仕方は任意であるが時間的変化の状態は同じであるとする。これを式で表わせば式（9）となる。

$$p(t,x)=p(x)\cdot f(t) \quad \cdots\cdots(9)$$

この $p(x)$ は x のみの関数であるから，式（6）の $L_m(x)$ を使用して次式のように展開すると，

$$p(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_mL_m(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m\omega_m^2\rho\Phi_m(x)\cdots(10)$$

ここに，式 (8)，(10) の ψ_m は以下の方法で決定される。すなわち，式 (10) の両辺に $\Phi_n(x)$ をかけて積分すると，

$$\int_0^lp(x)\Phi_n(x)dx=\sum_{m=1}^{\infty}\{\psi_m\omega_m^2\int_0^l\Phi_m(x)\Phi_n(x)\rho\cdot dx\}$$

式 (5) の関係から，$m=n$ の場合にのみ ψ_m が決定できる。すなわち，

$$\psi_m=\int_0^lp(x)\Phi_m(x)dx/\omega_m^2 \quad \cdots\cdots(11)$$

さて，外力 $p(t,x)$ をうけるはりの基礎微分方程式は

$$EI\frac{\partial^4v}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=p(t,x) \quad \cdots\cdots(12)$$

式 (12) に式 (8)，(9)，(10) を代入すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{D}_m(t)\psi_m\frac{d^2}{dx^2}\Phi_m(x)\right]+\rho\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m\Phi_m(x)\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{D}_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty}f(t)\psi_mL_m(x) \quad \cdots\cdots(13)$$

また，式 (12) の右辺を 0 とおいた自由振動の場合には

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\frac{d^2}{dx^2}\Phi_m(x)\right]=\rho\omega_m^2\Phi_m(x)$$

なる関係があるので，これを式 (13) に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\{\ddot{\mathcal{D}}_m(t)+\omega_m^2\mathcal{D}_m(t)-\omega_m^2f(t)\}\rho\Phi_m(x)\psi_m]=0$$

両辺に $\Phi_b(x)$ をかけて積分を行ない，式 (5) の関係を考慮すると次式となる。

$$\ddot{\mathcal{D}}_b(t)+\omega_b^2\mathcal{D}_b(t)=\omega_b^2f(t)$$

一般に，m 次の場合には式 (14) となる。

$$\ddot{\mathcal{D}}_m(t)+\omega_m^2\mathcal{D}_m(t)=\omega_m^2f(t) \quad \cdots\cdots(14)$$

式（8）を式 (14) に代入すると

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2v_m=\omega_m^2\psi_m\Phi_m(x)f(t)$$

上式に式 (11) の関係を代入すると，式 (15) をうる。

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2v_m=\Phi_m(x)\left[\int_0^lp(x)\Phi_m(x)dx\right]f(t) \quad \cdots\cdots(15)$$

いままで外力として分布荷重 $p(x)$ が作用するとして解析を行なってきたが，つぎに集中荷重 $p(t)=P_0f(t)$ が $x=j$ 点に作用する場合について考えてみる。この集中荷重を式で示すと，

$$P(t,x)=P_0\delta(x-j)f(t)$$

ここに δ はディラックの衝撃関数と呼ばれるものである。このような集中荷重の場合には式 (15) の右辺の積

分は，

$$\int_0^t p(x)\Phi_m(x)dx=P_0\Phi_m(x=j)$$

となる。このとき式 (15) は式 (16) となる。

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2 v_m=\Phi_m(x)\Phi_m(x=j)P(t) \quad \cdots\cdots(16)$$

ここに，　x：任意の測定点

j：荷重点

式 (16) は，$x=j$ なる固定点に集中力 $P(t)$ が作用したとき，x の点における m 次の振動モードに対応するたわみ v_m を求める運動方程式である。したがって移動荷重が作用する場合には，単に j を時間の関数として $x=j(t)$ とおけばよい。このとき式 (16) は式 (17) となる。

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2 v_m=\Phi_m(x)\Phi_m\{x=j(t)\}P(t) \quad \cdots\cdots(17)$$

単純ばりの場合には，上式に式 (7) を代入して次式をうる。

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2 v_m=\frac{2}{M}P(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi j(t)}{l}\right) \quad \cdots\cdots(18)$$

上式は，m次の振動モードに対するレスポンスであるから，xなる点におけるたわみは式 (8) により求められる。また，式 (18) は常数を係数とする2階の微分方程式であるから，一般に比較的簡単に解くことができるわけで，式 (18) の解を求めると速度が変化する荷重に対して Lowan が解析した結果と一致する[2]。なお，式 (18) において一定力 P_0 が移動する場合の解を求めると Timoshenko が Lagrange の運動方程式を使用して得た解[3]と一致する。

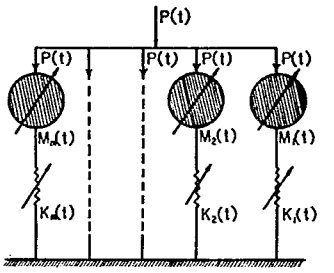
さらに式 (17) における固有角速度 ω_m，振動モード $\Phi_m(x)$ は，式 (1) にて与えられるはりの基礎式をもとにして境界条件を満足するようにして決定したものであるから，これらの値が得られることができたならば式 (17) は，単純ばりにかぎらず連続ばり・ゲルバーばり・格子桁など，すべてのはり構造物に対しても適用できるわけである。これらの構造物に対して現在解析を行なっているので，つぎの機会に発表したい。

（2） 移動荷重をうける構造物の等価モデルについて

一般に，2階の微分方程式は，バネと質量からなる簡単な自由度1の振動系に外力 $P(t)$ が作用したときの運動方程式である。しかるに，はり上の点 $x=j(t)$ に $P(t)$ なる外力が作用する場合でも，任意の点 x における m 次の振動モードに対するたわみ v_m を求める式は，やはり式 (17) にて与えられる2階の微分方程式となるから，**図—1** で示すはりの振動系は **図—2** のようなバネと質量からなる簡単な力学モデルにおきかえることができる。

このときの等価質量 M_m，等価バネ常数 K_m は時間の関数として式 (19) によって求めることができる。

Fig. 2 Equivalent system of bridge under moving force $P(t)$.



$$\left.\begin{aligned} M_m(t)&=\frac{1}{\Phi_m(t)\Phi_m\{x=j(t)\}}\\ K_m(t)&=\frac{\omega_m^2}{\Phi_m(x)\Phi_m\{x=j(t)\}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(19)$$

なお，**図—2** における外力 $P(t)$ は各モデル全部に作用していることを表わしている。

（3） 複雑な振動系が移動する場合

はり上を移動する荷重の問題が **図—2** のような簡単な力学モデルで表わすことができるならば，自動車のように複雑な振動系をもつ荷重が移動する場合も簡単なモデルで表わすことができ，基礎方程式も単に連成振動の問題として容易に誘導することができる。

いま，一例として，自動車がバネ下質量 m_1，バネ上質量 m_2，バネ常数 k なる振動系からできている場合について考えてみる。この場合の等価モデルは **図—3** で表わされる。このとき運動方程式は式 (20) で与えることができる。

$$\left.\begin{aligned} &m_2\ddot{V}_2=-k(V_2-V_1)+m_2g\\ &m_1\ddot{V}_1=k(V_2-V_1)+m_1g-X\\ &V_1=\sum_{i=1}^{\infty}[v_i\Phi_i\{x=j(t)\}/\Phi_i(x)]\\ &M_1(t)\ddot{v}_1=-K_1(t)v_1+X\\ &M_2(t)\ddot{v}_2=-K_2(t)v_2+X\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ &M_m(t)\ddot{v}_m=-K_m(t)v_m+X\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

ここに X は一種の不静定力である。

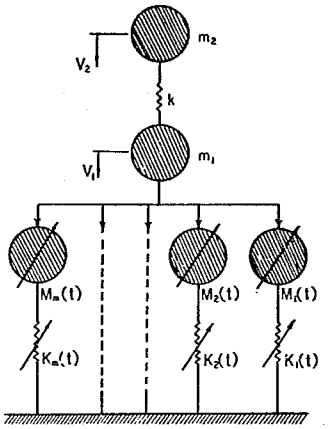
式 (20) は多元連立微分方程式であるから，通常の方法によっては簡単に解くことができないが，特別な場合として，機関車（質量 m_1）が単純ばり上を一定速度（V）で移動する場合について考えてみる。この場合には式 (20) において

$$m_2=k=V_2=0$$

$$M_m(t)=\frac{M}{2\sin\left(\frac{m\pi Vt}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}$$

$$K_m(t)=\frac{M\omega_m^2}{2\sin\left(\frac{m\pi Vt}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}$$

Fig. 3 Equivalent system of bridge under moving vehicle.

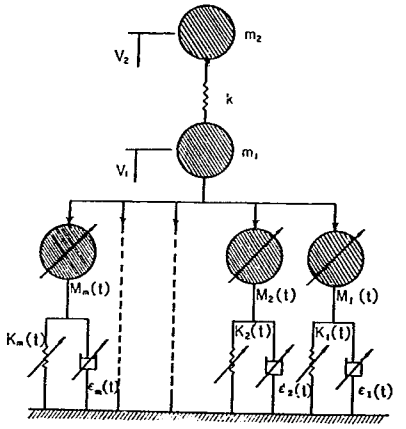


とおけばよい。この式は国井博士が Lagrange の運動方程式を用いて誘導した基礎式[9]において，機関車のハンマー力を無視した場合と一致する。

また，式 (20) は，自動車が図—3のごとき簡単なモデルで示される場合について立てた基礎式であるが，自動車がクーロン摩擦などの非線形要素をもつ場合についても，同様な方法によって運動方程式を簡単に立てることができる。

いままでは，橋梁の減衰の影響を無視して考察してきたけれども，図—2 のモデルをもととして減衰の影響をも考慮することができる。橋梁の減衰は，鋼・コンクリート構造内部のエネルギーの損失・桁支点部の固体摩擦などいろいろ複雑な要素に起因するものと考えられているが，橋梁の自由振動の実測の結果では，その減衰の状態はほぼ対数減衰する。このような事実から，減衰はたわみの速度に比例するという簡単化した方法をとれば，

Fig. 4 Equivalent system of damped bridge under moving vehicle.



この減衰の影響は図—4に示す位置にダッシュポットとして等価的に入れることができる。この場合，減衰係数 ϵ_m は対数減衰率より定められる。

(4) 荷重の速度が変化する場合の解

荷重が単純ばり上を移動するとき，任意の点 x のたわみは式 (18) の解の和として求めることができる。

特別な場合として，一定力 P_0 が任意の速度で移動する場合について考えてみる。このとき，式 (18) の右辺によって解が変化するから，いま，簡単のために

$$2P_0\left\{\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right\}/MI=1$$

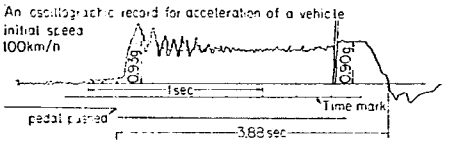
$$A_{jmx}=\sin\left(\frac{m\pi j(t)}{l}\right)$$

とおくことにする。このとき式 (18) は (21) となる。

$$\ddot{v}_m+\omega_m^2 v_m=A_{jmx} \quad \cdots\cdots(21)$$

自動車の速度変化については種々の場合が考えられるが，ここでは特別な場合として，自動車の加速度が一定の場合について考えてみる。名神高速道路山科地区において高速度で乗用車を走行させ，その急停車時におけるタイヤのスリップ破損の試験を行なっているが，その際，自動車の加速度の変化をも記録している (図—5)。この測定記録によると，自動車の加速度はほとんど一定と考えられるから，自動車がこのような急停車，または増速を橋梁上で行なうことを想定してみた。

Fig. 5



荷重が a の地点より，初速度 v_0，加速度 $\pm u$ で移動を開始したとすると，A_{jmx} は次式となる。

$$A_{jmx}=\sin(\alpha a+\alpha v_0 t+0.5\alpha u t^2)$$

ここに，$\alpha=m\pi/l$

A_{jmx} が上式のような関数で表わされる場合には，式 (21) は簡単に解くことができないので，A_{jmx} をつぎに示すようにフーリエ級数に展開する。

$$t^2\fallingdotseq\frac{\pi^2}{4}-\frac{8}{\pi}\left(\cos t-\frac{\cos 3t}{3^3}\right)$$

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta$$

$$\cos(x\cos\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

$$\sin(x\cos\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x)\cos(2k+1)\theta$$

ここに，$J_n(x)$ は Bessel 関数である。

ゆえに，A_{jmx} は次式となる。

$$A_{jmx}\fallingdotseq a_0\sin(\alpha'+N_0t)+\sum_{n=1}^{6}a_{2n}\{\sin(\alpha'+N_{2n}t)+\sin(\alpha'+N_{2n}'t)\}+\sum_{n=1}^{6}a_{2n-1}\{\cos(\alpha'+N_{2n-1}t)+\cos(\alpha'+N_{2n-1}'t)\}\quad\cdots\cdots(22)$$

ここに，

$$\alpha'=\alpha a+\alpha ut_0^2/8,\quad N_n=\alpha v_0+n\pi/t_0$$
$$b_1=4\alpha ut_0^2/\pi^3,\quad N_n'=\alpha v_0-n\pi/t_0$$
$$c_1=b_1/27,\quad t/t_0\leq 1/2$$

t_0 は t が $t/t_0\leq 1/2$ を満足するようにきめる規準時間であり，ここでは停車までの時間の2倍をとっている。

$$a_0=J_0(c_1)J_0(b_1)-2J_1(c_1)J_3(b_1)$$
$$a_2=-J_0(c_1)J_2(b_1)+J_1(c_1)J_1(b_1)+J_1(c_1)J_3(b_1)$$
$$a_4=J_0(c_1)J_4(b_1)+J_1(c_1)J_1(b_1)-J_1(c_1)J_7(b_1)$$
$$a_6=-J_0(c_1)J_6(b_1)-J_1(c_1)J_5(b_1)+J_1(c_1)J_9(b_1)$$
$$a_8=J_0(c_1)J_8(b_1)+J_1(c_1)J_5(b_1)$$
$$a_{10}=-J_1(c_1)J_7(b_1)$$
$$a_{12}=J_1(c_1)J_9(b_1)$$
$$a_1=-J_0(c_1)J_1(b_1)-J_1(c_1)J_2(b_1)+J_1(c_1)J_4(b_1)$$
$$a_3=J_0(b_1)J_1(c_1)+J_0(c_1)J_3(b_1)-J_1(c_1)J_6(b_1)$$
$$a_5=-J_0(c_1)J_5(b_1)-J_1(c_1)J_3(b_1)+J_1(c_1)J_8(b_1)$$
$$a_7=J_0(c_1)J_7(b_1)+J_1(c_1)J_4(b_1)$$
$$a_9=-J_0(c_1)J_9(b_1)-J_1(c_1)J_6(b_1)$$
$$a_{11}=J_1(c_1)J_8(b_1)$$

式 (21) の右辺が式 (22) にて与えられ，初期条件が $t=0$ において，$v_m=0$, $\dot{v}_m=0$ である場合には，式(21)の解 v_m は式 (23) にて与えられる。

$$v_m=\frac{a_0\sin(\alpha'+N_0t)}{\omega_m^2-N_0^2}+\sum_{n=1}^{6}a_{2n}\left[\frac{\sin(\alpha'+N_{2n}t)}{\omega_m^2-N_{2n}^2}+\frac{\sin(\alpha'+N_{2n}'t)}{\omega_m^2-N_{2n}'^2}\right]+\sum_{n=1}^{6}a_{2n-1}\left[\frac{\cos(\alpha'+N_{2n-1}t)}{\omega_m^2-N_{2n-1}^2}+\frac{\cos(\alpha'+N'_{2n-1}t)}{\omega_m^2-N_{2n-1}'^2}\right]-\cos\omega_mt\left[\sin\alpha'\left\{\frac{a_0}{\omega_m^2-N_0^2}+\sum_{n=1}^{6}a_{2n}\left(\frac{1}{\omega_m^2-N_{2n}^2}+\frac{1}{\omega_m^2-N_{2n}'^2}\right)\right\}+\cos\alpha'\sum_{n=1}^{6}a_{2n-1}\left(\frac{1}{\omega_m^2-N_{2n-1}^2}+\frac{1}{\omega_m^2-N_{2n-1}'^2}\right)\right]-\frac{\sin\omega_mt}{\omega_m}\left[\cos\alpha'\left\{\frac{a_0N_0}{\omega_m^2-N_0^2}+\sum_{n=1}^{6}a_{2n}\left(\frac{N_{2n}'}{\omega_m^2-N_{2n}'^2}+\frac{N_{2n}'}{\omega_m^2-N_{2n}'^2}\right)\right\}-\sin\alpha'\sum_{n=1}^{6}a_{2n-1}\left(\frac{N_{2n-1}'}{\omega_m^2-N_{2n-1}'^2}+\frac{N_{2n-1}'}{\omega_m^2-N_{2n-1}'^2}\right)\right]\quad\cdots\cdots(23)$$

3. 数値計算

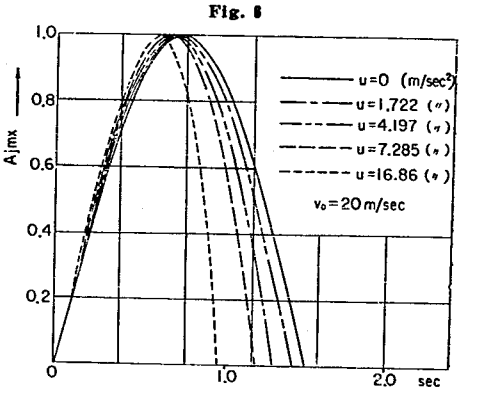
2.に述べたように，荷重が速度を変化させながら橋梁上を移動するとき，任意の点に生じるたわみ v_m は式 (23) にて求めることができるわけであるが，実在橋に対して荷重の加速度の大きさがどの程度衝撃率に影響を与えるかを調べるために，数値計算を行なってみた。計算例として取り扱った橋梁は，昭和 32 年に大阪市に架設された長堀川新橋である。この橋は，桁高を極端に小さくすることを要求されているために，中空板構造の方式をとっている。この橋の諸定数は下記に示すとおり。

スパン $l=30.6$(m)，固有角速度 $\omega_m=17.93$ m²(rad/sec)，全重量 $W=321.9$(t)，曲げ剛性 $EI=3.107\times10^{13}$ (kg-cm²)

荷重の速度変化としては，増速，減速の2つの場合が考えられるが，実際の問題として自動車が増速する場合の加速度の値は比較的小さい。これに反して減速の場合には，急停止・衝突の場合などが考えられるから，加速度がかなり大きい値をとることが予想されるので数値計算は主として後者について行なった。また，自動車の減速は任意の点から開始してよいのであるが，ここでは荷重が橋梁に入った瞬間から減速をはじめると仮定して計算を行なった。

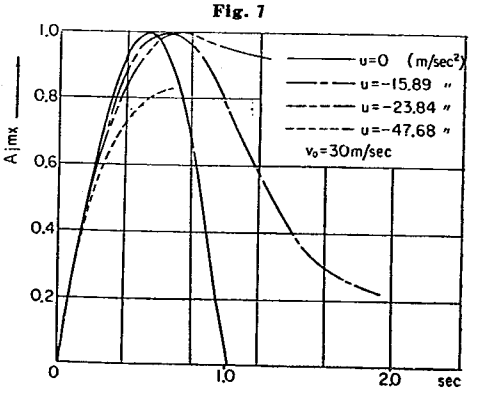
たわみの測定点は $l/2$ 点とし，$P_0=164.2$kg の一定荷重が移動する場合について計算を行なった。式 (23) の計算を行なうにはかなりの労力を要するので，計算はすべて Digital Computer の力を借りた。また，式(22)による A_{jmx} の展開の際には，誤差が2％以内となる項数までとった。

Fig. 6



Variation of Ajmx

Fig. 7



Variation of Ajmx

式(21)の右辺 A_{jmx} の関数によってたわみの振動状態が決定するので，自動車が減速，増速する場合，加速度の大きさに対して，この A_{jmx} がどのように変化するかの一例を図—6，7 に示す。荷重が，初速度 20 m/sec，30 m/sec で橋梁内に入ってきて一様加速度で減速するとき，$l/2$ 点に生じるたわみの状態を 図—8,9 に示した。

Fig. 8

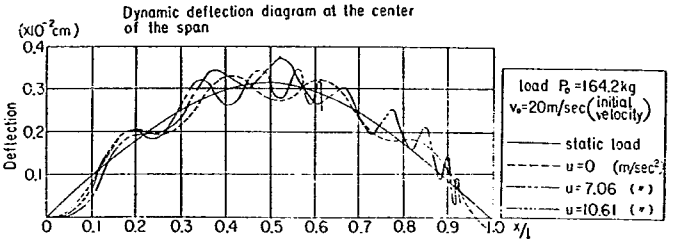
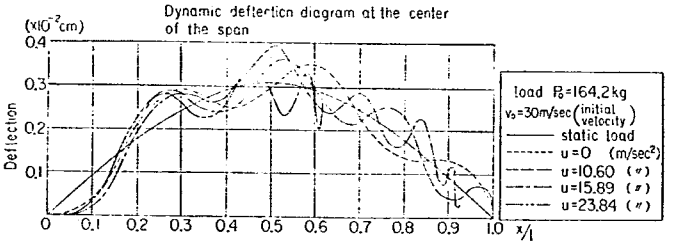


Fig. 9



4. 結　　論

以上，移動荷重がはり上を走行するとき，はりに生じる動的たわみを理論的に求める新しい解析方法と，これを単純ばり上に一定加速度で荷重が移動する問題に適用した場合について述べたが，つぎのことが結論づけられると思う。

（1） 理論式について

すでに述べたように，移動荷重の問題を解析する基礎方程式は，図—3 の等価モデルをもととして，単に連成振動の問題として式 (20) を誘導することができた。式 (20) は，構造物の固有角速度，振動モード，荷重の振動モデルさえ与えられるならば容易に立てることのできる式である。この固有角速度，振動モードは，構造物が非線形要素をふくまないかぎり比較的簡単に求めることができる場合が多いので，このような解析法は便利と考えられる。

なお，式 (20) は多元連立微分方程式であるから，通常の方法によっては簡単に求めることができないわけであるが，この種の問題はアナログ計算機を使用すれば非常に簡単に解けるので，現在，これら複雑な荷重が移動する問題について解析することを計画している次第である。また，この解析法は式 (12) で与えられるはりの基礎式をもととして出発しているが，さらに同様な解析は直交異方性板の場合にも拡張できる。このとき式 (12) のかわりに，直交異方性板の微分方程式を使用して同様な過程により解析できる。このことについては，つぎの機会にくわしく述べる。

（2） 一定力 P_0 が一様加速度で移動する場合

荷重が一定加速度で移動する場合，式 (21) は簡単に解くことができないので，A_{jmx} を Fourier 級数に展開して式 (23) によってたわみを求めた。しかし，数値計算の結果を等速度で荷重が移動する場合と比較するとき，図—8,9 からわかるように最大たわみは荷重が初速度 20 m/sec (72 km/h) にて橋梁に入る場合 10～12% 程度増加し，初速度 30 m/sec (108 km/h) の場合には10～15%程度増加している。しかし，加速度の大きさが大きいときに最大たわみが生じるわけでなく，20 m/sec の初速度をもつ場合には $u=7.064$ m/sec²，初速度 30 m/sec の場合には $u=15.89$ m/sec² のときに生じており，これより加速度が大きくなるとたわみはむしろ減少する傾向にある。図—5 に示す乗用車の加速度の測定記録は急停止する場合のものであるが，この測定記録では，加速度はほぼ 1～0.9 g の範囲にあると考えられるから，このような急停止を橋梁上で行なった場合にはほぼ最大のたわみが生じると考えてよい。この計算では，すべて荷重がスパンに入った瞬間から減速すると仮定して計算を行なっているから，荷重がスパン内の任意の点で減速を開始した場合には，さらに大きい衝撃率が得られるかもしれないが，あまり大きい値になることは期待できないと思う。

この研究を行なうにあたり，ご支援いただいた名古屋大学 成岡教授，熊本大学 吉村教授に深く感謝するとともに，電子計算機の計算にご協力いただいた，新三菱重工神戸造船所 山口富夫氏，および多数の学生諸氏に謝意を表する。

参 考 文 献

1) Norris, Hansen : Structural design for dy namic loads, Mc. Graw, 1959.
2) Lowan : On transverse oscillations of beams under the action of moving variable loads, Phil. Mag., 19 (1935), p. 708.
3) Timoshenko : Vibration problems in engineering, Mc. Graw, 1951, p. 353.
4) Mise, Kunii : A theory for the forced vibrations of a railway bridge under the action of moving loads, Quar. J. Mech. and Appl. Math.,Vol. 9, 1956, p. 195.
5) Hillerborg : Dynamic influences of smoothly running loads on simply supported girders, Institution of Structural Engineering and Bridge Building of the Royal Institute of Technology, Stockholm, 1951.
6) Tung, Goodman, Newmark : Highway bridge impact problems, Highway Research Board Bulletin, No. 124, 1955. Washington D.C., p. 111～133.

(原稿受付：1962.8.26)

Journal of the
ENGINEERING MECHANICS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

RANDOM RESPONSE OF HIGHWAY BRIDGES TO VEHICLE LOADS

By Chi Chao Tung,[1] A. M. ASCE

INTRODUCTION

The dynamic response of highway bridges under the passage of vehicles has been the subject of study for many years. Numerous theoretical and experimental investigations have been made which have led to valuable information. While most of the investigations emphasized the deterministic aspect of the problem, it has long been recognized that vehicular traffic is statistical in nature[2,3] and should be treated as such. It is the purpose of this study to formulate the problem on a probabilistic basis and introduce a method of solution that gives response quantities such as the probability distribution function and the expected rate of threshold crossings of the response which are of interest to structural engineers.

Idealization of Problem.—Among the many stochastic processes that have been suggested for modeling traffic flow patterns, the simple Poisson process will be used. That is, the total number of vehicles that arrive on a bridge up to time t, is an integer-valued process $N(t)$; $t \geq 0$, and the probability that k vehicles arrive in the time interval $(0,t)$ is given by

$$P\{N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

in which λ is the intensity of the Poisson Process.

The bridge is idealized as a linear damped system. This assumption is basic to the formulation of the problem although the bridge can be of any form; single-span simply supported, continuous, cantilevered, etc. The force ex-

Note.—Discussion open until March 1, 1968. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 93, No. EM5, October, 1967. Manuscript was submitted for review for possible publication on December 8, 1967.

[1] Asst. Prof. of Civ. Engrg., Univ. of Illinois, Urbana, Ill.

[2] Stephenson, H. K., "Highway Bridge Live Loads Based on Laws of Chance," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 83, No. ST4, Proc. Paper 1314, July, 1957.

[3] Herman, Robert, ed., "Theory of Traffic Flow," Proceedings, Symposium on Traffic Flow, Warren, Michigan, Elsevier Co., New York, 1961.

erted by a vehicle on the bridge will be considered as a moving constant force. All vehicles travel at the same constant speed and have equal weight. These assumptions are introduced here to make the formulation simple. A more elaborate vehicle loading model can be used and the restrictions regarding the weight and speed of the vehicles can also be removed at the expense of more involved formulation and lengthy computations.

Response of the Bridge System.—The response process of the bridge system subjected to the vehicle loading process described above can be shown to be a filtered Poisson process. Suppose the response of the bridge at time instant t resulting from the passage of a vehicle which arrives at instant τ is $h(t - \tau)$, then,

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} h(t - \tau_n) \quad t \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

represents the total effect on the bridge at instant t of the action of all vehicles which have arrived at instants $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{N(t)}$, in which $N(t)$ is the Poisson counting process governing the number of vehicles that have arrived in the time interval (0, t). Here superposition of the effects of vehicles on the response of the bridge holds because of the assumption of linearity. The fact that the force exerted on the bridge is a constant moving force with constant speed makes the influence function $h(t)$ of the filtered Poisson process homogeneous in time. The use of the same $h(t)$ for all vehicles implies that all vehicles are of the same weight and travel at the same speed. Having formulated the response process $\gamma(t)$ in the frame work of a filtered Poisson process, the moment functions such as the mean value function, variance function and the covariance function can be computed from known formulas.[4]

PROBABILITY DENSITY FUNCTION

Although the moment functions furnish some statistical information of the response process of the bridge, more complete information is contained in the probability density function or the probability distribution function of the response process. Expression of the characteristic function of a filtered Poisson process is known in integral form but the integration is in general difficult to perform. It is the purpose of this study to use a numerical technique,[5,6] applicable under certain conditions, to obtain the probability density function of the response process. The numerical technique requires that the intensity λ of the Poisson process be small and the influence function $h(t)$ is non-zero only over a finite interval. These conditions are satisfied for the problem under consideration; in highway traffic, λ is usually small and damping in the bridge system ensures that $h(t)$ becomes negligibly small after a finite duration. That is,

[4] Parzen, E., Stochastic Processes, Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif., 1962.

[5] Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1965.

[6] Bernknoff, G., "The Poisson Distribution and Shot Noise," thesis presented to the Polytechnic Institute of Brooklyn, at New York, in 1964, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science.

$$h(t) = 0,\ t < 0 \text{ or } t > T \quad \ldots\ldots\ldots\

of $Y(t)$. Taking the Fourier transforms of both sides of Eq. 10 yields

$$\Phi_Y(\omega) = e^{-\lambda T}\left[1 + \lambda T\phi(\omega) + \ldots + \frac{[\lambda T\phi(\omega)]^k}{k!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda T}e^{\lambda T\phi(\omega)} = e^{\lambda T[\phi(\omega)-1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

It is seen from Eq. 10 that the expansion enables one to compute the probability density function $f_Y(y)$ as long as $g(y)$ and its k-fold convolution are known and that λ is sufficiently small so that only the first few terms in the expansion need be retained.

The computation of $g(y)$ and the repeated convolution of $g(y)$ depend on the shape of the influence function $h(t)$. If $h(t)$ consists only of a straight line,

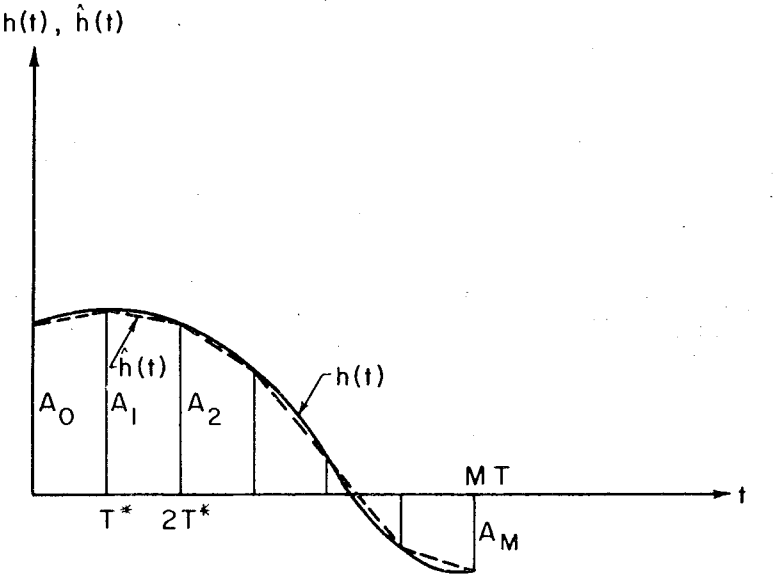


FIG. 1.—INFLUENCE FUNCTION OF FILTERED POISSON PROCESS

$g(y)$ is uniformly distributed and the k-fold convolution of $g(y)$ with itself can be easily determined.[7]

In general, more general influence functions are involved. An effective way of computing $f_Y(y)$ is to approximate $h(t)$ by a sum of M nonoverlapping trapezoids as shown in Fig. 1. For simplicity all the trapezoids are assumed to have the same base width T^*. The resulting function will be denoted by $\hat{h}(t)$. That is,

$$\hat{h}(t) = \sum_{m=1}^{M} h_m(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

[7] Papoulis, A., The Fourier Integral and its Applications, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962.

in which $h_m(t) = \hat{h}(t)$ for $(m-1)T^* \le t \le mT^*$ ..... (13)

$= 0$ otherwise

and the response process is approximately,

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \hat{h}(t-\tau_n) = \sum_{n=1}^{N(t)} \left[\sum_{m=1}^{M} h_m(t-\tau_n) \right]$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} h_m(t-\tau_n) \right] = \sum_{m=1}^{M} Y_m(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Thus, the response process $Y(t)$ can be considered as the sum of M response process $Y_m(t)$, $m = 1, \ldots M$ whose influence functions are $h_m(t)$, $m = 1 \ldots M$. For a given t, each of the $Y_m(t)$ takes non-zero value only for τ_n in the interval $[t-(m-1)T^*, t-mT^*]$. Therefore, $Y_m(t)$, $m = 1, \ldots, M$ are independent and the probability density function for each of the $Y_m(t)$ is given by Eq. 10,

$$f_{Y_m}(y) = e^{-\lambda T^*} \left[\delta(y) + \lambda T^* g_m(y) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} g_m(y) * g_m(y) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda T^*)^k}{k!} \underbrace{g_m(y) * \ldots * g_m(y)}_{k \text{ fold convolution}} + \ldots \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

in which $g_m(y)$ is the probability density function of $h_m(t-\tau)$, τ being uniformly distributed in the interval $[(m-1)T^*, mT^*]$. The characteristic function for each of the $Y_m(t)$ is

$$\Phi_{Y_m}(\omega) = e^{-\lambda T^*} \left\{ 1 + \lambda T^* \phi_m(\omega) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\phi_m(\omega) \right]^2 \right.$$

$$\left. + \ldots \frac{(\lambda T^*)^k}{k!} \left[\phi_m(\omega) \right]^k + \ldots \right\} = e^{-\lambda T^*} e^{\lambda T^* \phi_m(\omega)} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

in which $\phi_m(\omega)$ is the characteristic function corresponding to the probability density function $g_m(y)$. The characteristic function for $Y(t)$, which is the sum of M independent random variables $Y_m(t)$, is, using Eq. 16,

$$\Phi_Y(\omega) = \prod_{m=1}^{M} \Phi_{Y_m}(\omega) = (e^{-\lambda T^*})^M \prod_{m=1}^{M} e^{\lambda T^* \phi_m(\omega)}$$

$$= e^{-\lambda T} \exp \left[\lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega) \right] = e^{-\lambda T} \left\{ 1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega) \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega) \right]^2 + \ldots + \frac{(\lambda T^*)^k}{k!} \left[\sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega) \right]^k + \ldots \right\} \quad (17)$$

Expanding the powers of $\sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega)$,

$$\Phi_Y(\omega) = e^{-\lambda T} \left\{ 1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\sum_{m=1}^{M} \phi_m^2(\omega) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \phi_j(\omega) \sum_{k=j+1}^{M} \phi_k(\omega) \right] + \ldots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

where, for purpose of illustration, only the second-order term has been expanded and shown.

Taking the inverse Fourier transform of both sides of Eq. 18, the probability density function of $Y(t)$ is,

$$p_Y(y) = e^{-\lambda T} \left\{ \delta(y) + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} g_m(y) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\sum_{m=1}^{M} g_m(y) * g_m(y) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} g_j(y)^* \sum_{k=j+1}^{M} g_k(y) \right] + \ldots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

The probability density functions $g_m(y), m = 1, \ldots, M$ in Eq. 19 are uniformly distributed and the convolutions $g_j(y) * g_k(y)$ for $j, k = 1, \ldots M$ can also be easily found.[7]

EXPECTED RATE OF THRESHOLD CROSSINGS

For structural designers who are concerned with the fatigue damage of the bridge, a quantity such as the expected rate of threshold crossings of the response process can be of much value. To obtain the expected rate of threshold crossing, the joint probability density function of the response process $Y(t)$ and its first derivative process $\dot{Y}(t)$ is required. Approximating again the influence function $h(t)$ by line segments as before, the derivative of $h(t)$ from Eq. 12 becomes,

$$\dot{h}(t) = \sum_{m=1}^{M} \dot{h}_m(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

in which $\dot{h}_m(t)$ is the derivative of the function $h_m(t)$ and is constant in the interval $[(m-1)\,T^*, mT^*]$, $m = 1, \ldots M$. In fact,

$$\dot{h}_m(t) = \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}, \quad (m-1)\,T^* \le t \le mT^* \quad m = 1, \ldots M \quad \ldots\ldots \quad (21)$$
$$= 0 \qquad \text{otherwise}$$

in which A_m, $m = 1, \ldots M$ are shown in Fig. 1. The derivative process $\dot{Y}(t)$, therefore, is

$$\dot{Y}(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} \dot{h}(t - \tau_n) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=0}^{N(t)} \dot{h}_m(t - \tau_n) = \sum_{m=1}^{M} \dot{Y}_m(t) \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Considering $Y(t)$ and $\dot{Y}(t)$ as the first and second components of a random vector $\{z(t)\}$, it is seen that this random vector is the sum of M independent random vectors $\{z_m(t)\}$, $m = 1, \ldots M$, whose first and second components are respectively $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$, $m = 1 \ldots M$. The joint characteristic function for $Y(t)$ and $\dot{Y}(t)$ is

$$\Phi_{Y\dot{Y}}(\omega_1, \omega_2) = E\left\{e^{i(\omega_1 Y + \omega_2 \dot{Y})}\right\} = \prod_{m=1}^{M} E\left\{e^{i(\omega_1 Y_m + \omega_2 \dot{Y}_m)}\right\}$$

$$= \prod_{m=1}^{M} \Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

where $E\{\cdot\}$ denotes the expected value of the quantity enclosed in the bracket and $\Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)$, $m = 1, \ldots M$ are the joint characteristic functions of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$, $m = 1, \ldots M$. To find the joint probability density function $f_{Y_m \dot{Y}_m}(y, \dot{y})$ of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$ and, hence, the characteristic function $\Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)$ apply the theorem of total probability again,

$$f_{Y_m \dot{Y}_m}(y, \dot{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{Y_m \dot{Y}_m}(y, \dot{y} \mid n = k)\, P\{n = k\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

where, for a given t, the random variable n is defined a $n = N[t - (m-1)\ T^*] - N(t - m\ T^*)$, the number of vehicles that have arrived in the interval $[t - (m-1)\ T^*,\ t - m\ T^*]$, $f_{Y_m \dot{Y}_m}(v, \dot{v} \mid n = k)$ is the conditional joint probability density function of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$ given that $n = k$, and $f_{Y_m \dot{Y}_m}(v, \dot{v})$ is the joint probability density function of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$. It is readily seen that

$$f_{Y_m \dot{Y}_m}(v, \dot{v} \mid n = 0) = \delta(v)\ \delta(\dot{v}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

and denoting $f_{Y_m \dot{Y}_m}(y, \dot{y} \mid n = 1)$ by $g_{Y_m \dot{Y}_m}(v, \dot{v})$

$$g_{Y_m \dot{Y}_m}(v, \dot{v}) = f_{Y_m}(v \mid n = 1)\ f_{\dot{Y}_m}(\dot{v} \mid n = 1)$$

$$= g_m(v)\ \delta\left(\dot{v} - \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

being that given $n = 1$, $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$ are conditionally independent of each other. Consider now the case that two vehicles have arrived in the interval $[t - (m-1)\ T^*,\ t - m\ T^*]$. Since the arrival of the two vehicles are independent events,

$$f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y} \mid n = 2) = f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y} \mid n = 1) * f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y} \mid n = 1)$$

$$= \left[g_m(y) * g_m(y)\right] \left[\delta\left(\dot{y} - 2\frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Continuing, and using Eq. 24

$$f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y}) = e^{-\lambda T^*} \left\{ \delta(y) + \dot{\delta}(\dot{y}) + \lambda T^* g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y}) \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y}) * g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})\right] + \ldots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Let $\phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)$ and $\Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)$ be the characteristic functions corresponding to the probability density function $g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$ and $f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$ respectively. From Eq. 28

$$\Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2) = e^{-\lambda T^*} \left\{ 1 + \lambda T^* \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2) \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)^2\right] + \ldots \right\} = e^{-\lambda T^*} e^{\lambda T^* \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1, \omega_2)} \quad (29)$$

From Eq. 23, the joint characteristic function for $Y(t)$ and $\dot{Y}(t)$ becomes

$$\Phi_{Y\dot{Y}}(\omega_1,\omega_2) = \left(e^{-\lambda T^*}\right)^M \prod_{m=1}^{M} \exp\left[\lambda T^* \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2)\right]$$

$$= e^{-\lambda T} \exp\left[\lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2)\right]$$

$$= e^{-\lambda T} \left\{ 1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\sum_{m=1}^{M} \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2)\right]^2 + \ldots \right\}$$

$$= e^{-\lambda T} \left\{ 1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \left[\sum_{m=1}^{M} \phi^2_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2) \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \phi_{Y_j \dot{Y}_j}(\omega_1,\omega_2) \sum_{k=j+1}^{M} \phi_{Y_k \dot{Y}_k}(\omega_1,\omega_2)\right] + \ldots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Taking the inverse Fourier transforms of both sides of Eq. 30,

$$f_{Y\dot{Y}}(y,\dot{y}) = e^{-\lambda T}\Big\{\delta(y)\,\delta(\dot{y}) + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$$

$$+ \frac{(\lambda T^*)^2}{2!}\left[\sum_{m=1}^{M} g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y}) * g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})\right.$$

$$\left. + 2\sum_{j=1}^{M-1} g_{Y_j \dot{Y}_j}(y,\dot{y}) * \sum_{k=j+1}^{M} g_{Y_k \dot{Y}_k}(y,\dot{y})\right] + \ldots\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

where $g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$ is given by Eq. 26 and

$$g_{Y_j \dot{Y}_j}(y,\dot{y}) * g_{Y_k \dot{Y}_k}(y,\dot{y}) = \left[g_j(y) * g_k(y)\right]\left[\delta\left(\dot{y} - \frac{A_j - A_{j-1}}{T^*} - \frac{A_k - A_{k-1}}{T^*}\right)\right] \quad (32)$$

Higher-order terms can be similarly obtained. The expected rate of crossing threshold of level ξ with positive slope $E\{N_+(\xi)\}$ using Eq. 31 is

$$E\{N_+(\xi)\} = \int_0^\infty \dot{y} f_{Y\dot{Y}}(\xi,\dot{y})\, d\dot{y}$$

$$= e^{-\lambda T}\left[0 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} g_m(y) \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\, U\left(\frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\right)\right.$$

$$+ \frac{(\lambda T^*)^2}{2!}\Big\{\sum_{m=1}^{M} g_m(y) * g_m(y)\, 2\frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\, U\left(\frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\right)$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{k=j+1}^{M} g_j(y) * g_k(y)\left(\frac{A_j - A_{j-1}}{T^*}\right.$$

$$\left.\left. + \frac{A_k - A_{k-1}}{T^*}\right)\, U\left(\frac{A_j - A_{j-1}}{T^*} + \frac{A_k - A_{k-1}}{T^*}\right)\Big\} + \ldots\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

in which U is the unit step function

$$U(x) = 1 \times \geq 0$$
$$0 \times < 0 \quad \ldots\ldots\ldots\

$$\text{and} \quad y(t) = \frac{(y_{st})_{\max}}{(1-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2} \left\{ e^{-\gamma p_1 t} (2\alpha\gamma \cos p_1' t + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} [2\gamma^2 + \alpha^2 - 1) \sin p_1' t] + e^{-\gamma p_1 (t-T)} (2\alpha\gamma \cos p_1' (t-T) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} (2\gamma^2 + \alpha^2 - 1) \sin p_1' (t-T) \right\} \quad \text{for } t \geq T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

in which $(y_{st})_{\max} = (2WL^3)/(EI\pi^4)$ is the first term series approximation to the maximum static deflection at midspan due to a concentrated force W at

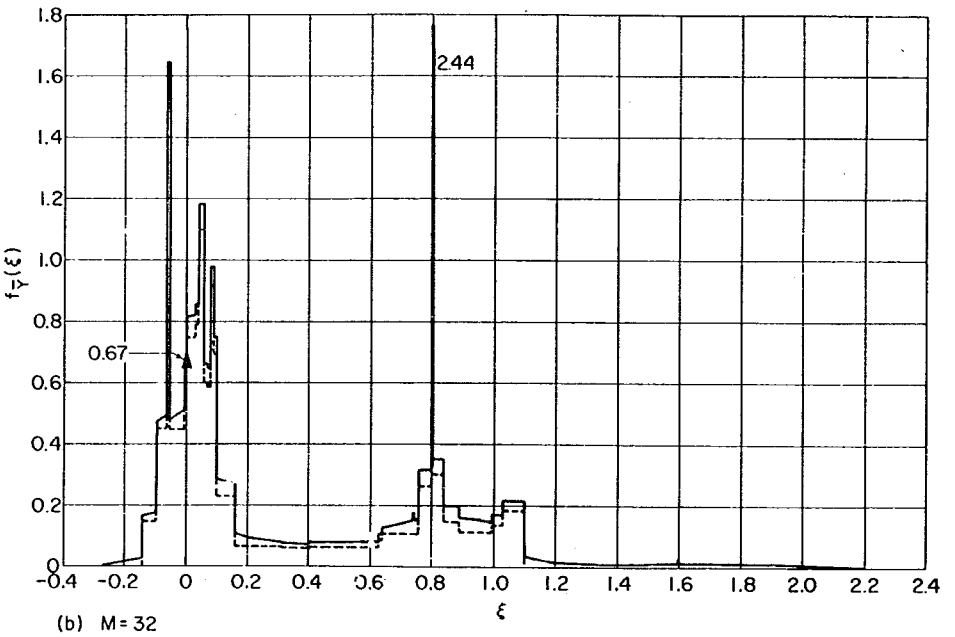


FIG. 3.—PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF RESPONSE OF BRIDGE SYSTEM

midspan, EI = flexural rigidity of the bridge, L = length of the bridge, $\Omega_1 = (\pi v)/L$, γ = percent of critical damping based on the fundamental mode of the bridge, p_1 = undamped fundamental circular frequency of the bridge, $p_1' = p_1\sqrt{1-\gamma^2}$ damped fundamental circular frequency of the bridge, and $\alpha = \Omega_1/p_1$, speed parameter.

It is known that the first term of the series solution represents very closely the exact solution. For values of v = 60 ft/s. L = 120 ft γ = 0.05 p_1 = 10.87 1/s the nondimensionalized influence function $h(t) = y(t)/(y_{st})_{\max}$ is plotted in Fig. 2(*a*). Taking T, the duration of $h(t)$ equal to 4 sec and, for moderate traffic volume, taking $\lambda = 0.1$ which corresponds to an hourly volume of 360 vehicles,[8] the probability density function of the nondimen-

[8]Gerlough, D. L., "Use of Poisson Distribution in Highway Traffic," Poisson and Traffic, Connecticut, The Eno Foundation for Highway Traffic Control, 1955.

sionalized deflection process $\bar{Y}(t) = y(t)/(y_{st})_{max}$ is computed for the case where $h(t)$ is approximated by $M = 40$ line segments. The piecewise linearized influence function $\hat{h}(t)$ is also shown in Fig. 2(*a*). The computed probability density function is plotted in Fig. 3(*a*). The first term in Eq. 19, is a Dirac delta function. The second term is shown in dotted lines. The solid line represents the contribution of all the three terms in Eq. 19; higher order terms in Eq. 19 are dropped. Of interest to engineers is the probability of exceeding a certain number ξ, that is, $1 - F_{\bar{Y}}(\xi)$ where $F_{\bar{Y}}(\xi)$ is the probability distribution function of $\bar{Y}(t)$. This quantity can be determined easily from the probability density function. The resulting curve is shown in Fig. 4. For the purpose of estimating the accuracy of the method, the same are obtained for the case when $\hat{h}(t)$ is approximated by $M = 32$ line segments; $\hat{h}(t)$

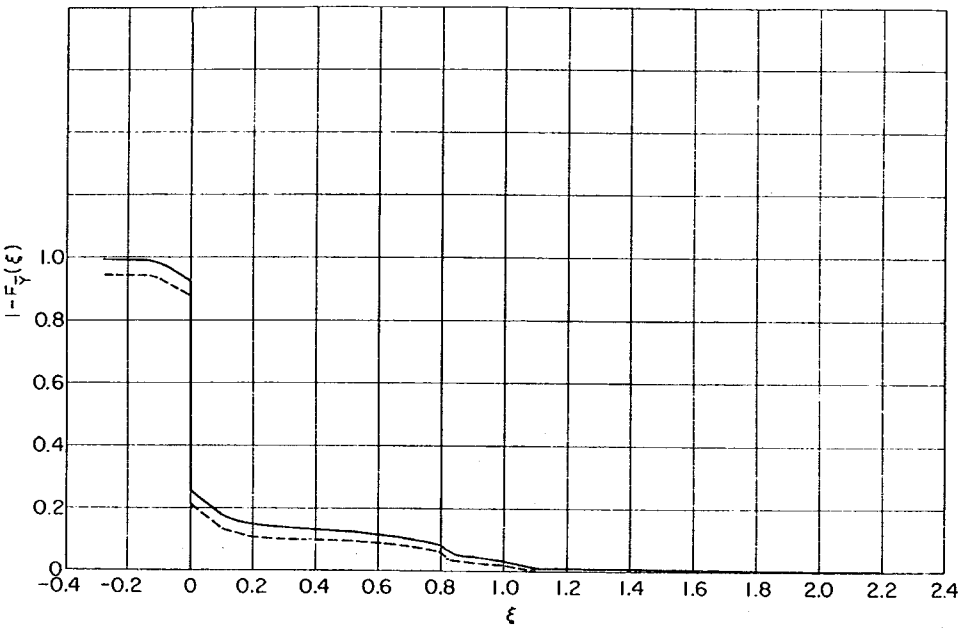


FIG. 4.—PROBABILITY OF BRIDGE RESPONSE EXCEEDING y; $M = 40$

and $h(t)$ are shown in Fig. 2(*b*); $f_{\bar{Y}}(\xi)$ for this case is shown in Fig. 3(*b*). Upon comparing $f_{\bar{Y}}(\xi)$ for the two cases, it is seen that the probability density functions have the same general shape but differ in details. It is also noted that high values of the probability density function occur in regions of the abscissa which correspond to values of $\hat{h}(t)$ in Figs. 2(*a*) and 2(*b*) that have relatively small slopes, for example, the peaks of $f_{\bar{Y}}(\xi)$ at $\xi = 0.8$ in both Figs. 3(*a*) and 3(*b*) correspond to the flat portions of $\hat{h}(t)$ in Figs. 2(*a*) and 2(*b*) at a value in the vicinity of 0.8. Thus details of the probability density functions obtained in this manner are expected to be rather sensitive to the choice of the $\hat{h}(t)$ approximation. However, this seemingly disturbing result is not as discouraging as it appears, for it is not the ordinates of the probability density functions but the quantity $f_{\bar{Y}}(\xi)\, d\xi$ that is of importance. For instance, the probability of $\bar{Y}(t)$ exceeding a certain value ξ; that is, $1 - F_{\bar{Y}}(\xi)$ as obtained

for the case $M = 32$ is for all practical purposes the same as for the case $M = 40$ and is, therefore, not shown. Thus, although any degree of accuracy can be obtained by simply taking T^* smaller, it is only necessary to take a reasonable number of line segments to approximate the original $h(t)$ in order to attain sufficient accuracy for the probability of exceedance $1 - F_{\overline{Y}}(\xi)$. Although not demonstrated in the text, even fewer line segments can be used to obtain a good fit if one divides $h(t)$ into non-overlapping trapezoids with unequal base width.

The expected rate of the response process $\overline{Y}(t)$ crossing threshold of level ξ is obtained from Eq. 33 and plotted in Figs. 5(a) and 5(b) for $M = 40$ and

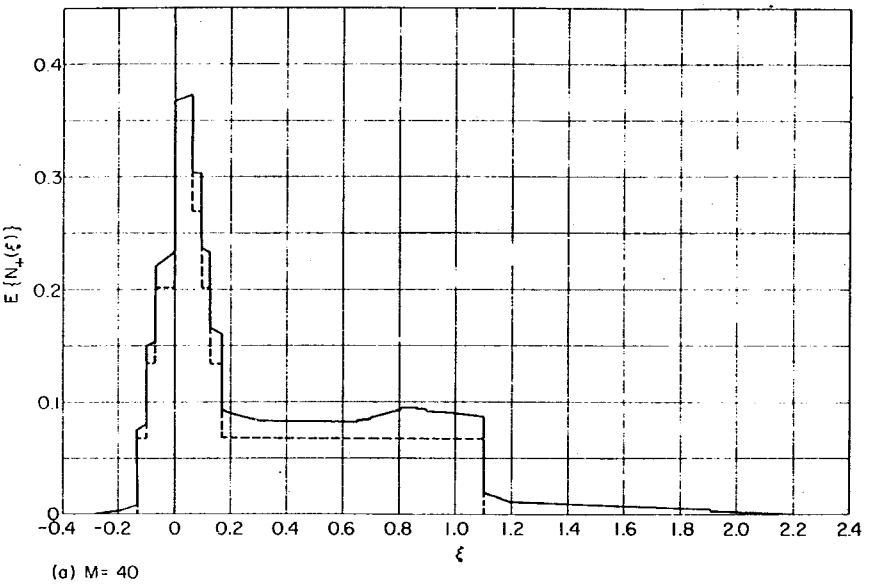


FIG. 5.—EXPECTED RATE OF THRESHOLD CROSSINGS OF RESPONSE OF BRIDGE SYSTEM

$M = 32$, respectively. The dotted line represents the contribution of the term in Eq. 33 and the solid line represents the contribution of the first two terms in Eq. 33. Only two terms are included in the computation. Comparing Fig. 5(a) with Fig. 5(b), it is concluded that the difference between the two cases is indeed small except that there is a blip at $\xi = 0.8$ in Fig. 5(b) but the same does not appear in Fig. 5(a). This is attributed to the fact that the approximation $\hat{h}(t)$ in Fig. 2(a) crosses $\xi = 0.8$ with positive slope only once. Again, by dividing $h(t)$ into trapezoids with unequal base width and paying particular attention to portions of $h(t)$ which presents such behavior, such discrepancies can be easily eliminated.

CONCLUSIONS

The dynamic response of highway bridges under the passage of vehicles was studied on a probabilistic basis. The Poisson counting process was used

to represent the vehicular traffic, and the bridge was idealized as a linear damped system. The response is a filtered Poisson process. By piecewise linearizing the influence function of the filtered Poisson process, the probability density function of the response of the bridge, as well as its expected rate of threshold crossings, were obtained by means of a numerical procedure applicable under the condition that the intensity of the underlying Poisson process is relatively "small." Numerical results were obtained for the case when the bridge is considered as a simply supported uniform beam, the vehicles travel at the same constant speed and are of equal weight. However, the above technique is applicable to any bridge system and with slight modification, the variability of vehicle weight and speed can be included.

In evaluating the accuracy of the method, two considerations were taken into account. First, the influence function of the filtered Poisson process was piecewise linearized. It appears that only reasonably few line segments are required to obtain a close fit of the original influence function without affecting the results of the probability of exceedance and the expected rate of threshold crossings. The second consideration is the number of terms included in the expanded forms of the probability density function and the expected rate of threshold crossings. Examination of results shows that for all practical purposes, the first few terms give reasonably good results. Higher accuracy can be achieved by simply taking more terms in the expansions.

ACKNOWLEDGMENTS

The writer wishes to thank A. H.-S. Ang for helpful discussions and review of the manuscript.

APPENDIX.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

A_m = ordinates of the piecewise linearized influence line;
EI = flexural rigidity of the bridge;
$E\{\cdot\}$ = expected value of the quantity enclosed in the bracket;
$E\{N_+(\xi)\}$ = expected rate of crossing threshold of level ξ with positive slope;
$F_Y(y)$ = probability distribution function of the random response $Y(t)$ of the bridge system;
$f_Y(y)$ = probability density function of the random response $Y(t)$ of the bridge system;
$f_Y(y|n=k)$ = conditional probability density function of the random response $Y(t)$ of the bridge system given that $n = k$;

$f_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$ = joint probability density function of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$;

$f_{Y_m \dot{Y}_m}(v,\dot{v}|n=k)$ = conditional joint probability density function of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$ given that $n = k$;

$g(y)$ = $f_Y(v \mid n=1)$;

$g_m(y)$ = probability density function of $h_m(t-T)$;

$g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$ = $f_{Y_m \dot{Y}_m}(v,\dot{v}|n=1)$;

$h(t)$ = influence function of the filtered Poisson process;

$\hat{h}(t)$ = piecewise linearized influence function of the filtered Poisson process;

$h_m(t)$ = m^{th} segment of the piecewise linearized influence function;

$\dot{h}(t)$ = time derivative of $h(t)$;

$\dot{h}_m(t)$ = time derivative of $h_m(t)$;

i = the imaginary unit;

k = number of vehicles arrived in time interval $(0,t)$;

L = length of the bridge;

M = number of linear segments of the piecewise linearized influence function;

$N(t)$ = the Poisson Counting process;

n = number of vehicles arrived in a given time interval;

$p\{\cdot\}$ = probability of the event enclosed in the bracket;

p_1 = undamped fundamental circular frequency of the bridge;

p_1' = $p_1\sqrt{1-\gamma^2}$ = damped fundamental circular frequency of the bridge;

T = duration of $h(t)$;

T^* = interval of each segment of the piecewise linearized influence function;

t = time;

$U(\cdot)$ = unit step function;

v = speed of vehicle;

W = weight of vehicle;

$Y(t)$ = random response of the bridge system;

$Y_m(t)$ = filtered Poisson process whose influence function is $h_m(t)$;

$\dot{Y}(t)$ = time derivative of $Y(t)$;

$y(t)$ = deflection at midspan of the bridge due to passage of a vehicle arriving at instant $t = 0$;

$(y_{st})_{\max}$ = $2WL^3/EI\pi^4$ = the first term series approximation to the maximum static deflection at midspan of the bridge due to a concentrated force W at midspan;

$\{Z(t)\}$ = a random vector;

α = Ω_1/p_1 = a speed parameter;

γ = percent of critical damping based on the fundamental mode of the bridge;

$\delta(\cdot)$ = Dirac delta function;

λ = intensity of the Poisson process;

τ = instant of arrival of a vehicle;

$\Phi_Y(\omega)$ = characteristic function of random response $Y(t)$;

$\Phi_{Y_m}(\omega)$ = characteristic function of random response $Y_m(t)$;

260

$\phi(\omega)$ = characteristic function corresponding to the probability density function $g(y)$;

$\phi_m(\omega)$ = characteristic function corresponding to the probability density function $g_m(y)$;

$\Phi_{Y\dot{Y}}(\omega_1,\omega_2)$ = joint characteristic function of $Y(t)$ and $\dot{Y}(t)$;

$\Phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2)$ = joint characteristic function of $Y_m(t)$ and $\dot{Y}_m(t)$;

$\phi_{Y_m \dot{Y}_m}(\omega_1,\omega_2)$ = joint characteristic function corresponding to the probability density function $g_{Y_m \dot{Y}_m}(y,\dot{y})$;

Ω_1 = $\pi v/L$ = a speed parameter; and

$\omega, \omega_1, \omega_2$ = arguments of characteristic functions.

活荷重に対する道路橋の動的応答
—衝撃係数—に関する考察

DYNAMIC RESPONSE OF HIGHWAY BRIDGES DUE TO LIVE LOAD BY SPECTRAL ANALYSIS

山田善一*・小堀為雄**
By Yoshikazu Yamada and Tameo Kobori

1. まえがき

移動荷重による橋梁の動的性状に関しては，古くから研究が行なわれ，主としてけた上を通過する荷重による振動問題として理論的実験的研究がなされてきた。特に最近では，電子計算機による各種の数値解析が可能になり，けたの振動問題から進んで橋と荷重との連成振動の問題にまで発展した研究が行なわれている。その代表的な研究はイリノイ大学における一連の研究であろう。またこれらの理論は連続けた，ゲルバーけた，さらには板構造や格子けたにまで発展させこの方面の研究に画期的進歩をもたらしている[1)~12)]。

また実験的研究としては古くは，アメリカおよびイギリスにおける鉄道橋の研究（1907～1920)[13)]など，衝撃が大きいとされている鉄道橋についておもに行なわれ，わが国においても国鉄技術研究所を中心に多くの研究[14)]が行なわれた。さらに近年測定技術の進歩により道路橋においても新しく完成された橋梁などについて走行振動試験が行なわれている。またアメリカにおいてAASHO Road Test[15)]として実物大の大規模な実験的研究がなされている。

以上これらの理論的実験的研究のほとんどは1台の自動車による振動問題を取り扱っているものであり，振動問題として有意義な研究成果を提出しているのであるが，橋梁の設計に用いる設計衝撃係数は荷重が担当密に載荷している場合に対する値であって，ごく短スパンの橋や橋床などをのぞき1台の自動車による振動がただちに設計衝撃係数とむすびつかない。

このことから，この論文は道路橋と自動車の振動に不規則振動論を応用して，同時に載荷する自動車の数が多くなると荷重が橋けたに与える動的効果が小さくなるということを明らかにし，実際の設計活荷重に近い状態の橋けたの振動性状を説明したものである。

この場合設計活荷重は自動車がかなり密に載荷されていることを考慮し，動的影響を与える各種の要素，たとえば路面の不整，走行速度の影響（走行速度と自動車の振動の関係）などは荷重のパワースペクトル密度に含めて考えて，簡単のために荷重は固定した位置で，走行中の不規則な振動を橋けたにおよぼすものとしている。しかし，実際の荷重は走行しているから速度の影響（走行速度と橋けたの動的応答の関係）も考慮し，移動荷重とすることも考えられるが，その場合は荷重間隔と速度との関係などについての考察も必要となり，本論文では，特にスパン長に対する動的影響の遁減に注目しているので計算の仮定として荷重の作用位置を固定して考えた。

さらに，同様の計算はシミュレーションの手法を用いて電子計算機で求めた結果をまえに発表しているので[16)]本論文の最後でこれらの結果および2,3の実験結果をもとに設計衝撃係数についての考察を行なった。

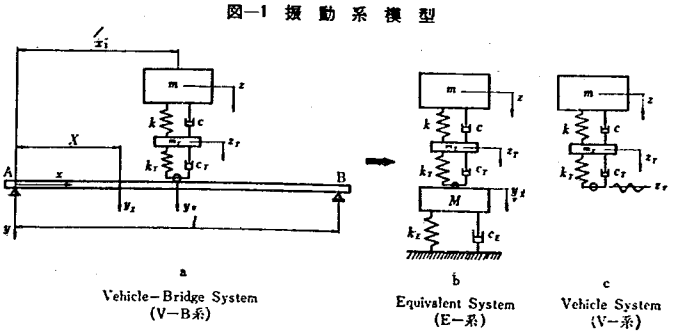
2. 運動方程式と等価振動系

自動車の振動系については図—1 に示す2自由度系として解析を進めるが，橋けたは多自由度系であるので解析を単純化し，明確にするために，ここでは以下に示すような等価振動系を考える。

(1) 運動方程式

さて，自動車と橋けたの振動模型を図—1 に示す。この系の運動方程式は従来多くの研究者によって提案されているが，ここでは，Timoshenko[6)]やBiggs[12)]などに

図—1 振動系模型



a Vehicle–Bridge System (V—B系)　b Equivalent System (E—系)　c Vehicle System (V—系)

* 正会員　工博　京都大学助教授　工学部土木工学科
** 正会員　工修　金沢大学助教授　工学部土木工学科

よって導かれた最も単純な方法を用いる。すなわち単純ばりの2次以上の高次振動の影響を無視すると，その動たわみ曲線yは次式で与えられる。

$$y=\frac{q(t)}{K}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，lは橋けたのスパン長，Kは橋けたの剛比に関係するパラメーターであり，ここでは$(\pi/l)^4 EI\,l/2$を用いている，$q(t)$は時間のみに関係する関数であり一般座標とよばれている，xは橋けたの一方の支点上を基準にして測った橋けたの水平方向の座標である。ここで問題を簡単にするために単純ばりの1次振動のみをとりあげたが式(1)の形を適当にえらぶことにより，他の支承条件の場合や高次振動が問題となる長スパンの連続形式の橋梁に理論を拡張することも可能である。

さて，橋けたの動たわみ曲線を式(1)のように仮定して，エネルギー法から図—1 の Vehicle-Bridge System (以下 V-B 系という) の運動方程式を求めると，

$$\frac{wl}{2Kg}\ddot{q}+\frac{\beta w p_0 l}{Kg}\dot{q}+\frac{EIl}{2K}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 q - \{k_T(z_T-y_v)+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)\}\sin\frac{\pi x_1}{l}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$m\ddot{z}+k(z-z_T)+c(\dot{z}-\dot{z}_T)=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$m_T\ddot{z}_T+k(z_T-z)+c(\dot{z}_T-\dot{z}) + k_T(z_T-y_v)+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

となる。ここで，自動車のタイヤは必ず路面に接触しているとすれば式(2)～(4)で，

$$y_v=y(t,vt)+z_0(t) \quad \cdots\cdots(5)$$

が成立する。ここにy_vは橋けたおよび橋面の凹凸を含めたタイヤ接地面の鉛直変位を表わす，$y(t,vt)$は荷重作用点のけたの鉛直変位で，z_0はその点における橋面の凹凸を表わす。以下に式(2),(3)および(4)の記号について述べる。

wおよびβはそれぞれ橋けたの単位長さ当り重量および減衰定数(≒対数減衰率/2π)を，p_0は橋けたの固有振動数を表わす。mおよびm_Tは自動車のばね上およびばね下質量を，kおよびcは懸架部のばね定数および減衰係数を，k_Tおよびc_Tはタイヤ部のばね定数および減衰係数を示す。zおよびz_Tは自動車のばね上質量およびばね下質量のそれぞれの変位を示す。

(2) 等価振動系

式(2)において支点からXなる距離にある点を考えよう，この場合点Xのけたの動たわみは式(1)より，

$$y_X=\frac{q(t)}{K}\sin\frac{\pi X}{l}$$

と表わされる。点Xに関する運動方程式は式(2)の両辺に$\sin(\pi X/l)$を乗ずることによって導かれる。

$$\frac{wl}{2g}\ddot{y}_X+\beta\frac{w}{g}lp_0\dot{y}_X+\frac{EIl}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 y_X - \{k_T(z_T-y_v)+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)\} \times\sin\frac{\pi x_1}{l}\sin\frac{\pi X}{l}=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

上式のy_X, $\dot{y}_X$および$\ddot{y}_X$に関する係数をそれぞれ，

$$M=wl/2g,\quad c_E=\beta wlp_0/g,\quad k_E=(EIl/2)(\pi/l)^4 \quad \cdots\cdots(7)$$

とすれば，式(6)は図—1(b)で表わされる振動系の運動方程式を示している(Mにかかる外力に$\sin(\pi x_1/l)\cdot\sin(\pi X/l)$がかかっている)。そこでこの系をV-B系の等価振動系(以下E-系とよぶ)とみなすことができる。

以上から以後の解析は等価振動系について行なう。

3. 不規則外力に対する応答の計算

説明の便宜上等価振動系の運動方程式(6)の測点Xおよび荷重の載荷点x_1をともにスパン中点にえらぶことにする。この時の等価振動系の運動方程式は，

$$M\ddot{y}_c+c_E\dot{y}_c+k_E y_c - \{k_T(z_T-y_v)+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)\}=0 \quad \cdots(8)$$

$$m\ddot{z}+k(z-z_T)+c(z-z_T)=0 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$m_T\ddot{z}_T+k(z_T-z)+c(\dot{z}_T-\dot{z}) + k_T(z_T-y_v)+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

として表わされる。

いま，この振動系のy_c, zまたはz_Tのいずれか1つの変位に振動を与えるとすれば，この振動によって他の2つの変位は振動を誘起される。しかし，橋上を走行する自動車によるこの種の振動はいずれの振動変位も独立ではなく互いの連成振動である。そこでまず等価振動系のMを完全な剛体支持された図—1 の V-系について，(i) まず入力関数として路面の凹凸の波形z_0をえらぶ，このz_0によってz_Tおよびzは振動する。(ii) これらの振動に自動車のエンジンによる振動や走行中の不つり合いによる振動などが加算された不規則な振動が E-系の入力関数となり，これらの振動によるy_cの振動を E-系の応答関数として求めることができる。(iii) このy_cの振動にz_0が加算された値が再び V-系の入力関数となるのである。このようなくり返し計算によってy_cの値を計算することができる。しかし実際の計算では自動車のエンジンによる振動や走行中の不つり合いによる振動などはこれまでの研究では走行中の自動車の振動に与える影響は小さいので，本論文では，走行中の自動車の振動は主として，橋面の凹凸からの不規則振動である*とする。このことから入力関数としてz_0のみをえらび式(8),(9)および(10)を連立方程式として解くことにする。

ところで，橋面の凹凸の波形z_0を知ることは困難で

* 自動車の振動の代表として橋面の凹凸による振動をえらんだが他の振動もこの振動中に含めて考えてもよい。具体的には凹凸のパワー スペクトル密度に他の振動のパワースペクトル密度を含めればよい。

あり，またこの波形は不規則な波形である。幸い川合・森崎氏[17]や兼重氏[18]によっていくつかの路面の凹凸のパワー スペクトル密度が求められている。そこでこの振動系に不規則振動論の手法を用いることを試みる。

（1） 各振動系の伝達関数とパワースペクトル密度

まず各振動系の伝達関数を求める。

a） V-系の伝達関数

この振動系の運動方程式は式(9)および(10)であり，y_v を z_0, $\dot{y}_v$ を $\dot{z}_0$ とすればよい。いま，$z(t)$, $z_T(t)$ および $z_0(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $Z(i\omega)$, $Z_T(i\omega)$ および $Z_0(i\omega)$ とし，↗

$$z(0)=z_T(0)=z_0(0)=\dot{z}(0)=\dot{z}_T(0)=\dot{z}_0(0)=0$$

とする。この時定常状態における式(9)および(10)は，

$$(i\omega)^2 mZ(i\omega)+k(Z(i\omega)-Z_T(i\omega))+i\omega c(Z(i\omega)-Z_T(i\omega))=0$$

$$(i\omega)^2 m_T Z_T(i\omega)+k(Z_T(i\omega)-Z(i\omega))+i\omega c(Z_T(i\omega)-Z(i\omega))+k_T(Z_T(i\omega)-Z_0(i\omega))+i\omega c_T(Z_T(i\omega)-Z_0(i\omega))=0$$

上式から $Z_T(i\omega)$ を消去して，$Z(i\omega)$ について解けば，

$$Z(i\omega)=\frac{\frac{1}{mm_T}\{(i\omega)^2 cc_T+i\omega(kc_T+k_Tc)+kk_T\}}{\left\{(i\omega)^4+(i\omega)^3\left(\frac{c+c_T}{m_T}+\frac{c}{m}\right)+(i\omega)^2\left(\frac{k+k_T}{m_T}+\frac{k}{m}+\frac{cc_T}{mm_T}\right)+\frac{i\omega}{mm_T}(kc_T+ck_T)+\frac{kk_T}{mm_T}\right\}}Z_0(i\omega)$$

さらに両辺をパワースペクトル密度 $S_z(\omega)$ および $S_{z_0}(\omega)$ で表わせば，

$$S_z(\omega)=\overline{H_V(i\omega)}\cdot H_V(i\omega)\,S_{z_0}(i\omega)=|H_V(i\omega)|^2 S_{z_0}(\omega) \quad \cdots\cdots(11)$$

となる。ここに $H_V(i\omega)$ は伝達関数とよばれ，

$$H_V(i\omega)=\frac{\frac{1}{mm_T}\{kk_T-cc_T\omega^2+i(kc_T+k_Tc)\omega\}}{\left\{\omega^4-\left(\frac{k+k_T}{m_T}+\frac{k}{m}+\frac{cc_T}{mm_T}\right)\omega^2+\frac{kk_T}{mm_T}\right\}+i\left\{\left(\frac{kc_T+ck_T}{mm_T}\right)-\left(\frac{c+c_T}{m_T}+\frac{c}{m}\right)\omega^2\right\}\omega} \quad \cdots\cdots(12)$$

であり，$\overline{H_V(i\omega)}$ は $H_V(i\omega)$ の共役複素数である。

b） E-系の伝達関数

つぎに E-系の各関数間の伝達関数は V-系の場合と同様に式(8),(9)および(10)のフーリエ変換から求めることができる。ここでは $y_v(t)$ は，

$$y_v(t)=y_c(t)+z_0(t)$$

として表わされていることに注意しながらフーリエ変換しそれらの式を連立方程式として各関数間の伝達関数を求めればよい。この場合の伝達関数はつぎの記号を用いて表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned}&J_1(i\omega)=(-M\omega^2+k_E+k_T)+i\omega(c_E+c_T)\\&J_2(i\omega)=k_T+i\omega c_T,\ J_3(i\omega)=k+i\omega c\\&J_4(i\omega)=(-m\omega^2+k)+i\omega c\\&J_5(i\omega)=(-m_T\omega^2+k+k_T)+i\omega(c+c_T)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

$y_c(t)$ と $z_0(t)$ との間の伝達関数は，

$$H_{yz_0}(i\omega)=\frac{-J_2(i\omega)\{J_3(i\omega)^2-J_4(i\omega)J_5(i\omega)+J_2(i\omega)J_4(i\omega)\}}{J_1(i\omega)\{J_3(i\omega)^2-J_4(i\omega)J_5(i\omega)\}+J_2(i\omega)^2J_4(i\omega)} \quad \cdots\cdots(15)$$

$z(t)$ と $z_0(t)$ との伝達関数は，

$$H_{zz_0}(i\omega)=\frac{J_2(i\omega)\cdot J_3(i\omega)\{-J_1(i\omega)+J_2(i\omega)\}}{J_1(i\omega)\{J_3(i\omega)^2-J_4(i\omega)J_5(i\omega)\}+J_2(i\omega)^2J_4(i\omega)} \quad \cdots\cdots(16)$$

として表わされ，$y_c(t)$ と $z(t)$ との間の伝達関数は，

$$H_{yz}(i\omega)=\frac{J_3(i\omega)^2-J_4(i\omega)J_5(i\omega)+J_2(i\omega)J_4(i\omega)}{J_3(i\omega)\{J_1(i\omega)-J_2(i\omega)\}} \quad \cdots(17)$$

として表わされる。

さらに各パワースペクトル密度は，

$$S_y(\omega)=\overline{H_{yz_0}(i\omega)}\cdot H_{yz_0}(i\omega)S_{z_0}(\omega) \quad \cdots\cdots(18)$$

$$S_z(\omega)=\overline{H_{zz_0}(i\omega)}\cdot H_{zz_0}(i\omega)S_{z_0}(\omega) \quad \cdots\cdots(19)$$

$$S_y(\omega)=\overline{H_{yz}(i\omega)}\cdot H_{yz}(i\omega)S_z(\omega) \quad \cdots\cdots(20)$$

と表わされる。

c） 速度パワースペクトル，加速度パワースペクトルおよび変位パワースペクトルとその二乗平均

変位パワースペクトル密度 S_D と速度パワースペクトル密度 S_V および加速度パワースペクトル密度 S_A との関係は次式で与えられる。

$$S_V(\omega)=|\omega^2|S_D(\omega) \quad \cdots\cdots(21)$$

$$S_A(\omega)=|\omega^4|S_D(\omega) \quad \cdots\cdots(22)$$

つぎに，パワー スペクトル密度と二乗平均値について述べると，パワー スペクトル密度 $S_y(\omega)$ と相関関数 $R(\tau)$ とは互いにフーリエ変換で表わされ，その相関関数 $R(\tau)$ のパラメーター τ が 0 の時の相関関数が二乗平均 $\bar{y}^2$ を表わす。すなわち，

$$\bar{y}^2=R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)d\omega \quad \cdots\cdots(23)$$

ここに，$\bar{y}^2$ は関数 y の二乗平均であり，もしこの過程が正規分布であり，平均値が零であるとすれば，この $\bar{y}^2$ がこの関数の標準偏差（s.v.）の2乗，すなわち，分散を意味することから，

$$(s.v.)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)d\omega} \quad \cdots\cdots(24)$$

となる。このことは関数 y の振幅が少なくとも 68.27% がこの（s.v.）値の範囲に含まれ，さらに 2(s.v.) を考

64

えるとすれば95.45%がこのうちに含まれることを意味する。

(2) 数値計算

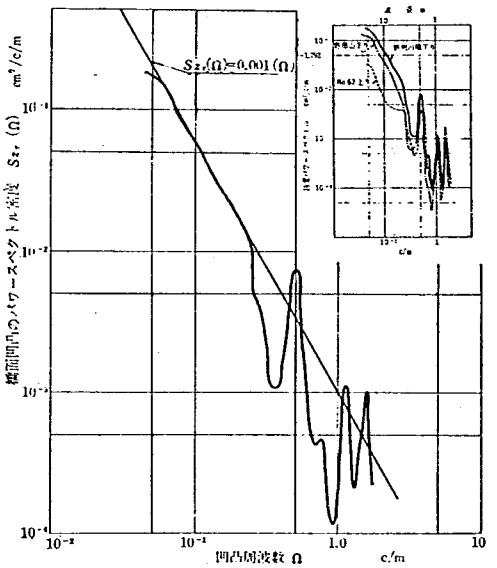
前節では走行中の自動車の振動は主として路面の凹凸による振動であるとして，この凹凸のパワー スペクトル密度から橋けたの変位および自動車のばね上質量の変位のパワー スペクトル密度を求める関係式を導いた。

計算にあたって，路面のパワースペクトル密度として川合・森崎氏が名神高速道路における走行試験から求めた値[17]を単純化し，図—2 の直線のような指数関数*として表わす。すなわち，

$$S_{z_r}(\Omega)=a\,\Omega^{-n} \quad \cdots\cdots(25)$$

ここに，nは両対数方眼紙上の直線の勾配を表わし，路面によって大差はなく，aは係数で路面の良否によって多少異なる値であることからここでは路面の良否をあらわすパラメーターと考える。

図—2 橋面凹凸のパワースペクトル
(文献 17) より引用)



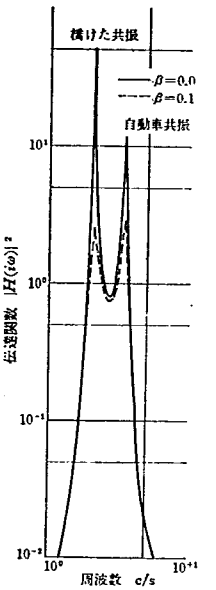
図—2 の横軸の Ω は路面凹凸の波長 λ と $\Omega=1\,\pi/\lambda$ の関係にあり，路面周波数とよばれるもので，縦軸はこの Ω を変数とする路面のパワー スペクトル密度 $S_{z_r}(\Omega)$ である。このパワー スペクトル密度を E-系または V-系の入力関数 $z_0(t)$ のパワー スペクトル密度 $S_{z_0}(\omega)$ に換算するときは，走行速度 V を一定として，$\omega=\Omega V$ の関係からつぎの変換式を用いればよい。

$$S_{z_0}(\omega)=\frac{1}{V}S_{z_r}(\Omega) \quad \cdots\cdots(26)$$

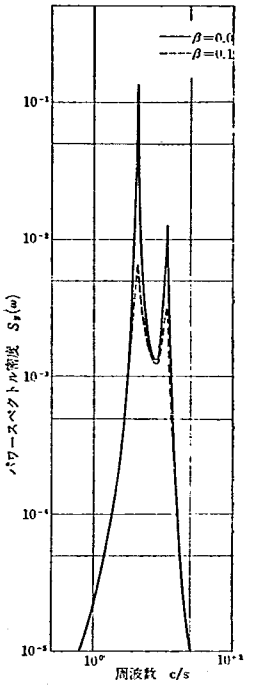
さて，われわれは橋けたの減衰定数がこの種の不規則

* これは橋けたの振動は低周波のパワー スペクトルに対して敏感であることによる。また，走行中の自動車の振動に影響を与える周波数範囲では近似的に指数表示できることが報告されている[18)-20)]。

図—3 (a)
伝達関数 $|H(i\omega)|^2$



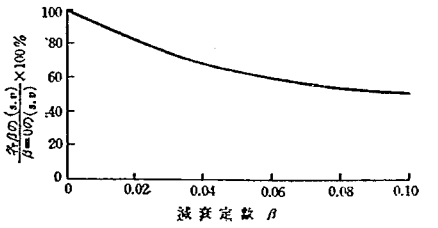
図—3 (b)
けたの動たわみのパワー スペクトル密度



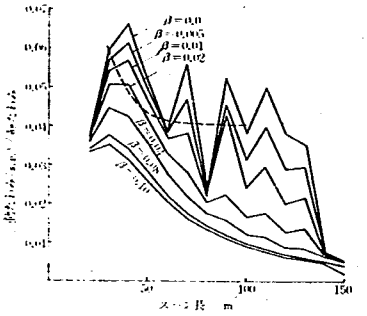
外力による橋けたの動的応答にいかなる影響をおよぼすかについて考察するために，橋けたのスパン長 l と減衰定数 β をパラメーターとして応答関数 y_c のパワー スペクトル密度および標準偏差 ($s.v.$) を求める。一例としてスパン長 50 m の場合の各パワー スペクトル密度および伝達関数を図—3 に示す。また減衰定数 β と橋けたの動的応答との関係を示したのが図—4 である。図—4 は $\beta=0.0$ における動的応答の ($s.v.$) を 100 として，他の β に対する ($s.v.$) を示した。図—5 は横軸にスパン長 l を縦軸に ($s.v.$) (整理の関係から静たわみで割っている) をとって β をパラメーターとしてプロットしたものである。

以上の計算に用いられた自動車および橋けたの諸元を表—1 および表—2 に示す。なお自動車の諸元は特に周

図—4 減衰定数と動的応答の ($s.v$) との関係
$l=50$ m, $V=10.0$ m/sec



図—5　1台載荷の場合のスパン長と動的係数
（破線は図—9 の (a) 曲線）



表—1　自動車諸元表（トラック車の1例）

		前輪	後輪	全
空車時重量 (kg)	ばね上	2 285	1 470	5 715
	ばね下	700	1 260	
積載時重量 (kg) (試験時)	ばね上	3 515	8 405	13 880
	ばね下	700	1 260	
懸架部	共振周波数 (cps)	—	—	3.5
	減衰係数 (kg/cm/s)	10	26	—
タイヤ部	共振周波数 (cps)	—	—	13.0
	減衰係数 (kg/cm/s)	14	28	—

車両重量 5 715 kg，乗車定員 3 人，最大積載量 8 000 kg，軸距 4.8 m

表—2　道路橋のスパン長と諸元表（1車線=3.0 m）

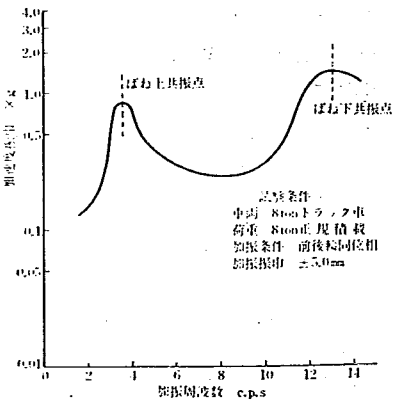
スパン長 l (m)	総重量 W ($\times 10^4$ kg)	曲げ剛性 EI ($\times 10^{12}$ kg·cm²)	スパン長 l (m)	総重量 W ($\times 10^4$ kg)	曲げ剛性 EI ($\times 10^{12}$ kg·cm²)
20	4.84	6.21	70	19.44	80.15
30	7.76	12.42	80	22.36	130.31
40	10.68	24.41	90	25.28	171.26
50	13.60	42.20	100	28.20	218.01
60	16.52	65.78			

建設省土木研究所設計合成桁橋標準設計書より概算

波数特性（図—6）が調べられているトラック車の値を採用した。走行速度は 10.0 m/sec (40 km/h 相当) を標準とした。

つぎに一般路面を走行中の自動車の加速度を求める。

図—6　大型トラック車の周波数特性の一例



この場合も前記のように (s.v.) の形で整理する。また計算の便宜上つぎのパラメーターおよび記号を用いて，式 (2) および (3) を書きかえる

$p_s=\sqrt{k/m}$　　ばね上振動数 (rad/sec)

$p_T=\sqrt{k_T/m_T}$　　ばね下振動数 (rad/sec)

$\beta_s=c/2mp_s$　　懸架ばね部の減衰定数

$\beta_T=c_T/2m_Tp_T$　　タイヤ部の減衰定数

$R_v=m/m_T$　　ばね上質量とばね下質量の比

式 (4) の $y_v(t)$ を $z_0(t)$ として，

$$\ddot{z}+p_s^2(z-z_T)+2\beta_sp_s(\dot{z}-\dot{z}_T)=0 \quad \cdots\cdots(27)$$

$$\ddot{z}_T+R_vp_s^2(z_T-z)+2R_v\beta_sp_s(\dot{z}_T-\dot{z})+p_T^2(z_T-z_0)+2\beta_Tp_T(\dot{z}_T-\dot{z}_0)=0 \quad \cdots(28)$$

式 (27), (28) および (22) からばね上質量およびばね下質量の加速度のパワー スペクトル密度はそれぞれ，$S_{zA}(\omega)$

$$=\omega^4\left|\frac{J_2(i\omega)\cdot J_5(i\omega)}{(J_3(i\omega)+J_5(i\omega))J_1(i\omega)-J_4(i\omega)\cdot J_2(i\omega)}\right|^2 \times S_{z_0}(\omega) \quad \cdots\cdots(29)$$

$$S_{z_TA}(\omega)=\left|\frac{J_1(i\omega)}{J_2(i\omega)}\right|^2 S_{zA}(\omega) \quad \cdots\cdots(30)$$

ここに，$J_1(i\omega)=-\omega^2+p_s^2+i2\beta_sp_s\omega$

$J_2(i\omega)=p_s^2+i2\beta_sp_s\omega$

$J_3(i\omega)=-\omega^2+R_vp_s^2+i2\beta_sp_sR_v\omega$

$J_4(i\omega)=R_vp_s^2+i2\beta_sp_sR_v\omega$

$J_5(i\omega)=p_T^2+i2\beta_Tp_T\omega$　　である。

式 (29) および (30) を R_v, p_s, β_s, β_T および V をパラメーターとして数値計算を行なった。この場合接地力の動的係数を (s.v.) の形で整理した。すなわち，ばね上およびばね下質量の加速度を求めて互いの位相差が0となった最大点において，接地力 F は，

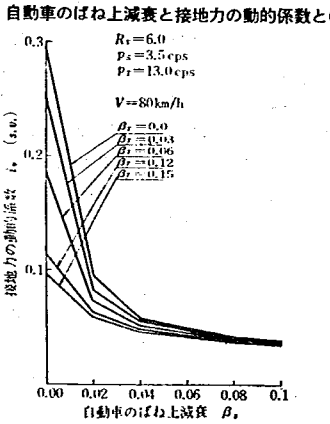
$$F=m\ddot{z}+m_T\ddot{z}_T=(R_v\ddot{z}+\ddot{z}_T)m_T$$

として表わされ，その動的係数 i_v は，

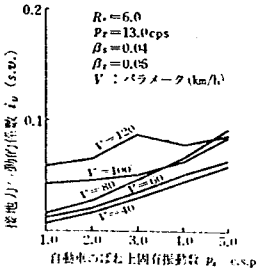
$$i_v=\frac{F}{W}=\frac{(R_v\ddot{z}+\ddot{z}_T)m_T}{(m+m_T)g}=\frac{R_v\ddot{z}+\ddot{z}_T}{(R_v+1)g}$$

となる。ここで，$\ddot{z}$ および $\ddot{z}_T$ は (s.v.) で表わされて

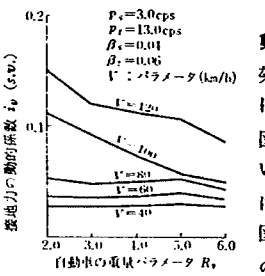
図—7 (a)　自動車のばね上減衰と接地力の動的係数との関係



図—7 (b)　自動車のばね上固有振動数と接地力の動的係数の関係



図—7 (c)　自動車の重量パラメーターの接地力の動的係数の関係



いるから i_v もまた (s.v.) で表わされる。

なお，パラメーターの範囲は，

R_v=0.0～6.0，p_s=1.0～5.0 cps

β_s=0.00, 0.02, 0.04, 0.08, 0.10

β_T=0.00, 0.03, 0.06, 0.12, 0.15

V=40～120 km/h

標準値として R_v=6.0，p_s=3.5 cps，p_T=13.0 cps，β_s=0.04，β_T=0.06 を用いる。

計算の結果を 図—7 にあげる。

(3)　計算結果の考察

図—3 (a), (b) においてピークが2つあるのは自動車の固有振動との共振と，橋げたの固有振動との共振のためであり，橋げたの減衰定数 β は橋げたの共振点付近で大きく影響することがわかる。図—4 は橋げたの減衰定数 β が動的係数に与える影響について調べたもので，β が 0.0 から 0.02 の間で急激に動的係数は小さくなることがわかる。図—5 は橋げたの減衰定数 β をパラメーターとして，スパン長と動的係数の関係を調べたもので，スパン長 30～40 m の範囲で橋げたの減衰定数が橋梁の動的係数に与える影響が大きいことがわかる。

試みにこの種の不規則外力による橋げたの動的応答の動的係数を求めてみる。いま，橋げたの減衰定数は一般に 0.02 程度であることが報告[21]されていることからこの値を基準にすると (s.v.) 値で最大が 0.051 であり，2(s.v.) をとれば 0.102 となり，さらに入力としての路面の凹凸のパワー スペクトル密度としてえらんだ値が名神高速道路のように非常に路面の平滑度の良好な道路での値であることから，式 (25) の a 値（平滑度パラメーター）を図—2 で示される値の 10 倍をとるものとすれば，一般の道路橋を走行中の自動車の振動を不規則外力として橋げたの中点に作用させた時の橋げたの動的応答の動的係数として 0.32* を考えればよいであろう。しかしこの場合の橋面の凹凸のパワー スペクトル密度から自動車の振動の入力関数としての $z_0(t)$ のパワー スペクトル密度を求める際の式 (25) 中の自動車の速度 V は 40 km/h を考えており，自動車が橋げた上を移動することによる橋げたの動的影響は考慮されていない。

つぎに，走行中の自動車のタイヤ部における接地力の動的係数を計算した図—7 について (a) 図は自動車の懸架部およびタイヤ部の減衰定数が接地力の動的係数 i_v におよぼす影響について調べたのがこの図である。この図から減衰定数は接地力の動的係数に与える影響が大きいことがわかり，その影響度は β_s=0.04, β_T=0.06 までは大きく，それぞれその値以上では影響は小さい。(b) 図は速度 V をパラメーターとしてばね上の固有振動数の影響を調べたもので，V が小さい間は固有振動数が大きくなると動的係数も大きくなる。V が 120 km/h となるとその差は小さくなる。(c) 図は自動車の重量パラメーター R_v の影響を調べたもので，V=80 km/h 以下では動的係数は R_v には関係なく一定値をとるようであるが，この速度を越えると R_v が小さいところで急激に大きくなっている。そして R_v の大きい場合より R_v が小さい場合，すなわち，積載車より空車の方が動的係数が大きいことがわかる。このことはわれわれが日常で経験する事実とも一致している。いずれも速度が大きくなると動的係数も大きくなる。

さて，われわれが道路橋など道路構造物を設計する際に考慮しなければならない自動車の接地力の動的係数は標準車で速度を 80 km/h として，(i) 自動車のばね上およびばね下減衰をともに期待しないとすれば，その動的係数は図—7(a) のように (s.v.) 値で 0.294 となり，2 (s.v.) 値で 0.588 となる。(ii) 自動車の減衰を期待しその標準値と考えられる β_s=0.04 および β_T=0.06 を考えると (s.v.) 値で 0.053, 2(s.v.) 値で 0.106 である。この場合，路面の凹凸の平滑度パラメーター a を前述のように図—2 の値の 10 倍をとるものとすれば，走行中の自動車の接地力の動的係数の標準値は 0.334 とすればよいことがわかる。

(i) および (ii) からわれわれが設計に考慮しなければならない接地力の動的係数としては最大 0.6 で平均値としては 0.4 が妥当と思われる。

4. 同時に多くの荷重が載荷した場合の動的応答

この節は，同時に載荷する自動車の数が多くなると自動車が橋げたに与える動的効果が小さくなることを説明し，ひいては設計活荷重に対する橋げたの振動性状について考察しようとするものである。この場合設計活荷重は自動車がかなり密に載荷されていることを考慮し，動的影響を与える各種の要素，たとえば路面の不整，走行速度の影響などは前節と同様に荷重のスペクトル密度に含めて考えて，簡単のために荷重は固定した位置で作用するものとしている。しかし，実際の荷重は走行してい

* 式 (24) でわかるように (s.v.) は $\sqrt{S_{z_0}(\omega)}$ に比例するので $0.102\times\sqrt{10}\fallingdotseq 0.32$ となる。

るから各種の速度を考え，移動荷重とすることも考えられるが，その場合は荷重間隔と速度との関係などについての考察も必要となり，この論文では特に，スパン長に対する逓減に注目しているので計算の仮定として荷重の作用位置を固定して考えることにする。

なお，自動車荷重の形式とその重量は等しいとして論ずる。また，各自動車荷重のばね上質量の変位と各測点の変位との間の伝達関数を図—8 のように表わす。図—8 中の H で第1の添字は測点の位置を第2の添字は荷重の位置を意味する。

(1) 2個の荷重が同時に載荷した場合

2個の自動車荷重が同時に載荷した場合を考える。いま，1個の自動車荷重がスパン中点に載荷している場合のスパン中点の動たわみを y_{cc} とし，左支点から x_1 の距離にある測点1の動たわみを y_{1c} とするとこの2つの動たわみの間には，

$$y_{1c}=y_{cc}\sin\frac{\pi}{l}x_1\equiv y_{cc}\,\eta_1$$

の関係がある。これはまた載荷点と測点の相反作用の原理により荷重の位置と測点を入れかえて，

$$y_{1c}=y_{c1}=y_{cc}\,\eta_1$$

として表わすことができる。ここに y_{c1} は荷重が点1に載荷した場合のスパン中点の動たわみを表わす。荷重2についても同様に，

$$y_{2c}=y_{c2}=y_{cc}\,\eta_2$$

として表わされる。このことから図—8 に示す伝達関数はそれぞれ，荷重の位置の項 η_i を乗じて，

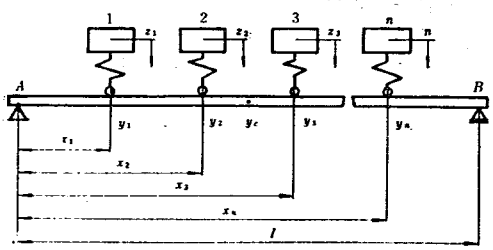
$$H_{c1}(i\omega)=\eta_1 H_{cc}(i\omega),\quad H_{c2}(i\omega)=\eta_2 H_{cc}(i\omega)$$

として表わされる。

この場合荷重1および2によるスパン中点の合成パワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned}S_{yc2}(\omega)=&|H_{c1}(i\omega)|^2 Sz_1(\omega)+|H_{c2}(i\omega)|^2 S_{z2}(\omega)\\&+|\overline{H_{c1}(i\omega)}\cdot H_{c2}(i\omega)|S_{z1,z2}(\omega)\\&+|H_{c1}(i\omega)\cdot\overline{H_{c2}(i\omega)}|S_{z2,z1}(\omega)\cdots(31)\end{aligned}$$

図—8　伝達関数の表示例



伝　達　関　数

	y_1	y_2	y_3	・	y_n	y_c
z_1	H_{11}	H_{21}	H_{31}	・	H_{n1}	H_{c1}
z_2	H_{12}	H_{22}	H_{32}	・	H_{n2}	H_{c2}
z_3	H_{13}	H_{23}	H_{33}	・	H_{n3}	H_{c3}
・	・	・	・	・	・	・
z_n	H_{1n}	H_{2n}	H_{3n}	・	H_{nn}	H_{cn}

として表わされる。ここに式 (31) 中の $S_{z_1,z_2}(\omega)$ および $S_{z_2,z_1}(\omega)$ は荷重相互の相互パワー スペクトル密度であって，ここでは各自動車の振動はまったく独立であるとすれば，

$$S_{z_1,z_2}(\omega)=S_{z_2,z_1}(\omega)=0$$

である。また自動車の形式および重量は等しいとしていることから，

$$S_{z_1}(\omega)=S_{z_2}(\omega)=S_z(\omega)$$

が成立する。このことから式 (31) は簡単になって，

$$\begin{aligned}S_{yc_2}(\omega)&=[|H_{c1}(i\omega)|^2+|H_{c2}(i\omega)|^2]\,S_z(\omega)\\&=[\eta_1^2+\eta_2^2]|H_{cc}(i\omega)|^2\,S_z(\omega)\\&=[\eta_1^2+\eta_2^2]S_{y_c}(\omega)\quad\cdots\cdots(32)\end{aligned}$$

として表わされる。式 (32) は2台の自動車が同時に載荷した場合の橋げたスパン中点の動たわみのパワー スペクトル密度 $S_{yc_2}(\omega)$ を与える。

(2) 数個の荷重が同時に載荷した場合

この場合は式 (32) を拡張して，

$$\begin{aligned}S_{ycn}(\omega)&=[\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2]S_{y_c}(\omega)\\&=\Big[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big]S_{y_c}(\omega)\quad\cdots\cdots(33)\end{aligned}$$

と表わされる。

(3) パワー スペクトル密度と動的係数(衝撃係数)

スパン中点に1個載荷した場合のスパン中点の静たわみを δ_c とする。n 個の荷重が同時に載荷した場合のスパン中央点の静たわみ y_{sn} は荷重の位置に関する係数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ を考慮して，

$$y_{sn}=\delta_c(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)=\delta_c\sum_{i=1}^{n}\eta_i\quad\cdots\cdots(34)$$

として表わされる。

一方，スパン中点の動たわみのパワー スペクトル密度は式 (33) で表わされ，その二乗平均は式 (23) の $S'_y(\omega)$ に式 (33) の $S_{ycn}(\omega)$ を代入すればよい。すなわち，

$$\begin{aligned}\overline{y_{cn}^2}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)S_{y_c}(\omega)d\omega\\&=\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{y_c}(\omega)d\omega\quad\cdots\cdots(35)\end{aligned}$$

と表わされる。

このことから y_{cn} の標準偏差 $(s.v.)_n$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}(s.v.)_n&=\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{y_c}(\omega)d\omega}\\&=\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)}\cdot\sqrt{\overline{y_c^2}}\\&=\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)}\cdot(s.v.)_1\quad\cdots\cdots(36)\end{aligned}$$

ここに，$(s.v.)_1$ は1個の荷重による動的応答波の標準偏差である。

さて，この場合の標準偏差に対する動的係数 $\bar{i}_n$ は，式 (34) および式 (36) から，

$$\bar{i}_n=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Q_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}Q_i}\cdot\frac{(s.v.)_1}{\delta_c}=\psi_n\bar{i}_1 \quad \cdots\cdots(37)$$

$$\psi_n=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Q_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}Q_i} \quad \text{逓減率} \quad \cdots\cdots(38)$$

$$\bar{i}_1=\frac{(s.v.)_1}{\delta_c} \quad \text{1台載荷の場合の標準偏差に対する動的係数} \quad \cdots\cdots(39)$$

と表わされる。

式 (37) または式 (38) の ψ_n はパワー スペクトル密度や周波数 ω 等には関係なく，荷重の載荷台数とその位置によって決まる。式 (39) の $\bar{i}_1$ は1台の荷重による代表的動的係数で，もしスパン中点の動たわみが時間関数として表わされているとすれば，その振幅の少なくとも 68.27% はこの範囲内にあり，さらに $2(s.v.)$ を考えれば 95.45% がこの振幅内にあることになり，このことから1台の自動車による衝撃係数とみなしてもよいであろう。そこで $\bar{i}_1$ を i_1 と書く，この場合は式 (37) の $\bar{i}_n$ も一般に n 台同時に載荷した場合の衝撃係数 i_n と書きかえることができる。すなわち，式 (37) は，

$$i_n=\psi_n i_1 \quad \cdots\cdots(40)$$

となる。

式 (40) が n 個の自動車荷重が同時に載荷した場合の衝撃係数を表わす。

5. 道路橋のスパン長と衝撃係数

(1) スパン長と逓減率

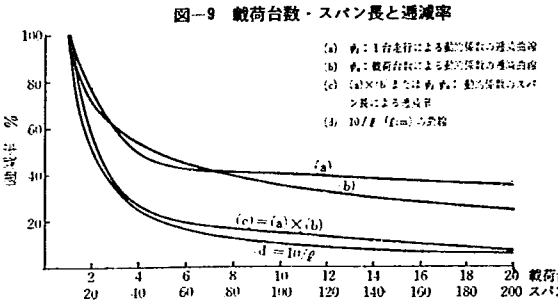
上のことから，あるスパン長 l を有する橋けたに2台・3台と荷重の数が多くなると衝撃係数は ψ_n によって逓減されることがわかる。このことから ψ_n を載荷台数による逓減率とよぶ。

さて，本研究では自動車列を等重量，等間隔連行荷重列と仮定し，車頭間隔を 10 m と仮定すると，スパン長 20 m の橋梁には2台，30 m の橋梁には3台，……と橋梁のスパン長 l と載荷台数 n は比例し，

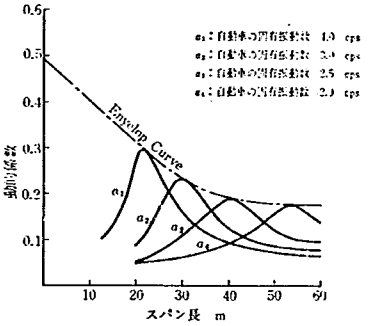
$$n=\frac{l}{10} \quad (l:m) \quad \cdots\cdots(41)$$

となる。このことから載荷台数による逓減率 ψ_n を計算すると図—9 の (b) 曲線を得る。

図—9　載荷台数・スパン長と逓減率



図—10　走行荷重1台による動的係数
（文献 6) より引用）



さらに自動車が1台走行した場合の衝撃係数はスパン長が大きくなると小さくなる傾向がある。この値については，われわれはすでに計算したことがあるのでその結果[16] を図—10 にあげる。この曲線の包絡線からスパン長による逓減率を計算すると 図—9 の (a) の曲線となる。衝撃係数は式 (41) で表わされることから，たとえばスパン長 10 m の動的係数を基準に考えた場合のスパン長による逓減率 ψ は図—9 の (a) 曲線と (b) 曲線との積として表わされることからこの値を求めると 図—9 の (c) 曲線となる。

そこで，いま仮りに，

$$\psi=\frac{10}{l}=\frac{1}{n} \quad (l:m) \quad \cdots\cdots(42)$$

の曲線を (d) 曲線で示す。この曲線と (c) 曲線と比較すると 4% までの誤差となる，このことからわれわれはスパン長による逓減曲線として 図—9 の (d) 曲線，すなわち式 (42) で与えられる逓減率を用いることにする。

(2) 道路橋の衝撃係数

前節においてスパン長に対する逓減率を求めた。この逓減率は自動車1台によるスパン長 10 m の橋けたの動的係数を基準にとっていることからわれわれはこの基準値（これはあくまでも基準値でスパン長 10 m の橋梁の設計衝撃係数値ではない）を求める必要がある。

(i) スパン長 10 m 以下の橋梁の固有周期は約 0.2 sec 以下であり，自動車の固有周期は約 0.3 sec 以上である点から自動車と橋けたの動的応答との間の伝達関数は他のスパン長の大きい橋のそれに比較して小さく，あたかも剛体であるかのように考えてもよかろう。また自動車が橋上にある時間がきわめて短いことから自動車の振動加速度を直接橋梁の動的係数として用いても不合理ではない。このことは構造物の耐震設計で外力の加速度を直接用いている震度法に相当する考え方である。この

点からわれわれがさきに名神高速道路[21]で行なった自動車の走行試験の記録を参考にする。この場合自動車のばね上質量の加速度は振動が大きく現われる道路と橋梁との expasion joint における振動の統計をとってその平均値を求めると 0.63 であった。3.(3) 節で求めた値も 0.6 (最悪値) であった。

(ii) われわれがさきにシミュレーションによって道路橋の衝撃係数を計算した場合[6]のスパン長 20 m の衝撃係数は 0.3 であった。これより前節で求めた逓減率より逆算すると基準値は 0.6 となる。

(iii) わが国を初め，アメリカ (AASHO) およびドイツ (DIN 1073) における現行示方書はいずれもスパン 10 m で 0.3 前後をとっている。

以上3点を総合して基準値として0.6をえらぶ。つぎに短スパン橋梁の設計衝撃係数についてのべる。

(iv) 一方，スパン長が小さい橋梁については現行示方書の活荷重はスパン長が大きい橋梁に対して非常に大きい値をとっている[23]ことから設計衝撃係数としては自動車荷重の動的係数を直接用いなくてもよい。

(v) といってあまり小さくはできない。それはスパン長 10 m 以下の衝撃係数は床版や床組等に用いられる場合が多く，この場合の衝撃係数を測定することは困難である。しかし床版や床組は死荷重応力が小さく活荷重による疲労強度が問題となる。この点から荷重の増加が疲労強度に対して敏感であることから多少大きい値を用いた方がよい。

(vi) 3.(2) 節で計算し，3.(3) 節で考察を加えたように，走行中の自動車の接地力の動的係数は設計荷重に近い状態に対する値として，最大 0.6 (図—7(a), $\beta_s=\beta_T=0.0$) であり，標準状態に対する値としては 0.334 (図—7 (a), $\beta_s=0.04$, $\beta_T=0.06$) であった。

(vii) 一方，現行示方書の最大値は，わが国においては 0.4，アメリカ (AASHO) では 0.3，イギリス (B.S.) では 0.25 をとっている。

以上 (iv)～(vii) までの4点から設計衝撃係数の最大値を 0.4 とする。

6. 本論文で求めた設計衝撃係数

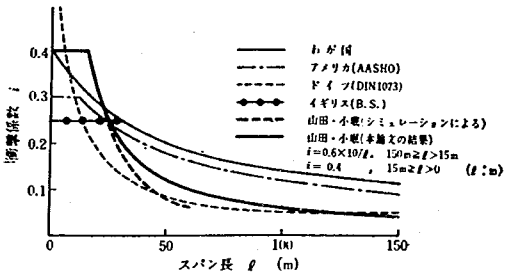
(1) 設計衝撃係数

以上の解析結果からつぎの設計衝撃係数を提案する。

$$\left.\begin{array}{ll} i=0.6\times 10/l & l>15\,\mathrm{m} \\ i=0.4 & l\leq 15\,\mathrm{m} \end{array}\right\}\ (l:\mathrm{m}) \qquad \cdots\cdots(43)$$

式 (42) を 図—11 の太い実線で示す。なお，

図—11　スパン長と衝撃係数

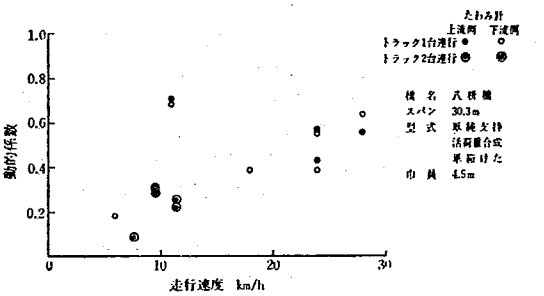


比較のために，わが国，アメリカ (AASHO)，ドイツ (DIN 1073) およびイギリス (B.S.) の現行規定を示した。またわれわれがシミュレーションによって求めた曲線[19]も併記した。

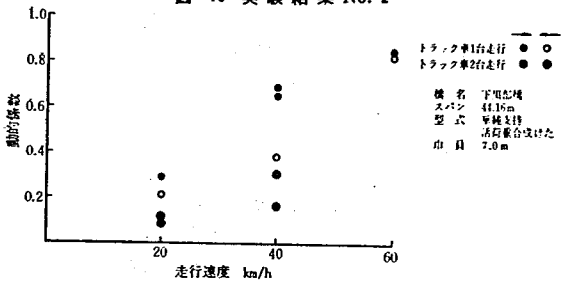
(2) 考　　察

以上，不規則振動論を応用して設計衝撃係数として式 (43) に示すような非常に単純な形で，しかも合理的な

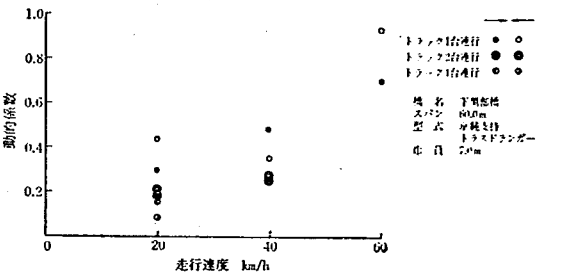
図—12　実験結果 No. 1



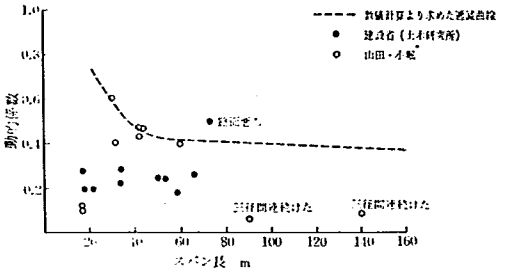
図—13　実験結果 No. 2



図—14　実験結果 No. 3



図—15 1台走行による動的係数とスパン長（実験値）
走行速度 30 km/h



値を導くことができた。この衝撃係数と各国の示方書でとられている値と比較すると，わが国およびアメリカでとられている値はやや大きいようであり，スパン長 60 m 以上の橋梁では約 8% の差となる。またドイツでとられている曲線とはよく一致している。さらにわれわれがさきにシミュレーションによって求めた曲線ともその逓減の傾向がよく一致している。イギリスにおいては衝撃が敏感に強度に作用すると思われるスパン長 30.48 m(100 ft) までは 0.25 をとり，それ以上は無視して零としていることはわれわれが本論文で求めた式をさらに単純化したものと考えられる点興味がある。

スパン長 150 m の設計衝撃係数は 0.04 となり，それ以上のスパン長ではこの式にしたがえばさらに小さくなる。このことから，もはや 150 m 以上の橋梁では衝撃係数を考慮する必要はないように思われる。

ちなみに，われわれが行なった 2,3 の実橋の走行試験の結果と比較する。その結果を図—12,13 および 14 に示す。この結果から自動車の台数が多くなると衝撃係数は小さくなることがわかる。いずれの結果も各走行速度について，1台走行と2台走行とを比較すると2台の場合はいずれも1台走行の場合の 1/2 となっている。さらに4台走行した 図—14 (20 km/h) の場合は1台の場合の 1/4 となっている。

つぎに走行速度を 30 km/h を基準にして，各地で実測された 20 橋の実験結果から動的係数を求め，スパン長との関係で整理したのが 図—15 である。破線は 図—9 の (a) 曲線に相当し，スパン長による動的係数が逓減することがわかる。これらの結果はいずれも本論文で導いた逓減率が正しいことを裏づけている。この逓減率を用いることによって1台のみの走行試験から設計衝撃係数を推定することが可能となる。この点今後の実験資料の整理を容易にすることができる。

8. むすび

本論文においては道路橋を通過する自動車の振動は橋面の凹凸や自動車のエンジンによる振動などによる不規則振動であることに注目し，この振動のパワー スペクトル密度は各自動車によって相違はないが，しかし互いに相関性はなくまったく独立であることから，ある1つの橋梁に同時に数台の自動車が載荷した場合その合成振動は小さくなることを不規則振動論を応用して解析し，さらに走行荷重1台による橋梁の振動はスパン長が大きくなると小さくなることなどを考慮して，スパン長による逓減率を導いた。一方過去の計算結果から上記の逓減率の基準となる値を定め，この基準値と逓減率の積として式 (43) に示すような非常に単純でしかも合理的な設計衝撃係数を導くことができた。

もちろん本論文で用いた仮定，たとえば走行中の自動車の振動をある固定した位置で作用するものと仮定し，荷重が移動することによる影響やその時の速度の影響を考慮しなかったことなどについては，さらに検討が加えられねばならないものが多いが，ここに示された値は，従来用いられたものよりかなり合理的根拠に立っていることを信ずるし，この値を用いることにより長いスパンの橋梁の安全性が低下するとは考えられない。われわれとしては本論文が長大スパン橋梁の経済性を高める一助となれば幸いである。

また，本論文で導いた逓減率を用いることによって，実橋の走行振動試験において，1台のみの走行試験の結果から求めた動的係数からスパン長に応じた設計衝撃係数を推定することが可能となり，今後の実験資料の整理を容易にすることができるものと思われる。

さらに，連続けた形式の橋梁の走行荷重による振動性状については現在解析中である。

なお，計算は京都大学電子計算機および東京大学大型計算機（いずれも HITAC 5020）によった。

本研究にあたって，終始ご指導下さった京都大学小西一郎教授，東京工業大学近藤政市教授ならびに資料を借用させていただいた建設省土木研究所構造研究室，橋梁研究室に対し心から感謝の意を表する次第である。

主もな記号

橋けたに関する記号

l：スパン長（m）
w：単位長さ当りの重量（kg/cm）
EI：曲げ剛性（kg-cm²）
β：減衰定数（≒対数減衰率/2π）
$y_{(t,x)}$：任意点の動たわみ（cm）
$y_c(t)$：スパン中点の動たわみと橋面凹凸の和（cm）
$z_0(t)$：橋面の凹凸（cm）

自動車荷重に関する記号

m：ばね上質量（kg·sec²/cm）
m_T：ばね下質量（kg·sec²/cm）
k：懸架ばねのばね定数（kg/cm）
k_T：タイヤ部のばね定数（kg/cm）

c：懸架部の減衰係数 (kg/cm/sec)

c_T：タイヤ部の減衰係数 (kg/cm/sec)

z：ばね上質量の鉛直変位 (cm)

z_T：ばね下質量の鉛直変位 (cm)

v, V：走行速度 (cm/sec, m/h)

i：自動車荷重の番号

x_i：i 番目の荷重の位置

$\varrho_i=\sin(\pi x_i/l)$

その他の記号

$Z(i\omega)$：添字で表わされている関数のフーリエ変換

$S(\omega)$：添字で表わされている関数のパワースペクトル密度

$H(i\omega)$：添字で表わされている関数間の伝達関数

$\overline{y^2}$：関数 y の二乗平均値

$(s.v.)$：関数の標準偏差

参考および引用文献

1) 山田善一：“橋梁の衝撃”，土木構造物の振動と安全性，土木学会関西支部，昭 41
2) 喜内 敏：“梁及び版の捩み振動について”，金沢工業専門学校学術報告，第 4 集，昭 25
3) 橋本春一：“鉄道橋の衝撃”，鋼橋設計示方書とプレストレスコンクリート指針，土木学会，昭 30
4) Inglis, C.E., : "A Mathematical Treatise on vibration in railway Bridges", Cambridge Univ. Press 1934
5) Hillerborg, A. : "Dynamic Influences of Smoothly Runing Loads on Simply Supported Girders", Institution of Structural Eng. and Bridge Building of the Royal Institute of Technology, Stockholn, Sweden, 1951
6) Temoshenko, S. : "Vibration problems in engineering", Van Nostrand, 1955
7) 三瀬・国井：“走行荷重による橋桁の強制振動論”，九州大学弾性工学研究所報告，1-1，昭 18
8) Tung, T.P., Goodman, L.E., Chen, T.Y. and Newmark, N.M. : "Highway Bridge Impact Problems", Highway Research Board Bulletin 124, 1956
9) Newmark, N.M. : "Computation of Dynamic Structural Response is the Range Approaching Failure", Proc. of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, 1952
10) Newmark, N.M. : "A Method of Computiation for Structural Dynamics", Proc. of ASCE, EM Vol. 85, No. 3, p. 199, July, 1959
11) Thesis, A. and Wen, R.K.L. : "Dynamic Behavior of Simple Span Highway Bridges Traversed by Two-Axle Vehicles", Univ. of Illinois, Civil Eng. Studies, S.R.S. No. 142, 1957
イリノイ大学におけるその他一連の研究のリストは文献 1) に紹介されている。
12) Biggs, J.M. and Suer, H.S. : "Vibration of Simple-span Highway Bridges", Proc. of ASCE, Vol. 83, ST 2, 1957
13) Bleich, F. : "Theorie und Berechnung der eisernen Brücken", Julius Springer, 1924
14) 大地羊三：“鉄道橋の衝撃係数”，鉄道技術研究所報告，No. 370, 昭 38
15) "The AASHO Road Test", Highway Research Board, Special Report 73, National Academy of Sciences-National Research Council, 昭 40
16) 山田・小堀：“ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究”，土木学会論文集，No. 119, 昭 40
17) 川合・森崎：“自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性”，三菱重工技報，Vol. 2, No. 2, 昭 40
18) 兼重一郎：“パワースペクトル解析の自動車への応用”，いすず技報，No. 33, 昭 35
19) Kaneshige, I. : Measurement of Power Spectra of Vehicle Vibration and Vehicle Road Roughness", Proceedings of the 10th N.C.T.A.M. 1960
20) 得丸・芝川：“不規則な道路凹凸による自動車振動の多入力系としての解析”，日本機械学会第 44 期全国大会，No. 158, 昭 41
21) 伊藤・片山：“橋梁構造の振動減衰”，土木学会論文集，No. 117, 昭 40
22) 山田・小堀：“自動車走行中の振動特性が橋梁の衝撃係数に与える影響について”，第 20 回土木学会年次学術講演会 (I-29)，昭 40
23) 川崎偉志夫：“道路橋の荷重について”，鋼橋設計示書とプレストレスコンクリート指針，土木学会，昭 30

スペクトル解析のための文献

24) Crandall, S.H. : "Random Vibration", Vol. 1 & 2 M.I.T. Press, 1959
25) Robson, J.D. : "An Introduction to Random Vibration" Elsevier, 1964
26) Rice, S.D. (宮脇，三根訳)：“雑音理論”，電気書院，昭 30
27) 宮脇一男：“雑音解析”，朝倉書店，昭 36
28) 伯野元彦：“不規則振動論入門”，土木構造物の振動と安定性，土木学会関西支部，昭 41

(1967.1.24・受付)

VI

Non-Stationary Vibrations of Bridges Under Random Moving Load

Vibrations non-stationnaires de ponts sous une charge en mouvement arbitraire

Nichtstationäre Brückenschwingungen unter zufälliger, beweglicher Last

LADISLAV FRÝBA
Doc. Ing.Dr.Sc.
Head Research Scientist
Research Institute of Transport
Prague, Czechoslovakia

1. Introduction

It has been assumed up to this time that the traffic loading of bridges, i.e. the static and dynamic component of the service load, is a well known function of the space and time coordinate (a deterministic process), see [1], [2]. This paper deals with the essentially opposite case supposing that the traffic loading of bridges is a random process. This new conception is in better accordance with observations because the true traffic loading is influenced by the random composition of the traffic flow, by the random initial conditions when the vehicles enter the bridge, by the irregularities of unevenness of the road surface etc.

In general the static and dynamic deflection of bridges is described by the linear differential equation

$$L[v(x,t)] = p(x,t) \qquad (1)$$

where $v(x,t)$ denotes the deflection and $p(x,t)$ the load. The random variation of $p(x,t)$ is assumed not only with respect to the time coordinate t but also to the position coordinate x and in addition the load $p(x,t)$ is regarded as a nonstationary Gaussian random process of non-Markov type.

L represents a linear differential operator of the type

$$L = L_o + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial}{\partial t} \qquad (2)$$

where L_o is a self-adjoint linear operator in the space coordinate x, μ - mass per unit length and ω_b - circular frequency of viscous damping.

2. Probability Analysis

2.1. Normal - Mode Analysis. Elastic systems described by Eqs. (1) and (2) are with advantage solved by means of the normal-mode analysis

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{(j)}(x)\, q_{(j)}(t) \tag{3}$$

$$p(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\, v_{(j)}(x)\, Q_{(j)}(t) \tag{4}$$

where $v_{(j)}(x)$ are the normal modes of vibration that are obtained with regard to the boundary conditions from the equation

$$L_o\left[v_{(j)}(x)\right] = \mu\, \omega^2_{(j)} v_{(j)}(x) \quad , \tag{5}$$

$\omega_{(j)}$ is the natural circular frequency of the system,

$$Q_{(j)}(t) = \frac{1}{V_{(j)}} \int_0^{\ell} p(x,t)\, v_{(j)}(x)\, dx \tag{6}$$

is the generalized force,

$$V_{(j)} = \int_0^{\ell} \mu\, v^2_{(j)}(x)\, dx \quad , \quad \int_0^{\ell} \mu\, v_{(j)}(x) v_{(k)}(x)\, dx = 0 \text{ for } j \neq k \tag{7}$$

and $q_{(j)}(t)$ is the generalized deflection that is obtained with regard to the initial conditions from the equation

$$\ddot{q}_{(j)}(t) + 2\,\omega_b\, \dot{q}_{(j)}(t) + \omega^2_{(j)}\, q_{(j)}(t) = Q_{(j)}(t) \tag{8}$$

The solution of Eq.(8) with zero initial conditions is

$$q_{(j)}(t) = \int_0^t h_{(j)}(t-\tau) Q_{(j)}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}(\tau) Q_{(j)}(t-\tau)\, d\tau \tag{9}$$

where $h_{(j)}(t)$ denotes the impulsive function

$$h_{(j)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega'_{(j)}}\, e^{-\omega_b t} \sin \omega'_{(j)} t & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \tag{10}$$

and $\omega'^2_{(j)} = \omega^2_{(j)} - \omega^2_b$. The limits of integration in (9) may be extended to ∞ and $-\infty$, respectively, because $Q_{(j)}(t-\tau) = 0$ for $\tau > t$ and $h_{(j)}(\tau) = 0$ for $\tau < 0$, respectively.

The functions $h_{(j)}(t)$ and $v_{(j)}(x)$ are deterministic while

$q_{(j)}(t)$, $Q_{(j)}(t)$, $v(x,t)$ and $p(x,t)$ are random ones.

2.2. Correlation Analysis. The probability analysis recquires to know the statistic characteristics of the input

$$p(x,t) = E\left[p(x,t)\right] + \overset{\circ}{p}(x,t) \tag{11}$$

$$K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2) = E\left[\overset{\circ}{p}(x_1,t_1)\,\overset{\circ}{p}(x_2,t_2)\right] \tag{12}$$

where E represents the mean value linear operator, $\overset{\circ}{p}(x,t)$ - the centred value of the load and $K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2)$ - the covariance of the nonstationary function $p(x,t)$.

As follows from the definition of the covariance (12) the covariance of the generalized deflection may be evaluated from (9)

$$K_{q_{(j)}q_{(k)}}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}(\tau_1)h_{(k)}(\tau_2)K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\,.$$
$$.\,d\tau_1\,d\tau_2\,, \tag{13}$$

the covariance of the deflection from (3)

$$K_{vv}(x_1,x_2,t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)K_{q_{(j)}q_{(k)}}(t_1,t_2) \tag{14}$$

and the covariance of the load from (4)

$$K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu^2 v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1,t_2) \tag{15}$$

In Eqs. (13) and (15) the covariance of the generalized force is calculated from (6)

$$K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1,t_2) = \frac{1}{V_{(j)}V_{(k)}}\int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2)\,.$$
$$.\,dx_1\,dx_2 \tag{16}$$

2.3. Spectral Density Analysis. The spectral density of a nonstationary function is defined in [3] and for the generalized deflection the Wiener-Khinchine relations between the spectral density and the covariance are as follows

$$S_{q_{(j)}q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{q_{(j)}q_{(k)}}(t_1,t_2)e^{-i(\omega_2 t_2-\omega_1 t_1)}dt_1dt_2 \tag{17}$$

$$K_{q_{(j)}q_{(k)}}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{q_{(j)}q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2)e^{i(\omega_2 t_2-\omega_1 t_1)}d\omega_1\,d\omega_2 \tag{18}$$

For the spectral density analysis it is also convenient to introduce the transfer function

$$H_{(j)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\omega_{(j)}^2 - \omega^2 + 2i\omega_b\omega} \tag{19}$$

as a Fourier integral transformation of $h_{(j)}(t)$ given by (10).

Then the spectral density of the generalized deflection may be evaluated as a function of the spectral density of the generalized force, see [4]:

$$S_{q_{(j)}q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2) = \bar{H}_{(j)}(\omega_1)\, H_{(k)}(\omega_2)\, S_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2) \tag{20}$$

where $\bar{H}_{(j)}(\omega)$ is a complex conjugate function of $H_{(j)}(\omega)$.

Here we used the spectral density $S_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2)$ of the generalized force defined similarly as in (17); this can be adapted with regard to the Eq. (16)

$$S_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1,t_2)\, e^{-i(\omega_2 t_2 - \omega_1 t_1)}\, dt_1 dt_2 =$$
$$= \frac{1}{V_{(j)}V_{(k)}}\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)S_{pp}(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)\,dx_1 dx_2 \tag{21}$$

$$K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2)\, e^{i(\omega_2 t_2 - \omega_1 t_1)}\, d\omega_1 d\omega_2 \tag{22}$$

The spectral density of the deflection is then with respect to (14)

$$S_{vv}(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)S_{q_{(j)}q_{(k)}}(\omega_1,\omega_2) \tag{23}$$

from which the covariance of the deflection can be calculated similarly as in (18) and (14).

3. Random Moving Load

3.1. Random Moving Force. As an example we shall solve a simple beam of span ℓ loaded ba a massless force $P(t) = P + \overset{0}{P}(t)$ with constant mean value $E\left[P(t)\right] = P$ which is moving with constant velocity c along the beam. The analogous deterministic case was solved in

[2] and [4] and it represents the mean value of the present solution $E[v(x,t)]$, so that we will now investigate the stochastic case only.

The load per unit length and its mean and centred values are in our case

$$p(x,t) = \delta(x-ct)P(t) \ , \quad E[p(x,t)] = \delta(x-ct)P \ , \quad \overset{o}{p}(x,t) = \delta(x-ct)\overset{o}{P}(t) \tag{24}$$

where $\delta(x)$ represents the Dirac-delta function. The covariance of the load can be calculated from (12)

$$K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2) = \delta(x_1-ct_1)\,\delta(x_2-ct_2)\,K_{PP}(t_1,t_2) \tag{25}$$

where $K_{PP}(t_1,t_2)$ is the known covariance of the load $P(t)$. We substitute (25) into (16) and then, with regard to the well known properties of the Dirac function, we obtain the covariance of the generalized force

$$K_{Q_{(j)}Q_{(k)}}(t_1,t_2) = \frac{1}{V_{(j)}V_{(k)}}\, v_{(j)}(ct_1)v_{(k)}(ct_2)K_{PP}(t_1,t_2) \tag{26}$$

Using (26) the covariances of the deflection can be calculated from (13) and (14).

As an example let us assume the covariance of the force $P(t)$ in the form

$$K_{PP}(t_1,t_2) = K_{PP}(t_2-t_1) = 2\pi S_P\,\delta(t_2-t_1) \tag{27}$$

where S_P is the constant spectral density (white noise). Then we obtain from the Eq. (13)

$$K_{\eta_{(j)}\eta_{(k)}}(t_1,t_2) = \frac{1}{V_{(j)}V_{(k)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}(\tau_1)h_{(k)}(\tau_2)v_{(j)}[c(t_1-\tau_1)] \cdot v_{(k)}[c(t_2-\tau_2)]\,K_{PP}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 =$$

$$= \frac{2\pi S_P}{V_{(j)}V_{(k)}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}(\tau_1)h_{(k)}(\tau_1+t_2-t_1)v_{(j)}[c(t_1-\tau_1)] \cdot v_{(k)}[c(t_1-\tau_1)]\,d\tau_1 \tag{28}$$

If for simplification we neglect the cross-correlation of the generalized deflection, i.e. $K_{\eta_{(j)}\eta_{(k)}}(t_1,t_2) = 0$ for $j \neq k$, the variance of the deflection can be received from (14) :

$$\sigma_v^2(x,t) = K_{vv}(x,x,t,t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{(j)}^2(x) K_{q_{(j)}q_{(j)}}(t,t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi S_p}{V_{(j)}^2} v_{(j)}^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} h_{(j)}^2(\tau_1)\, v_{(j)}^2[c(t-\tau_1)]\, d\tau_1 \qquad (29)$$

The following expressions hold true for a simple beam of span ℓ and of bending stiffness EJ, see [4]

$$v_{(j)}(x) = \sin\frac{j\pi x}{\ell}, \quad V_{(j)} = \frac{\mu\ell}{2}, \quad \omega_{(j)}^2 = \frac{j^4\pi^4}{\ell^4}\frac{EJ}{\mu} \qquad (30)$$

Substituting (30) and (10) into (29) we obtain (note that the limits of integration may be changed as $h_{(j)}(\tau_1) = 0$ for $\tau_1 < 0$ and $v_{(j)}[c(t-\tau_1)] = 0$ for $\tau_1 > t$):

$$\sigma_v^2(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8\pi S_p}{\mu^2\ell^2\omega_{(j)}'^2} \sin^2\frac{j\pi x}{\ell} \int_0^t \left[e^{-\omega_b\tau_1} \sin\omega_{(j)}'\tau_1 \sin\frac{j\pi c}{\ell}(t-\tau_1)\right]^2 d\tau_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8\pi S_p}{\mu\ell\omega_{(j)}'^2} \sin^2\frac{j\pi x}{\ell} \frac{1}{16} \left\{ \frac{\omega_{(j)}' + j\pi c/\ell}{(\omega_{(j)}' + j\pi c/\ell)^2 + \omega_b^2} \left[\sin 2j\pi ct/\ell + e^{-2\omega_b t} \cdot \right.\right.$$

$$\cdot \sin 2\omega_{(j)}' t + \frac{\omega_b}{\omega_{(j)}' + j\pi c/\ell} (\cos 2j\pi ct/\ell - e^{-2\omega_b t} \cos 2\omega_{(j)}' t) \Big] +$$

$$+ \frac{\omega_{(j)}' - j\pi c/\ell}{(\omega_{(j)}' - j\pi c/\ell)^2 + \omega_b^2} \left[-\sin 2j\pi ct/\ell + e^{-2\omega_b t} \sin 2\omega_{(j)}' t + \frac{\omega_b}{\omega_{(j)}' - j\pi c/\ell} \cdot \right.$$

$$\cdot (\cos 2j\pi ct/\ell - e^{-2\omega_b t} \cos 2\omega_{(j)}' t) \Big] - \frac{2\omega_b}{j^2\pi^2 c^2/\ell^2 + \omega_b^2} \left(\frac{j\pi c/\ell}{\omega_b} \sin 2j\pi ct/\ell + \right.$$

$$\left. + \cos 2j\pi ct/\ell - e^{-2\omega_b t} \right) - \frac{2\omega_b}{\omega_{(j)}'^2} \left[1 - e^{-2\omega_b t} (\cos 2\omega_{(j)}' t - \frac{\omega_{(j)}'}{\omega_b} \cdot \right.$$

$$\left.\left. \cdot \sin 2\omega_{(j)}' t) \right] + \frac{2}{\omega_b} (1 - e^{-2\omega_b t}) \right\} \qquad (31)$$

As the variance of the deflection is a function of the time the resulting vibration of the beam appears as a nonstationary process although we have taken into account the movement of a stationary random force.

For subcritical velocities ($c < c_{cr}$) the greatest static and

dynamic effects of a moving force appear approximately in the moment when the force crosses the beam centre. Therefore the coefficient of variance, defined as $C_v(x,t) = \sigma_v(x,t)/E[v(x,t)]$, is to be calculated for $x = \ell/2$ and $t = T/2 = \ell/(2c)$. It represents then the relative dynamic increment of the deflection effected by the random moving force and it takes the following form (from (31) for j=1 approximately, see [4]) :

$$C_v(\ell/2, T/2) = C_P \cdot C_{vP} \tag{32}$$

Here C_P is an analogous coefficient of variance of the force P(t) and C_{vP} is represented graphically in Fig. 1 as a function of the parameters α and β where α is a velocity parameter and β a damping parameter, respectively :

$$\alpha = c/c_{cr} \quad ; \quad c_{cr} = (\pi/\ell)(EJ/\mu)^{1/2} \tag{33}$$

$$\beta = \omega_b / \omega_{(1)} \tag{34}$$

The same results can be obtained using the spectral density analysis from the section 2.3. In this case the load (24) must be taken for a function of the time only, see [4].

3.2. Random Moving Distributed Load. As a next example we shall solve a simple beam loaded by an infinitely long random strip which is moving with constant velocity c along the beam. The analogous deterministic case was solved in [4] where not only the movement of the continous load p (measured per unit length) but also the effects of its inertia mass $\mu_p = p/g$ were taken into account.

The load is assumed to have the following form

$$p(x,t) = p(x-ct)\, r(t) \tag{35}$$

The first of the components p(x-ct) is a random variable in the moving coordinate system $\xi = x-ct$ while the second r(t) is a random function of time. The mean values of these two functions are assumed to be constant

$$E[p(\xi)] = p \quad , \quad E[r(t)] = 1$$

so that the load (35) may be written as

$$p(x,t) = p + \overset{o}{p}(x,t) = [p + \overset{o}{p}(\xi)] \cdot [1 + \overset{o}{r}(t)] \tag{36}$$

where $\overset{o}{p}(x,t) = \overset{o}{p}(\xi) + p\overset{o}{r}(t) + \overset{o}{p}(\xi)\overset{o}{r}(t)$. Then with respect to (12) the covariance of the load is

$$K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2) = K_{pp}(\xi_1,\xi_2) + p\, K_{pr}(\xi_2,t_1) + K_{ppr}(\xi_1,\xi_2,t_1) +$$

$$+ pK_{pr}(\xi_1,t_2) + p^2K_{rr}(t_1,t_2) + p\,K_{prr}(\xi_1,t_1,t_2) + K_{ppr}(\xi_1,\xi_2,t_2) +$$

$$+ p\,K_{prr}(\xi_2,t_1,t_2) + K_{pprr}(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2) \qquad (37)$$

where $\xi_i = x_i - ct_i$, $i = 1, 2$. Let us assume approximately that the functions $p(\xi)$ and $r(t)$ have no cross-correlation of the second up to the fourth order; then (37) reduces to

$$K_{pp}(x_1,x_2,t_1,t_2) = K_{pp}(\xi_1,\xi_2) + p^2\,K_{rr}(t_1,t_2) \qquad (38)$$

where $K_{pp}(\xi_1,\xi_2)$ is the covariance of the load function in the moving coordinate system ξ and $K_{rr}(t_1,t_2)$ is the covariance in the time coordinate.

As an example let us assume the covariances of these functions in the following form

$$K_{pp}(\xi_1,\xi_2) = 2\pi S_p\,\delta(\xi_2-\xi_1)\,, \quad K_{rr}(t_1,t_2) = 2\pi S_r\,\delta(t_2-t_1) \qquad (39)$$

where S_p and S_r are the constant spectral densities (wide-band spectra). Putting (38) and (39) into (13) the covariance of the generalized deflection may be evaluated; hence

$$K_{\eta_{(j)}\eta_{(k)}}(t_1,t_2) = \frac{1}{V_{(j)}V_{(k)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} h_{(j)}(\tau_1)h_{(k)}(\tau_2)v_{(j)}(x_1)v_{(k)}(x_2)\cdot \qquad (40)$$

$$\cdot\left\{2\pi S_p\,\delta\left[x_2-x_1-c(t_2-\tau_2-t_1+\tau_1)\right] + 2\pi S_r p^2\,\delta(t_2-t_1-\tau_2+\tau_1)\right\}dx_1\,dx_2\,d\tau_1\,d\tau_2$$

The limits of integration with respect to time τ are considered from 0 to ∞ in accordance with (10) and because the movement of the load has an infinitely long duration.

Neglecting the cross-correlation $K_{\eta_{(j)}\eta_{(k)}}(t_1,t_2) = 0$ for $j \neq k$ the variance may be calculated from (40) and (14) :

$$\sigma_v^2(x,t) = K_{vv}(x,x,t,t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{(j)}^2(x)\,K_{\eta_{(j)}\eta_{(j)}}(t,t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{4\pi S_p c}{\mu^2\,\ell^2(1+\varkappa)^2}\frac{1}{\bar\omega_{(j)}^2\bar\omega'_{(j)}\bar\omega_b D}\sin^2\frac{j\pi x}{\ell}\left\{\frac{\bar\omega_{(j)}^2\bar\omega'_{(j)}\bar\omega_b\ell}{c} + \frac{j^2\pi^2c^2/\ell^2}{D}\left\{\bar\omega'_{(j)}\left[D + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 4\,\bar\omega_b^2(\bar\omega_b^2 - 3\,\bar\omega_{(j)}^2 + j^2\pi^2c^2/\ell^2)\right](1 - e^{-\bar\omega_b\ell/c}\cos\bar\omega'_{(j)}\ell/c.\cos j\pi) -\right.\right.$$

$$- \bar{\omega}_b\left[D + 4\bar{\omega}'^2_{(j)}(\bar{\omega}'^2_{(j)} - 3\bar{\omega}_b^2 - j^2\pi^2c^2/\ell^2)\right] e^{-\bar{\omega}_b \ell/c} \sin \bar{\omega}'_{(j)}\ell/c.\cos j\pi\Big\}\Big\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4S_r p^2(1 - \cos j\pi)}{\mu^2 j^2\pi^2 \bar{\omega}^2_{(j)} \bar{\omega}_b^{(1+\varkappa)^2}} \sin^2 \frac{j\pi x}{\ell} \qquad (41)$$

where $\bar{\omega}^2_{(j)} = \omega^2_{(j)}(1 - \alpha^2\varkappa/j^2)/(1 + \varkappa)$, $\bar{\omega}'^2_{(j)} = \bar{\omega}^2_{(j)} - \bar{\omega}_b^2$

$$\bar{\omega}_b = \omega_b/(1 + \varkappa) , \quad D = (\bar{\omega}^2_{(j)} - j^2\pi^2c^2/\ell^2)^2 + 4j^4\bar{\omega}_b^2\pi^2c^2/\ell^2$$

$$\varkappa = \mu_p/\mu \qquad (42)$$

The result (41) does not depend on time so that the vibration of the beam is a random process stationary in time. The coefficient of variance for the centre of the beam can be approximately brought to the following form, see [4]

$$C_v(\ell/2,t) = \sigma_v(\ell/2,t)/E\left[v(\ell/2,t)\right] = C_p\, C_{vp} + C_r\, C_{vr} \qquad (43)$$

where C_p and C_r are the analogous coefficients of variance of functions $p(\xi)$ and $r(t)$ respectively and the expressions C_{vp} and C_{vr} are represented in Figs. 2 and 3 as functions of α, β and mass parameter $\varkappa$, see (33), (34) and (42).

4. Application of the Theory and Experimental Results

The theory presented above can be applied to bridge structures assuming that their moving load is a random function. The solution is shown for two typical cases which concern (a) short span bridges and (b) long span bridges.

(a) The load of short span bridges or short longitudinal beams is idealized by a concentrated force of random time variation moving along a beam. Structures of this type are usually loaded by one axle of the vehicle only.

(b) The load of long span bridges is idealized by an infinitely long random strip (35). The first component of this load $p(\xi)$ expresses the random distribution of the static load in the bridge span direction while the second component $r(t)$ interprets the true dynamic effect of the load. The large span bridges are usually loaded by a series of axles resulting either from continous highway

traffic or from a railway train whose length is supposed to be much longer than the span of the bridge.

In reality the traffic loading is - generally speaking - an unknown random process. Therefore a solution was given also for the problem inverse to that given in the present paper [5]. The probability analysis [5] starts with the known statistic characteristics of the response v(x,t) giving the input characteristics for p(x,t) as a result. The statistic characteristics of any particular bridge (i.e. the beam deflections or stresses in some points) can be measured without difficulties under service conditions and on this basis the load characteristics can be evaluated.

As an example the Fig. 4 shows a covariance function measured on a railway bridge.

References

[1] V. Koloušek: Schwingungen der Brücken aus Stahl und Stahlbeton. Mémoires de l'A.I.P.C., vol. 16, Zürich, 1956, pp.301-332

[2] L. Frýba: Les efforts dynamiques dans les ponts-rails métalliques. Bull.mens.Assoc.intern.Congrès Chem.fer, 40 (1963), Nr.5, pp. 367-403

[3] S.H. Crandall (editor): Random Vibration. Vol.2. Cambridges, Mass., 1963, The M.I.T. Press

[4] L. Frýba: Vibration of Solids and Structures Under Moving Load. Manuscript of a book

[5] L. Frýba: The Inverse Problem in Stochastic Processes. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, in press

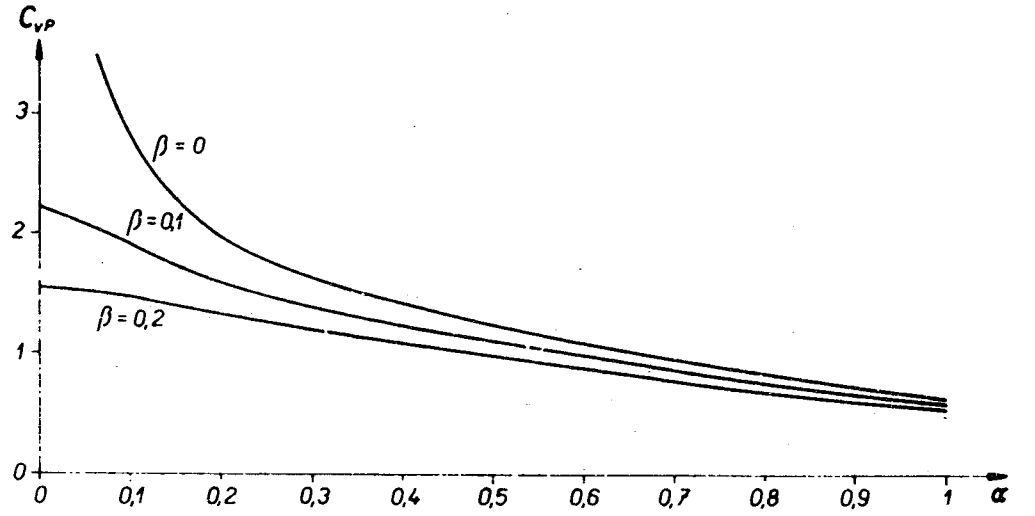


Fig.1. The coefficient C_{vP} as a function of the velocity parameter α and damping parameter β

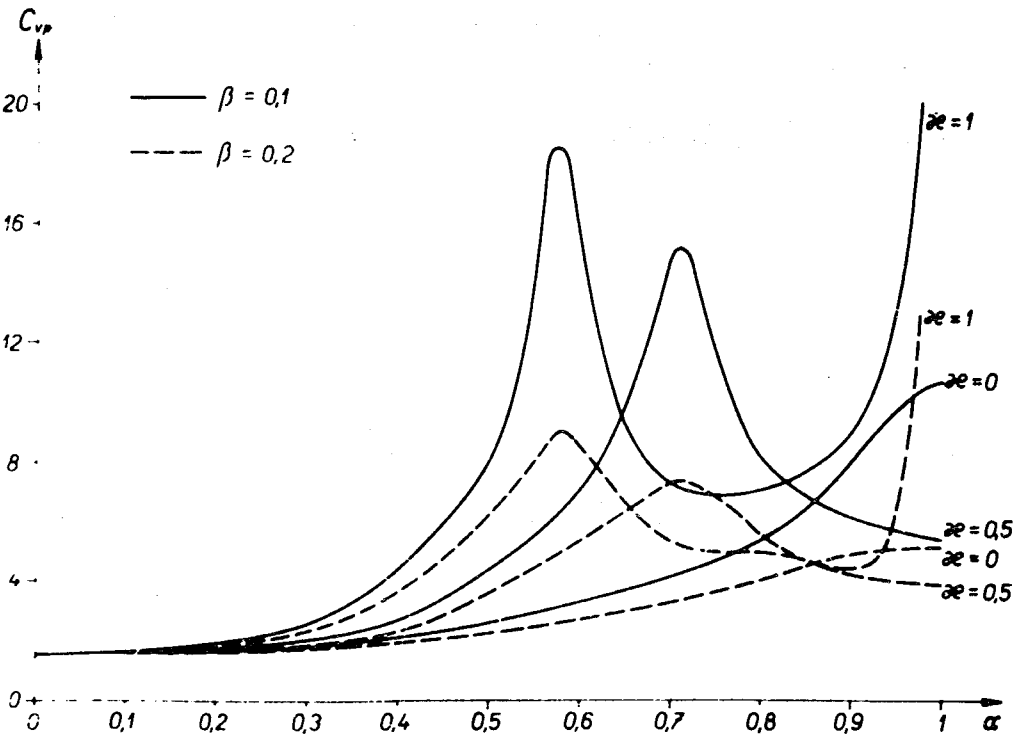


Fig.2. The coefficient C_{vn} as a function of the velocity parameter α, damping parameter β and mass parameter $\varkappa$

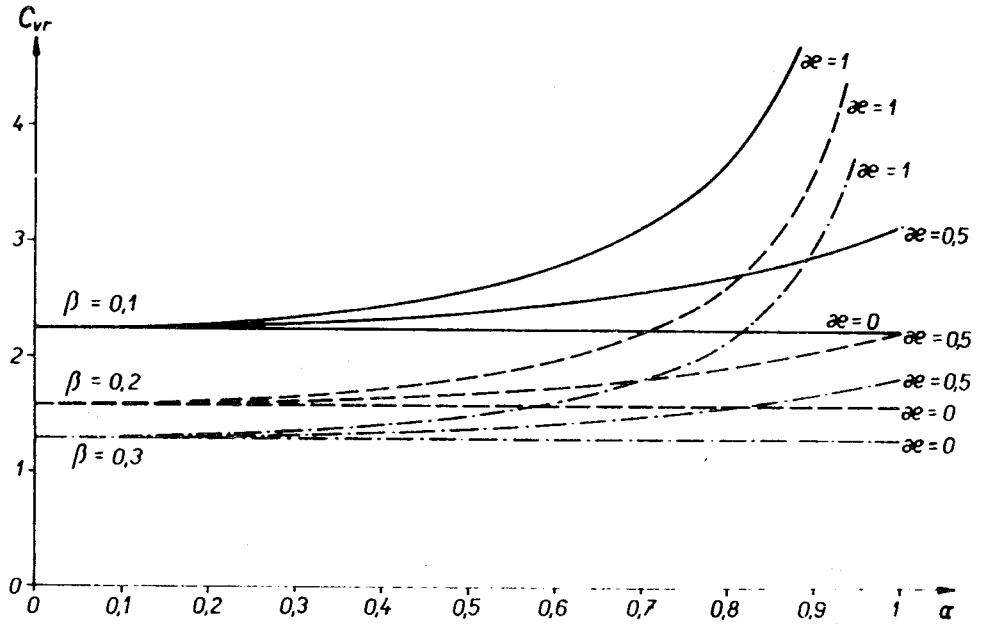


Fig.3. The coefficient C_{vr} as a function of the velocity parameter α, damping parameter β and mass parameter æ

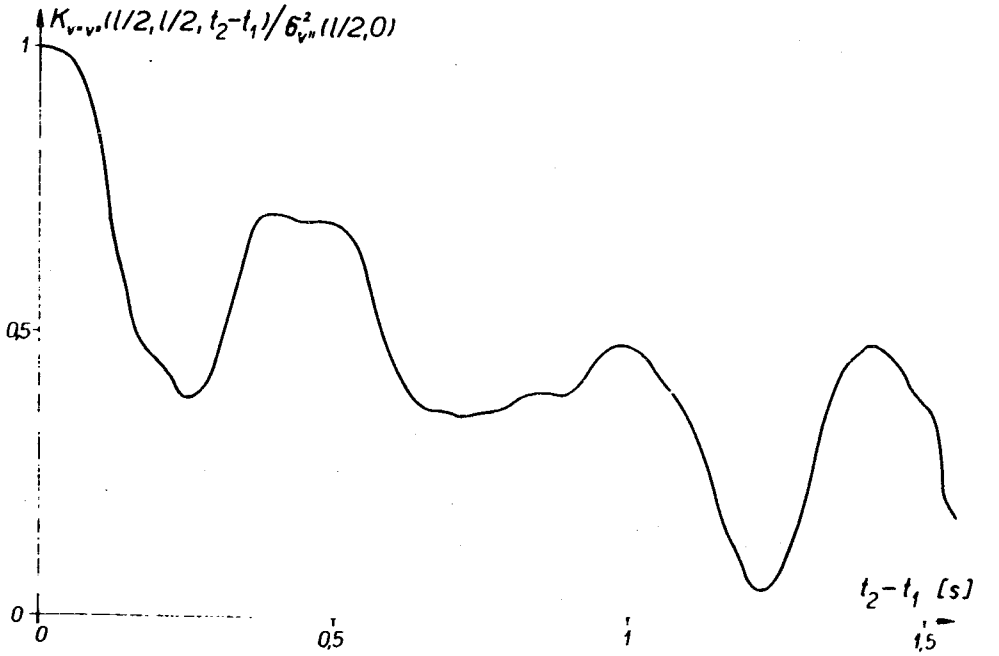


Fig.4. The experimental covariance measured from the stresses in the longitudinal beam on a steel-railway bridge

SUMMARY

The traffic loading of bridges is considered as a nonstationary random process. Starting from the statistic characteristics of the load the theory supplies information as to the statistic characteristics of the deflections or stresses in a bridge , i.e. the mean value, the covariance, the spectral density, the variance or the coefficient of variance.

The solution is shown for two typical cases which concern small and large span bridges.In the former case the load is idealized by a concentrated force of random time variation moving with constant velocity along a simply supported beam. The random effects of this load are decreasing with increasing velocity and damping (Fig. 1).

In the latter case the load is idealized by an infinitely long random strip which is moving again with constant velocity along a simple beam. This type of load induces in the beam a stationary random vibration the amplitudes of which are increasing with decreasing damping and for velocities approaching the critical speed which depends also on the mass of the traffic load (Figs. 2 and 3).

RÉSUMÉ

Le traffic sur un pont est considéré comme une charge stochastique non-stationnaire. En partant des caractéristiques statistiques de cette charge, la théorie donne des informations concernant les caractéristiques statistiques des déformations ou des tensions dans un pont, c-à-d. la valeur moyenne, la covariance, la densité spectrale, la variance ou le coëfficient de variance.

Deux cas typiques ont été traités pour un pont court, resp. long. Dans le premier cas, la charge est idéalisée par une force concentrée, variable arbitrairement avec le temps et voyageant avec une vitesse constante le long d'une poutre simple. L'effet arbitraire de cette charge décroît avec vitesse et amortissement croissant (fig. 1).

Dans le deuxième cas, la charge est idéalisée par une charge répartie stochastique infiniment longue voyageant sur la poutre simple avec une vitesse constante. Cette charge provoque une vibration stationneire arbitraire, dont les amplitudes croissent inversément avec l'amortissement et augmentent avec des vitesses approchant la vitesse critique, qui dépend également de la masse de la charge de traffic (voir fig. 2 et 3).

285

1－124　構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について
定常入力に対する過渡解

京都大学工学部　正会員　工博　後藤尚男
京都大学工学部　正会員　工修　○亀田弘行

1．まえがき　構造物に作用する荷重のうち地震力や風力などはきわめて不規則に変動することが多く，それらに対する構造物の応答もまた不規則に変動する．かかる現象を把握し，不規則外力に対する合理的な設計法を確立するためには，現象全体を確率過程として取り扱い，構造物の非破壊確率，たとえば本研究で取り扱うような最大応答の確率分布などを求めることが重要である．最大応答の確率分布を近似的に求める試みは過去においてもなされているが[1),2),3)]，精度の検討その他の問題点が残されている．本研究の解法も一つの近似解法であるが，各時刻間における応答量の相関の影響をできるだけ取り入れようとしたものである．解法の基本および応答を定常確率過程とした場合の解析計算例はすでに報告したので[4)]，ここではその後行なった定常入力に対する過渡応答の解析結果について報告する．

2．最大応答の確率分布の近似解法

対象とする応答量を $y(t)$ とし，その継続時間を τ とすると，$y(t)$ の絶対最大値 Y の確率分布 $\Phi(Y,\tau)$ は次式で表わされる．

$$\Phi(Y,\tau)=P[\max|y(t)|\leq Y;\ 0\leq t\leq\tau] \tag{1}$$

出生過程の基礎微分方程式を解いてその結果を式(1)に代入すると，

$$\Phi(Y,\tau)=P[|y(0)|\leq Y]\exp\left\{-\int_0^\tau c_0(Y,t)\,dt\right\} \tag{2}$$

ただし $c_0(Y,\tau)dt=P[|y(t+dt)|>Y\mid\max|y(t')|\leq Y;\ 0\leq t'\leq t]$ (3)

式(3)の $c_0(Y,t)$ を求めることは困難であるので，ここではその近似的な表示を試みる．式(3)は連続的な t について満足されねばならないが，

$$0\leq t_1<t_2<\cdots\cdots<t_{r(\tau)}<t$$

なる有限個の時刻について同式を満足するような $\bar{c}_0(Y,t)$ によって $c_0(Y,t)$ を近似すると，式(2)は近似的に次のように表わされる．

$$\Phi(Y,\tau)\cong P[|y(0)|\leq Y]\exp\left\{-\int_0^\tau \bar{c}_0(Y,t)\,dt\right\} \tag{4}$$

$$\bar{c}_0(Y,t)=Q_1(Y,t)/Q_2(Y,t)$$

$$Q_1(Y,t)=\frac{\sigma_v}{\sigma_t}\int_{-Y/\sigma_1}^{Y/\sigma_1}d\xi_1\int_{-Y/\sigma_2}^{Y/\sigma_2}d\xi_2\cdots\int_{-Y/\sigma_r}^{Y/\sigma_r}\left\{\int_{-\infty}^{0}|\xi_t|\,\phi_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,-\frac{Y}{\sigma_{\dot{y}}},\xi_t)\,d\xi_t+\int_0^\infty\xi_t\,\phi_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,\frac{Y}{\sigma_{\dot{y}}},\xi_t)\,d\xi_t\right\}d\xi_r \tag{5}$$

$$Q_2(Y,t)=\int_{-Y/\sigma_1}^{Y/\sigma_1}d\xi_1\int_{-Y/\sigma_2}^{Y/\sigma_2}d\xi_2\cdots\int_{-Y/\sigma_r}^{Y/\sigma_r}d\xi_r\int_{-Y/\sigma_{\dot{y}}}^{Y/\sigma_{\dot{y}}}\phi_{2n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,\xi_t)\,d\xi_t \tag{6}$$

ただし，$\xi_i = y(t_i)/\sigma_i$，$\sigma_i^2 = E[y^2(t_i)]$；$(i=1,2,\cdots,r(t))$，$\xi_t = y(t)/\sigma_y$，$\sigma_y^2 = E[y^2(t)]$，$\dot{\xi}_t = \dot{y}(t)/\sigma_{\dot{y}}$，$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2(t)]$。また $\phi_m(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_r, \xi_t, \dot{\xi}_t)$ および $\phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_r, \xi_t)$ はそれぞれの変数の同時確率密度関数である．

$y(t)$ が正規分布をなす場合には式(5)，(6)の積分回数を1回減することができるが，その結果は紙面の関係でここでは割愛しておく．

3．定常確率過程を入力とする線型1自由度系の過渡応答

線形1自由度系で表わされる構造物が $t=0$ で静止状態にあり，これに地動加速度 $\ddot{z}(t)$ が作用したときの相対変位応答 $y(t)$ は，周知のように次式で与えられる．

$$y(t) = -\frac{1}{\bar{\omega}_n}\int_0^t e^{-h_n\omega_n(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_n(t-\tau)\, \ddot{z}(\tau)\, d\tau \qquad (7)$$

ただし，ω_n：固有円振動数，h_n：減衰定数，$\bar{\omega}_n = \sqrt{1-h_n^2}\,\omega_n$

加速度 $\ddot{z}(t)$ を平均値ゼロ，分散 β^2 なる定常確率過程とし，そのパワースペクトル密度を $\beta^2 S_g(\omega)$ で表わすと，$y(t)$，$\dot{y}(t)$ の分散 $\sigma_y^2(t)$，$\sigma_{\dot{y}}^2(t)$，および $y(t)$ と $\dot{y}(t)$，$y(t_1)$ と $y(t_2)$，$y(t)$ と $\dot{y}(t_2)$ の相関係数 $\rho_{y\dot{y}}(t)$，$\rho_{yy}(t_1,t_2)$，$\rho_{y\dot{y}}(t_1,t_2)$ はそれぞれ次式のように求められる．

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_y^2(t) = \frac{\beta^2}{\omega_n^4}\int_0^\infty S_g(\omega)\frac{V_1(\omega;t,t)}{H(\omega)}\,d\omega, \quad \sigma_{\dot{y}}^2(t) = \frac{\beta^2}{\omega_n^2}(1-h_n^2)\int_0^\infty S_g(\omega)\frac{V_2(\omega;t,t)}{H(\omega)}\,d\omega \\
&\rho_{y\dot{y}}(t) = -\frac{\beta^2\sqrt{1-h_n^2}}{\omega_n^3\,\sigma_y(t)\,\sigma_{\dot{y}}(t)}\int_0^\infty S_g(\omega)\frac{V_3(\omega;t,t)}{H(\omega)}\,d\omega \\
&\rho_{yy}(t_1,t_2) = \frac{\beta^2}{\omega_n^4\,\sigma_y(t_1)\,\sigma_y(t_2)}\int_0^\infty S_g(\omega)\frac{V_1(\omega;t_1,t_2)}{H(\omega)}\,d\omega \\
&\rho_{y\dot{y}}(t_1,t_2) = -\frac{\beta^2\sqrt{1-h_n^2}}{\omega_n^3\,\sigma_y(t_1)\,\sigma_{\dot{y}}(t_2)}\int_0^\infty S_g(\omega)\frac{V_3(\omega;t_1,t_2)}{H(\omega)}\,d\omega
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$H(\omega) = \{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2 + 4h_n^2(\omega/\omega_n)^2, \qquad \varepsilon_1 = h_n/\sqrt{1-h_n^2}$$

$$\begin{aligned}
V_1(\omega;t,t) &= 1 - 2e^{-h_n\omega_n t}\left\{(\cos\bar{\omega}_n t + \varepsilon_1 \sin\bar{\omega}_n t)\cos\omega t + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin\bar{\omega}_n t \sin\omega t\right\} \\
&\quad + e^{-2h_n\omega_n t}\left\{\cos^2\bar{\omega}_n t + (\varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2})\sin^2\bar{\omega}_n t + \varepsilon_1 \sin 2\bar{\omega}_n t\right\} \\
V_2(\omega;t,t) &= \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} - 2e^{-h_n\omega_n t}\left\{\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}(\cos\bar{\omega}_n t - \varepsilon_1 \sin\bar{\omega}_n t)\cos\omega t + (1+\varepsilon_1^2)\frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin^2\bar{\omega}_n t\right\} \\
&\quad + e^{-2h_n\omega_n t}\left\{\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\cos^2\bar{\omega}_n t + \left[(1+\varepsilon_1^2)^2 + \varepsilon_1^2\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\right]\sin^2\bar{\omega}_n t - \varepsilon_1\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\sin\bar{\omega}_n t \sin\omega t\right\} \\
V_3(\omega;t,t) &= -e^{-h_n\omega_n t}\left\{2\varepsilon_1\frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin\bar{\omega}_n t \sin\omega t + (1+\varepsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2})\sin\bar{\omega}_n t\cos\omega t\right\} \\
&\quad + e^{-2h_n\omega_n t}\left\{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2})\sin^2\bar{\omega}_n t + (1+\varepsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2})\sin\bar{\omega}_n t\cos\bar{\omega}_n t\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1(\omega;t_1,t_2) &= \cos\omega(t_2-t_1) - e^{-h_n\omega_n t_2}\left\{(\cos\bar{\omega}_n t_2 + \varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n t_2)\cos\omega t_1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin\bar{\omega}_n t_2 \sin\omega t_1\right\} \\
&\quad - e^{-h_n\omega_n t_1}\left\{(\cos\bar{\omega}_n t_1 + \varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n t_1)\cos\omega t_2 + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin\bar{\omega}_n t_1 \sin\omega t_2\right\} \\
&\quad + e^{-h_n\omega_n(t_1+t_2)}\left\{\cos\bar{\omega}_n t_2 \cos\bar{\omega}_n t_1 + (\varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2})\sin\bar{\omega}_n t_2 \sin\bar{\omega}_n t_1 + \varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n(t_2+t_1)\right\} \\
V_3(\omega;t_1,t_2) &= \frac{\omega}{\bar{\omega}_n}\sin\omega(t_2-t_1) + e^{-h_n\omega_n t_2}\left\{\frac{\omega}{\bar{\omega}_n}(\cos\bar{\omega}_n t_2 - \varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n t_2)\sin\omega t_1\right. \\
&\qquad \left. - (1+\varepsilon_1^2)\sin\bar{\omega}_n t_2 \cos\omega t_1\right\}
\end{aligned}$$

$$-e^{-h_n\omega_n t_1}\left\{\frac{\omega}{\omega_n}(\cos\bar{\omega}_n t_1+\varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n t_1)\sin\omega t_2-\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\sin\bar{\omega}_n t_1\cos\omega t_2\right\}$$
$$+e^{-h_n\omega_n(t_2+t_1)}\left\{\varepsilon_1\left(1+\varepsilon_1^2+\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\right)\sin\bar{\omega}_n t_2\sin\bar{\omega}_n t_1+(1+\varepsilon_1^2)\sin\bar{\omega}_n t_2\cos\bar{\omega}_n t_1\right.$$
$$\left.-\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2}\cos\bar{\omega}_n t_2\sin\bar{\omega}_n t_1\right\}$$

減衰定数 h_n が小さいときには式(8)右辺の $1/H(\omega)$ は $\omega=\omega_n$ 付近に鋭いピークを有し，これに比較して $S_g(\omega)$ が $\omega=\omega_n$ 付近で滑かであれば，式(8)は近似的に次式のように簡略化される．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_y^2(t)&\cong\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\omega_n^3}\left\{1-e^{-2h_n\omega_n t}(1+\varepsilon_1\sin 2\bar{\omega}_n t+2\varepsilon_1^2\sin^2\bar{\omega}_n t)\right\}\\
\sigma_{\dot{y}}^2(t)&\cong\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega)}{4h_n\omega_n}\left\{1-e^{-2h_n\omega_n t}(1-\varepsilon_1\sin 2\bar{\omega}_n t-2\varepsilon_1^2\sin^2\bar{\omega}_n t)\right\}\\
\rho_{y\dot{y}}(t)&\cong\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{2\bar{\omega}_n^2\sigma_y(t)\sigma_{\dot{y}}(t)}e^{-2h_n\omega_n t}\sin^2\bar{\omega}_n t\\
\rho_{yy}(t_1,t_2)&\cong\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\omega_n^3\sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)}\left[e^{-h_n\omega_n|t_2-t_1|}\left\{\cos\bar{\omega}_n(t_2-t_1)+\varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n|t_2-t_1|\right\}\right.\\
&\quad\left.-e^{-h_n\omega_n(t_2+t_1)}\left\{\cos\bar{\omega}_n(t_2-t_1)+\varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n(t_2+t_1)+2\varepsilon_1^2\sin\bar{\omega}_n t_2\sin\bar{\omega}_n t_1\right\}\right]\\
\rho_{y\dot{y}}(t_1,t_2)&\cong-\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\bar{\omega}_n\omega_n\sigma_y(t_1)\sigma_{\dot{y}}(t_2)}\left[e^{-h_n\omega_n|t_2-t_1|}\sin\bar{\omega}_n(t_2-t_1)\right.\\
&\quad\left.-e^{-h_n\omega_n(t_2+t_1)}\left\{\sin\bar{\omega}_n(t_2-t_1)+2\varepsilon_1\sin\bar{\omega}_n t_2\sin\bar{\omega}_n t_1\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

さらに，$h_n=0$ のときは，式(9)は次のように変形される．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_y^2(t)&\cong\frac{\pi\beta^2}{4\omega_n^3}S_g(\omega_n)(2\omega_n t-\sin 2\omega_n t)\\
\sigma_{\dot{y}}^2(t)&\cong\frac{\pi\beta^2}{4\omega_n}S_g(\omega_n)(2\omega_n t+\sin 2\omega_n t)\\
\rho_{y\dot{y}}(t)&\cong\sin^2\omega_n t\Big/\left\{\omega_n t\sqrt{1-(\sin 2\omega_n t/2\omega_n t)^2}\right\}\\
\rho_{yy}(t_1,t_2)&\cong\left\{\omega_n(t_2+t_1)\cos\omega_n(t_2-t_1)-\sin\bar{\omega}_n(t_2+t_1)-\omega_n|t_2-t_1|\cos\omega_n(t_2-t_1)\right.\\
&\quad\left.+\sin\omega_n|t_2-t_1|\right\}\Big/\sqrt{(2\omega_n t_1-\sin 2\omega_n t_1)(2\omega_n t_2-\sin 2\omega_n t_2)}\\
\rho_{y\dot{y}}(t_1,t_2)&\cong-\left\{\omega_n(t_2+t_1)\sin\omega_n(t_2-t_1)-2\sin\omega_n t_2\sin\omega_n t_1\right.\\
&\quad\left.-\omega_n|t_2-t_1|\sin\omega_n(t_2-t_1)\right\}\Big/\sqrt{(2\omega_n t_1-\sin 2\omega_n t_1)(2\omega_n t_2+\sin 2\omega_n t_2)}
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

式(8)，(9)または(10)を用いて $\phi_{1n}(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_r,\xi_t,\xi_t)$ および $\phi_{2n}(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_r,\xi_t)$ を構成し，それらを式(5)，(6)に用いれば式(4)の $\Phi(Y,t)$ を算出することができる．図－1，2に，式(9)，(10)より算出した $y(t)$，$\dot{y}(t)$ の分散および相関係数を示した．同図より，減衰定数の大きさによって応答が定常状態に達する時間が異なる様子がわかる．その他の数値計算結果の詳細は講演時に報告する．

---

1) Freudenthal and Shinozuka：土木学会論文集，118号，昭．40．6．

2) Davenport：Proc．ICE，Vol．19，1961．　3) 小松：土木学会論文集 142号，昭．42．6．

4) 後藤・亀田：京都大学防災研究所年報，11号A，昭．43．3．

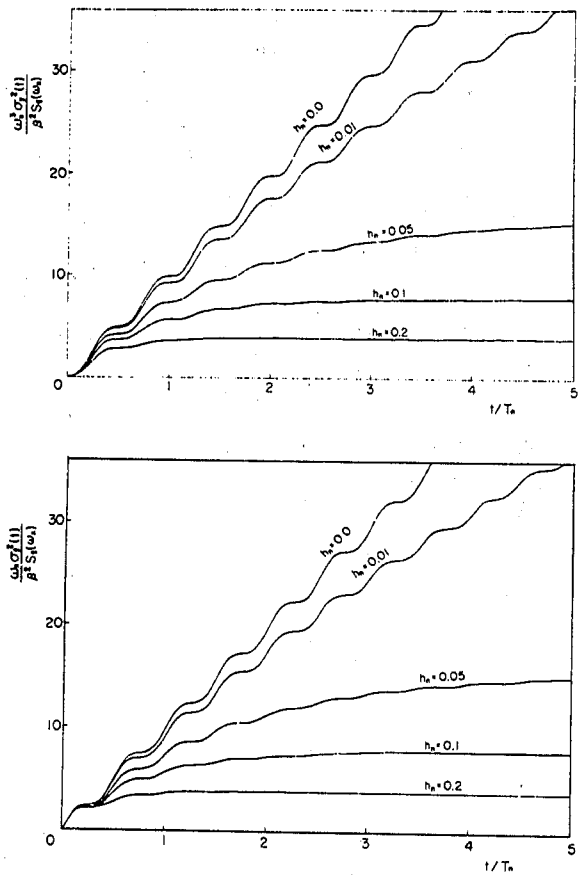


図-1 応答量 $y(t)$, $\dot{y}(t)$ の分散

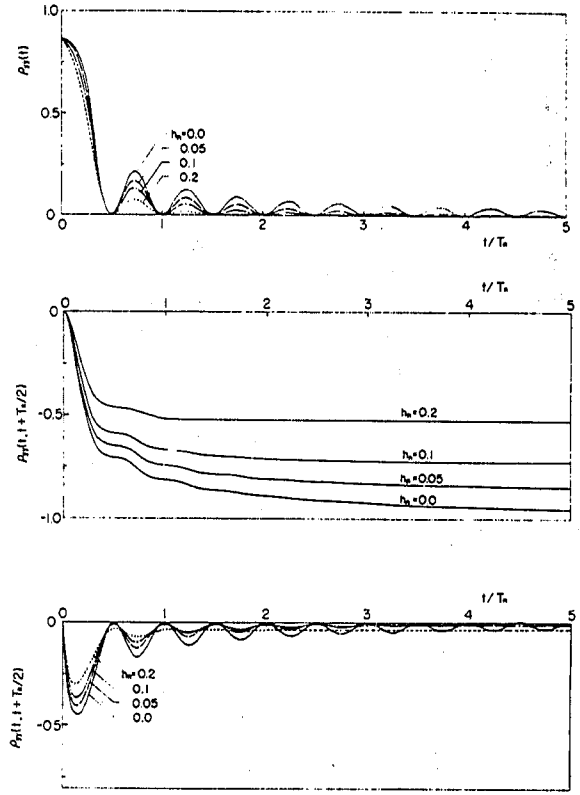


図-2 応答 $y(t)$, $\dot{y}(t)$ の相関係数

Journal of the
ENGINEERING MECHANICS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

RESPONSE OF HIGHWAY BRIDGES TO RENEWAL TRAFFIC LOADS

By Chi Chao Tung,[1] A. M. ASCE

INTRODUCTION

In a previous paper (5)[2] the response of highway bridges to random vehicle loads was considered. It was assumed that the number of vehicle arrivals in given time interval $(0, t)$ is Poisson counting process $N(t)$. That is, the probability that n vehicles arrive in time interval $(0, t)$ is given by

$$P\,[N(t) = n] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

in which parameter λ = the average number of vehicle arrivals per unit time. Equivalently, the successive interarrival times, T_1, T_2, of vehicles are independent positive random variables identically distributed as the random variable, T, whose probability density function $f_T(t)$ is a negative exponential. That is

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

It was also assumed that the bridge system is linear. Thus, if all vehicles travel at the same constant speed and have equal weight, response $Y(t)$ of the bridge system at time t, for large values of t, is a stationary filtered Poisson process, given by

$$Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{N(\infty)} h(t - \tau_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

in which $h(t - \tau_i)$, the influence function, is the response of the bridge at time t resulting from the passage of a vehicle which arrives at time $\tau_i \leq t$. The

Note.—Discussion open until July 1, 1969. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, No. EM1, February, 1969. Manuscript was submitted for review for possible publication on May 15, 1968.

[1] Asst. Prof. of Civ. Engrg., Univ. of Ill., Urbana, Ill.

[2] Numerals in parentheses refer to corresponding items in the Appendix II.—References.

quantities obtained were the probability density function and the expected rate of threshold crossings of the response process.

Studies (1) indicated that as a model for vehicular arrangement, the Poisson process has a marked deficiency; the negative exponential probability density function for the interarrival times of vehicles prescribes higher probability to smaller interarrival times than to larger interarrival times. Actual traffic conditions require that small interarrival time be improbable; i.e., the probability density function for interarrival time of vehicles approaches zero as the interarrival time approaches zero. The Pearson Type III probability density function is given by

$$f_T(t) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t} t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

in which k and λ = two positive constants. Other than the case $k = 1$, this function has the required property. When $k = 1$, Eq. 4 reduces to Eq. 2 which is the probability density function of interarrival time for random traffic conditions. When k becomes larger, Eq. 4 approaches the probability density function of interarrival time for regular traffic conditions. By suitable choice of parameters λ and k, the shape of the function can be changed considerably and was found to correspond well to various actual traffic conditions.

Response quantities such as the probability density function and the expected rate of threshold crossings of the response of a bridge to the traffic model mentioned above may be obtained without difficulty if the influence function of the response of the bridge is of simple form. For a given traffic volume it is possible, therefore, to obtain these response quantities using both the above mentioned traffic model and the one used in Ref. 5 to compare the results. Studies indicate that the differences between the response quantities become appreciable when the traffic becomes heavy. It is, therefore, the purpose of this study to develop a method for the determination of the probability density function and expected rate of threshold crossings of the response of bridges whose influence functions may be of arbitrary shape.

Idealization of Problem.—In this study the vehicle traffic model consists of successive arrival of vehicles. Interarrival times, $T_1, T_2, \ldots$, between successive vehicles are considered as independent positive random variables, identically distributed as a positive random variable, T. That is, the number of arrival of vehicles in given time interval $(0, t)$ is a renewal counting process. The random variable, T, has a probability density function that is Pearson Type III as given by Eq. 4 where k is considered as a positive integer larger than one. The probability that n vehicles arrive in time interval $(0, t)$ can be shown to be given by

$$P[N(t) = n] = \sum_{j=-k+1}^{k-1} \left(1 - \frac{|j|}{k}\right) B_{nk+j}(t), \quad n > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5a)$$

$$P[N(t) = 0] = \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) B_j(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5b)$$

in which $B_j(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^j/j!$ = the Poisson probability function as given by Eq. 1.

As in Ref. 5, all vehicles are assumed to travel at the same speed, have

the same type and weight, and the bridge is considered as a damped linear system. Response $Y(t)$ of the bridge at time t is again given by Eq. 3 where $N(t)$ is now a renewal counting process whose probability function is given by Eq. 5. That is, the response of the bridge is a filtered renewal process. The restriction that all vehicles have the same speed, type and weight may be removed by considering function $h(\cdot)$ in Eq. 3 as a random function. This will result in more involved computation but the principle as outlined herein will remain the same. If the duration of the influence function of the bridge is long and the traffic is dense, the response process approaches a normal process. The mean value function and covariance function of the filtered renewal process may be obtained from known equations (4) which suffice to determine the response process completely. However, preliminary studies indicate that for most cases encountered in practice, the response process is far from being normal and the method needs to be developed so that such response quantities as probability density function and expected rate of threshold crossings may be obtained.

PROBABILITY DENSITY FUNCTION

To obtain the probability density function of the thus filtered renewal process the idea underlying the numerical technique used in Ref. 5, for ob-

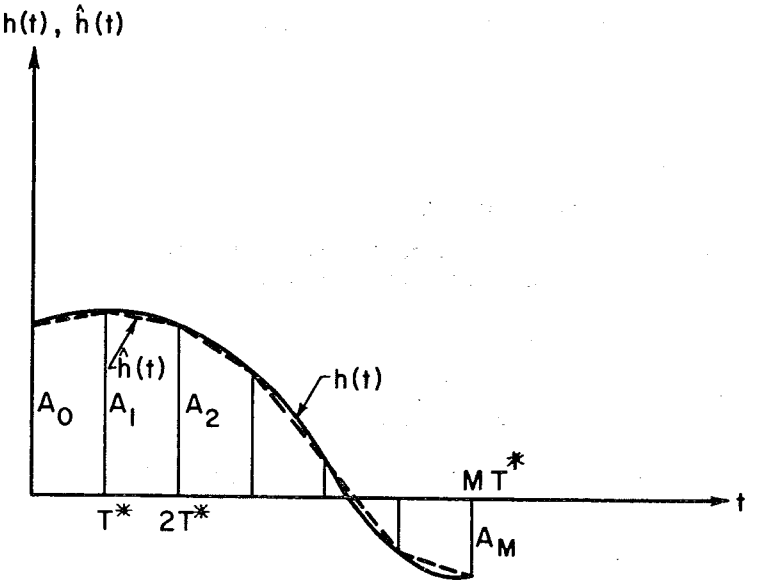


FIG. 1.—INFLUENCE FUNCTION AND PIECEWISE LINEARIZED APPROXIMATION

taining the probability density function of a filtered Poisson process, will be followed with certain modifications.

For convenience, the traffic models whose probability density functions of interarrival time are given by Eqs. 2 and 4 will be referred to as the Poisson traffic model and the generalized Poisson traffic model, respectively. Exam-

ination of Eqs. 2 and 4 indicates that for any positive integer value of k, Eq. 4 is the k fold convolution of Eq. 2. That is, the interarrival time of the generalized Poisson traffic is the sum of k independent, identically distributed interarrival times of the Poisson traffic. For example, the generalized Poisson traffic with parameters λ and k may be viewed as derived from a Poisson traffic with parameter λ by registering only every k^{th} arriving vehicle, or, by allowing only every k^{th} arriving vehicle to take effect on the response of the bridge. For purpose of illustration, let $k = 2$.

As in Ref. 5, the bridge is considered a damped system so that function $h(t)$ becomes negligibly small after a finite period of time. That is

$$h(t) = 0, \; t < 0 \quad \text{or} \quad t \geqq \overline{T} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

in which $\overline{T}$ = the duration of $h(t)$. Response process $Y(t)$ is, according to Eq. 3

$$Y(t) = \sum_i h(t - \tau_i) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Since the duration of $h(t)$ is $\overline{T}$, for a given t, $h(t - \tau_i)$ takes nonzero values only for those values of τ_i which lie within interval $(t - \overline{T}, t)$. Furthermore, since the traffic model is Poisson of which only every other vehicle arrival is registered, summation $\sum_i$ covers every other value of i for which the values of τ_i are in interval $(t - \overline{T}, t)$. In general, function $h(t)$ is of arbitrary shape and can be approximated by a sum of M nonoverlapping trapezoids of equal base width T^* as shown in Fig. 1. Denote by $\hat{h}(t)$ the resulting function

$$\hat{h}(t) = \sum_{m=1}^{M} h_m(t) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

in which $h_m(t) = \hat{h}(t)$ for $(m - 1)T^* < t \leqq mT^*$ and $h_m(t) = 0$ otherwise (9)

Let $Y_m(t)$, $m = 1, \ldots M$ be response processes whose influence functions are $h_m(t)$, $m = 1, \ldots M$, respectively. That is

$$Y_m(t) = \sum_i h_m(t - \tau_i) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

in which, for a given value of t, summation $\sum_i$ covers every other value of i for those values of i such that the values of τ_i lie within interval $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$. The response process is then

$$Y(t) = \sum_{m=1}^{M} Y_m(t) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

In practice, the probability of having many vehicle arrivals in interval $(t - \overline{T}, t)$ is usually small. For the purpose of illustrating the numerical technique, neglect, in terms of the generalized Poisson model, the probability of having more than two vehicle arrivals in interval $(t - \overline{T}, t)$. The probability density function of $Y(t)$, denoted by $f_Y(y)$, may be obtained by applying the theorem of total probability as

$$f_Y(y) = f_Y\left(y \mid \text{no vehicle in } (t - \overline{T}, t)\right) P \text{ [no vehicle in } (t - \overline{T}, t)]$$
$$+ f_Y\left(y \mid \text{one vehicle in } (t - \overline{T}, t)\right) P \text{ [one vehicle in } (t - \overline{T}, t)]$$
$$+ f_Y\left(y \mid \text{two vehicles in } (t - \overline{T}, t)\right) P \text{ [two vehicles in } (t - \overline{T}, t)] \quad (12)$$

in which $f_Y(y \mid \cdot)$ = the conditional probability density function of $Y(t)$ given the event following the vertical line $\mid$. The first term may be obtained easily from Eq. 5*b*, as

$$f_Y\left(y \mid \text{no vehicle in } (t - \overline{T}, t)\right) P \text{ [no vehicle in } (t - \overline{T}, t)]$$
$$= \delta(y)\left(1 + \frac{\lambda \overline{T}}{2}\right) e^{-\lambda \overline{T}/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

in which $\delta(\cdot)$ = the Dirac delta function.

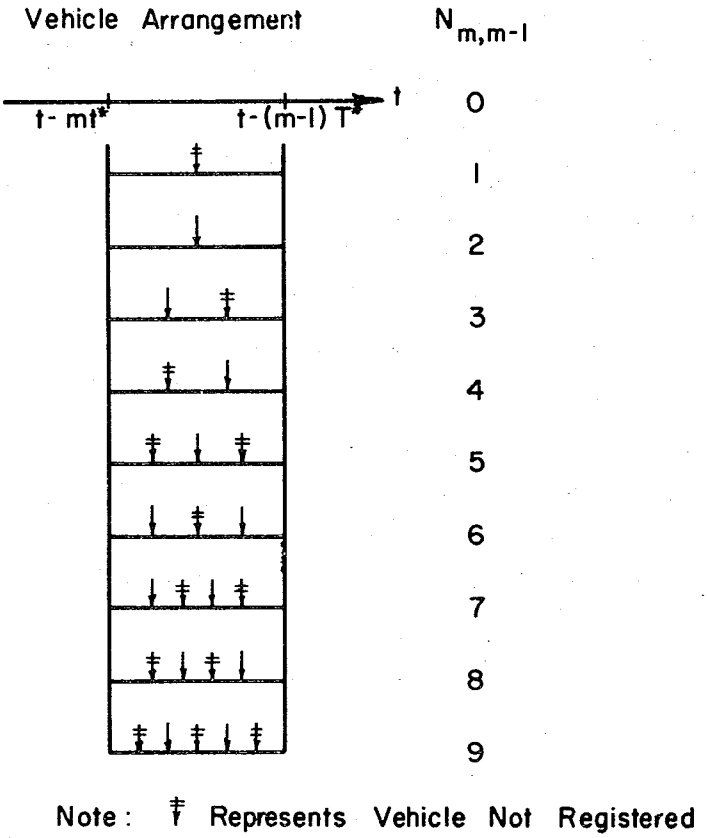


FIG. 2.—VEHICLE ARRANGEMENTS IN INTERVAL $(t - mT^*, t - (m-1)T^*)$

To obtain the second term in Eq. 12, let the interval $(t - \overline{T}, t)$ be divided into three nonoverlapping subintervals $(t - \overline{T}, t - mT^*)$, $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$ and $(t - (m - 1)T^*, t)$. Let $E_{i,j}(n)$ denote the event that n vehicles arrived in interval $(t - iT^*, t - jT^*)$ for $0 \leq j < i \leq M$. For example, $E_{m,m-1}(1)$ is the event that one vehicle arrived in interval $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$, $E_{M,m}(0)$

and $E_{m-1,0}(0)$ are events that no vehicle arrived in intervals $(t - \overline{T}, t - mT^*)$ and $(t - (m - 1)T^*, t)$, respectively. The event that one vehicle arrived in $(t - \overline{T}, t)$ may be considered as the union of the M mutually exclusive events $E_{M,m}(0) \cap E_{m,m-1}(1) \cap E_{m-1,0}(0)$, $m = 1, \ldots M$, in which $\cap$ denotes intersection of the events preceding and following it. It should be noted that the events corresponding to $m = 1$, and $m = M$ should be properly represented by $E_{M,1}(0) \cap E_{1,0}(1)$ and $E_{M,M-1}(1) \cap E_{M-1,0}(0)$, respectively. Thus, formally

$$f_Y(y \mid \text{one vehicle in } (t-\overline{T},t))\, P[\text{one vehicle in } (t-T,t)]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} f_Y(y \mid E_{M,m}(0) \cap E_{m,m-1}(1) \cap E_{m-1,0}(0))\, P[E_{M,m}(0) \cap E_{m,m-1}(1) \cap E_{m-1,0}(0)] \quad (14)$$

The events that appear in Eq. 14 are in terms of the generalized Poisson traffic model. To express these events in terms of the Poisson traffic model, let $N_{i,j}$ a nonnegative integer-valued random variable, be used to identify the state of vehicle arrangement of the Poisson model in interval $(t - iT^*, t - jT^*)$. For example, $N_{i,j} = 0$ is the event that no vehicle arrived in the interval, $N_{i,j} = 1$ means one vehicle arrived in the interval but is not registered, $N_{i,j} = 2$ is the event that one vehicle arrived in the interval and is registered, etc. Some arrangements of vehicles arrived in interval $((t - mT^*, t - (m - 1)T^*))$ are shown graphically in Fig. 2 and are identified by $N_{m,m-1} = 0, 1, 2, \ldots 9$. Thus $E_{m,m-1}(1)$ is identical to event $\bigcup_{i_2=2}^{5} N_{m,m-1} = i_2$ where $\bigcup_{i_2=2}^{5}$ denotes the union of the events represented by what follows the symbol. The terms $E_{M,m}(0)$ and $E_{m-1,0}(0)$ are identical to events $\bigcup_{i_1=0}^{1} N_{M,m} = i_1$ and $\bigcup_{i_3=0}^{1} N_{m-1,0} = i_3$, respectively. Noting that events $N_{m,m-1} = i_2, \ldots 5$ are mutually exclusive of each other and each of events $\bigcup_{i_1=0}^{1} N_{M,m} = i_1$ and $\bigcup_{i_3=0}^{1} N_{m-1,0} = i_3$ is the union of mutually exclusive events, Eq. 14 becomes

$$f_Y(y \mid \text{one vehicle in } (t - \overline{T},t))\, P[\text{one vehicle in } (t - \overline{T},t)]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{i_1\ i_3=0,1 \\ i_2=2 \ldots 5}} f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)\, P[N_{M,m} = i_1 \cap N_{m,m-1}$$
$$= i_2 \cap N_{m,1,0} = i_3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

noting that for a given value of m, events $N_{M,m} = i_1 \cap N_{m,m-1} = i_2 \cap N_{m-1,0} = i_3$ for values of i_1, i_2 and i_3 indicated in the second summation sign take effect only on response $Y_m(t)$. In Eq. 15 the probability of event $N_{M\,m} = i_1 \cap N_{m\,m-1} = i_2 \cap N_{m-1,0} = i_3$ for $i_1, i_3 = 0, 1$ and $i_2 = 2, \ldots 5$ may be further expressed as

$$P[N_{M,m} = i_1 \cap N_{m,m-1} = i_2 \cap N_{m-1,0} = i_3]$$
$$= P[N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m,m-1} = i_2 \mid N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m-1,0} = i_3 \mid N_{m,m-1} = i_2] \quad (16)$$

if it is recognized that the states of vehicle arrangement in subinterval

$(t - (m - 1)T^*, t)$ are statistically independent of the states of vehicle arrangement in subinterval $(t - \bar{T}, t - mT^*)$. Conditional probabilities $P[N_{i,i-1} = i_1 \mid N_{i-1,i-2} = i_2]$ for $i_1, i_2 = 0, \ldots 9$ are given in Appendix I in the form of a matrix. Unconditional probabilities $P[N_{i,i-1} = i_1]$ for $i_1 = 0, \ldots 9$ are also given in Appendix I. The second term in Eq. 12 now reads, formally

$$\left.\begin{aligned} & f_Y(y \mid \text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t))\, P[\text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)] \\ & = \sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2 = 2, \ldots 5}} f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)\, P[N_{M,m} \\ & = i_1]\, P[N_{m,m-1} = i_2 \mid N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m-1,0} = i_3 \mid N_{m,m-1} = i_2] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

Conditional probability density functions $f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)$ that appear in Eq. 17 may be obtained by noting that given the values of m and i_2, $N_{m,m-1} = i_2$ defines the state of vehicle arrangement as shown in Fig. 2, and the response is

$$Y_m(t) = h_m(t - \tau) \quad \ldots (18)$$

in which τ, the time of arrival of the vehicle that takes effect on response $Y_m(t)$, is a random variable whose probability density function may be obtained by using Eqs. 1 and 2. For a fixed t, $Y_m(t)$ is a linear function of τ so that $f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)$ may be obtained by conventional means. The third term in Eq. 12 refers to the event that two vehicles arrived in interval $(t - \bar{T}, t)$. This event may occur in two mutually exclusive ways. The first event consists of two vehicles arriving in interval $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$ for $m = 1, \ldots M$ and no vehicle arriving in the rest of the interval $(t - \bar{T}, t)$. The second event corresponds to the case that the two vehicles arrived in intervals $(t - iT^*, t - (i - 1)T^*)$ and $(t - jT^*, t - (j - 1)T^*)$, respectively, for all values of $j = 1, \ldots M - 1$ and $i = j + 1, \ldots M$, and no vehicle arrived in the rest of interval $(t - \bar{T}, t)$. Denoting by E_1 the first event, it may be shown that, formally

$$E_1 = \bigcup_{m=1}^{m} E_{M,m}(0) \cap E_{m,m-1}(2) \cap E_{m-1,0}(0) \quad \ldots (19)$$

Let the second event be denoted by E_2. Divide interval $(t - \bar{T}, t)$ into five subintervals $(t - \bar{T}, t - iT^*)$, $(t - iT^*, t - (i - 1)T^*)$, $(t - (i - 1)T^*, t - jT^*)$, $(t - jT^*, t - (j - 1)T^*)$ and $(t - (j - 1)T^*, t)$ where $0 \leqq j < i \leqq M$. Event E_2 may be expressed, formally, as

$$E_2 = \bigcup_{j=1}^{M-1} \bigcup_{i=j+1}^{M} [E_{M,i}(0) \cap E_{i,i-1}(1) \cap E_{i-1,j}(0) \cap E_{j,j-1}(1) \cap E_{j-1,0}(0)] \quad (20)$$

in which it is understood that when $j = 1$, $j = M - 1$, $i = j + 1$, and $i = M$ the expressions of event E_2 are different from that given by Eq. 20. Following the argument used in deriving Eq. 17 for the second term of Eq. 12, the third term in Eq. 12 may be written as

$$f_Y[y \mid \text{two vehicles in } (t-\bar{T}, t)]\, P[\text{two vehicles in } (t-\bar{T}, t)]$$
$$= f_Y(y \mid E_1)\, P[E_1] + f_Y(y \mid E_2)\, P[E_2]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2 = 6, \ldots 9}} f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2) P[N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m,m-1} = i_2 \mid N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m-1,0} = i_3 \mid N_{m,m-1} = i_2]$$
$$+ \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^{M} \sum_{\substack{i_1, i_3, i_5 = 0,1 \\ i_2, i_4 = 2, \ldots 5}} f_{Y_i}(y \mid N_{i,i-1} = i_2) * f_{Y_j}(y \mid N_{j,j-1} = i_4)\, P[N_{M,i} = i_1]\, P[N_{i,i-1} = i_2 \mid N_{M,i} = i_1]\, P[N_{i-1,j} = i_3 \mid N_{i,i-1} = i_2]\, P[N_{j,j-1} = i_4 \mid N_{i-1,j} = i_3]\, P[N_{i-1,0} = i_5 \mid N_{j,j-1} = i_4] \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

in which random variables $N_{i,j}$ which describe the state of vehicle arrangement of the Poisson model have been used. The conditional probability density function $f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)$ for $i_2 = 6, \ldots 9$ may be obtained by noting that for given values of m and i_2

$$Y_m(t) = h_m(t - \tau_1) + h_m(t - \tau_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

in which τ_1 and τ_2, the arrival times of the two vehicles that take effect on response $Y_m(t)$, are two random variables whose joint probability density function may be obtained from Eqs. 1 and 2. For a fixed t, $Y_m(t)$ is a linear function of two dependent random variables τ_1 and τ_2. The value of $f_{Y_m}(y \mid N_{m,m-1} = i_2)$ may again be determined by conventional means. $f_{Y_i}(y \mid N_{i,i-1} = i_2) * f_{Y_j}(y \mid N_{j,j-1} = i_4)$ denotes the convolution of functions $f_{Y_i}(y \mid N_{i,i-1} = i_2)$ and $f_{Y_j}(y \mid N_{j,j-1} = i_4)$. For values of $i_2, i_4 = 2, \ldots 5$ as indicated in the summation sign in Eq. 21 preceding the convolution, and for given values of i and j, $Y_i(t) = h_i(t - \tau_i)$ and $Y_j(t) = h_j(t - \tau_j)$, in which τ_i and τ_j are, respectively, time of arrival of vehicle in intervals $(t - iT^*,\ t - (i-1)T^*)$ and $(t - jT^*,\ t - (j-1)T^*)$ that take effect on the responses $Y_i(t)$ and $Y_j(t)$. The probability density functions of τ_i and τ_j may be obtained from Eqs. 1 and 2 and for a fixed t, $Y_i(t)$ and $Y_j(t)$ are linear functions of the random variables τ_i and τ_j, respectively. Both $f_{Y_i}(y \mid N_{i,i-1} = i_2)$ and $f_{Y_j}(y \mid N_{j,j-1} = i_4)$ may be obtained by conventional means.

EXPECTED RATE OF THRESHOLD CROSSINGS

For stationary process $Y(t)$, let $N_+(\xi)$ be a random variable equal to the number of crossing a threshold of level ξ with positive slope in unit time. The expected value of $N_+(\xi)$, denoted by $E[N_+(\xi)]$, is given by (3)

$$E[N_+(\xi)] = \int_0^\infty \eta f_{Y\dot{Y}}(\xi, \eta)\, d\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

in which $f_{Y\dot{Y}}(\xi, \eta)$ = the joint probability density function of $Y(t)$ and its time derivative $\dot{Y}(t)$. For a given t, if $f_{\dot{Y}}(\eta \mid Y(t) = \xi)$ is the conditional probability density function of $\dot{Y}(t)$ given $Y(t) = \xi$, it may be shown that

$$f_{Y\dot{Y}}(\xi,\eta) = f_{\dot{Y}}(\eta \mid Y(t) = \xi) f_Y(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Eq. 23 may now be written as (2)

$$E[N_+(\xi)] = \int_0^\infty \eta f_{\dot{Y}}(\eta \mid Y(t) = \xi) f_Y(\xi) d\eta$$

$$= f_Y(\xi) \int_0^\infty \eta f_{\dot{Y}}(\eta \mid Y(t) = \xi) d\eta$$

$$= f_Y(\xi) E[\dot{Y}(t) \mid Y(t) = \xi \cap \dot{Y}(t) > 0] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

The integral in the second equality is the conditional expected value of $\dot{Y}(t)$, for all $\dot{Y}(t) > 0$, given that $Y(t) = \xi$, and is denoted by $E[Y(t) \mid Y(t) = \xi \cap \dot{Y}(t) > 0]$.

For the case under consideration, again approximate the function $h(t)$ by a sum of M nonoverlapping trapezoids, apply the theorem of total probability, referring to the generalized Poisson traffic model, and neglecting the probability of having more than two vehicle arrivals in the interval $(t - \bar{T}, t)$, the expected rate of threshold crossings with positive slope is

$$E[N_+(\xi)] = E[N_+(\xi) \mid \text{no vehicle in } (t - \bar{T}, t)] P[\text{no vehicle in } (t - \bar{T}, t)]$$
$$+ E[N_+(\xi) \mid \text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)] P[\text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)]$$
$$+ E[N_+(\xi) \mid \text{two vehicles in } (t - \bar{T}, t)] P[\text{two vehicles in } (t - \bar{T}, t)] \quad \ldots \quad (26)$$

The first term does not contribute to threshold crossing and is therefore equal to zero. Following the argument used in obtaining the conditioned probability density function of $Y(t)$ given one vehicle arrived in $(t - \bar{T}; t)$, it may be verified that the second term in Eq. 26 is, formally

$$E[N_+(\xi) \mid \text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)] P[\text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2 = 2, \ldots 5}} E[N_+(\xi) \mid N_{m,m-1} = i_2] P[N_{M,m} = i_1] P[N_{m,m-1}$$
$$= i_2 \mid N_{M,m} = i_1] P[N_{m-1,0} = i_3 \mid N_{m,m-1} = i_2] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

It may be shown that for all values of m and $i_2 = 2, \ldots 5$

$$E[N_+(\xi) \mid N_{m,m-1} = i_2] = f_{Y_m}(\xi \mid N_{m,m-1} = i_2) E[\dot{Y}(t) \mid N_{m,m-1}$$
$$= i_2 \cap Y(t) = \xi \cap \dot{Y}(t) > 0] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Note that for values of $i_2 = 2, \ldots 5$ the conditional expected value of $\dot{Y}(t)$, given m, is independent of i_2 and the value of ξ, and is equal to $\dot{Y}(t)$ itself. That is

$$E[\dot{Y}(t) \mid N_{m,m-1} = i_2 \cap Y(t) = \xi \cap \dot{Y}(t) > 0] = \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*} U(A_m - A_{m-1}) \quad (29)$$

in which $U(\cdot)$ is the unit step function

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= 1, x \geq 0 \\ &= 0, x < 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

The second term in Eq. 26 is, therefore, formally

$$E[N_+(\xi) \mid \text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)]\, P[\text{one vehicle in } (t - \bar{T}, t)]$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\, U(A_m - A_{m-1}) \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2 = 2, \ldots 5}} f_{Y_m}(\xi \mid N_{m,m-1}$$

$$= i_2)\, P[N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m,m-1} = i_2 \mid N_{M,m} = i_1] P[N_{m-1,0}$$

$$= i_3 \mid N_{m,m-1} = i_2] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Similarly, following the argument used in deriving Eq. 21 for the third term

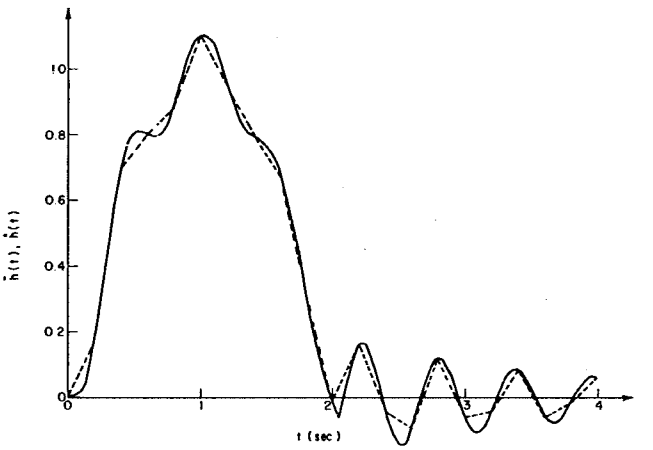


FIG. 3.—NONDIMENSIONALIZED INFLUENCE FUNCTION OF BRIDGE AND PIECE-WISE LINEARIZED APPROXIMATION

in Eq. 12, it may be shown that the third term in Eq. 26 is, formally

$$E[N_+(\xi) \mid \text{two vehicles in } (t - \overline{T, t})]\, P[\text{two vehicles in } (t - \bar{T}, t)]$$

$$= \sum_{m=1}^{M} 2\, \frac{A_m - A_{m-1}}{T^*}\, U(A_m - A_{m-1}) \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2 = 6, \ldots 9}} f_{Y_m}(\xi \mid N_{m,m-1}$$

$$= i_2)\, P[N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m,m-1} = i_2 \mid N_{M,m} = i_1]\, P[N_{m-1,0}$$

$$= i_3 \mid N_{m\,m-1} = i_2] + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^{M} \left(\frac{A_i - A_{i-1}}{T^*} + \frac{A_j - A_{j-1}}{T^*} \right) U(A_i$$

$$- A_{i-1} + A_j - A_{j-1}) \sum_{\substack{i_1, i_3 = 0,1 \\ i_2, i_4 = 2, \ldots 5}} f_{Y_i}(y \mid N_{i,i-1} = i_2) * f_{Y_j}(y \mid N_{j,j-1}$$

$$= i_4)\, P[N_{M,i} = i_1]\, P[N_{i,i-1} = i_2 \mid N_{M,i} = i_1]\, P[N_{i-1,j} = i_3 \mid N_{i,i-1}$$

$$= i_2]\, P[N_{j,j-1} = i_4 \mid N_{i-1,j} = i_3]\, P[N_{j-1,0} = i_5 \mid N_{j,j-1} = i_4] \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

It might be observed that the expected rate of threshold crossings as given by Eqs. 31 and 32 may be obtained without additional effort by simply multi-

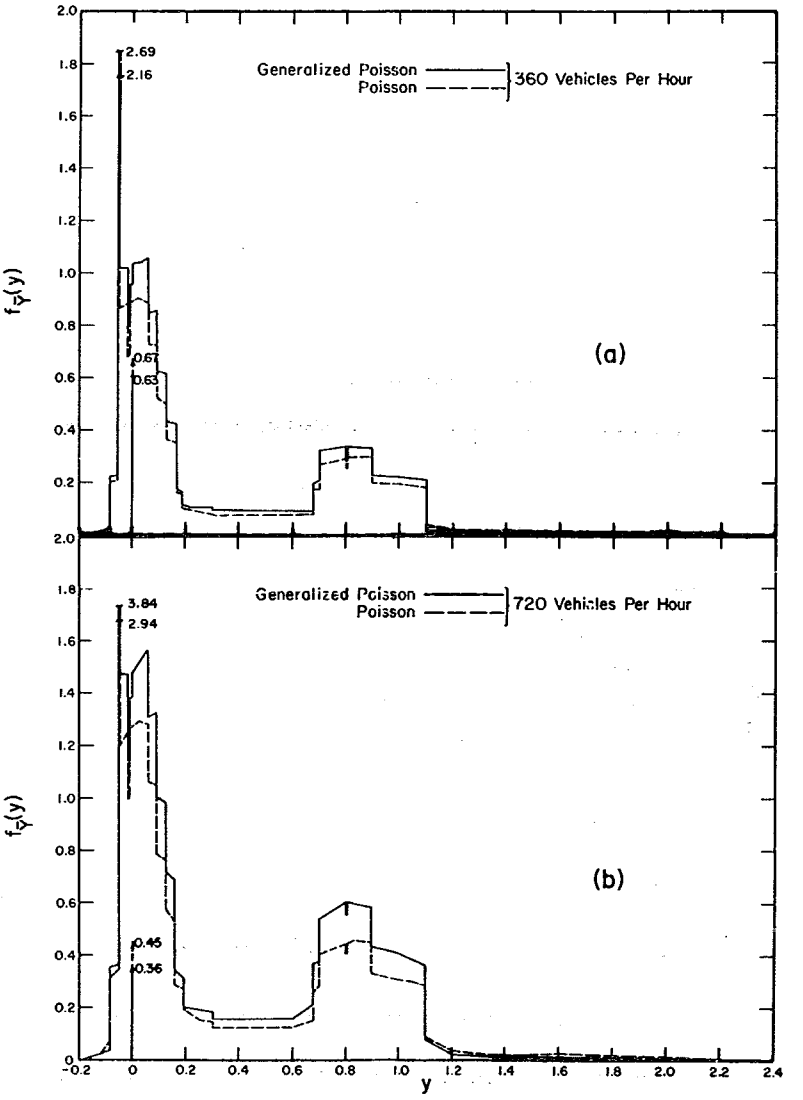


FIG. 4.—PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF BRIDGE RESPONSE

plying the terms in Eqs. 17 and 21 by appropriate values of $Y(t)$, while the probability density function of $Y(t)$ is being computed.

NUMERICAL RESULTS

The previous method is used to obtain response quantities of the bridge used in Ref. 5. That is, the bridge is considered as a simply supported uni-

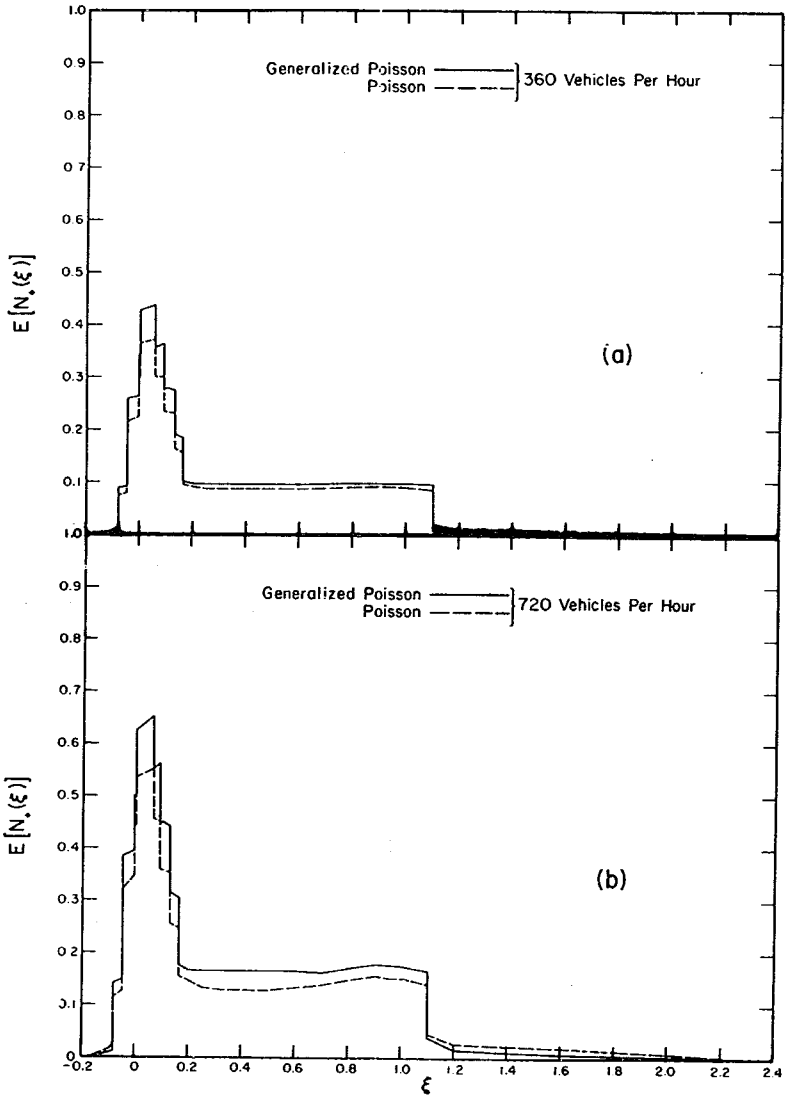


FIG. 5.—EXPECTED RATE OF THRESHOLD CROSSINGS OF BRIDGE RESPONSE

form beam of length L. Damping forces are assumed to be distributed along the span and are proportional to the velocity of the beam. The vehicles are considered as constant moving forces of magnitude W traveling at constant

speed V. The deflection at midspan of the bridge denoted by $Y(t)$ is taken as the response. If p_1 is the undamped fundamental circular frequency of the bridge and γ the percent of critical damping based on the fundamental mode of the bridge, for values of V = 60 fps, L = 120 ft, γ = 0.05 and p_1 = 10.87 per sec, nondimensionalized influence function $\bar{h}(t) = h(t)/y_{st}$ is plotted in Fig. 3, in which $h(t)$ = the midspan deflection at time t due to the passage of a vehicle arriving at t = 0, y_{st} = the static midspan deflection due to a concentrated force W at midspan. The symbol $\bar{T}$, the duration of the influence function $\bar{h}(t)$, is taken equal to 4 sec and $\bar{h}(t)$ is approximated by M = 20 line segments as shown in Fig. 3. Using the generalized Poisson traffic model with parameter k = 2 and neglecting the probability of having more than two vehicle arrivals in the interval $(t - \bar{T}, t)$, the probability density function $f_{\bar{Y}}(y)$ of the nondimensionalized deflection process $\bar{Y}(t) = Y(t)/y_{st}$ may be obtained from Eq. 12 whose individual terms are given by Eqs. 13, 17, and 21. For values of parameter λ = 0.2 and 0.4 which correspond to hourly traffic volume of 360 vehicles and 720 vehicles, respectively, probability density functions are obtained and plotted in Figs. 4(*a*) and 4(*b*). The expected rate of threshold crossings with positive slope of process $\bar{Y}(t)$ is given by Eq. 26 of which the first term is equal to zero and the second and the third terms are given by Eqs. 31 and 32, respectively. The sum of which are plotted in Figs. 5(*a*) and 5(*b*).

For purpose of comparison, the traffic conditions of 360 and 720 vehicle arrivals per hr are idealized by the Poisson traffic model with parameter λ in Eq. 1 equal to 0.1 and 0.2, respectively (1). Using the approximate influence in Fig. 3, and neglecting the probability of having more than two vehicle arrivals in the interval $(t - \bar{T}, t)$, the probability density functions and the values of the expected rate of threshold crossings with positive slope of the response process $\bar{Y}(t)$ are obtained. The probability density functions are plotted in Figs. 4(*a*) and 4(*b*) and the expected rate of threshold crossings are plotted in Figs. 5(*a*) and 5(*b*). Examination of Figs. 4(*a*), 4(*b*) and 5(*a*), 5(*b*) shows that the generalized Poisson traffic model yields larger response quantities than the Poisson traffic model for responses at levels smaller than ξ = 1.1 but yields smaller response quantities for responses at levels larger than ξ = 1.1. Furthermore, the difference between the corresponding response quantities becomes larger when the traffic becomes heavier.

CONCLUSIONS

The response of highway bridges under the passage of vehicles was studied. The bridge is idealized as a damped linear system and the vehicles are assumed to be of the same type, have the same weight and travel at the same constant speed. The generalized Poisson traffic model is used to describe the vehicular traffic. That is, the number of vehicle arrivals in a given time interval is considered as a special renewal counting process with probability function given by Eq. 5 and the probability density function of the interarrival time of successive vehicles given by Eq. 4. A numerical technique was developed to compute the probability density function and expected rate of threshold crossings of the bridge response. An example was given which yields these response quantities of a simply supported bridge under two traffic conditions. The same was obtained using the Poisson traffic model. Results were plotted and compared. Examination of these results indicates that using

different traffic models the difference between the response quantities increases with increase in traffic volume. The assumption that all vehicles are of the same type and have the same weight and speed is, of course, unrealistic. This assumption is introduced herein merely for convenience of presenting the basic idea of the numerical technique; it may be removed by considering the influence function of the filtered renewal process as a random function, the sample space of which represents the population of vehicle type and weight. The conditional probability density functions that appear in Eqs. 17, 21, 31, and 32 will be different from those obtained, respectively from Eqs. 18 and 22 but the rest will remain the same. The development of the numerical technique was exemplified by specifying parameter k in Eq. 5 to be equal to 2. This restriction may also be removed to cover a more wide variety of traffic conditions. The conditional probability density functions that appear in Eqs. 17, 21, 31 and 32 will remain the same but the matrix representing conditional probabilities that appear in these equations will be different from the one shown in Appendix I. Finally, the inclusion of events corresponding to more than two vehicles arriving in interval $(t - \overline{T}, t)$ may also be achieved without change in the basic idea.

ACKNOWLEDGMENTS

This study is part of the research program on the application of probabilistic concepts to safety analysis and design of structures carried out in the Civil Engineering Department of the University of Illinois, at Urbana, Ill., supported by the National Science Foundation through Grant NSF-GK1812X under the supervision of A. H.-S. Ang.

APPENDIX I.—CONDITIONAL PROBABILITIES

Let $c_j = P[N_{i,i-1} = j]$ for $j = 0, 1, 2, \ldots 9$. Construct matrix C whose elements c_{i_1,i_2} are conditional probabilities $P[N_{i,i-1} = i_1 \mid N_{i-1,i-2} = i_2]$. It may be verified, by referring to Fig. 2, that

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ c_0 & 0 & 2c_2 & 0 & 2c_4 & 0 & 2c_6 & 0 & 2c_8 & 0 \\ c_0 & 2c_1 & 0 & 2c_3 & 0 & 2c_5 & & & & \\ c_0 & 2c_1 & 0 & 2c_3 & 0 & 2c_5 & & & & \\ c_0 & 0 & 2c_2 & 0 & 2c_4 & 0 & & & & \\ c_0 & 0 & 2c_2 & 0 & 2c_4 & 0 & & & & \\ c_0 & 2c_1 & & & & & & & & \\ c_0 & 2c_1 & & & & & & & & \\ c_0 & 0 & & & & & & & & \\ c_0 & 0 & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{(33)}$$

Elements not used in the computation.

in which $c_j = \frac{1}{2} B_{j-<i/2>}(t)$, $j = 0, 1\,2, \ldots 9$ . . . . . (34)

the symbol $< \cdot >$ being the greatest integer less than or equal to the quantity enclosed in the bracket.

APPENDIX II.—REFERENCES

1. Haight, F. A., *Mathematical Theories of Traffic Flow*, Academic Press, New York, 1963, pp. 103-106.
2. Rice, J. R., Beer, F. P., and Paris, P. C., "On the Prediction of Some Random Loading Characteristics Relevant to Fatigue," Presented at the Second International Conference on Acoustical Fatigue, April, 1964.
3. Rice, S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise," in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, ed., Dove, New York, 1954, p. 190.
4. Takacs, L., "On Secondary Stochastic Processes Generated by Recurrent Processes," *Acta Math. Hungaricae*, Vol. 7, 1956, pp. 17-29.
5. Tung, C. C., "Random Response of Highway Bridges to Vehicle Loads," *Journal of the Engineering Machanics Division*, ASCE, Vol. 93, No. EM5, Proc. Paper 5534, October, 1967, pp. 79-94.

APPENDIX III.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

A_m = ordinates of piecewise linearized influence function;

$B_j(t)$ = Poisson probability function defined under Eq. 5;

C = conditional probability matrix defined in Appendix I;

$c_0, c_1, \ldots c_9$ = probabilities defined in Appendix I;

$c_{i,j}$ = elements of conditional probability matrix C given in Appendix I;

$E[\cdot]$ = expected value of random variable enclosed in bracket;

$E[\cdot|\cdot]$ = conditional expected value of random variable preceding vertical line given event following it;

E_1 = event that, for given time t, two vehicles arrived in interval $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$ for all values of $m = 1, \ldots M$ and no vehicle arrived in rest of interval $(t - \bar{T}, t)$ as defined in Eq. 19;

E_2 = event that, for given time t, one vehicle arrived in interval $(t - iT^*, t - (i - 1)T^*)$, one vehicle arrived in interval $(t - jT^*, t - (j - 1)T^*)$, and no vehicle arrived in rest of interval $(t - \bar{T}, t)$ for all values of $j = 1, \ldots M - 1$ and $i = j + 1, \ldots M$, as defined in Eq. 20;

$E_{i,j}(n)$ = event that n vehicles arrived in interval $(t - iT^*, t - jT^*)$ for $0 \leqq j < i \leqq M$;

$f_X(\cdot)$ = probability density function of random variable X indicated as subscript of f;
$f_X(\cdot|\cdot)$ = conditional probability density function of random variable X given event following vertical line |;
$f_{Y\dot{Y}}(\cdot,\cdot)$ = joint probability density function of process $Y(t)$ and its derivative process $\dot{Y}(t)$;
$h(t), \bar{h}(t)$ = influence function, representing response of bridge at time t due to passage of vehicle arriving at $t = 0$;
$\hat{h}(t)$ = piecewise linearized approximation of influence function as shown in Fig. 1;
$h_m(t), h_i(t), h_j(t)$ = respectively, m^{th}, i^{th} and j^{th} segment of $\hat{h}(t)$ as shown in Fig. 1;
$i, i_1, \ldots i_5$ = dummy indices;
j = dummy index;
k = parameter of Pearson Type III probability density function defined in Eq. 4 and generalized Poisson probability function defined in Eq. 5;
L = length of simply supported bridge considered;
M = number of segments of piecewise linearized function $\hat{h}(t)$;
m = dummy index;
$N(t)$ = number of vehicle arrivals in interval $(0, t)$;
$N_+(\xi)$ = number of crossing threshold of level ξ with positive slope in unit time of specified process;
n = dummy index;
$P[\cdot]$ = probability of event enclosed in bracket;
$P[\cdot|\cdot]$ = conditional probability of event preceding vertical line | given event following it;
p_1 = undamped fundamental circular frequency of bridge considered;
T = random variable indentically distributed as interarrival times $T_1, T_2, \ldots$ of successive vehicles;
$T_1, T_2, \ldots$ = interarrival times of successive vehicles;
T^* = interval of each segment of piecewise linearized influence function $\hat{h}(t)$;
$\bar{T}$ = duration of influence function;
t = time or dummy variable;
$U(\cdot)$ = unit step function;
V = speed of vehicles;
W = weight of vehicles;
y_{st} = static midspan deflection of bridge due to concentrated force W at midspan;
x = dummy variable;
$Y(t)$ = response process of bridge;
$Y_m(t), Y_i(t), Y_j(t)$ = response processes whose influence functions are $h_m(t)$, $h_i(t)$ and $h_j(t)$, respectively;
$\bar{Y}$ = nondimensionalized response process $Y(t)/y_{st}$;
$\dot{Y}(t)$ = derivative process of $Y(t)$;
y = dummy variable;
γ = percent of critical damping based on fundamental mode of bridge;
$\delta(\cdot)$ = Dirac delta function;

λ = parameter of Pearson Type III probability density function defined in Eq. 4, probability function defined in Eq. 5 or parameter of Poisson probability function defined in Eq. 1, and probability density function defined in Eq. 2;

η = dummy variable;

ξ = dummy variable;

τ, τ_i, τ_j = arrival times of vehicles;

$*$ = convolution of functions preceding and following it;

$\cup, \cap$ = respectively union and intersection of events preceding and following it;

$\bigcup_{m=1}^{M}$ = union of sequence of M events represented by what follows symbol; and

$\langle \cdot \rangle$ = greatest integer less than or equal to quantity enclosed in bracket.

Journal of the
STRUCTURAL DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

LIVE LOAD EFFECT ON DYNAMIC RESPONSE OF STRUCTURES

By A. R. Chandrasekaran,[1] A. M. ASCE, and S. S. Saini[2]

INTRODUCTION

To simplify the aseismic design of structures, it is conventional to replace the dynamic forces by equivalent static forces and these are usually given as a function of the effective weight of the structure. This function, generally known as seismic coefficient, depends upon the seismicity of the site, mass and stiffness distribution, and damping of the structure. At present, a considerable amount of research is oriented towards the determination of the seismic coefficient but little information is available for the determination of the effective weight of the structure. A study (1)[3] shows that various countries permit full contribution of live loads to obtain the effective weight of a structure. Few countries recommend full live load contribution for some important structures and a fraction of live load contribution for other types of structures. Various countries have given different reduction factors for live loads and these appear to be essentially empirical.

Quite often live loads form a major portion of the total load. Effective live load under earthquake conditions would depend upon the incidence of the live load as well as the type of mounting on the primary system. This paper deals with the effect of the mounting of live loads on earthquake response.

If the live load is rigidly mounted, its effect on the response could be considered using the spectral method of design in which the response is determined from the spectral curves corresponding to various periods. Due to the increased mass caused by the live load, the natural period of vibration of the system elongates. Since spectral acceleration, which is proportional to force,

Note.—Discussion open until September 1, 1969. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, No. ST4, April, 1969. Manuscript was submitted for review for possible publication on May 8, 1968.

[1] Prof. of Structural Dynamics, School of Research and Training in Earthquake Engrg., Univ. of Roorkee, Roorkee, India.

[2] Lecturer of Structural Dynamics, School of Research and Training in Earthquake Engrg., Univ. of Roorkee, Roorkee, India.

[3] Numerals in parentheses refer to corresponding items in Appendix I.—References.

generally decreases with an increase in period of vibration this would result in a reduction of the response.

Live loads are invariably spring and dashpot mounted rather than rigidly connected and preliminary experiments as well as theoretical analysis (2), indicate that the response is less when live load is spring or dashpot mounted rather than rigidly mounted. As a start, both primary systems as well as live load systems have been idealized as single-degree of freedom systems. The influence of the various parameters like mass ratio, stiffness ratio, viscous damping ratio, Coulomb damping factor, and the period of vibration of the primary system on the response has been determined for two strong-motion recorded earthquake excitations.

This study indicates that the response decreases with an increase in mass ratio and a decrease in damping. Other parameters have no appreciable influence on the response.

DYNAMIC ANALYSIS

For the purpose of design, it is important to know the forces to which the primary system is subjected due to the live load. The lateral forces acting on a system during an earthquake are usually given as a function of the effective weight of the structure. In the seismic coefficient method of design, the lateral forces acting on the system are given by

$$F = C\,W \qquad (1)$$

in which F = lateral design force; C = the seismic coefficient; which is specified depending on the seismicity of the site; and W = the effective weight of structure.

In the spectral method of design, the lateral forces are given by

$$F = \frac{S_a^*}{g}\,W \qquad (2)$$

in which S_a^* = the pseudo-spectral acceleration which depends on the ground motion as well as the properties of the structure and = $p^2 S_d$; in which p = the undamped natural frequency of the system, S_d = the spectral displacement; and g = the acceleration due to gravity.

Compared to the seismic coefficient method of design, the spectral method of design would indicate less effective force even if the live load is assumed to be rigidly attached, since the effect of the presence of live load is to elongate the period of vibration due to increased mass thereby generally decreasing the spectral acceleration. Further, if the spring and dashpot mounting of the live load is considered, there is a possibility of further reduction in the response since the full live load will not be effective under horizontal vibrations. Thus with the application of live load, the effective weight of the structure as well as the spectral acceleration are modified. However, to simplify the design the changes due to the presence of live load can be incorporated to change either the spectral acceleration alone or to change the effective weight alone. For design purposes, it may be convenient to take full live load into account, as if it were rigidly mounted, and incorporate the effect of the mounted live load in the spectral acceleration only.

Equations of Motion.

The primary system as well as the live load system have been idealized as single degree of freedom systems.

Live Load with Spring and Viscous Dashpot Mounting.—Fig. 1(*a*) shows a schematic representation of such an idealized system. The equations of motion are

$$m_p \ddot{x}_p + c_p(\dot{x}_p - \dot{y}) + c_L(\dot{x}_p - \dot{x}_L) + k_p(x_p - y) + k_L(x_p - x_L) = 0 \quad (3)$$

$$m_L \ddot{x}_L + c_L(\dot{x}_L - \dot{x}_p) + k_L(x_L - x_p) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

in which m_p = the mass of the primary system; m_L = the mass of the live load system; x_p = the absolute displacement of the primary system; x_L = the absolute displacement of live load system; c_p = the coefficient of viscous damping of the primary system; c_L = the coefficient of viscous damping of

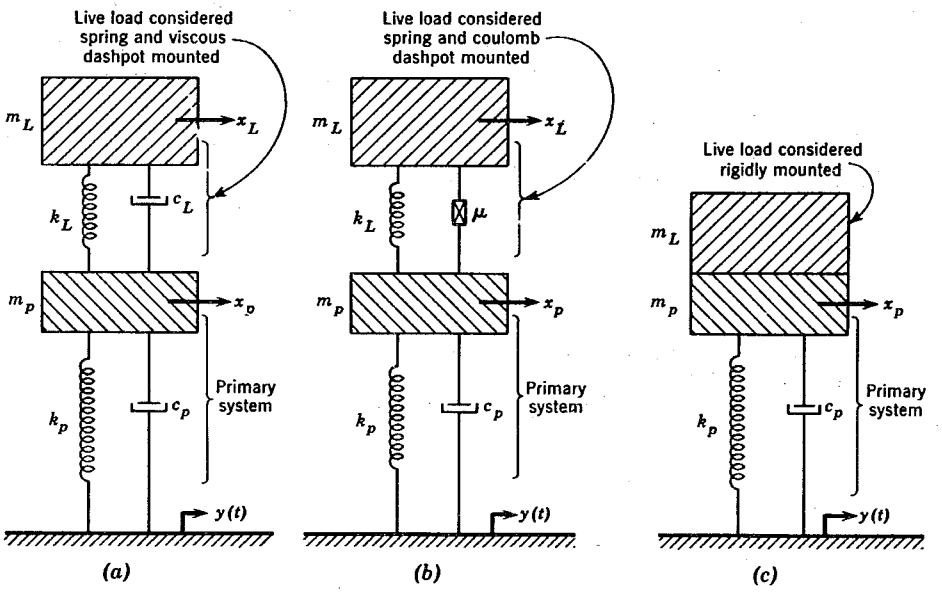


FIG. 1.—THEORETICAL MODELS CONSIDERED FOR STUDY

the live load model; k_p = the spring constant of the primary system; k_L = the spring constant of the live load system; y = the ground displacement; and the dots define differentiation with respect to time.

Rearranging Eq. 3

$$\left.\begin{aligned} \ddot{Z}_p + \frac{c_p + c_L}{m_p}\dot{Z}_p - \frac{c_L}{m_p}\dot{Z}_L + \frac{k_p + k_L}{m_p}Z_p - \frac{k_L}{m_p}Z_L &= -\ddot{y} \\ \ddot{Z}_L - \frac{c_L}{m_L}\dot{Z}_p + \frac{c_L}{m_L}\dot{Z}_L - \frac{k_L}{m_L}Z_p + \frac{k_L}{m_L}Z_L &= -\ddot{y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

in which Z_p = the displacement of the primary system relative to base, and Z_L = the displacement of the live load system relative to base.

Rewriting Eq. 4 using matrix notation

$$\{\ddot{Z}\} + [D]\{\dot{Z}\} + [S]\{Z\} = -\{\ddot{y}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6a)$$

in which $\{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_p \\ Z_L \end{Bmatrix}$; $\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6b)$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2p\,n\,(1+\gamma) & -2p\,n\,\gamma \\ -\dfrac{2p\,n\,\gamma}{\alpha} & \dfrac{2p\,n\gamma}{\alpha} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6c)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} p^2(1+\beta) & -p^2\beta \\ -\dfrac{p^2\beta}{\alpha} & \dfrac{p^2\beta}{\alpha} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6d)$$

in which $\alpha = m_L/m_p$ = the mass ratio; $\beta = k_L/k_p$ = the stiffness ratio; $\gamma = c_L/c_p$ = the viscous damping ratio; $p = k_p/m_p$ = the undamped natural frequency of vibration of the primary system; $n = c_p/2\sqrt{k_p m_p}$ = the fraction of critical damping in the primary system; and $T = 2\pi/p$ = the undamped natural period of vibration of the primary system.

Live Load with Spring and Coulomb Dashpot Mounting.—Fig. 1(*b*) represents such an idealized model. The equations of motion are

$$m_p\ddot{x}_p + c_p(\dot{x}_p - \dot{y}) + \mu g\, m_L \operatorname{sgn}(\dot{x}_p - \dot{x}_L) + k_p(x_p - y) + k_L(x_p - x_L) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

$$m_L\ddot{x}_L + \mu g m_L \operatorname{sgn}(\dot{x}_L - \dot{x}_p) + k_L(x_L - x_p) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7b)$$

Rearranging and writing in matrix notation

$$\{\ddot{Z}\} + [D']\{\dot{Z}\} + [B]\{\operatorname{sgn}\dot{Z}\} + [S]\{Z\} = -\{\ddot{y}\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2p\,n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \mu g\,\alpha & 0 \\ 0 & -\mu g \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8c)$$

and $\{\operatorname{sgn}\dot{z}\} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{Z}_p - \dot{Z}_L) \\ \operatorname{sgn}(\dot{Z}_p - \dot{Z}_L) \end{Bmatrix}$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8d)$

Live Load Rigidly Mounted.—Fig. 1(*c*) shows such an idealized system. This is a modified form of the single degree primary system. The equation of motion is

$$(m_p + m_L)\ddot{x}_p + c_p(\dot{x}_p - \dot{y}) + k_p(x_p - y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

Rewriting Eq. 9*a*

$$\ddot{Z}_p + \frac{2pn}{1+\alpha}\dot{Z}_p + \frac{p^2}{1+\alpha}Z_p = -\ddot{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9b)$$

which can also be written as

$$\ddot{Z}_p + 2p' n' \dot{Z}_p + p'^2 Z_p = - \ddot{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9c)$$

in which modified frequency $p' = p/\sqrt{1 + \alpha}$, and modified damping $n' = n/\sqrt{1 + \alpha}$.

Determination of Response.

Eqs. 6*a*, 8*a*, and 9*c* have been solved numerically using the fourth order Runge-Kutta procedure of numerical integration. The various parameters like mass ratio, α, stiffness ratio, β, viscous damping ratio, γ, Coulomb damping factor, μ, and the undamped natural period of vibration of the primary system, T, as well as the ground motion excitation, $\ddot{y}$ have been extensively varied.

For design purposes, it is necessary to know the forces that the primary system is subjected to due to live load. These forces are directly proportional to the displacement of the mass relative to the base. For the purpose of analysis and design it is convenient to assume that live load is rigidly attached to the primary system. The effective live load response factor, ϵ, can be calculated as

$$\epsilon = \frac{Z_p'}{Z_p''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

in which Z_p' = the maximum relative displacement of the primary system with a live load that is spring and dashpot mounted and Z_p'' = the maximum relative displacement of the primary system with live load rigidly attached.

Thus if the spectral method of design is adopted, the lateral design force when the live load is spring and dashpot mounted is given by

$$F = \epsilon \frac{S_a^*}{g} W_T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

in which W_T = the total load consisting of dead load and full live load, and S_a^* = the pseudo-spectral acceleration based on modified single degree of freedom system wherein the live load is assumed to be rigidly mounted.

SPECIFICATIONS OF PROBLEMS

The primary system which had been assumed to be linear and of a single degree of freedom had three different undamped periods of vibration, T, namely, 0.1, 0.2, and 0.5 sec and viscous damping, n, equal to 5% of critical. The live load system has been assumed to be represented by a single concentrated mass either spring or dashpot mounted or both. Two types of dashpots, namely, viscous and Coulomb have been considered. In the case of viscous dashpot mounting, the ratio, γ, of the coefficient of viscous damping of live load to that of the primary system had values of 2, 4, 6, 8, and 10. In the case of Coulomb dashpot mounting, the coefficient of friction, μ, of the live load had values of 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, and 0.5. In the case of spring mounting, the ratio, β, of the spring constant of the live load to that of the primary system had values of 0.0, 0.001, 0.01, and 0.1. The ratio, α, between the mass of the live load to that of the primary system had different values ranging from 0.1 to 3.0. The NS component of the El Centro earthquake of May 18, 1940 and the

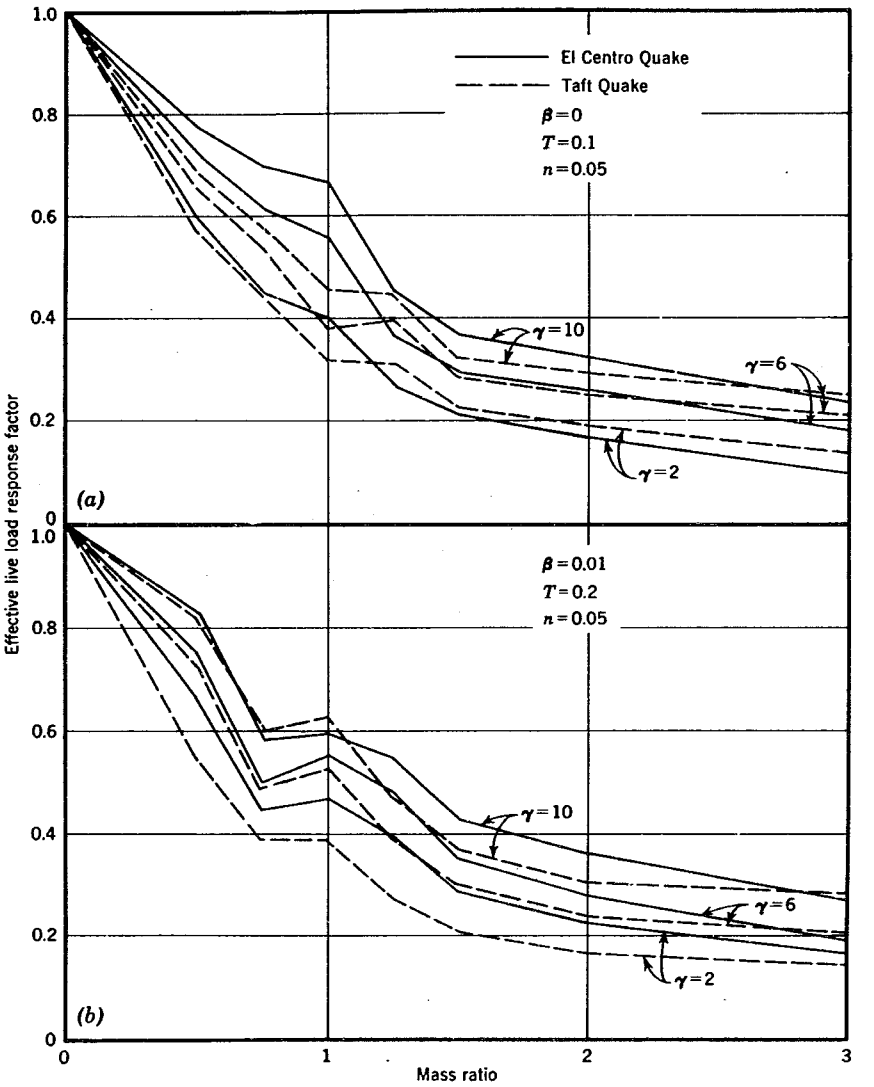


FIG. 2.—EFFECTIVE LIVE LOAD RESPONSE FACTOR VERSUS MASS RATIO

N69W component of the Taft earthquake of July 21, 1952, are the two ground motion excitations that have been considered.

RESULTS

The influence of the various parameters has been determined and is analyzed herein.

Influence of Mass Ratio, α.—The mass ratio has been varied from 0.1 to 3.0 representing a wide range of practical values. Fig. 2 shows the effect of

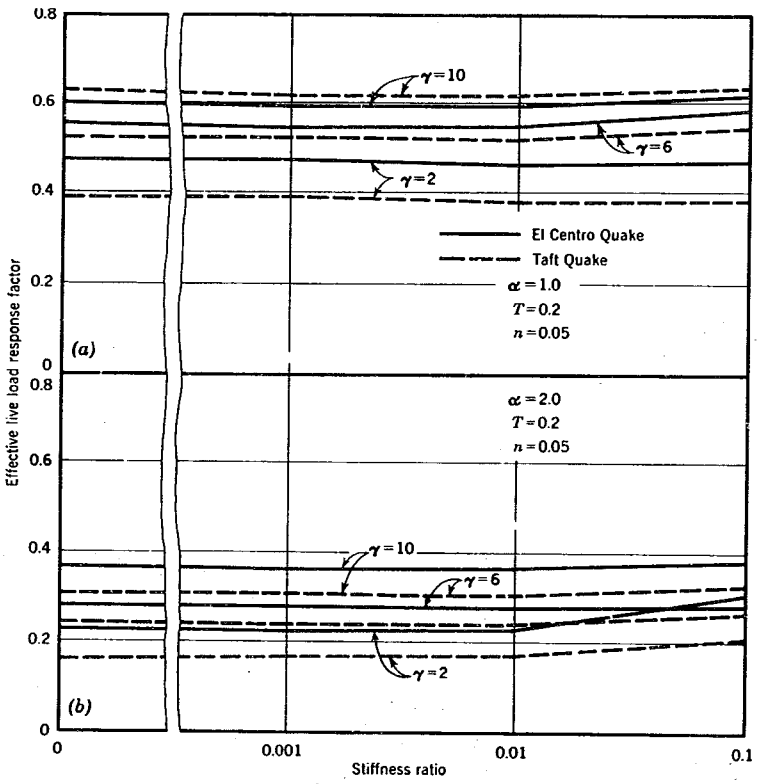


FIG. 3.—EFFECTIVE LIVE LOAD RESPONSE FACTOR VERSUS STIFFNESS RATIO

mass ratio on the effective live load response factor. The calculations indicate that ϵ decreases as α increases. The term ϵ decreases more rapidly as α increases from zero to unity and then decreases gradually as α increases further. For the various cases considered, it may be noted that ϵ is always less than unity. Thus, the lateral design force which can be obtained using Eq. 11, is less when the live load is spring and dashpot mounted compared to when rigidly attached.

Influence of Stiffness Ratio, β.—Four stiffness ratios 0.0, 0.001, 0.01, and 0.1 have been considered. For certain practical cases, several types of live loads may not have spring mounting and these are represented by a zero stiff-

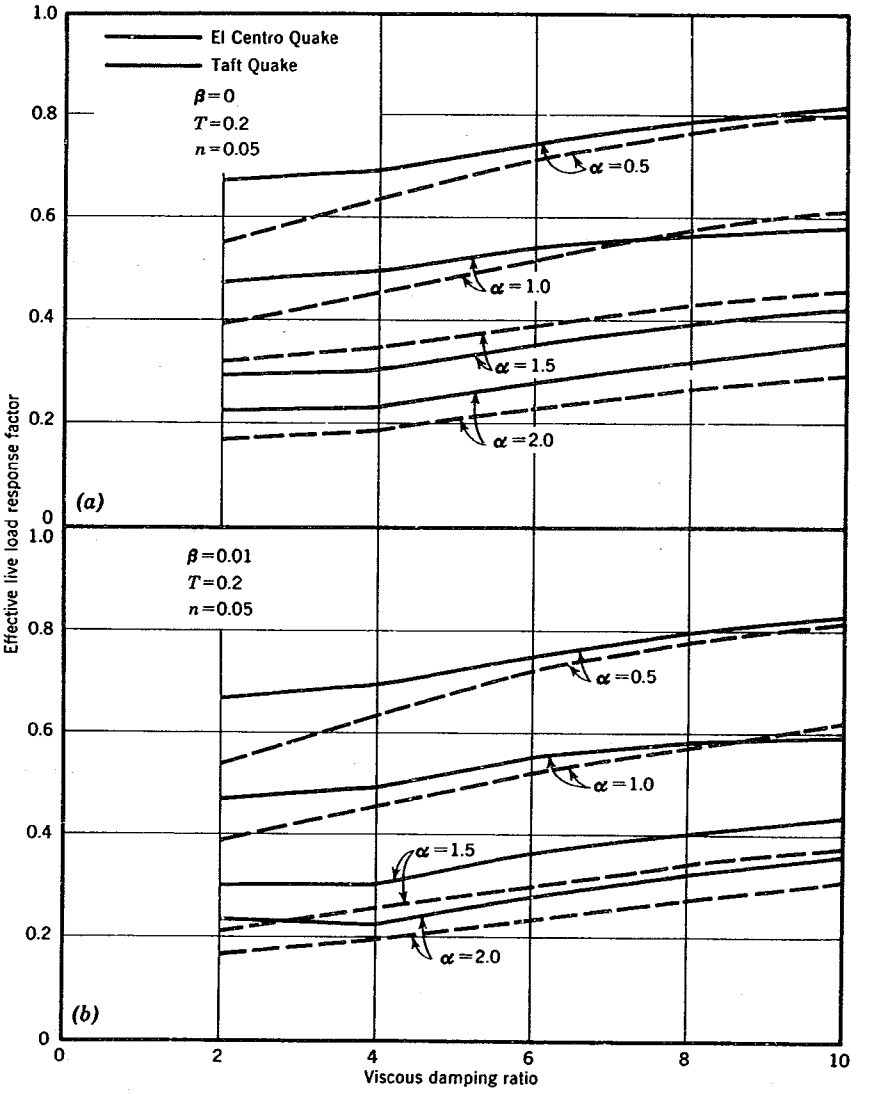


FIG. 4.—EFFECTIVE LIVE LOAD RESPONSE FACTOR VERSUS VISCOUS DAMPING RATIO

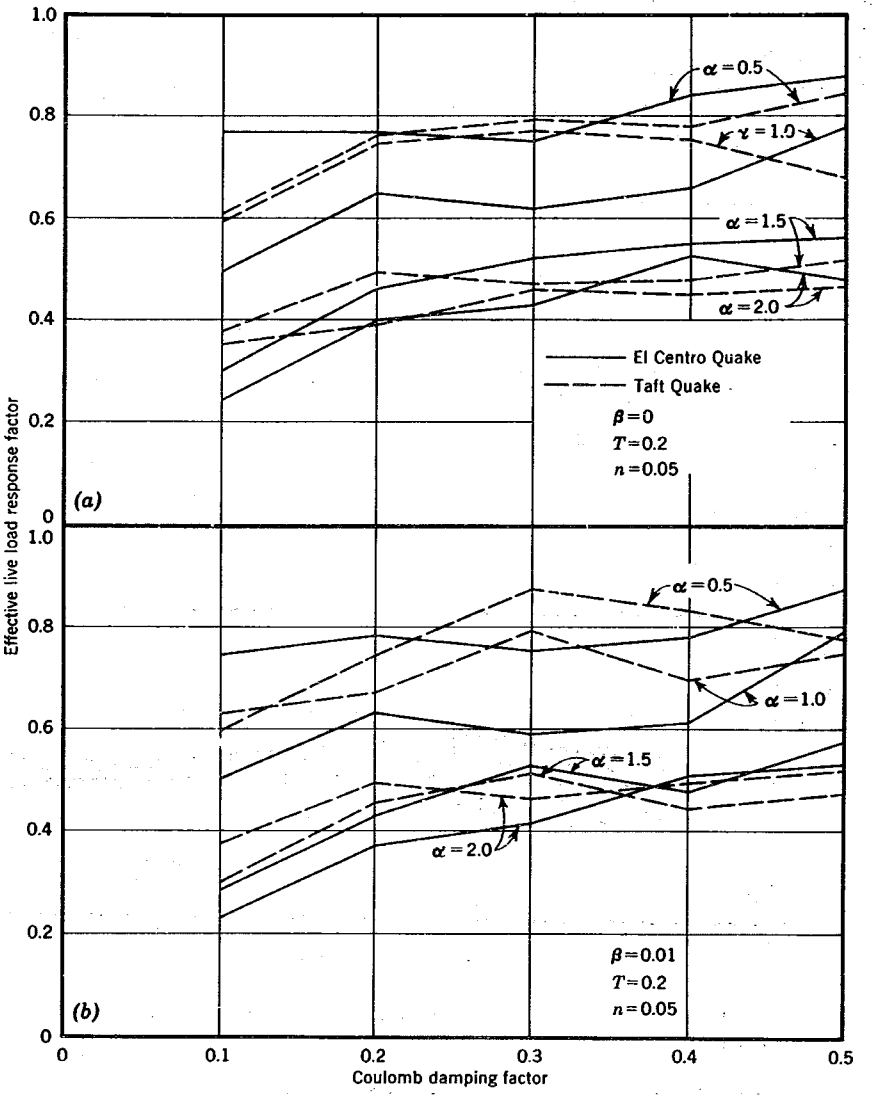


FIG. 5.—EFFECTIVE LIVE LOAD RESPONSE FACTOR VERSUS COULOMB DAMPING FACTOR

ness ratio. Other values of stiffness ratio represent various degrees of spring mounting. These values have been chosen to represent certain practical cases such as live load suspended from gantry girders in industrial buildings. Fig. 3 shows the influence of the stiffness ratio on ϵ. The calculations indicate that ϵ has more or less a constant value for various values of the stiffness ratio considered.

Influence of viscous Damping Ratio, γ.—The viscous damping ratio has been varied from 2 to 10. Equivalent viscous damping due to live load usually lies in this range. Fig. 4 shows the influence of γ on ϵ. It is shown that the smaller the damping ratio, the smaller the effective live load response and as

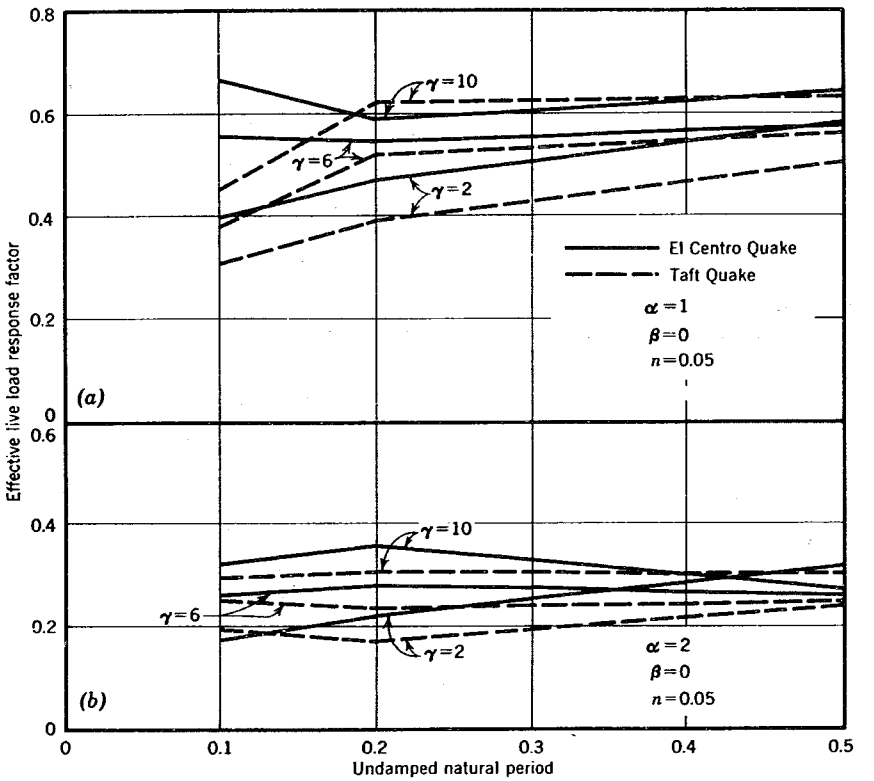


FIG. 6.—EFFECTIVE LIVE LOAD RESPONSE FACTOR VERSUS UNDAMPED NATURAL PERIOD

the damping ratio increases, the response increases. For the range of damping ratios considered, the variation of ϵ with respect to γ is almost linear.

Influence of Coulomb Damping Factor, μ.—The Coulomb friction factor has been varied from 0.1 to 0.5 which is the usual range of practical values. Fig. 5 shows the influence of μ on ϵ. However, unlike the case of viscous damping, the variation of ϵ with respect to μ is irregular.

Influence of Undamped Natural Period of Vibration of Primary System, T.—Three values of T 0.1, 0.2, and 0.5 sec have been used. The value of 0.1 sec would be approximately the period of a typical single storeyed structure.

Other values could be that of a flexible single storey structure or correspond to the first mode of a multidegree freedom system. Fig. 6 shows the variation of ϵ with T. It is shown that for the range of T considered, there is not much variation in the effective live load response.

Earthquake Excitation.—Effective live load response has been determined for two recorded earthquakes. In Figs. 2 to 6, solid lines denote those for the El Centro earthquake and dotted lines are for the Taft earthquake. Since ϵ is a nondimensional factor, it will not depend on the magnitude of ground acceleration but will be influenced by its wave pattern. For the two ground motion excitations considered, the variation in ϵ is small.

CONCLUSIONS

The various parameters influence the effective live load response as follows

1. An increase in mass ratio causes a decrease in response. The decrease is rapid for mass ratio between zero and unity.
2. For the order of values of stiffness ratios considered, spring mounting does not much influence the live load response.
3. An increase in damping generally causes the response to increase.
4. For the values of natural periods of vibration tried, the response is not influenced by period.
5. For the two earthquake excitations considered, the deviation in effective live load response is small. For design purposes, average values based on several ground motions could be adopted.
6. Compared to the seismic coefficient method of design, the spectral method of design would indicate less live load response even if the live load is assumed to be rigidly connected as the period of vibration increases with an increase of load and spectral acceleration generally decreases. Considering spring and dashpot mounting of live load, the response decreases further compared to rigid mounting. Since live loads are invariably spring and dashpot mounted, considerable economy could be achieved in design by taking this fact into account.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper is being published with the permission of the Professor and Director, School of Research and Training in Earthquake Engineering, University of Roorkee, Roorkee, India.

APPENDIX I.—REFERENCES

1. "Earthquake Resistant Regulations," A World List, 1963. Compiled by International Association For Earthquake Engineering, Tokyo, Japan.
2. Chandrasekaran, A. R., Saini, S. S., and Jhamb, I. C., "Live Load Effects on Dynamics Behaviour of Structures," Journal of the Institution of Engineers (India), Vol. 48, No. 5, Pt. CI3, January, 1968, pp. 850 859.

APPENDIX II.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

$[B]$ = Coulomb damping matrix;
c_L = coefficient of viscous damping of live load model;
c_p = coefficient of viscous damping of primary system;
C = seismic coefficient;
$[D]$ = viscous damping matrix;
F = lateral design force;
g = acceleration due to gravity;
k_L = spring constant of live load model;
k_p = spring constant of primary system;
m_L = mass of live load model;
m_p = mass of primary system;
n = fraction of critical damping in the primary system = $c_p/2\sqrt{k_p m_p}$;
n' = modified damping = $n/\sqrt{1+\alpha}$;
p = undamped natural frequency;
p' = modified frequency = $p/\sqrt{1+\alpha}$;
p_d = damped natural frequency = $p\sqrt{1-n^2}$;
S_a^* = pseudo-spectral acceleration = $p^2 S_d$;
S_d = spectral displacement = $\left|\frac{1}{p_d}\cdot\int_0^t \ddot{y}(\tau)\, e^{-pn(t-\tau)} \sin p_d(t-\tau)\, d\tau\right|_{\max}$;
$[S]$ = stiffness matrix;
$\{\operatorname{sgn} \dot{z}\}$ = {Signom $\dot{z}$};
T = undamped natural period of vibration of the primary system = $2\pi/p$;
t = time;
τ = time variable of integration;
W = effective weight of the structure;
W_T = total weight of the structure;
x_L = absolute displacement of live load model;
x_p = absolute displacement of the primary system;
y = ground displacement;
Z_L = displacement of live load model relative to base;
Z_p = displacement of primary system relative to base;
z_p' = maximum relative displacement of the primary system with live load having spring and dashpot mounting;
Z_p'' = maximum relative displacement of the primary system with live load rigidly mounted;
$\{Z\}$ = displacement vector;
μ = coulomb damping factor in live load model;
α = mass ratio = m_L/m_p;
β = stiffness ratio = k_L/k_p;
γ = viscous damping ratio = c_L/c_p;
ϵ = effective live load response factor;
$\{\ \}$ = column vector; and
$[\ ]$ = square matrix.

I-76

構造物の不規則振動に関する一考察
——応答が一定レベルを超える回数の確率分布——

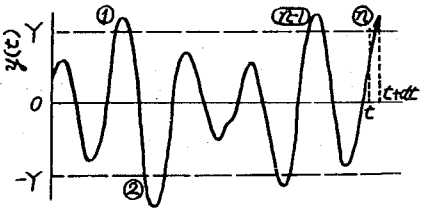
京都大学工学部　正会員　亀田弘行

1．まえがき　地震力や風力のように時間的に不規則に変動し，しかも将来そのままの形では再現されない外力に対する構造物の挙動を解明するためには，不規則振動論の立場から問題を取り扱うことが妥当である。不規則外力に対する設計法を確立するためには，構造物の非破壊確率を求めることが重要であり，著者らは，たとえば従来の弾性設計法のように，最大応答量の許容値を設定する場合の構造物の非破壊確率を表わす最大応答の確率分布について研究を進めており，その結果の一部をすでに報告したが[1),2)]，動的外力による構造物の破壊は最大応答のみで一義的に定まるものではなく，くり返し載荷による破壊の進行に対しても十分な考慮が払われるべきと考えられる。本研究は，このような観点から，不規則外力を受ける構造物の応答が一定レベルを超える回数の確率統計的性質について論じたものである。

2．基本解析

対象とする構造物の応答を $y(t)$ とし，継続時間 t の間に $|y(t)|$ が Y を超える回数を論ずる。はじめに，図－1のように，$|y(t)|$ が $(0,t)$ で Y を $n-1$ 回超過し，かつ n 回目の超過が $(t,t+dt)$ で生ずるという事象を $R_p(n,Y,t)$ で表わすものとし，これを用いて $p_n(Y,t)$，$\hat{p}_n(Y,t)$ なる条件付確率密度関数を次式のように定義する。

$$\left.\begin{aligned} p_n(Y,t)dt &= P[R_p(n,Y,t)\,|\,|y(0)|\leqq Y] \\ \hat{p}_n(Y,t)dt &= P[R_p(n,Y,t)\,|\,|y(0)|>Y] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$



図－1　不規則外力に対する構造物の応答の概念図（nは，$|y(t)|$ が n 回目に Y を超えることを示す。）

式(1)の $p_n(Y,t)$，$\hat{p}_n(Y,t)$ は，first－passage－time probability density の概念を拡張したもので，nth－passage－time density と呼ぶことにする。それらを用いると，応答の継続時間 t 内で $|y(t)|$ が Y を n 回超える確率 $\Psi_n(Y,t)$ は次式により表わされる。

$$\Psi_n(Y,t)=\begin{cases} a_0(Y)\left\{1-\int_0^t p_1(Y,t)\,dt\right\} & (n=0) \\ a_0(Y)\left\{\int_0^t p_1(Y,t)\,dt-\int_0^t p_2(Y,t)\,dt\right\}+\hat{a}_0(Y)\left\{1-\int_0^t p_1(Y,t)\,dt\right\} & (n=1) \\ a_0(Y)\left\{\int_0^t p_n(Y,t)\,dt-\int_0^t p_{n+1}(Y,t)\,dt\right\}+\hat{a}_0(Y)\left\{\int_0^t \hat{p}_{n-1}(Y,t)\,dt-\int_0^t \hat{p}_n(Y,t)\,dt\right\} & (n\geqq 2) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

ただし，$a_0(Y)=P[|y(0)|\leqq Y]$，$\hat{a}_0(Y)=1-a_0(Y)=P[|y(0)|>Y]$

において，t 内での超過回数が n 以下となる確率，すなわち応答レベル Y を超える回数 n の確率分布を $\Psi_p(n;Y,t)$ とすると，

$$\overline{P}_p(n;Y,\tau)=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{P}_\nu(Y,\tau)=\begin{cases}a_0(Y)\{1-\int_0^\tau P_1(Y,t)dt\} & ,(n=0)\\ 1-\{a_0(Y)\int_0^\tau P_{n+1}(Y,t)dt+\hat{a}_0(Y)\int_0^\tau \hat{P}_n(Y,t)dt\} & ,(n\geq 1)\end{cases} \quad \cdots\cdots(3)$$

3. $P_n(Y,\tau)$, $\hat{P}_n(Y,\tau)$ の誘導

時間軸上の $(0,t)$ を $t_i=i\Delta t$, $(i=0,1,2,\cdots\cdots,m;\Delta t=t/m)$ によって m 個の区間に分割する。区間 (t_{i-1},t_i) で $|y(t)|$ がレベル Y を超えるという事象を e_i, $|y(0)|\leq Y$ なる事象を g_0, それらの余事象をそれぞれ $\bar{e}_i$, $\bar{g}_0$ とすると, $P_n(Y,t)$ は次式のように表わされる。

$$P_n(Y,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}P[\bigcup_{i_1=1}^{n-n+1}\bigcup_{i_2=i_1+1}^{n-n+2}\cdots\bigcup_{i_n=i_{n-1}+1}^{n-1}\bar{e}_{i_1}\bar{e}_{i_2}\cdots\bar{e}_{i_{i-1}}e_{i_i}\bar{e}_{i_i+1}\cdots\bar{e}_{i_{n-1}-1}e_{i_{n-1}}\bar{e}_{i_{n-1}+1}\cdots\bar{e}_{n-1}e_n|\bar{g}_0]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}P[\bigcup_{i_1=1}^{n-n+1}\bigcup_{i_2=i_1+1}^{n-n+2}\cdots\bigcup_{i_n=i_{n-1}+1}^{n-1}(1-e_1)(1-e_2)\cdots(1-e_{i_1-1})(1-e_{i_1+1})\cdots(1-e_{i_2-1})(1-e_{i_2+1})$$
$$\cdots(1-e_{i_{n-1}-1})(1-e_{i_{n-1}+1})\cdots(1-e_{n-1})e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_n|\bar{g}_0]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\binom{n+m-2}{n-1}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n+m-3}}^t f_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_{n+m-2},t)dt_{n+m-2} \quad \cdots\cdots(4)$$

ただし, $f_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_k)dt_1dt_2\cdots dt_k=P[\bigcap_{i=1}^{k}\{|y(t_i)|\leq Y\cap|y(t_i+dt_i)|>Y\}|\bar{g}_0]$

同様に,

$$\hat{P}_n(Y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\binom{n+m-2}{n-1}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n+m-3}}^t \hat{f}_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_{n+m-2},t)dt_{n+m-2} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\hat{f}_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_k)dt_1dt_2\cdots dt_k=P[\bigcap_{i=1}^{k}\{|y(t_i)|\leq Y\cap|y(t_i+dt_i)|>Y\}|\bar{g}_0]$$

4. 再生過程による近似解

前節までに得られた結果は厳密解であるが, 式(4),(5)で f_s, $\hat{f}_s$ の次元数は無限大まで必要であり, 構造物の応答のように相異なる時刻間の相関の強い確率過程では, それらの数値解を求めることは不可能に近い。ここでは近似解を得るために, 次のような二つの仮定を行なう。(1) $y(t)$ を定常過程とする。(2)図－1 において $|y(t)|$ が Y を n 回目に超過する時刻はそれ以前の超過回数およびそれらが生じた時刻と独立ではないが, いまこれを, $n-1$ 回目の超過の時刻のみに影響されるものとする。すなわち, $|y(t)|$ が Y を超過する過程は再生過程を構成するものと考える[3]。

これらの仮定により f_s, $\hat{f}_s$ は次式のように表わされる。

$$f_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_s(Y;t_1)\prod_{i=1}^{n-1}f_c(Y;t_{i+1}-t_i),\quad \hat{f}_s(Y;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\hat{f}_s(Y;t_1)\prod_{i=1}^{n-1}f_c(t_{i+1}-t_i)$$

ただし, $\cdots\cdots(6)$

$$f_c(Y,t)dt=P[|y(t)|\leq Y\cap|y(t+dt)|>Y|\,|y(0)|=Y\cap|\dot{y}(dt)|>\dot{Y}]$$

式(6)を式(4),(5)に代入し, Laplace 変換・逆変換を行なえば, 次式が得られる。

$$P_n(Y,t)+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{\nu-1}}^t P_n(Y,t_1)f_c(Y,t-t_\nu)\prod_{\mu=1}^{\nu-1}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)dt_\nu$$
$$=\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n-2}}^t f_s(Y,t_1)f_c(Y,t-t_{n-1})\prod_{\mu=1}^{n-2}f_c(t_{\mu+1}-t_\mu)dt_n. \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\hat{P}_n(Y,t)+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{\nu-1}}^t \hat{P}_n(Y,t_1)f_c(Y,t-t_\nu)\prod_{\mu=1}^{\nu-1}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)dt_\nu$$

$$=\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-2}}^t \hat{f}_s(Y,t_1)f_c(Y,t-t_{n-1})\prod_{\mu=1}^{n-1}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)dt_{n-1} \quad ----(8)$$

このようにして得られた式(7),(8)もあまり簡単な形ではないが，多重積分はたかだか n 重であり，しかも時間軸上で recursive に P_n, $\hat{P}_n$ を求めることができるので，式(4),(5)と比較すれば数値計算はるかに容易である。また，式(7),(8)に現われる $f_s(Y,t)$, $\hat{f}_s(Y,t)$, $f_c(Y,t)$ は，threshold-value crossing の問題[4]を適用することにより次式のように表わされる。

$$f_s(Y,t)=\frac{1}{a_0(Y)}\left\{\int_{-Y}^{Y}dy(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\phi_1(y(0),Y,\dot{y}(t))d\dot{y}(t)+\int_{-Y}^{Y}dy(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\phi_1(y(0),-Y,-\dot{y}(t))d\dot{y}(t)\right\} \quad ----(9)$$

$$\hat{f}_s(Y,t)=\frac{1}{\hat{a}_0(Y)}\left\{N_c(Y)-a_0(Y)f_s(Y,t)\right\} \quad ----(10)$$

$$f_c(Y,t)=\frac{1}{N_c(Y)}\left\{\int_0^\infty d\dot{y}(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\dot{y}(t)\phi_2(Y,\dot{y}(0),Y,\dot{y}(t))d\dot{y}(t)+\int_0^\infty d\dot{y}(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\dot{y}(t)\phi_2(Y,\dot{y}(0),-Y,-\dot{y}(t))d\dot{y}(t)\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty d\dot{y}(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\dot{y}(t)\phi_2(-Y,-\dot{y}(0),Y,\dot{y}(t))d\dot{y}(t)+\int_0^\infty d\dot{y}(0)\int_0^\infty \ddot{y}(t)\dot{y}(t)\phi_2(-Y,-\dot{y}(0),-Y,-\dot{y}(t))d\dot{y}(t)\right\} \quad ----(11)$$

$$N_c(Y)=\int_0^\infty \ddot{y}(t)\phi_0(Y,\dot{y}(t))d\dot{y}(t)+\int_0^\infty \ddot{y}(t)\phi_0(-Y,-\dot{y}(t))d\dot{y}(t) \quad ----(12)$$

ただし，$\phi_0(\dot{y}(t),\ddot{y}(t))$, $\phi_1(y(0),\dot{y}(t),\ddot{y}(t))$, $\phi_2(y(0),\dot{y}(0),\dot{y}(t),\ddot{y}(t))$ は，それぞれの変数の同時確率密度関数である。

5. Poisson 過程による近似

式(9)～(11)の f_s, $\hat{f}_s$, f_c は，いずれも $t\to\infty$ で式(12)の $N_c(Y)$ に収束する。f_s, $\hat{f}_s$, f_c にこの極限値を用いると，P_n, $\hat{P}_n$ は容易に次式のように求められる。

$$P_n(Y,t)=\hat{P}_n(Y,t)=\frac{N_c(Y)\{N_c(Y)t\}^{n-1}}{(n-1)!}\exp\{-N_c(Y)t\} \quad ----(13)$$

これは構造物の応答が過去の応答経歴に影響されないと仮定するものであり，$|\dot{y}(t)|$ が Y を超過する過程が Poisson 過程を構成すると考える場合である。

6. 線形1自由度系の応答への適用例

外力として white noise の作用を受ける線形1自由度系の応答に対して前述の解法を適用し，数値計算を行なった。図-2～5に計算結果を示した。同図中で，T_n は構造物の固有周期，ω_n は固有円

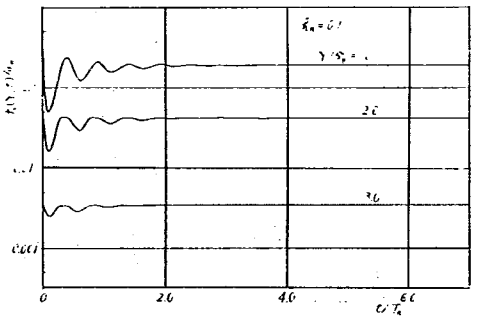


図-2 確率パラメーター $f_s(Y,t)$

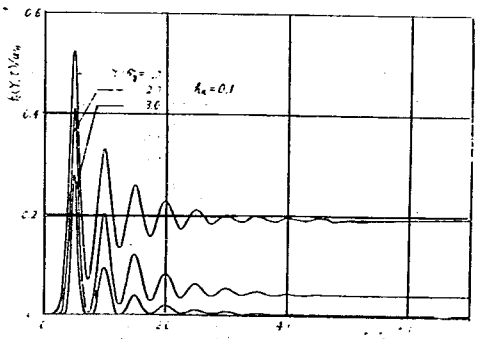
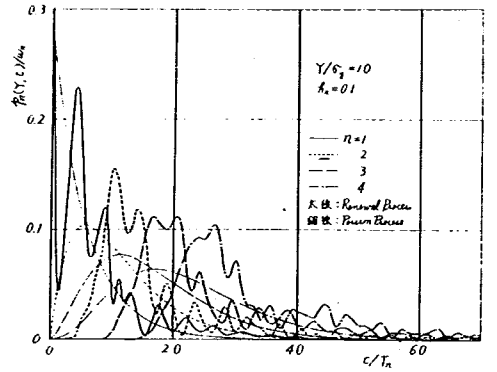
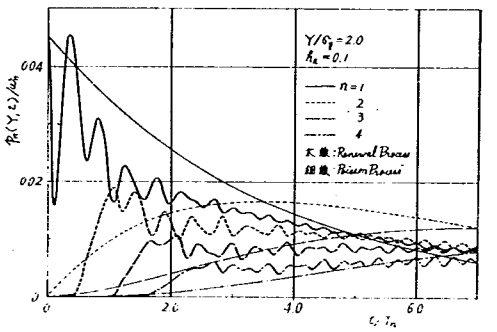
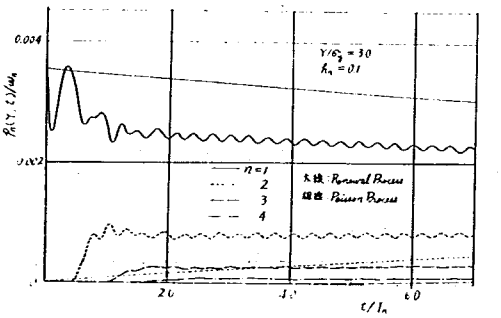


図-3 確率パラメーター $f_c(Y,t)$

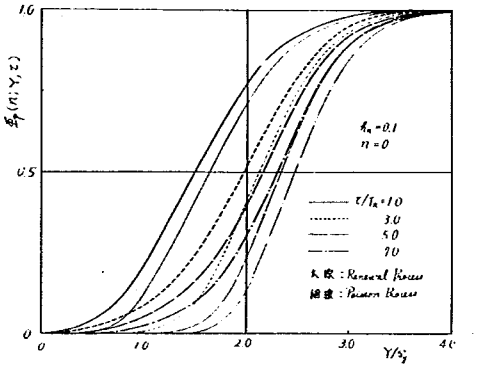
振動数，h_n は減衰定数，σ_y は $y(t)$ の標準偏差を示す。図－2，3は，$f_s(Y,t)$，$f_c(Y,t)$ の計算結果である。いずれも t が大きくなると初期条件の影響が小さくなり，一定値に近づくのがわかる。図－4は，$P_n(Y,t)$ を示すが，同図には，式(7)の再生過程による計算結果と，より単純化された近似解である式(13)の Poisson 過程による結果をあわせて示した。両者の計算結果にはかなりの差異が認められ，基本仮定に対する精度の吟味が重要であることがわかる。$\bar{P}_n(Y,t)$ についても同様の結果が得られた。以上の結果を式(3)に用いて $\bar{P}_n(\eta;Y,t)$ を求めた結果が図－5である。同図から，η により，また Y/σ_y によって二つの近似解の精度が異ることがわかる。

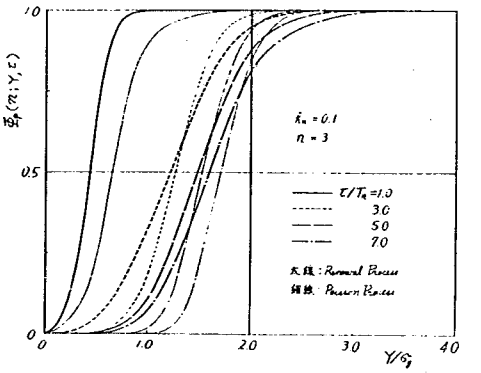






図－4　nth－Passage－Time Probability Density $P_n(Y,t)$





図－5　応答変位が Y を超える回数の確率分布

参考文献

1) 後藤・亀田：京大防災研究所年報 No. 11A，昭.43.3.

2) 後藤・亀田：同　上　No. 12A，昭.44.3.

3) Rice & Beer：Jour. Acost. Soc. Amr. Vol. 39，1966.

4) Wax：Selected Papers on Noise & ……，Doner. 1954.

I-162　荷重及び車頭間隔が不規則な分布をなす道路橋の応答解析

早稲田大学　正員　工博　半嶋政治
首都高速道路公団　○正員　工修　多田一正

1. まえがき

道路橋に作用する活荷重は，重量及び車頭間隔が不規則な分布をなす不確定的要素であり，従ってその応答も又確率統計的な分布を示す。最近の電子計算機の急速な発達に伴い，構造解析の精度は上昇したが，その解析の前提となる外力は決定論的に与えられる場合が多い。一般に，土木構造物に作用する外力は確率的にしか論じる事のできない物が多く，しかも対象とする系それ自身が不確定要素を含む場合もある。本文は，重量及び車頭間隔を不規則な分布とみなした場合に於ける，道路橋のタワミの平均自乗応答を求めた。

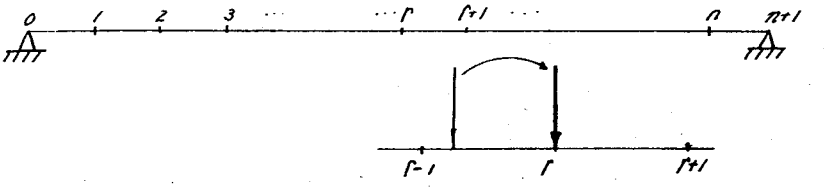
仮定

1. 道路橋を通過する自動車は一定速度で走行する。
2. 自動車は剛体とし，バネ上質量による衝撃効果を考えていない。
3. 定常的不規則振動として解析した。
4. 振動系は線型系とする

2. 解析の方法

○移動荷重の位置

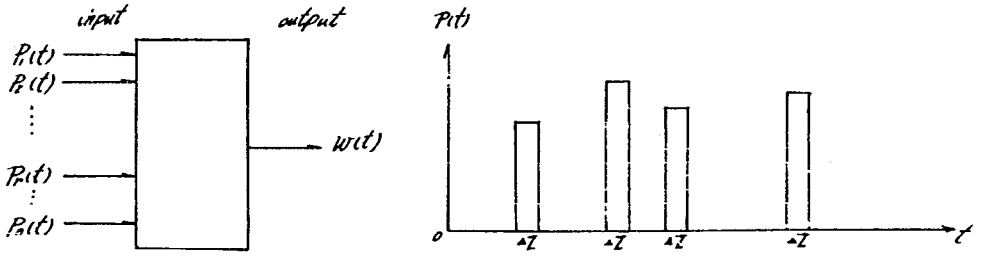
スパンを $n+1$ 個の等間隔に分割する。走行荷重が区間 $r-1$ と r との間に存在する場合には，区間内に作用させず，断面 r に荷重を一時的に固定させる。断面 r を通過したならば，$r+1$ 断面に固定させる。但し，分割区間内に同時に2台以上の車両は存在しないものとする。



このように荷重の作用位置を決めるならば，系は見かけ上，n 個の入力源を有する多入力系と考えられるが，0～1区間に存在する荷重を知ることによって，他の区間の荷重は0～1区間のものを時間的に平行移動した関係にあることがわかる。

$$P_r(t) = P_1\{t-(r-1)\Delta\tau\}$$

$$\Delta\tau = \frac{L}{(n+1)v}$$　：移動荷重が $r-1$ の分割点から次の分割点まで走行する時間



このように移動荷重の作用位置を考えるならば、荷重～時間関数はパルス波となり作用時間$\Delta\tau$、その大きさ(車両重量)及び休止間隔(車頭間隔)は確率過程をなす。振動系は多入力系であるから入力間のクロスパワースペクトルの重ね合わせとして出力を表現せねばならない。

$$S_w(f) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \alpha_{xP_r}^{*} \cdot \alpha_{xP_s} \cdot S_{P_rP_s}(f)$$

$S_w(f)$：出力(タワミ)のスペクトル
$S_{P_rP_s}$：入力のクロスパワースペクトル
α_{xP_r}：P_rによる点xのレセプタンス
$*$：複素共役

$$S_{P_rP_s}(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{P_rP_s}(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)\,d\tau$$

$$R_{P_rP_s}(\tau) = \langle P_r(t)P_s(t+\tau)\rangle = \langle P_r\{t-(r-1)\Delta\tau\}\cdot P_s\{t-(s-1)\Delta\tau+\tau\}\rangle$$
$$= R_{P_r}\{(r-s)\Delta\tau+\tau\} \quad (\text{定常的であるという仮定による。})$$

$$S_{P_rP_s} = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{P_rP_s}\cdot\exp(-i2\pi f\tau)\,d\tau = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{P_r}\{(r-s)\Delta\tau+\tau\}\exp(-i2\pi f\tau)\,d\tau$$
$$= \exp\{i\cdot 2\pi f(r-s)\Delta\tau\}\times 2\int_{-\infty}^{\infty}\left[R_{P_r}\{(r-s)\Delta\tau+\tau\}\times\exp\{-i2\pi f((r-s)\Delta\tau+\tau)\}\right]d\{(r-s)\Delta\tau\}$$
$$= \exp(i2\pi f(r-s)\Delta\tau)\times S_{P_r}(f)$$

従って

$$S_w(f) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left[\exp\{i2\pi f(r-s)\Delta\tau\}\times S_{P_r}(f)\cdot\alpha_{xP_r}^{*}\cdot\alpha_{xP_s}\right]$$

タワミの中心自乗応答は

$$\langle w^2(x,t)\rangle = \int_0^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{xP_r}^{*}\alpha_{xP_s}\cdot\exp(-i2\pi f(r-s)\Delta\tau)\times S_{P_r}(f)\right\}df$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{xP_r}^{*}\alpha_{xP_s}\cdot\exp\{i\omega(r-s)\}\right\}\times S_{P_r}(\omega)\,d\omega$$

粘性減衰を有する単純支持桁に対して、正規モード法により変位の応答を求める。

$$w(x,t) = P_0\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_j(x)\cdot\phi_j(x_0)}{M_j\cdot\omega_j^2}\times\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2+2i\zeta_j\frac{\omega}{\omega_j}}\right]$$
$$\alpha_{xP_s} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_j(x)\phi_j(x_0)}{M_j\cdot\omega_j^2}\quad\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2+2i\zeta_j\frac{\omega}{\omega_j}}\right]$$

$$\langle w^2(x,t)\rangle = \frac{4}{m^2L^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_j(x)\phi_k(x)\phi_j(x_0)\phi_k(x_0)}{\omega_j^2\cdot\omega_k^2}\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(H_j^{*}(\omega)H_k(\omega)e^{i\omega(r-s)}S_P(\omega)d\omega\right]$$

近似　① 周波数応答の位相の関係を無視
　　② 減衰は小　　により

$$\langle w^2(x,t)\rangle = \frac{1}{m^2L^2}\sum_{j=1}^{\infty}S_P(\omega_j)\frac{\phi_j^2(x)}{\omega_j^4}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}e^{i\omega_j(r-s)\Delta\tau}\cdot\phi_j(x_r)\phi_j(x_s)$$

$\omega_j \cdot \Delta\tau = \alpha_j$　　$\phi_r(x_j) = J_r$　　$\phi_s(x_j) = J_s$　　とおけば

$$\langle w^2(x,t)\rangle = \frac{1}{m^2 L^2} \sum_{j=1}^{\infty} S_p(\omega_j) \cdot \frac{\phi_r'(x)}{\omega_j^4} \cdot A_j$$

但し

$$A_j = J_1 J_1 + J_1 J_2 \cdot e^{-i\alpha_j} + J_1 J_3 \cdot e^{-2i\alpha_j} + \cdots\cdots + J_1 J_n e^{-i(n-1)\alpha_j}$$
$$+ J_2 J_1 e^{i\alpha_j} + J_2 J_2 + J_2 J_3 e^{-i\alpha_j} + \cdots\cdots + J_2 J_n e^{-i(n-2)\alpha_j}$$
$$\vdots$$
$$+ J_n J_1 e^{i(n-1)\alpha_j} + J_n J_2 e^{i(n-2)\alpha_j} + J_n J_3 e^{i(n-3)} + \cdots\cdots + J_n J_n$$

$$= \sin^2\beta_j + 2\sin\beta_j \cdot \sin 2\beta_j \cdot \cos\alpha_j + 2\sin\beta_j \cdot \sin 3\beta_j \cdot \cos 2\alpha_j + \cdots + 2\sin\beta_j \cdot \sin n\beta_j \cos(n-1)\alpha_j$$
$$+ \sin^2 2\beta_j \quad + 2\sin 2\beta_j \sin 3\beta_j \cos\alpha_j + \cdots + 2\sin 2\beta_j \cdot \sin n\beta_j \cdot \cos(n-2)\alpha_j$$
$$+ \sin^2 3\beta_j + \cdots\cdots + 2\sin 3\beta_j \cdot \sin n\beta_j \cdot \cos(n-3)\alpha_j$$
$$\vdots$$
$$\sin^2 n\beta_j$$

$$\beta_j = \frac{j\pi}{n+1}$$

この級数は極めて収束が速いので第1項だけをとって近似してみれば

$$\langle w^2(x,t)\rangle = \frac{L^4}{\pi^6 \sqrt{m(EI)^3}} \cdot S_p\left(\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\right) \sin^3 \frac{\pi x}{L} \cdot A_1$$

従って 0～1 区間に存在する荷重に対するパワースペクトルを求めるならば、平均自乗応答は上式から計算することができる。

S_p は一般には道路橋の存在する地域の特性、交通流の性格により定まるものであるが、大体の性格を知る為に、特別な場合について求めてみる。

時間 τ の間に k 個の車輌が 0～1 区間を通過する確率が Poisson 分布に従うものと仮定する

$$P_r(k,\tau) = \frac{(a\tau)^k}{k!} \exp(-a\tau)$$

a ： 単位時間に通過する車両台数

荷重の大きさは一定とし、車頭間隔のみが Poisson 分布しているならば、パルス波は次のようになる。

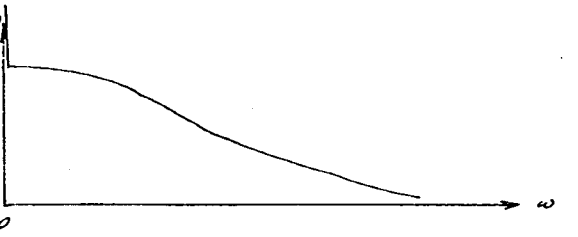
$P_r(k,\tau) = \frac{(a\tau)^k}{k!}\exp(-a\tau)$ を用いて自相関数を求め、更にそれをフーリエ変換すれば

$$R_x(\tau) = \frac{W_0^2}{4}\left[1 + \exp(-2a|\tau|)\right]$$

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\exp(-i\omega\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{W_0^2}{8\pi}\delta(\omega) + \frac{W_0^2}{8\pi}\cdot\frac{a}{a^2 + \frac{\omega^2}{4}}$$

$\delta(\omega)$： Dirac の δ 関数

$$S_p(\omega) = \frac{W_0^2}{\delta\pi}\left\{\delta(\omega) + \frac{a}{a^2+\frac{\omega^2}{4}}\right\}$$



$$\langle u^2(l,t)\rangle = \frac{L^4}{\pi^6 l^4 m (EI)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{W_0^2}{\delta\pi^2} \cdot \frac{a}{a^2+\frac{\pi^4 EI}{4mL^4}} \cdot \sin^2\frac{\pi l}{L} \cdot A_1$$

スパン中央点のタワミは

$$\langle u^2(\tfrac{L}{2},t)\rangle = \frac{L^4 \cdot W_0^2}{\delta\pi^{10} m^{\frac{1}{2}} (EI)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{a^2+\frac{\pi^4 EI}{4mL^4}} \cdot A_1$$

3. 後述

本文は定常的不規則振動の考え方によって、不規則な動荷重による道路橋の応答解析を求めたに。くり返し応力を受ける道路橋の動荷力をどのように評価し、その非破壊確率を求める足がかりとして、上記の如き荷動配によって平均的応答を計算した。
交通流理論における、出現自動車荷重の確率的分布に、質的な意味を加えた状態で構造解析における外力を合理的に評価する必要があろう。

参考文献

"橋梁構造の振動減衰" 伊藤学・片山恒雄 土木学会論文集 No.117

"ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究"
山田善一・小堀為雄 土木学会論文集 No.119

"An introduction to the theory of Random Signals and Noise"
W.B. Davenport, W.L. Root

I-165　走行荷重による長大吊橋の動的応答

京都大学　工学部　正員　小西　一郎
京都大学　工学部　正員　白石　成人
京都大学　工学部　学生員　○北川　貴一
京都大学　工学部　角田　尚志

Ⅰ．まえがき

吊橋はその低い剛性に特徴を有しており，列車荷重などの集中的かつ巨大な荷重をうける場合には，その安全性が問題となる．列車走行による荷重の作用の形式としては種々考えられるが，本研究では，単純桁橋において A. Schallenkamp および C. T. G. Looney が用いた2つの方法によって，平滑走行による速度効果と Zimmermann 効果を外力として考慮し，それらの影響を，たわみの衝撃係数の形でまとめた．

Ⅱ　基礎方程式

(1) A. Schallenkamp による方法

吊橋の各スパンについてたわみを次のように仮定する．

$$\eta_n(x,t) = \sum_i \beta_{n,i}(t) \sin\frac{i\pi x}{l_n} \qquad (n:\text{スパン名},\ l_n:\text{スパン長}) \tag{1}$$

これよりエネルギーを求め，Lagrange の運動方程式に入れて整理すると，

$i = 2,4,6,\cdots$ のとき，
$$\ddot{\beta}_{n,i} + \varepsilon^2_{n,i}\beta_{n,i} = \frac{2}{m_n l_n} Q_{n,i} \tag{2}$$

$i = 1,3,5,\cdots$ のとき，
$$\ddot{\beta}_{n,i} + \varepsilon^2_{n,i}\beta_{n,i} + \frac{\alpha_n^2}{i}\frac{f_n}{l_n}\left(\sum_n \frac{l_n}{f_n}\sum_{j=1,3,5\cdots}\frac{\beta_{n,j}}{j}\right) = \frac{2Q_{n,i}}{m_n l_n} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2_{n,i} = EI_n/m_n\cdot(i\pi/l_n)^4 + H_w/m_n\ (i\pi/l_n)^2 \\ \alpha^2_n = 8 l_n A_c E_c/(m_n\pi^2 f_n^2 L_E) \qquad f_n = l_n^2/8f_n \end{cases}$$

(2)，(3) 式において $Q_{n,i}$ は一般力であるが，これは次のように書ける．

$$Q_{n,i} = \left(P - \frac{P}{g}\frac{d^2\eta_n}{dt^2}\right)\sin i\vartheta_n t \tag{4}$$

(4)式の $d^2\eta_n/dt^2$ をこのまま計算に用いることは極めて繁雑となりまず不可能である．そこで，A Schallenkamp のように，この項を鉛直方向のみの加速度で近似すると走行速度と時間のみの関数となり，この項を計算に用いることが可能となる．

(ロ) C. T. G. Looney による方法

吊橋のたわみ η_B を次のように仮定する．

$$\eta_B(x_B,t) = \sum_i d_i(t)\sin\frac{i\pi x_B}{l} \qquad (d_i: l/2i\ \text{点のたわみ}) \tag{5}$$

移動荷重の鉛直方向の運動に対しては，

$$\eta_B(x_P,t) = \sum_i d_i(t)\sin\frac{i\pi x_P}{l} \tag{6}$$

荷重 P が x_P にあるときの5点のたわみを次のように分けて考える．

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{静的載荷によるたわみ} && \Delta_{LL} = P\cdot\textstyle\sum(d_i)_{P_1=1}\sin\frac{i\pi x_P}{l} \\ &2)\ \text{橋の慣性力によるたわみ} && \Delta_{MB} = -\frac{1}{2}\frac{\omega l}{g}\textstyle\sum(d_i)_{P_1=1}a_{i5}/\sin\frac{i\pi\xi}{l} \\ &3)\ \text{荷重の慣性力によるたわみ} && \Delta_{ML} = -\frac{P}{g}\ddot{\eta}_P\textstyle\sum(d_i)_{P_1=1}\sin\frac{i\pi x_P}{l} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

327

$(d_i)_{P_s=1}$ ：s点に$P=1$が作用したときのd_i

a_{is} ：s点の鉛直方向の加速度

鉛直方向のたわみ，速度，加速度の関係式は，

$$d_{is}^{*} - d_{is}' = (v_{is}' + v_{is}^{*})\frac{\Delta t}{2} \quad , \quad v_{is}'' - v_{is}' = (a_{is}' + a_{is}^{*})\cdot\frac{\Delta t}{2} \tag{8}$$

(7),(8) 式より " Step by Step Analysis " の基礎方程式は次の多元連立一次方程式となる．

$$\left\{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\omega l}{g}(d_i)_{P_s=1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\right\} a_{is}'' + \frac{P}{g}(d_i)_{P_s=1}\sin\frac{i\pi x_P^{*}}{l}\left[\sum_i \frac{a_{is}^{*}}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\sin\frac{i\pi x_P^{*}}{l}\right.$$

$$\left. + 2\sum_i \frac{a_{is}^{*}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\left(\frac{i\pi}{l}\right)\dot{x}_P\cos\frac{i\pi x_P''}{l} - \sum_i \frac{a_{is}^{*}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\dot{x}_P^2\sin\frac{i\pi x_P''}{l}\right]$$

$$= P\cdot(d_i)_{P_s=1}\sin\frac{i\pi x_P''}{l} - d_{is}' - v_{is}'\,\Delta t - a_{ij}'\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \frac{P}{g}(d_i)_{P_s=1}\sin\frac{i\pi x_P''}{l}\cdot\left[\right.$$

$$\left. 2\sum_i \frac{v_{is}' + a_{ij}'\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\left(\frac{i\pi}{l}\right)\dot{x}_P\cos\frac{i\pi x_P''}{l} - \sum_i \frac{d_{is}' + v_{is}'\Delta t + a_{is}'\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{\sin\frac{i\pi x_s}{l}}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\dot{x}_P^2\sin\frac{i\pi x_P''}{l}\right] \tag{9}$$

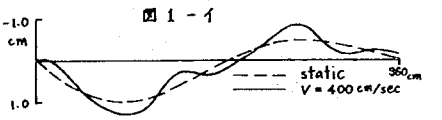
Ⅲ. 計算結果と考察

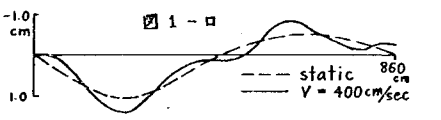
計算に用いた吊橋は，京都大学工学部土木教室の模型（1/100，スパン 860 cm．単径間吊橋）で，荷重は単一集中荷重 5 Kg とした．初期振動および進行荷重については，荷重が独立であると考えうると，Ⅱの式を用いて重ね合わせであることが容易に証明されるので，本計算においては，単一集中荷重で，初期振動がないとした．Ⅱ(イ)(ロ) の2つの方法によって，Zimmermann 効果を無視して計算した $l/4$ 点のたわみの影響線（図1），たわみの動的成分のみの影響線（図2）および次式によって定義される衝撃係数（図3）を右に示す．

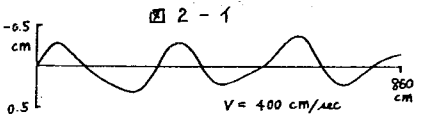
$$\left.\begin{aligned} i_{\mathrm{I}} &= \eta_{d\,max}/\eta_{s\,max} - 1 \\ i_{\mathrm{II}} &= |\eta_d - \eta_s|_{max}/\eta_{s\,max} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

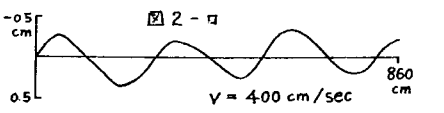
図2から振動数を出すと，$l/4$ 点では逆対称1次の振動モードが支配的であることがわかる．また本論文では，Ⅱの解法による計算結果の比較という点に1つの主眼がおかれており，図1～3に見られるように $l/4$ 点では両者とも同じ傾向を示している．

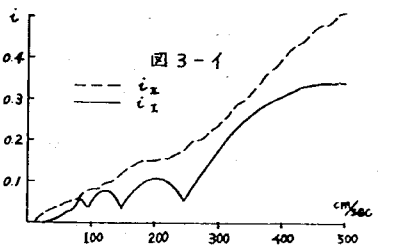
さらに詳細な計算結果は当日スライドで発表する予定である．

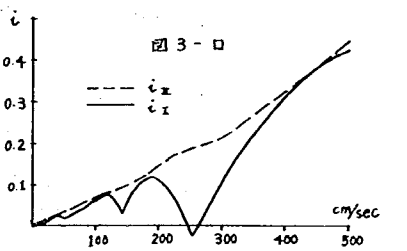












参考文献

A. Schallenkamp, " Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten " , 1937

C. T. G. Looney, " Impact on Railway Bridges ", 1944

IId1

Fatigue Life of Bridge Beams Subjected to Controlled Truck Traffic

Résistance à la fatigue de poutres de ponts soumises à des essais de passage de camions

Dauerfestigkeit von Brückenträgern für Testlastenzüge

JOHN W. FISHER
Research Instructor, Lehigh University, Bethlehem, Pa., U.S.A.

IVAN M. VIEST
Structural Engineer, Bethlehem Steel Co., Bethlehem, Pa., U.S.A.

Introduction

Although almost no fatigue failures of highway bridges have been reported, the increasing frequency of heavy trucks on modern highways suggests that the past experience may not be indicative of future trends. A fairly extensive body of laboratory data has been available on the fatigue life of structural members. However, the scarcity of failures in the field left unanswered the question of how to apply the results of the laboratory research to practical design problems, and gave rise to some doubt concerning the need for fatigue considerations in the design of highway bridges.

To explore the subject of the fatigue life of highway bridges, the American Association of State Highway Officials undertook tests of eighteen bridges under repeated overstress. The experiment was a part of the AASHO Road Test, a study of highway pavements and bridges under controlled truck traffic.

The principal objective of the bridge research program was to gather information on the effects of repeated overstress. In the past, many investigations of the fatigue life of beams were made on small laboratory specimens. Such tests covered wide ranges of pertinent variables. Could these laboratory tests be applied to bridges in actual service? Given characteristics of the materials and a reasonable estimate of the number, weight, and arrangement of the vehicle loads, could one make a reasonably good prediction of the usable life of the structure?

The combination of the precise knowledge of the materials, the design of the structures and the control of the loading made possible to study these and other items at the Road Test. The tests afforded the rare opportunity to compare the results of simpler laboratory experiments with the behavior of actual bridge structures. This paper deals only with five bridges with steel beams that showed fatigue distress.

Description of Tests

Bridge Tests

Each superstructure consisted of three steel beams and a reinforced concrete deck. The beams were fabricated from 18-in. deep wide-flange sections rolled of A 7 structural steel. In three bridges the beams were independent of the slab. A treatment of the top surface of the top flanges inhibited formation of natural bond between the slab and the steel beams. In two bridges the steel beams were connected to the slab with channel connections.

Beams of one noncomposite bridge and of the two composite bridges had partial-length cover plates on the bottom flange only, while the beams of the other two noncomposite bridges had partial-length cover plates on both the top and bottom flanges. All plates were welded to the flange with $^5/_{16}$-in. continuous fillet welds along the longitudinal edges. The ends of the plates were square and had no end welds.

The mean yield point of the flanges of the wide-flange beams varied from 32,500 to 37,900 psi and the mean ultimate strength from 59,500 to 64,900 psi from bridge to bridge. The chemical composition of the steel was 0.20—0.24% Carbon, 0.41—0.71% Manganese, 0.007—0.014% Phosphorus and 0.023 to 0.040% Sulfur. The estimated mean residual stresses in the flanges, caused by rolling the wide-flange sections, varied from a compression of 7,400 psi to a tension of 11,300 psi.

Individual mean values of the material properties for a particular beam, bridge, or slab and their standard deviations may be found in an earlier report [1]. The report contains also a description of the test methods and details of the construction procedures.

During a two-year period of test traffic, the bridges were tested with tractor semi-trailer trucks which traveled around the loops at approximately 30 mph. The time interval between individual passages of the vehicles over a bridge varied from one to two minutes. This resulted in over half a million passages of the test vehicles. Details of the test structures and experiments may be found elsewhere [2].

The maximum stresses in the steel beams occurred just off the ends of the cover plates. The stresses at these critical locations varied during the vehicle trip. A typical variation of stress at the end of a cover plate during the trip of a vehicle over a bridge is illustrated in Fig. 1.

After a vehicle crossed a bridge, the bridge continued to vibrate causing alternate upward and downward deflections of decreasing amplitude. These

[1] "The AASHO Road Test, Report 2, Materials and Construction", *Highway Research Board*, Special Report 61 B, 1962.

[2] "The AASHO Road Test, Report 4, Bridge Research", *Highway Research Board*, Special Report 61 D, 1962.

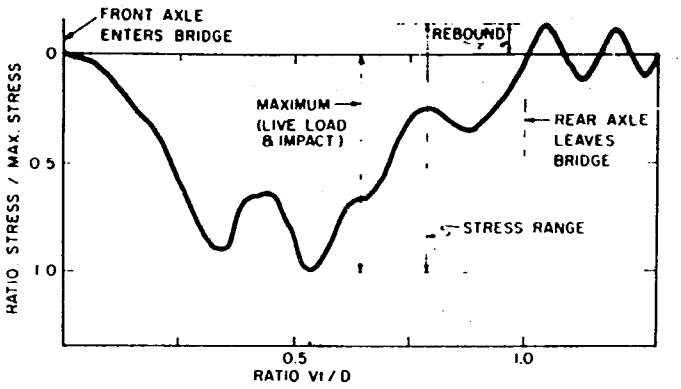


Fig. 1. Variation of stress near end of cover plate on passage of vehicle.

deflections caused stress fluctuations (Fig. 1). The maximum amplitude of the first negative half cycle of the stress fluctuation was designated the rebound stress. The rebound stress was of a sign opposite to that of the stress observed while the vehicle was on the bridge and thus increased the range of the fluctuating stress. The ratio of the sum of the maximum transient stress and the rebound stress to the maximum transient stress was in excess of 1.1 for non-composite bridges and less than 1.1 for composite bridges.

Laboratory Tests

The fatigue characteristics of steel beams with partial-length cover plates with no welds across the end were evaluated by studies of the results of flexural fatigue tests of ten small welded beams having similar welded details as the bridge beams. Details of the experiments are given elsewhere[3]).

The beams were fabricated from A 373 plate steel. The yield point of the beam flanges was 38,700 psi and the ultimate strength was 63,400 psi. The steel had 0.18—0.23% Carbon, 0.53—0.94% Manganese, 0.007—0.023% Phosphorus and 0.019—0.030% Sulfur. These properties were similar to those of the beams in the Road Test bridges.

All beams were 12-in. deep and 11-ft. long I-beams. Six specimens were built up of two $^3/_4$-in. thick flanges welded to a $^3/_{16}$-in. web; $^1/_2$-in. thick cover plates were attached to both the tension and the compression flanges with $^1/_4$-in. fillet welds. Four specimens were built up of two $^3/_8$-in. thick flanges welded to a $^1/_4$-in. web and a $^1/_4$-in. thick cover plate attached to the tension flange with $^3/_{16}$-in. fillet welds. The welding was done manually with low hydrogen electrodes conforming to AWS Specification E-7016.

331

[3]) Munse, W. H., and Stallmeyer, J. E.: "Fatigue in Welded Beams and Girders", *Highway Research Board*, Bulletin 315, 1962.

The specimens were tested in flexure on a span of 8 ft. 6 in. in an Illinois walking beam fatigue testing machine. The load was applied at a rate of 180 cycles per minute as two concentrated loads located 6 in. each side of midspan.

Test Results

Bridge Structures

The stresses caused by dead loads and by regular test traffic at the critical sections in the bridge beams are summarized in Table I. The minimum stress was obtained as the difference between the dead load stress and the rebound stress (Fig. 1). The dead load stresses were calculated with actual weights of the materials and were checked by strain measurements on several bridges. The stress range was obtained as the sum of the maximum live load and impact stress and the rebound stress (Fig. 1).

The stress range varied from one passage of the test vehicle to another as is shown by the standard deviations in Table 1. However, the variations in the stress range were smaller than one would expect to find under mixed traffic on bridges in the highway system.

Fatigue cracks were first discovered late during the period of the regular test traffic. The number of vehicle trips at the time the cracks were found is listed in the last column of Table 1. The fatigue cracks first appeared in the bottom surface of the rolled section at the toe of the welds connecting the cover plate and were usually $^1/_4$ to $^1/_2$ in. long. The cracks were determined by visual inspection of the critical areas with a magnifying glass.

Except for the crack at the approach end of the plate on the interior beam of Bridge 2 B, the cracks changed either very little or not at all during the remainder of the traffic. The one crack on Bridge 2 B spread through one quarter of the bottom flange as shown in Fig. 2. By the end of regular test traffic Bridges 1 A, 2 B and 3 B were subjected to approximately 556,000 vehicle trips. Bridge 1 A had ten fatigue cracks. Bridge 2 B had five cracks and Bridge 3 B had two cracks at that time. Two fatigue cracks were found on Bridge 9 A and one on Bridge 9 B; these two bridges were subjected to approximately 478,000 vehicle trips.

The number of stress cycles, N, at first detection of fatigue cracks varied from 478,000 to 606,000. The corresponding $\log N$ was 5.679 to 5.783. Hence, the total variation in the logarithmic life was only 1.8%. Because of the small variation on the logarithmic life, the regression line in Fig. 3, including all test data, can be considered as corresponding to the average $\log N$ or 530,000 stress cycles.

It can be seen from Fig. 3 that an increase in the minimum stress from 5,000 to 20,000 psi caused no change in the number of cycles to fatigue cracking

Table 1. Fatigue Strength of Steel Bridges

Bridge	Beam	Critical Section	Min. Stress ksi	Stress Range		Cycles to Cracking
				Mean ksi	Std. Dev. ksi	
1 A	Interior	Approach	10.7	13.3	1.20	556,900
	Center	Approach	13.8	13.6	0.92	536,000
	Exterior	Approach	16.5	12.8	0.94	536,000
	Interior	Exit	10.5	15.5	1.17	557,300
	Center	Exit	13.6	15.7	0.98	536,000
	Exterior	Exit	16.1	15.1	1.04	536,000
2 B	Interior	Approach	14.0	15.9	1.75	531,500
	Center	Approach	18.0	15.8	1.74	531,500
	Exterior	Approach	21.1	15.2	1.80	606,000
	Center	Exit	18.0	15.4	1.39	531,500
3 B	Center	Approach	15.0	14.0	2.08	535,500
	Exterior	Exit	17.9	13.4	1.59	557,800
9 A	Exterior	Approach	9.4	16.1	1.44	477,900
	Exterior	Exit	9.2	16.4	0.21	477,900
9 B	Center	Approach	6.7	17.6	1.40	477,900

Fig. 2. Propagation of fatigue crack.

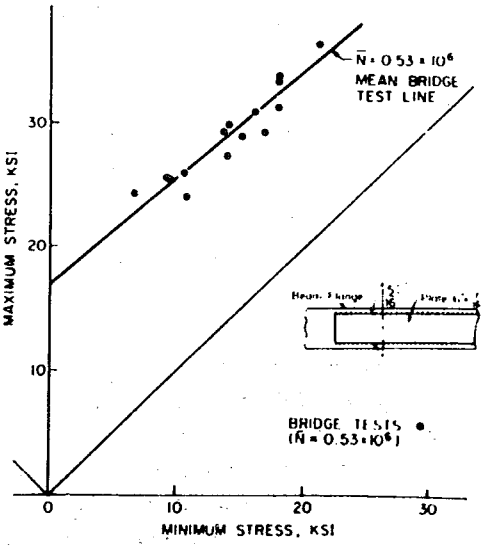


Fig. 3. Results of bridge tests.

when accompanied by a decrease in the stress range from 16,500 to 14,500 psi. Apparently a large change of the minimum stress accompanied by no change in the stress range may be expected to produce only a small change in the

number of cycles to fatigue cracking. In other words, the minimum stress appeared to have only a small effect on the fatigue life.

Laboratory Beams

The results of the laboratory fatigue tests of beams with partial-length cover plates are given in Table 2. Six beams were tested at the minimum stress of 400 psi and four were tested at the minimum stress of 15,400 psi. The maximum stress was so chosen that one-half of the specimens, at each level of minimum stress, failed above 1,000,000 cycles and the other half below 400,000 cycles. All fatigue cracks started at the toe of the longitudinal weld connecting the cover plate and propagated transversely and vertically through the beam flange.

Table 2. Laboratory Fatigue Tests of Beams

Test Specimen	Minimum Stress, ksi	Maximum Stress, ksi	No. of Cycles To Failure	No. of Cycles To Last Inspection Prior to Failure
CPDF-1	0.4	13.2	1,431,500	1,000,100*)
CPDG-1	0.4	13.3	2,819,300	2,308,500**)
CPCD-1	0.4	14.3	1,308,600	1,126,400
CPDF-2	0.4	23.9	291,800	220,700
CPAD-1	0.4	24.9	256,700	160,800
CPCD-2	0.4	26.0	260,200	241,600**)
1	15.6	28.0	1,378,400	1,312,800
4	15.4	27.7	1,524,500	1,150,900
2	15.4	36.0	350,200	307,400
3	15.4	36.7	285,200	222,100

*) Specimen had a crack 1 1/2 in. long.
**) Specimen had a crack 1/4 in. long.

The number of cycles at which the crack became visible in the laboratory specimens was not determined. However, at the last inspection prior to failure small cracks, 1/4 to 1 1/2 in. long, were found in three beams while no cracks were found in the remaining seven beams. Apparently, had the inspections been more frequent, cracks in the seven specimens would have been found somewhere between the "last inspection" and the "failure".

The number of cycles to last inspection is listed in Table 2 in addition to the number of cycles to failure. As all last inspections were made relatively close to failure, the number of cycles to last inspection will be considered as the number of cycles to fatigue cracking.

Analysis of Test Results

Laboratory Tests

The experimental data from Table 2 are plotted in Fig. 4 in which the stress range is given as a function of the logarithm of the number of cycles to cracking. A separate plot is included for each minimum stress level.

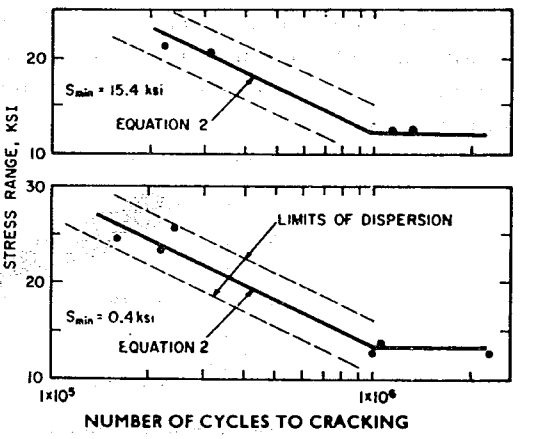


Fig. 4. S-N diagrams of laboratory data.

The relationship between the stress range and the logarithm of the number of cycles to failure was assumed to be represented by two straight lines: a sloping line up to 1,000,000 cycles (fatigue strength) and a horizontal line beyond 1,000,000 cycles (endurance limit).

The sloping line was expressed by the following mathematical model:

$$\log N = A + B S_r + C S_{min} \pm E, \tag{1}$$

in which

S_r = $S_{max} - S_{min}$; range of stress, ksi
S_{min} = minimum stress, ksi
S_{max} = maximum stress, ksi
N = number of cycles to failure
A, B, C = empirical constants
E = estimate of experimental error

Coefficients A, B, and C of Eq. 1 were evaluated by regression analysis of the laboratory data.

The analysis was based on the number of cycles to the last inspection before failure. For specimens with N larger than 1,000,000, the value of $\log N = 6.0$ was used in the analysis. The following equation was obtained for the number of cycles to fatigue cracking:

$$\log N = 6.827 - 0.0620 S_r - 0.0056 S_{min} \pm 0.180. \tag{2}$$

The error term at the end of the equation is equal to twice the standard error of estimate.

Equation 2 applies only up to 1,000,000 cycles. The stress range corresponding to cracking at 1,000,000 cycles represents the endurance limit. Both Eq. 2 and the endurance limit are shown in Fig. 4.

An examination of the coefficients of Eq. 2 reveals the relative significance of the stress range and the minimum stress. For example, a decrease in the stress range of 10 ksi increases the logarithmic life by 0.62; but the same decrease in the minimum stress increases the logarithmic life only by 0.056 or less than one-tenth as much as the change in the stress range. The relatively small effect of the minimum stress on fatigue life is illustrated in Fig. 5 containing the two mean regression lines for the laboratory tests and the limits of dispersion.

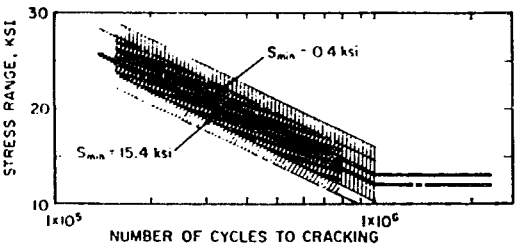


Fig. 5. Effect of minimum stress on fatigue life.

Comparison of Laboratory and Bridge Tests

Fatigue cracking of the bridge beams furnished data for quantitative comparisons with the results of the simpler laboratory tests.

In the laboratory tests the stress fluctuations followed a simple sine wave; in the bridge tests the shape of the time-stress curve was irregular including major stress waves caused by the weight of the moving vehicles, minor stress waves caused by vibration of the bridge, and rest periods corresponding to the intervals between the trucks and to periodic breaks in the test traffic. Finally, in the laboratory tests the duration of one stress cycle was of the order of one second or less while in the bridge tests the intervals of the major stress cycles were of the order of 40 seconds or more. Thus the stress histories of the bridge tests differed considerably from those of the laboratory tests.

In comparing quantitatively the results of the bridge tests with laboratory data, the only characteristics of the stress histories considered were the minimum stress and the stress range. The effects of the speed of loading, rest periods, and vibrations were disregarded because of lack of methods which would permit their inclusion in the analysis.

The results of the individual comparisons are shown in Fig. 6 in which the ratio of the observed to the computed number of cycles to fatigue cracking is plotted for every beam section with a fatigue crack detected during the traffic period. The individual comparisons are plotted corresponding to the sequential

listing of the observed number of cycles to cracking in Table 1. The computed values were obtained by three methods: the bars in Fig. 6, each representing one beam cross-section, show the results for all three methods.

The method designated as "Miner's Hypothesis" accounted for the variations in the stress range with the aid of Miner's Hypothesis of cumulative damage[4]). In this analysis, use was made of the minimum stress and both the mean and the standard deviation of the stress range (Table 1). Details of this method may be found elsewhere[2]).

The method designated in Fig. 6 as "Mean Stress Range" neglected the variations in the stress range. Values of N were calculated from Eq. 2, neglecting the error term, with the minimum stress and the mean stress range.

Finally, the method designated as "Rebound Neglected" used the same approach as the method "Mean Stress Range" except that the minimum stress was taken equal to the dead load stress and the stress range was taken as the live load and impact stress. In other words, the rebound stress (Fig. 1) was neglected in the computations.

Fig. 6 includes also the limits of dispersion of the test data computed from the error term in Eq. 2. It will be noted that all but two ratios based on Miner's Hypothesis and on Mean Stress Range fall within these limits. Furthermore, the values calculated with the aid of Miner's Hypothesis were in the best agreement with the laboratory data. Finally, the data in Fig. 6 demonstrate the need to consider the rebound stress in the analysis.

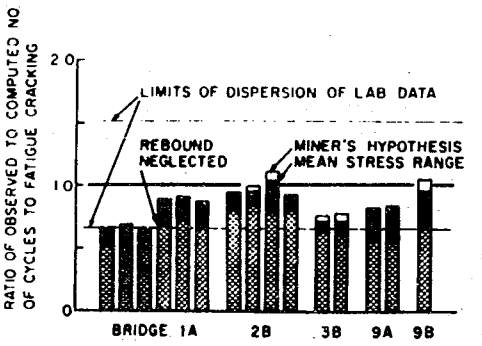


Fig. 6. Comparison of individual bridge test results with laboratory data.

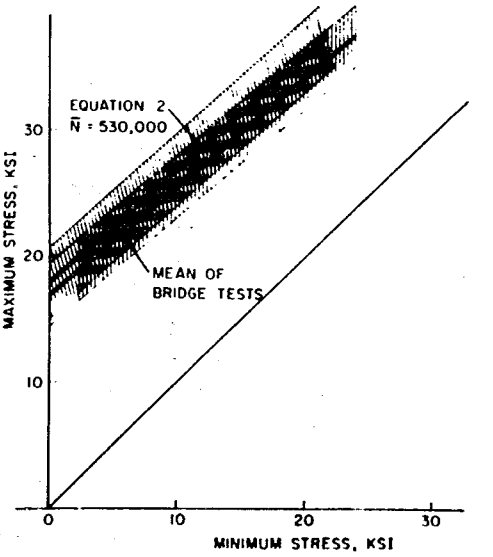


Fig. 7. Overall comparison of bridge and laboratory tests.

[4]) MINER, M. A.: "Cumulative Damage in Fatigue", *Journal of Applied Mechanics*, September, 1945.

The results of the overall comparisons are shown in Fig. 7. The regression line for the bridge tests is compared with a line computed from Eq. 2 for 530,000 cycles. The means as well as the limits of dispersion, equal to twice the standard error of estimate, are included for both the bridge tests and the laboratory data. The scatter bands for the two series of tests show a substantial overlap.

The comparisons in Fig. 6 and 7 show that the results of the bridge tests were in excellent agreement with the results of the simple laboratory fatigue tests. However, the bridge beams appeared to be slightly weaker in fatigue than the laboratory specimens. Fortunately, the differences were too small to be of practical engineering significance.

The comparisons show further that it should be satisfactory to base the engineering analysis of the fatigue strength of structures solely on the magnitude of the minimum stress and the stress range. Of the two, the effect of the stress range appears to be considerably more important and therefore should be estimated with greater accuracy: it should include not only the live load and the impact stresses but also the rebound stress. Furthermore, for structures with large variations of the stress range it may be necessary to consider the effects of the so-called cumulative damage.

Comparison of Test Results with Design Specifications

It has been shown in the preceding discussion that the fatigue strength of beams with partial-length cover plates is satisfactorily represented by Eq. 2. Thus the equation may be used to examine the design stresses permitted for such members by current design specifications. As all test beams were made of structural grade steel, the comparisons are limited to such steels.

Fig. 8 shows allowable stresses for 2,000,000 cycles used in Great Britain (steel BS 15)[5], U.S.A. (A 36)[6], U.S.S.R. (ST 3)[7] and West Germany (ST 37)[8]. The figure includes also the mean fatigue strength and the limits of dispersion of test data for 2,000,000 cycles.

The allowable stresses are represented by a sloping line (or a series of sloping lines) and a horizontal line. Except for the allowable stresses specified by the American Welding Society, there is little variation between the allowable stresses. The sloping lines fall slightly below and follow reasonably well the slope of the mean fatigue strength. However, they are within the scatter band of the test data.

[5]) British Standard 153: 1958, "Steel Girder Bridges" (with Amendments 1, 2, 3 and 4). 1962.

[6]) American Welding Society, "Specification for Welded Highway and Railway Bridges", 1963.

[7]) TUPIN-SV-55, "Specification for the Design and Construction of Welded Railway Bridges", 1955.

[8]) DV 848, "Regulations for Welded Railway Bridges", 1955.

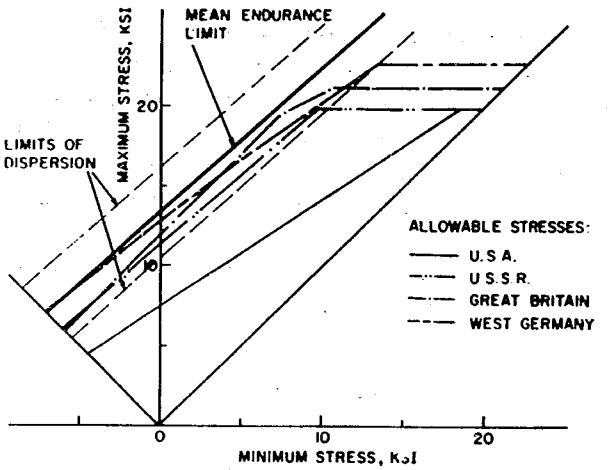


Fig. 8. Fatigue strength and allowable stresses for 2,000,000 cycles.

The horizontal lines represent the limitation imposed by the basic design stress, a condition independent of fatigue considerations. For the four mild steels considered, the basic design stress varied from 20 to 22.7 ksi.

The allowable stresses specified by the American Welding Society are considerably more conservative. While the factor of safety may be considered satisfactory for the case of full stress reversal, the divergence of the sloping line from the mean fatigue strength results in a prohibitively large factor of safety.

Generalized Design Approach

Current design rules specify the allowable stresses for fatigue loading in terms of maximum and minimum stress. Separate sets of values are usually given for different weld details, different desired lives of the structure and different grades of steel. Studies carried out in conjunction with the tests reported here indicate that this seemingly endless procession of design equations may be replaced by a single formula based on classic concepts of fatigue strength and a different set of two empirical coefficients for each different category of weld details.

Several investigators have reported that the fatigue lives of beams of different steels, having the same type splice configuration, were approximately the same[9]). Recently GURNEY[10]) concluded on the basis of an extensive

[9]) GURNEY, T. R.: "Fatigue Strength of Fillet Welded Joints in Steel", *British Welding Journal*, March 1960; STALLMEYER, J. E., NORDMARK, G. E., MUNSE, W. H., NEWMARK, N. M.: "Fatigue Strength of Welds in Low Alloy Structural Steels", *Welding Journal*, Vol. 35, January 1956.

[10]) GURNEY, T. R.: "Fatigue Tests of Butt and Fillet Welded Joints in Mild and High Tensile Structural Steels", *British Welding Journal*, November 1962.

337

investigation that the fatigue strength of *similar welded details* in mild steel and high tensile steel can be represented by the same S-N curve. This point is illustrated in Fig. 9 presenting the results of fatigue tests of tension joints with transverse butt welds in mild (BS 15 and A 7, $Fy = 35{,}000$ psi)[9], [10]) low-alloy (BS 968 and A 242, $Fy = 54{,}000$ psi)[9], [10]) and constructional alloy (N-A XTRA 100, $Fy = 93{,}000$ psi)[11]) steels. The principal difference among the different grades of steel is the point at which the curve starts to deviate appreciably from the straight line. As this point of departure is generally above the yield point of the material, it is only of academic interest.

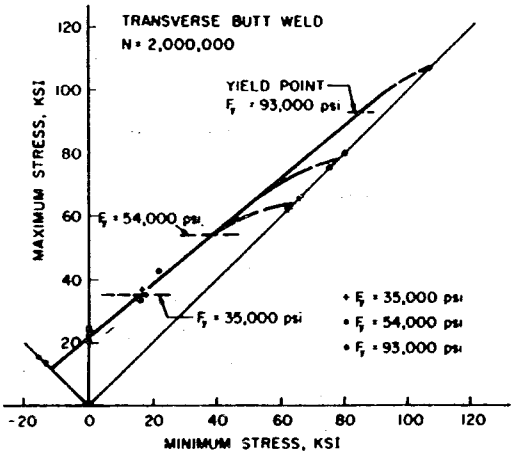


Fig. 9. Effect of steel strength on fatigue strength of welded joints.

Therefore, the same sloping line representing a specific fatigue life is applicable to all steels irrespective of their yield point or ultimate strength. This sloping line can be represented by a general design formula. The horizontal cut-offs will be different for various steels since they are usually determined by applying a uniform factor of safety against the static strength of the material. This consideration is independent of the fatigue strength.

The general design formula for fatigue strength may be expressed in several different terms[12]) but for the purposes of this discussion the following form

[11]) Scott, G. R., Stallmeyer, J. E., and Munse, W. H.: "Fatigue Strength of Transverse Butt-Welded Joints in N-A XTRA 100 Steel", University of Illinois, 1963.

[12]) For example, one of the better known variations of this formula is:

$$S_{max} = \frac{\alpha}{1 - \beta k},$$

where $k = S_{min}/S_{max}$ and the symbols "α" and "β" are empirical coefficients.

was chosen:

$$S_r = C_1 - (1 - C_2)\, S_{min}, \tag{3}$$

S_r = permissible stress range
S_{max} = maximum stress
S_{min} = minimum stress
C_1 = maximum permissible stress for a 0 to tension loading and N cycles
C_2 = slope of the permissible stress line

Empirical coefficients C_1 and C_2 must be evaluated for each category of weld details. This may be done by a statistical analysis of the test data using the relationship given by Eq. 1. The coefficients C_1 and C_2 may then be evaluated as:

$$C_1 = \frac{\log N - A'}{B}, \tag{4}$$

$$C_2 = \frac{B - C}{B}, \tag{5}$$

where A' is the empirical constant A (Eq. 1) corrected for the error term (or its multiple). *The correction for the error term decreases the probability of fatigue failure and thus provides the necessary factor of safety.*

An item of particular interest is the magnitude of coefficient C_2: its value is often close to 1.0. For example, for beams with partial-length cover plates (Eq. 2) it is equal to 0.91. The substitution of $C_2 = 1.0$ in Eq. 3 provides an approximate rule for guarding against fatigue failure: the stress range must not exceed a certain allowable value which depends only on the category of weld detail and the desired life of the structure.

Summary

Tests of five slab and beam steel bridges with partial-length cover plates are discussed. All bridges were subjected to 480,000 or 560,000 passages of test trucks. The number of stress cycles at fatigue cracking of steel bridge beams are compared with laboratory fatigue data.

Four current specification requirements for design against fatigue are compared with the results of these tests, and a generalized approach to the problem of fatigue design is outlined.

Résumé

Les auteurs analysent les résultats d'essais exécutés sur cinq ponts, constitués d'une dalle reposant sur des poutres métalliques renforcées par des semelles sur une partie de leur longueur. Tous les ponts ont été sollicités par

le passage de 480.000 ou 560.000 camions. On compare les essais sur ponts et ceux au laboratoire en considérant le nombre de cycles précédant la formation de fissures dues à la fatigue.

On compare également les résultats de ces essais aux sollicitations admissibles à la fatigue fixées par quatre règlements; on expose en outre, dans ses grandes lignes, une méthode généralisée de calcul de la résistance à la fatigue.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden an fünf Brücken mit stählernen Hauptträgern, gebildet aus durch aufgeschweißte Gurtplatten teilweise verstärkten I-Walzprofilen und einer Stahlbeton-Fahrbahnplatte, durchgeführte Versuche besprochen. Alle Brücken werden entweder 480 000 oder 560 000 Überfahrten von Testlastenzügen unterworfen. Die Lastwechselzahlen für das Auftreten von Ermüdungsrissen an den Stahlträgern werden mit den Werkstattergebnissen verglichen.

Vier zur Zeit geltende Dauerfestigkeitsvorschriften werden den Ergebnissen dieser Versuche gegenübergestellt und anschließend wird eine allgemeine Näherungslösung für den Dauerfestigkeitsnachweis gegeben.

Journal of the
ENGINEERING MECHANICS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

PROBABILITY OF STRUCTURAL FAILURE UNDER RANDOM LOADING

By Masanobu Shinozuka,[1] A. M. ASCE

SYNOPSIS

Upper and lower bounds are given for the probability P_x (T; $-\lambda_1, \lambda_2$) ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) that a random process, x(t), continuous in mean square, crosses barriers at $-\lambda_1$ and λ_2 in the interval (0, T) under zero initial condition $x(0) = 0$.

The displacement of a damped oscillator with one degree of freedom resulting from a nonstationary Gaussian random input is investigated as an illustration of an analysis that does not require the input to be white noise. If failure of the system is assumed to occur when the absolute value of the displacement exceeds a critical value λ, then P_x (∞; $-\lambda, \lambda$) is the probability of failure of the system. Under certain conditions, approximations for lower and upper bounds of P_x (∞; $-\lambda, \lambda$) are numerically evaluated with the aid of an electronic digital computer. The result shows that the present method estimates P_x (∞; $-\lambda, \lambda$) in a narrow interval over a sufficiently wide range of the probability values so that the method might be useful in reliability analysis.

Applications to aircraft and spacecraft subject to infrequent severe atmospheric turbulence and to structures subject to earthquake accelerations are suggested.

Note.—Discussion open until March 1, 1965. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, No. EM5, October, 1964.

[1] Asst. Prof. of Civil Engrg., Columbia Univ., New York, N. Y.

343

INTRODUCTION

Notation.—The symbols adopted for use in this paper are defined where they first appear and are listed alphabetically in Appendix II.

In a number of papers reviewed by P. W. Smith,[2] the response of nonlinear dynamic systems to a stationary random excitation is considered, while the analyses of linear systems under nonstationary random excitation are reviewed by Y. K. Lin.[3]

In most of these papers, as well as in the well-known standard analysis of linear systems under stationary random input, mean square values of stresses or displacements have usually been the quantity of principal interest.

As pointed out by J. L. Bogdanoff, J. E. Goldberg, and M. C. Bernard,[4] and by V. V. Bolotin,[5] it is of primary importance to evaluate the probability $P_X(T; -\lambda_1, \lambda_2)$ that a random process $x = x(t)$ of time, t, will take values outside of an interval $(-\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$ during a period of time $(0, T)$ under zero initial condition or, alternatively, the probability that x will be confined in that interval.

(The zero initial condition is not essential to the following analysis, which can be easily modified to nonzero initial conditions). For example, if failure of a structure is defined as occurring when the stress, σ, at a critical section of the structure exceeds the ultimate strength either in compression, $-\sigma_c$, or in tension, σ_t, then the probability of failure of the structure in the interval $(0, T)$ is given by $P_\sigma(T; -\sigma_c, \sigma_t)$ and the probability of survival or the reliability function by

$$L_\sigma(T; -\sigma_c, \sigma_t) = 1 - P_\sigma(T; -\sigma_c, \sigma_t) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

No general method has been developed for the exact evaluation of $P_X(T; -\lambda_1, \lambda_2)$, the distribution of the first passage time, T, except when the input is white noise. In this case, the Fokker-Planck equation can be used to find the conditional joint density function $f(x, \dot{x}, t/x_0, \dot{x}_0, t_0)$, given that $x = x_0$ and $\dot{x} = \dot{x}_0$ at $t = 0$. However, even then, the solution of the Fokker-Planck equation under boundary conditions pertinent to the problem, namely absorbing barriers at $x = -\lambda_1$ and λ_2, is quite difficult, as suggested by work along this line by E. Rosenblueth and J. I. Bustamente.[6]

The purpose of the investigation herein is to find lower and upper bounds of $P_X(T; -\lambda_1, \lambda_2)$, in which x denotes either stress or displacement in a linear structure with a single degree of freedom under a nonstationary random

---

2 Smith, P. W., Jr., "Response of Nonlinear Structures to Random Excitation," Journal of Acoustical Soc. of America, Vol. 34, No. 6, June, 1962, pp. 827-835.

3 Lin, Y. K., "Nonstationary Response of Continuous Structures to Random Loading," Journal of Acoustical Soc. of America, Vol. 35, No. 2, February, 1963, pp. 222-227.

4 Bogdanoff, J. L., Goldberg, J. E., and Bernard, M. C., "Response of a Simple Structure to a Random Earthquake-Type Disturbance," Bulletin, Seismological Soc. of America, Vol. 91, 1961, pp. 293-310.

5 Bolotin, V. V., "Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures," Proceedings, 2nd World Conf. on Earthquake Engrg., Vol. II, Japan, 1960, pp. 1365-1374.

6 Rosenblueth, E., and Bustamante, J. I., "Distribution of Structural Response to Earthquakes," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 88, No. EM3, Proc. Paper 3177, June, 1962, pp. 75-106.

input, and $-\lambda_1$ and λ_2 are critical stresses or displacements in positive and negative directions.

The analysis does not require the input to be purely random or white noise. The Gaussian characteristic is introduced later for mathematical convenience in examining the displacement of a damped oscillator as an example.

It should be mentioned that an upper bound of $P_x(T; -\lambda, \lambda)$ can be obtained, based on the multivariate generalization of Chebyshev's inequality.[7] In what follows, by means of a numerical example, the present method is shown to produce the upper bound much smaller than that resulting from Chebyshev's inequality.

DERIVATION OF LOWER AND UPPER BOUND

If

$$\{A\} \subset \{B\}$$

represents the statement that the event A belongs to the event B, it is evident that

$$\{x(\tau_1) < -\lambda_1\} \subset \{\min x(t) < -\lambda_1\}$$

and

$$\{x(\tau_2) > \lambda_2\} \subset \{\max x(t) > \lambda_2\}$$

for any time τ_1 and τ_2 $(0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq T)$ in which $0 < t \leq T$. Therefore, if $\{A \cup B\}$ denotes the union of the events A and B

$$P_x(T; -\lambda_1, \lambda_2) = P\left[\{\min x(t) < -\lambda_1\} \cup \{\max x(t) > \lambda_2\}\right]$$

$$> P\left[\{x(\tau_1) < -\lambda_1\} \cup \{x(\tau_2) > \lambda_2\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

in which $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq T$, and P represent the probability of the event indicated in the braces or brackets following it. Hence, the last member of Eq. 2 is a lower bound for $P_x(T; -\lambda_1, \lambda_2)$.

To find an upper bound, $P_x(T; -\infty, \lambda)(\lambda > 0)$ is considered first. By definition

$$P_x(T; -\infty, \lambda) = P\{\max x(t) \geq \lambda\} \quad (t \leq T) \ldots\ldots\ldots (3)$$

---

7 Birnbaum, Z. W., and Marshall, A. W., "Some Multivariate Chebyshev Inequalities with Extensions to Continuous Parameter Processes," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 32, 1961, p. 700.

If $\{ A, B \}$ denotes the joint event of A and B, then

$$P_x(T + dT; -\infty, \lambda) = P_x(T; -\infty, \lambda) + P\{\max x(t) < \lambda, \max x(t') \geq \lambda\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

and

$$P\{\max x(t) < \lambda, \max x(t') \geq \lambda\} < P\{x(T) < \lambda, \max x(t') \geq \lambda\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

in which t and t' are such that $0 < t \leq T$ and $T < t' \leq T + dT$.

Eq. 5 represents the probability that $x(t)$ crosses λ with positive slope in the interval $(T, T + dT]$. Hence, following S. O. Rice[8]

$$P\{x(T) < \lambda, \max x(t') \geq \lambda\} = \int_0^\infty \dot{x}\, \phi(\lambda, \dot{x}; T)\, d\dot{x}dT \quad \ldots\ldots (6)$$

in which $T < t' \leq T + dT$ and $\phi(x, \dot{x}; T)$ is the joint density function of $x = x(T)$ and

$$\dot{x} = \dot{x}(T) = \frac{dx(T)}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

From Eqs. 4, 5, and 6

$$\frac{dP_x(T; -\infty, \lambda)}{dT} < \int_0^\infty \dot{x}\, \phi(\lambda, \dot{x}; T) d\dot{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8a)$$

Similarly,

$$\frac{dP_x(T; -\lambda, \infty)}{dT} < \int_{-\infty}^0 |\dot{x}|\, \phi(-\lambda, \dot{x}; T) d\dot{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8b)$$

The right sides of Eqs. 8a and 8b represent the average numbers of $x(t)$ crossing λ or $-\lambda$ in the interval $(T, T + dT]$, with positive and negative slope respectively.

Hence, if $h_1^*(T)$ and $h_2^*(T)$ are found such that

$$\int_0^\infty \dot{x}\, \phi(\lambda, \dot{x}; T)\, d\dot{x} \leq h_1^*(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9a)$$

---

8 Rice, S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise," Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, edited by N. Wax, Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1954, p. 190.

and

$$\int_{-\infty}^{0} |\dot{x}|\, \phi(-\lambda, \dot{x}; T)\, d\dot{x} \leq h_2^*(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9b)$$

then from Eqs. 8a and 8b

$$P_x(T; -\infty, \lambda) < \int_0^T h_1^*(\tau) d\tau \equiv Q_x^*(T; -\infty, \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10a)$$

and

$$P_x(T; -\lambda, \infty) < \int_0^T h_2^*(\tau)\, d\tau \equiv Q_x^*(T; -\lambda, \infty) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10b)$$

For $0 \leq t \leq T$

$$P_x(T; -\lambda_1, \lambda_2) = P\left[\left\{\min x(t) < -\lambda_1\right\} \cup \left\{\max x(t) > \lambda_2\right\}\right]$$

$$< P_x(T; -\lambda_1, \infty) + P_x(T; -\infty, \lambda_2) < Q_x^*(T; -\lambda_1, \infty)$$

$$+ Q_x^*(T; -\infty, \lambda_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Eq. 11 is an upper bound for $P_x(T; -\lambda_1, \lambda_2)$.

If the joint density function of $x(t)$ and $\dot{x}(t)$ is symmetric with respect to the origin, then

$$P_x(T; -\lambda, \infty) = P_x(T; -\infty, \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12a)$$

and usually

$$h_1^*(T) = h_2^*(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12b)$$

can be found so that

$$Q_x^*(T; -\lambda, \infty) = Q_x^*(T; -\infty, \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12c)$$

In particular,

$$P_x(T; -\lambda, \lambda) < 2Q_x^*(T; -\infty, \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

3ψ7

The foregoing is valid for x and $\dot{x}$ with arbitrary form of the joint density function.

If $x = x(T)$ and $\dot{x} = \dot{x}(T)$ are both Gaussian, with zero mean and the standard deviation $\sigma_1 = \sigma_1(T)$ and $\sigma_2 = \sigma_2(T)$,

$$\phi(x, \dot{x}; T) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp$$

$$\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho\, x\dot{x}}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

in which $\rho = \rho(T)$ is the correlation function of $x(T)$ and $\dot{x}(T)$.

Using the transformation

$$\dot{x} = \sigma_2\left(\sqrt{1-\rho^2}\, v + \frac{\rho\lambda}{\sigma_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \dot{x}\,\phi(x, \dot{x}; T)\, d\dot{x} = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$\int_{v_1}^{\infty}\left(\sqrt{1-\rho^2}\, v + \frac{\rho\lambda}{\sigma_1}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right)dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16a)$$

in which

$$v_1 = \frac{-\rho\lambda}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16b)$$

Because it can be shown that

$$\sqrt{1-\rho^2}\int_{v_1}^{\infty} v \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) dv < \sqrt{1-\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17a)$$

and

$$\frac{\rho\lambda}{\sigma_1}\int_{v_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) dv < \sqrt{2\pi}\,|\rho|\,\frac{\lambda}{\sigma_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17b)$$

it follows that

$$\int_0^\infty \dot{x}\,\phi\,(x, \dot{x}; T)\,d\dot{x} < \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1}\left(\sqrt{1-\rho^2} + \sqrt{2\pi}\,|\rho|\,\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right] \equiv h_1^*(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Hence, from Eq. 10a

$$Q_x^*(T; -\infty, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\sqrt{1-\rho^2} + \sqrt{2\pi}\,|\rho|\,\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right] d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19a)$$

Because of symmetry of x and $\dot{x}$ with respect to the origin Eq. 13 is valid. Bolotin[5] suggested

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2\right] d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19b)$$

as a measure of safety in the sense that it represents the average number of x(t) crossing λ with positive slope in the interval (0, T]. No attempt was made to relate Eq. 19b to the upper bound of the probability of failure and no numerical examples were presented by Bolotin.[5]

Eq. 19b is a special case of Eq. 19a, with $\rho = 0$ implying that x(t) and $\dot{x}$(t) are independent. This, however, is not usually true for a nonstationary random process x(t).

MASS-SPRING SYSTEM WITH DAMPING

A damped oscillator with the equation of motion

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = m\,f(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

is considered in which m, μ, k and m f(t) are, respectively, the mass, the coefficient of viscous damping, the spring constant, and the external force acting on the mass.

In application to earthquake engineering, a damped mass-spring system may be used as a simplified mechanical model of a one-story building. If x denotes the displacement of the roof of mass, m, relative to the ground, then x is governed by Eq. 20, in which case k and μ are shear stiffness and damping of columns supporting the roof and -f(t) is the horizontal acceleration of the ground motion. Hence, Eq. 20 is not devoid of engineering interest. The failure is assumed to occur when the absolute value of x exceeds a critical value, λ.

347

Under zero initial condition, the solution of Eq. 20 is

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-\beta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_1 (t - \tau) f(\tau) d\tau \quad \ldots\ldots\ldots (21a)$$

in which

$$2 \beta \omega_0 = \frac{\mu}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21b)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21c)$$

and

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (0 < \beta < 1) \quad \ldots\ldots\ldots (21d)$$

Similar to the input function used by Bolotin[5], the nonstationary character of f(t) is assumed to be of the form

$$f(t) = g(t)\, e^{-\alpha\omega_0 t} H(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

in which H(t) is the unit step function and g(t) is a stationary Gaussian random process with

$$< g(t) > = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

and

$$< g(t)\, g(s) > \equiv R(t - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{i\omega(t-s)} d\omega \quad \ldots (24)$$

in which $< g(t) >$ and the autocovariance of g(t), $< g(t)\, g(s) >$, are the ensemble average of g(t) and g(t) g(s) respectively, and $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$ is the power spectrum[9] of g(t).

The type of nonstationarity given in Eq. 22 has not been connected seriously with any physical phenomena; it is assumed herein only for illustrative purposes. Hence, for example, when the statistical characteristics of the ground motion caused by an earthquake become known, as the result of the recent investigations conducted by many researchers in a more reliable manner than at present (1964), then the process with such characteristics should replace Eq. 22 to evaluate the probability of failure of the structure due to

---

9 Solodovnikov, V. V., "Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems," edited by J. B. Thomas and L. A. Zadeh, Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1960, p. 98.

earthquake. However, the present method of finding the upper and lower bounds of the probability evidently remains valid.

Because g(t) and thus, f(t) are Gaussian, x(t) and $\dot{x}(t)$ are also Gaussian, and

$$< f(t) > = e^{-\alpha \omega_0 t} H(t) < g(t) > = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

and

$$< f(t)\, f(s) > = e^{-\alpha \omega_0 (t+s)} H(t) < g(t)\, g(s) >$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha \omega_0 (t+s)} H(t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{i\omega(t-s)}\, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Because $< x(t) > = 0$ from Eqs. 21a and 25, the autocovariance of x(t) is

$$\mu(t, s) = < x(t)\, x(s) >$$

$$= \frac{1}{2\pi \omega_1^2} e^{-\beta \omega_0 (t+s)} \int_0^t \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{q(\omega)\tau + q^*(\omega)\tau'}$$

$$\times \sin \omega_1 (t - \tau) \sin \omega_1 (s - \tau')\, d\tau\, d\tau'\, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27a)$$

in which

$$q(\omega) = -(\alpha - \beta)\, \omega_0 + i\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27b)$$

and $q^*(\omega)$ is the complex conjugate of $q(\omega)$.

Because

$$\sigma_1^2(t) = < x^2(t) > = \mu(t, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28a)$$

$$\sigma_2^2(t) = < \dot{x}^2(t) > = \partial^2 \mu(t, s)/\partial t \partial s \Big]_{t=s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28b)$$

and

$$\sigma_{1\,2}(t) = < x(t)\, \dot{x}(t) > = \partial \mu(t, s)/\partial s \Big]_{s=t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28c)$$

Eq. 27a is first differentiated with respect to t and s, as specified,[10] and then integrated with respect to τ and τ' both from zero to t to produce

[10] Moyal, J. E., "Statistical Processes and Statistical Physics," Journal of the Royal Statistical Society, London, Vol. 11, Series B, 1949, p. 168.

$$\sigma_1^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, I_1(\omega, t)\, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\sigma_2^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \Big[\beta^2 \omega_0^2 I_1(\omega, t) + \omega_1^2 I_2(\omega, t) - 2\beta\omega_0\omega_1 I_3(\omega, t) \Big] d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

and

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \Big[\omega_1 I_3(\omega, t) - \beta\omega_0 I_1'(\omega, t) \Big] d\omega \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

in which

$$I_1(\omega, t) = \frac{1}{|Y(\omega)|^2} \Bigg[\Big\{ e^{-2\alpha\omega_0 t} + e^{-2\beta\omega_0 t} \Big\} 1 + \frac{(\alpha-\beta)^2 \omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t - 2(\alpha-\beta) \frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t \Big\} + e^{-2\beta\omega_0 t} \left(\frac{\sin^2 \omega_1 t}{\omega_1^2} \right) \omega^2 + 2 e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t} \Big\{ (\alpha-\beta) \frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \cos \omega_1 t \Big\} \cos \omega t - 2 e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t} \left(\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right) \omega \sin \omega t \Bigg] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$I_2(\omega, t) = \frac{1}{|Y(\omega)|^2} \Bigg[\frac{(\beta-\alpha)^2 \omega_0^2}{\omega_1^2} e^{-2\alpha\omega_0 t} + e^{-2\beta\omega_0 t} \Big\{ 1 + \frac{(\alpha-\beta)^2 \omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} \cos^2 \omega_1 t$$

$$+ 2(\alpha - \beta)\frac{\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\cos\omega_1 t\Bigg\}$$

$$+ 1 + e^{-2\beta\omega_0 t}\cos^2\omega_1 t\,\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 2e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t}\Bigg\}(\alpha - \beta)\frac{\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t$$

$$+ (\alpha - \beta)^2\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\cos\omega_1 t\Bigg\}\cos\omega t - 2e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t}\left(\frac{\cos\omega_1 t}{\omega_1^2}\right)\omega^2\cos\omega t$$

$$- 2e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right)\omega\sin\omega t\Bigg] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$I_3(\omega, t) = \frac{1}{|Y(\omega)|^2}\Bigg[\frac{\omega_0}{\omega_1}(\beta - \alpha)e^{-2\alpha\omega_0 t} - e^{-2\beta\omega_0 t}\Bigg\{\frac{\omega_0}{\omega_1}(\alpha - \beta)$$

$$- 2(\alpha - \beta)\frac{\omega_0}{\omega_1}\sin^2\omega_1 t - \frac{(\alpha - \beta)^2\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2}\sin\omega_1 t\cos\omega_1 t\Bigg\}$$

$$+ e^{-2\beta\omega_0 t}\left(\frac{\sin\omega_1 t\cos\omega_1 t}{\omega_1^2}\right)\omega^2$$

$$- e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t}\Bigg\{\frac{(\beta - \alpha)^2\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2}\sin\omega_1 t$$

$$- \frac{2\omega_0}{\omega_1}(\alpha - \beta)\cos\omega_1 t\Bigg\}\cos\omega t$$

$$- e^{-(\alpha+\beta)\omega_0 t}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1^2}\right)\omega^2\cos\omega t\Bigg] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

and

$$|Y(\omega)|^2 = \left[(\alpha - \beta)^2\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2\right]^2 + 4(\alpha - \beta)^2\omega_0^2\omega^2 \quad \ldots \quad (35)$$

Eqs. 29, 30, and 31 can be evaluated by contour integration in the complex plane. Then, the upper bound of $P_x(T; -\lambda, \lambda)$ is obtained from Eqs. 13 and 19a in which

$$\rho(t) = \frac{\sigma_{12}(t)}{\sigma_1(t)\,\sigma_2(t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

while, from Eq. 2, a highest lower bound can be found to be

$$P[\,|\,x(t^*)\,| < -\lambda\,|\,\cup\,|\,x(t^*)\,| > \lambda\,|\,] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda/\sigma_1^*}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \quad \ldots \quad (37)$$

in which σ_1^* is the maximum value of $\sigma_1(t)$ $(0 \le t \le T)$ that occurs at $t = t^*$.

If, however, $|\beta - \alpha| \ll 1$, and $\Phi(\omega)$ is a smooth function of ω, then $1/|Y(\omega)|^2$ is sharply peaked at $\omega = \omega_1$ and, as suggested by T. K. Caughey and H. J. Stumpf,[11] Eqs. 29, 30, and 31 can be approximated by Eqs. 38, 39, and 40, respectively

$$\sigma_1^2(t) \simeq \frac{\Phi(\omega_1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\omega, t)\,d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$\sigma_2^2(t) \simeq \frac{\Phi(\omega_1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\beta^2 \omega_0^2 I_1(\omega, t) + \omega_1^2 I_2(\omega, t) - 2\beta\,\omega_0\,\omega_1\,I_3(\omega, t)\right] d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

and

$$\sigma_{12}(t) \simeq \frac{\Phi(\omega_1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\omega_1 I_3(\omega, t) - \beta\,\omega_0 I_1(\omega, t)\right] d\omega \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

which can be shown to become

$$\frac{4\,\omega_0\,\omega_1^2\,\sigma_1^2(t)}{\Phi(\omega_1)} \equiv F_1(t) \simeq \frac{1}{\alpha - \beta}\left[e^{-2\beta\omega_0 t} - e^{-2\alpha\omega_0 t}\right.$$

---

[11] Caughey, T. K., and Stumpf, H. J., "Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation," Transactions, ASME, Vol. 28, No. 4, December, 1961, p. 564.

$$- \zeta^2 \left(e^{-2\beta\omega_0 t} \cos 2\omega_1 t + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\beta\omega_0 t} \sin 2\omega_1 t - e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) \Bigg] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$\frac{4\omega_0 \sigma_2^2(t)}{\Phi(\omega_1)} \equiv F_2(t) \simeq \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(e^{-2\beta\omega_0 t} - e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) - \left(\frac{\beta^2}{2} - 1 \right) \zeta^2 \left(e^{-2\beta\omega_0 t} \cos 2\omega_1 t + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\beta\omega_0 t} \sin 2\omega_1 t - e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) - \frac{2\beta\zeta^2}{\gamma} \left(e^{-2\beta\omega_0 t} \sin 2\omega_1 t - \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\beta\omega_0 t} \cos 2\omega_1 t + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) \right] \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

and

$$\frac{4\omega_1^2 \sigma_{1\,2}(t)}{\Phi(\omega_1)} \equiv F_3(t) \simeq \frac{1}{\alpha - \beta} \left[-\beta \left(e^{-2\beta\omega_0 t} - e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) + \beta\zeta^2 \left(e^{-2\beta\omega_0 t} \cos 2\omega_1 t + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\beta\omega_0 t} \sin 2\omega_1 t - e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) + \gamma\zeta^2 \left(e^{-2\beta\omega_0 t} \sin 2\omega_1 t - \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\beta\omega_0 t} \cos 2\omega_1 t + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} e^{-2\alpha\omega_0 t} \right) \right] \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

Then, Eq. 36 can be written in the form

$$\rho(t) = \frac{\frac{1}{\gamma} F_3(t)}{\left[F_1(t)\, F_2(t) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

in which

$$\gamma = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45a)$$

and

$$\xi^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2 \omega_0^2}{\left\{(\alpha - \beta)^2 \omega_0^2 + \omega_1^2\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45b)$$

Hence, an approximation of the upper bound is obtained from Eqs. 13 and 19a with

$$\sigma_1 = \sigma_1(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46b)$$

and

$$\rho = \frac{\sigma_{1\,2}(t)}{\sigma_1(t)\,\sigma_2(t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46c)$$

given in Eqs. 41, 42, and 44.

In the application, it is particularly important to evaluate the probability $P_X(\infty;|-\lambda, \lambda)$ that the structure will fail at any time. An approximation for the upper bound of $P_X(\infty; -\lambda, \lambda)$ considering Eqs. 13 and 19a is given by

$$2\,Q_X^*(\infty; -\infty, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(\sqrt{1 - \rho^2} + \sqrt{2\pi}\,|\rho|\,\frac{\lambda}{\sigma_1}\right) \exp \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right] dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Usually, Eq. 47 cannot be integrated in a closed form. However, it is not difficult to carry out the integration numerically with the aid of an electronic digital computer. Evidently, in this case, the integral must be shown to be convergent. For $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ and $\sigma_{1\,2}(t)$ given in Eqs. 41, 42, and 43, the convergence is proved in Appendix I.

$F_1(t)$, $F_2(t)$ and $\rho(t)$, respectively, in Eqs. 41, 42, and 44 are computed on an IBM 1620 digital computer and shown in Fig. 1 which indicates that $F_1(t)$ takes a maximum value $F_1^* = 0.53$ at $\omega_0 t = 1.85$.

Let k_0 be a nondimensional measure of position of the barrier λ in terms of the maximum value $\sigma_1^* = \sqrt{F_1^*}$ of the standard deviation $\sigma_1(t)$ of the displacement.

With the aid of the same computer, the upper bounds $2\,Q_X^*(\infty; -\infty, \lambda)$ are computed for $k_0 = 1.0, 2.0, \ldots, 5.0$, by evaluating the integral in Eq. 47 nu-

merically, while the lower bounds are obtained from Eq. 37 in which the lower limit of integration λ / σ_1^* is equal to k_0, insofar as $\lambda = k_0 \sigma_1^*$.

The results are given in Table 1 and also plotted in Fig. 2.

The foregoing result indicates that the present method estimates $P_x(\infty; -\lambda, \lambda)$ within a narrow interval over a sufficiently wide range of the probability values so that the method might be useful in reliability analysis.

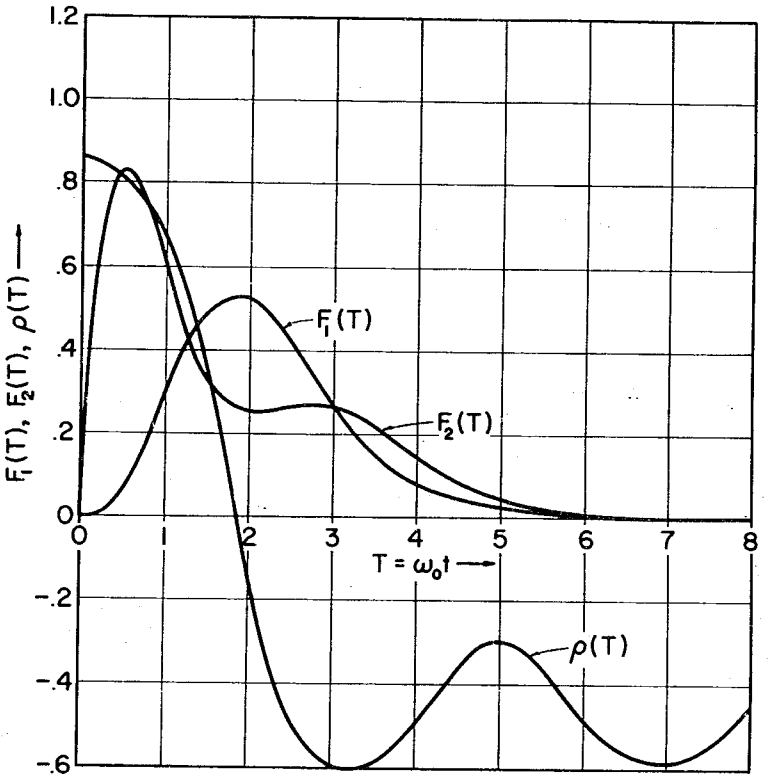


FIG. 1.—NONDIMENSIONAL VARIANCES $F_1(T)$, $F_2(T)$ AND CORRELATION $\rho(T)$ OF DISPLACEMENT AND VELOCITY

According to the multivariate generalization of Chebyshev's inequality[7]

$$P_x(-\infty; -\lambda, \lambda) \leqq \frac{1}{2\lambda^2}\left[\sigma_1^2(0) + \sigma_1^2(\infty)\right] + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \sigma_1(\tau)\,\sigma_2(\tau)\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

The right side of Eq. 48, an upper bound for $P_x(\infty; -\lambda, \lambda)$, is evaluated for k_0 equal to 1.0, 2.0, ..., 5.0. The result is listed also in Table 1, indica-

TABLE 1.—UPPER AND LOWER BOUNDS

k_0 (1)	Upper Bound (Present Method) (2)	Upper Bound (Chebyshev Inequality) (3)	Lower Bound (4)
1.0	1.25	2.08	3.16×10^{-1}
2.0	1.78×10^{-1}	5.20×10^{-1}	4.55×10^{-2}
3.0	1.26×10^{-2}	2.31×10^{-1}	2.70×10^{-3}
4.0	3.55×10^{-4}	1.30×10^{-1}	6.70×10^{-5}
5.0	3.98×10^{-6}	8.32×10^{-2}	5.97×10^{-7}

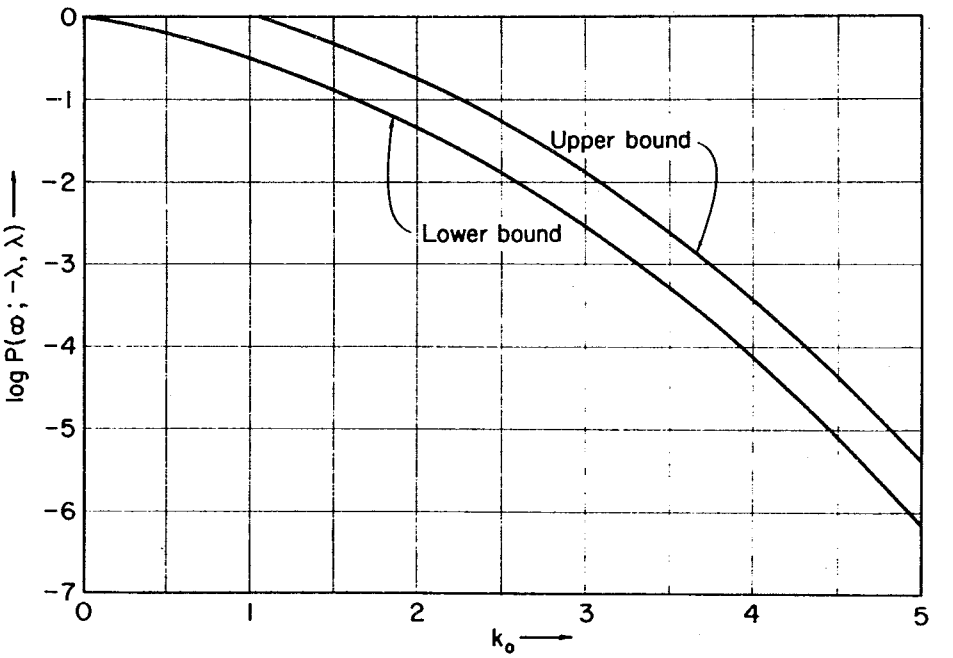


FIG. 2.—UPPER BOUND AND LOWER BOUND OF $P_X(\infty; -\lambda, \lambda)$ AS A FUNCTION OF k_0

ting that the upper bounds based on Chebyshev's inequality are much larger than those by the present method, especially for larger values of k_0 which seems to be particularly important in design.

CONCLUSIONS

1. The foregoing evaluation on the displacement x(t) of a damped oscillator subject to a random input f(t) is valid, in the sense of mean-square calculus.[10]

The function g(t) in Eq. 22 is assumed to be mean-square continuous and to possess a finite autocovariance $< g(t)\, g(s) >$ which is continuous on t = s.

Hence, from Eq. 26, $< f(t)\, f(s) >$ is finite and f(t) is mean-square continuous.

Therefore, x(t) is differentiable twice, and its second derivative is continuous in mean square.[12]

2. Normality is assumed for the input f(t) to make the analysis manageable. In applications of the present method to the case when the normality is in doubt, such as ground motion as a result of earthquake,[13] caution should be exercised in interpreting the result.

3. Eqs. 41, 42, and 43 are easily obtained from the autocovariance of x(t) (Eq. 27a) when $\Phi(\omega)$ is replaced by $\Phi(\omega_1)$ = constant, since then Eq. 27a becomes, for $t > s > 0$,

$$u(t,s) \sim -\frac{\Phi(\omega_1)}{2\pi\omega_1^2} e^{-\beta\omega_o(t+s)} \int_0^s e^{-2(\alpha-\beta)\omega_o\tau} \sin\omega_1(t-\tau)\sin\omega_1(s-\tau)\,d\tau \ldots \quad (49)$$

because

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)}\,d\omega = 2\pi\,\delta(t-s) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

in which $\delta(t)$ is Dirac's delta function. This is equivalent to approximating $R(t-s)$ by $\Phi(\omega_1)\,\delta(t-s)$ (autocovariance associated with white noise). It should again be pointed out, however, that this approximation is based on mathematical arguments, as mentioned previously, and that the use of this approximation in the form of the autocovariance is not essential to the analysis. If $\Phi(\omega)$ is not a smooth function of ω and $|\alpha - \beta|$ is not small as compared to unity, Eqs. 29, 30, and 31 are to be evaluated either by means of contour integration, which is usually quite lengthy, or by direct numerical integration.

4. When $\alpha = \beta$, Eqs. 41, 42, and 43 are not valid. In this case, however, the integrand in Eq. 47 is simplified and hence, the expressions for $\sigma_1^2(t)$, $\sigma_2^2(t)$ and $\sigma_{12}(t)$ will become simpler than those of Eqs. 41, 42, and 43.

---

[12] Bogdanoff, J. L., and Goldberg, J. E., "On the Bernoulli-Euler Beam Theory with Random Excitation," Journal of Aero/Space Science, May, 1960, pp. 371-376.

[13] Bogdanoff, J. L., and Goldberg, J. E., discussion of "Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation," by T. K. Caughey and H. J. Stumpf, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 29, No. 3, September, 1962, p. 594.

5. The form of the input function given in Eq. 22 is not essential to the analysis. For example, the present method can also be applied to the case in which the input function is of the form

$$f(t) = g(t)\left[H(t) - H\left(t - t_0\right)\right] \quad \left(t_0 > 0\right) \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

which might be more meaningful when aircraft and spacecraft structures are dealt with, because Eq. 51 could represent approximately severe stationary atmospheric turbulences for a relatively short period of t_0.

6. To be more realistic in applications, σ in Eq. 22 and t_0 in Eq. 51 should be considered as random variables. However, it will usually make the processes non-Gaussian and consequently the analysis will become unmanageable.

7. In addition to the mode of failure considered in the foregoing evaluation, which is essentially an ultimate load failure, structures are also subject to fatigue failure (or dynamic creep failure when high temperature is involved). Therefore, the simultaneous occurrence of these two modes of failure should be considered to evaluate the probability of failure of structures under random excitation, especially when the safety of aircraft and spacecraft is considered. Little work has been done in this direction except an attempt to combine these modes of failure by A. M. Freudenthal and M. Shinozuka,[14] although several authors considered fatigue failure under random loading.[15, 16, 17, 18]

8. It seems possible to prove Eqs. 7 and 8 following H. Cramér.[19] There is also an interesting inequality derived by D. Slepian[20] which states that for two separable[21] standardized stationary Gaussian processes x(t) and y(t) with correlation function $\rho_x(t)$ and $\rho_y(t)$, $P_x(T; 0, \infty) < P_y(T; 0, \infty)$ if $\rho_x(t) > \rho_y(t)$. This makes it possible to find upper and lower bounds for $P_x(T; 0, \infty)$ from any simple process z(t) for which $P_z(T; 0, \infty)$ is known. Some of the applications are examined by G. F. Newell and M. Rosenblatt.[22] In the investigation herein, the input is assumed to subside as in Eqs. 22 and 51, assumedly corresponding to earthquake and atmospheric turbulences, respectively. However, if the input neither decays nor vanishes reasonably fast, the present

---

14 Freudenthal, A. M., and Shinozuka, M., "Structural Safety Under Conditions of Ultimate Load Failure and Fatigue," WADD Technical Report 61-177, October, 1961.

15 Powell, A., "On the Fatigue Failure of Structures Due to Vibrations Excited by Random Pressure Fields," Journal of Acoustical Society of America, Vol. 30, No. 12, New York, N. Y., December, 1958, pp. 1130-1135.

16 Miles, J. W., "On Structural Fatigue Under Random Loading," Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 21, 1954, p. 753.

17 Crandall, S. H., Mark, W. D., and Khabbaz, G. R., "The Variance in Palmgren-Miner Damage Due to Random Vibration," Proceedings, 4th U. S. Natl. Congress of Applied Mechanics, Univ. of California, Berkeley, Calif., June 18-25, 1962, p. 119.

18 Freudenthal, A. M., and Heller, R. A., "On Stress Interaction in Fatigue and a Cumulative Damage Rule," Journal of Aero/Space Sciences, Vol. 26, No. 7, New York, N. Y., 1959, p. 431.

19 Cramér, H., "On the Maximum of a Normal Stationary Stochastic Process," Bulletin of American Mathematical Society, Providence, R. I., September, 1962, p. 515.

20 Slepian, D., "The One-Sided Barrier Problem for Gaussian Noise," Bell System Technical Journal, New York, N. Y., March, 1962, pp. 463-501.

21 Doob, J. L., "Stochastic Processes," John Wiley and Sons, Inc., New York, N. Y., 1960, p. 51.

22 Newell, G. F., and Rosenblatt, M., "Zero Crossing Probabilities for Gaussian Stationary Processes," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 33, No. 4, December, 1962, pp. 1306-1313.

method possibly produces an upper bound larger than unity, which is a trivial result. For this reason, investigation is suggested to extend the works by Slepian,[20] and by G. F. Newell, and M. Rosenblatt[22] to find a better upper bound for $P_X(T; -\infty, \lambda)$ with a nonstationary random process x(t).

9. With the aid of an electronic digital computer, it seems feasible to advance the present method to deal with structures of multi-degree of freedom without much difficulty.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was done under the auspices of the Institute for the Study of Fatigue and Reliability supported by the Office of Naval Research, Air Force Materials Laboratory and Advanced Research Projects Agency, under contract Nonr 266 (91).

APPENDIX I.--PROOF OF CONVERGENCE OF EQ. 47

As $t \to 0$ or ∞, $\sigma_1(t) \to 0$, $\sigma_2(t) \to 0$, $\sigma_{12}(t) \to 0$ and $h(t) \to 0$. The function $h^*(t)$ is positive and finite for $t > 0$. The function $\rho(t)$ approaches $\sqrt{3/2} = 0.8660$ as $t \to 0$.

In Eq. 47

$$\frac{1}{\pi}\int_A^\infty \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\sqrt{1-\rho^2}+\sqrt{2\pi}\,|\rho|\,\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right]dt < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_A^\infty\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}+\frac{\lambda^2}{\sigma_1^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right]dt < 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_A^\infty \frac{\lambda^2}{2\sigma_1^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right]dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

in which a positive constant A is so large that $\sigma_2(t)/\lambda < 1$ and $\lambda/\sigma_1(t) > 1$ as long as $t \geq A$.

The last integration can be written in the form

$$I = \int_A^\infty \eta(t)\, e^{-\eta(t)}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

in which

$$\eta\ (t) = \frac{\lambda^2}{2\,\sigma_1^2\,(t)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

With the aid of Eq. 41, let $\eta\ (t)$ be written in the form

$$\eta\ (t) = \frac{\eta_0\, e^{2\beta\,\omega_0\,t}}{\left\{1 - \zeta \sin\left(2\,\omega_1 t + \psi\right) - \left(1 - \zeta^2\right) e^{-2\,(\alpha\,-\beta)\,\omega_0\,t}\right\}} \quad \ldots \quad (55)$$

when $\alpha > \beta$ and

$$\eta\ (t) = \frac{\eta_0\, e^{2\,\alpha\,\omega_0\,t}}{\left[1 - \zeta^2 - e^{-2(\beta\,-\alpha)\,\omega_0\,t}\left\{1 - \zeta \sin\left(2\,\omega_1 t + \psi\right)\right\}\right]} \quad \ldots \quad (56)$$

when $\beta > \alpha$ in which

$$\eta_0 = \frac{2\,\lambda^2\,\omega_0\,\omega_1^2\,|\,\alpha - \beta\,|}{\Phi(\omega_1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57a)$$

$$\frac{(\alpha - \beta)\,\omega_0}{\omega_1} = \tan\,\psi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57b)$$

and

$$\zeta = \frac{|\,\alpha - \beta\,|\,\omega_0}{\left\{(\alpha - \beta)^2\,\omega_0^2 + \omega_1^2\right\}^{1/2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57c)$$

If $\alpha > \beta$, it can be shown that

$$1 - \zeta \sin\left(2\,\omega_1 t + \psi\right) - \left(1 - \zeta^2\right) e^{-2(\alpha\,-\beta)\,\omega_0\,t} > \frac{1}{2}\,(1 - \zeta) \quad \ldots \quad (58)$$

as long as

$$A > A_1 = \frac{[\ell n\,2\,(1 + \zeta)]}{2\,(\alpha - \beta)\,\omega_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59a)$$

so that

$$e^{-2(\alpha-\beta)\omega_0 t} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(59b)}$$

and

$$1+\zeta > 1 - \zeta \sin\left(2\omega_1 t + \psi\right) - \left(1-\zeta^2\right) e^{-2(\alpha-\beta)\omega_0 t} \quad \ldots\ldots \text{(59c)}$$

Similarly, if $\beta > \alpha$, it can be shown that

$$1 - \zeta^2 - e^{-2(\beta-\alpha)\omega_0 t}\left\{1 - \zeta \sin\left(2\omega_1 t + \psi\right)\right\} > \frac{1}{2}(1-\zeta) \ldots \text{(60a)}$$

as long as

$$A > A_2 = \frac{\left[\dfrac{\ell n(1+\zeta)}{(1-\zeta)\left(\frac{1}{2}+\zeta\right)}\right]}{2(\beta-\alpha)\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(60b)}$$

so that

$$e^{-2(\beta-\alpha)\omega_0 t} < \frac{(1-\zeta)\left(\frac{1}{2}+\zeta\right)}{(1+\zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(60c)}$$

and

$$1+\zeta > 1 - \zeta^2 - e^{-2(\beta-\alpha)\omega_0 t}\left\{1 - \zeta \sin\left(2\omega_1 t + \psi\right)\right\} \ldots \text{(60d)}$$

Hence, if $\alpha > \beta$

$$\eta_0' e^{2\beta\omega_0 t} < \eta(t) < \eta_0'' e^{2\beta\omega_0 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(61)}$$

as long as $A > A_1$, and if $\beta > \alpha$

$$\eta_0' e^{2\alpha\omega_0 t} < \eta(t) < \eta_0'' e^{2\alpha\omega_0 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(62)}$$

as long as $A > A_2$ in which

$$\eta_0' = \frac{\eta_0}{(1+\zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(63a)}$$

343

and

$$\eta_0'' = \frac{2\eta_0}{(1 - \zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63b)$$

Hence, if $\alpha > \beta$ and $A > A_1$,

$$I < \int_A^\infty \eta_0'' \, e^{2\alpha\omega_0 t} \, e^{-\eta_0' e^{2\alpha\omega_0 t}} \, dt = \frac{\eta_0''}{2\alpha\omega_0} \int_{A^*}^\infty e^{-\eta_0' u} \, du$$

$$= \frac{\eta_0''}{2\alpha\omega_0\eta_0'} \, e^{-\eta_0' A^*} = \text{finite} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64a)$$

in which

$$A^* = e^{2\alpha\omega_0 A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64b)$$

Similarly, if $\beta > \alpha$ and $A > A_2$,

$$I < \frac{\eta_0''}{2\beta\omega_0\eta_0'} \, e^{-\eta_0' A^*} = \text{finite} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65a)$$

in which

$$A^* = e^{2\beta\omega_0 A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65b)$$

From Eqs. 52, 53, 64a, and 65a, it can be concluded that the integration in Eq. 47 is convergent.

APPENDIX II.--NOTATION

The following symbols have been adopted for use in this paper:

A, A_1, A_2 = large constants (Appendix I);

$F_1(t)$ = $4\omega_0\omega_1^2\sigma_1^2(t)/\Phi(\omega_1)$, nondimensional variance of $x(t)$;

$F_2(t)$ = $4\omega_0\sigma_2^2(t)/\Phi(\omega_1)$, nondimensional variance of $\dot{x}(t)$;

$F_3(t)$ = $4\omega_1^2 \sigma_{1\,2}(t)/\Phi(\omega_1)$, nondimensional convariance of $x(t)$ and $\dot{x}(t)$;

F_1^* = maximum value of $F_1(t)$ in $(0, T]$;

$f(t)$ = input applied to damped oscillator;

$g(t)$ = stationary Gaussian random process;

$H(t)$ = unit step function;

$h_1^*(T)$, $h_2^*(T)$ = upper bounds for $dP_x(T; -\infty, \lambda)/dT$ and $dP_x(T; -\lambda, \infty)/dT$;

k = spring constant;

k_0 = nondimensional measure of position of barrier λ in terms of standard deviation of displacement;

$L_x(T; -\lambda_1, \lambda_2)$ = probability that $x(t)$ will be confined within barriers at $-\lambda_1$ and λ_2 in time interval $(0, T]$ under zero initial condition;

m = mass;

$P\{A\}$ = probability of event A;

$P_x(T; -\lambda_1, \lambda_2)$ = probability that $x(t)$ will cross at least one of barriers at $-\lambda_1$ and λ_2 in time interval $(0, T]$ under zero initial condition;

$R(t - s)$ = autocovariance function of stationary Gaussian random process $g(t)$;

T = time representing upper bound of interval $(0, T]$;

t = variable time;

t^* = time at which $\sigma_1(t)$ reaches maximum σ_1^*;

t_0 = duration of input function (Eq. 49);

$x = x(t)$ = random function of time or displacement of damped oscillator;

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ = $d\dot{x}(t)/dt$;

α = constant showing how rapidly input function decays (Eq. 22);

β = constant such that $\omega_1 = \omega_0(1 - \beta^2)^{1/2}$;

γ = ω_1/ω_0;

$\delta(t)$ = Dirac's delta function;

ζ^2 = $(\alpha - \beta)^2 \omega_0^2 \{(\alpha - \beta)^2 \omega_0^2 + \omega_1^2\}$;

$\eta(t)$ = $\lambda^2 / 2\sigma_1^2(t)$ (Appendix I);

η_0 = $2\lambda^2 \omega_0 \omega_1^2 \mid \alpha - \beta \mid / \Phi(\omega_1)$ (Appendix I);

η_0', η_0'' = lower and upper bound for $\eta(t)\, e^{-2\beta\omega_0 t}$ (Appendix I);

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ = positive constants denoting critical stresses or displacements;

μ = coefficient of viscous damping;

$\mu(t, s)$ = autocovariance of $x(t)$;

$\rho(t)$ = $\sigma_{12} / \{\sigma_1(t)\, \sigma_2(t)\}^{1/2}$, correlation function of $x(t)$ and $\dot{x}(t)$;

σ_1^* = maximum value of $\sigma_1(t)$ in $(0, T]$;

$-\sigma_c, \sigma_t$ = ultimate strength in compression and in tension;

$\sigma_1^2(t), \sigma_2^2(t)$ = variance of $x(t)$ and $\dot{x}(t)$;

$\sigma_{12}(t)$ = covariance of $x(t)$ and $\dot{x}(t)$;

τ = dummy time variable;

$\tau_1; \tau_2$ = time in interval $(0, T]$;

$\Phi(\omega)$ = power spectra of stationary process $g(t)$;

$\phi(x, \dot{x}; T)$ = joint density function of $x(T)$ and $\dot{x}(T)$;

ψ = $\tan^{-1}(\alpha - \beta)\, \omega_0 / \omega_1$;

ω = Fourier transform parameter relating $R(t - s)$ and $\Phi(\omega)$ (Eq. 24);

ω_0 = undamped natural circular frequency;

ω_1 = damped natural circular frequency;

$\{A\} \subset \{B\}$ states event A belongs to event B;

$\{A \cup B\}$ denotes union of two events A and B;

$\{A, B\}$ denotes joint occurrence of A and B; and

$< >$ denotes ensemble average.

研究論文（5）　　U. D. C. 539.43　620.178.3

プログラム荷重による疲労寿命の評価*

Evaluation of Fatigue Life under Programmed Fluctuating Loading

青山　咸恒[1]　伊藤　三史[2]
SHIGETSUNE AOYAMA　MITSUFUMI ITO

調質した SCM 4 の平滑および切欠試験片を用い，二段多重重複荷重，正弦波状変動荷重によるプログラム疲れ試験時の寿命を調査した．プログラム中の荷重振幅はすべて，定荷重疲れ試験における耐久限度以上，破断までの荷重変動サイクル数は 3～6 である．この種の変動荷重下の寿命は，寿命の分散幅を考慮すれば，近似的に定荷重下の寿命から，マイナー則によつて評価しうる．

Plain and notched specimens of quenched and tempered Cr-Mo steel (SCM4) were tested under programmed loadings of repeated block fluctuating- or repeated sinusoidally fluctuating stress amplitude. The levels of stress amplitude in programmed tests were kept above the endurance limit of constant stress amplitude fatigue tests. Number of cycles of fluctuating stress amplitude attained to three to six before the specimen was fractured.

Fatigue lives under fluctuating loading were converted to the lives under constant loading of fundamental stress amplitude on Miner's hypothesis. It was shown by the present experiment that the converted fatigue life of programmed tests came nearly equal to that of constant load test in consideration of the spread of fatigue life distribution.

1. まえがき

変動荷重下の疲れ寿命を，疲れ試験としてもつとも簡便な定荷重試験の結果から，評価しようとする試みは，多数の研究者によつて行なわれ，種々の仮説が提案されている．[1][2][3][4]

しかし，疲れ寿命は，一般に，同一条件で試料を整え，同じ条件で試験しても，かなり大きな分散を示す．したがつて，この種の評価は疲れ寿命の分散を考慮したうえで行なう必要がある．われわれは，SCM4 焼入れ焼もどし材の平滑および切欠試験片を用い，定荷重疲れ試験における疲れ耐久限度以上の荷重水準で，二段多重重複繰返し荷重による両振引張り圧縮試験，および正弦波状繰返し変動荷重による回転曲げ試験を行なつた．いずれのばあいも，破壊までのプログラムサイクル数は 3～6 回で，試験は荷重増加からはじめた．各試験片については，あらかじめ，上記のプログラム荷重試験と比較しうる形で，定荷重疲れ試験を行なつた．プログラム荷重下の寿命は，直線被害則により基本荷重の寿命に換算し，定荷重下の寿命と比較した．

2. 供試材および試験片

引張り，圧縮，疲れ試験には 25ϕ 圧延材，また，回転曲げ疲れ試験には 19ϕ 圧延材(15ϕ に展伸)を用いた．いずれも試験片一本取りの長さに切断して，850°C $^1/_2$時間保持後油中焼入れ，600°C 2時間保持後油冷の熱処理を行ない，その後図1に示す各形状の試験片に加工した．表1には，供試材の化学成分および JIS 4 号試験片による熱処理後の機械的性質を示す．

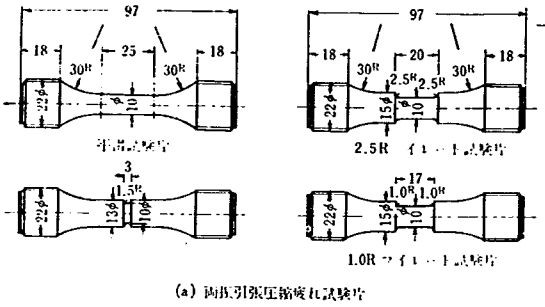
3. 試験方法

3.1. 両振引張り圧縮疲れ試験

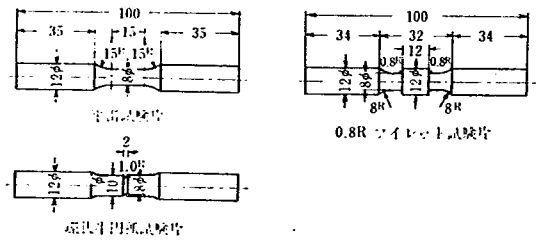
試験には 10t アムスラパイプロフォアを用い，二段多重重複繰返し荷重のばあいにはプログラム試験装置を用いた．まず，各形状の試験片につき，定荷重疲れ試験

* 昭和43年7月29日受理．昭和43年5月14日自動車技術会春季学術講演会において発表．
1)・2)．(株)豊田中央研究所（名古屋市昭和区久方 2—12）

367



(a) 両振引張圧縮疲れ試験片



b) 回転曲げ疲れ試験片

図1 疲れ試験片の形状寸法

を行なつて概略のS—N関係を求め，つぎに，耐久限度の1.2倍の荷重段階およびその ±3 kg/mm² の荷重段階で，それぞれ，7～9本の試験片による試験を反復した．二段多重重複繰返し荷重による試験では，荷重振幅を図2a）に示すように，基本荷重（耐久限度の1.2倍）の ±3 kg/mm² に相当する二段階に低荷重側から交互に変化させる．1プログラムサイクル中の繰返し数は 5×10^4 で，低荷重および高荷重段階の繰返し数はそれぞれ 4×10^4，10^4 である．破壊までのプログラムサイクル数は4～5回であつた．試験は7～9本の試験片について行なう．定荷重，プログラム荷重，いずれのばあいにも，応力繰返し速度は 143～152 Hz で，荷重振幅がはじめに設定した値より約 100 kg だけ減衰したとき試験機を停止させ，そのときの繰返し数を破断繰返し数とした．

3.2. 回転曲げ疲れ試験

試験には小野式回転曲げ疲れ試験機（3,300rpm）を用い，正弦波状繰り返えし変動荷重は，自製のプログラム試験装置で加えた．まず，各形状試験片の定荷重疲れ試験を行なつて概略のS—N関係を求め，つぎに，3～4段階の基本荷重を設定し，各段階ごとに4～5本の試験片による試験を反復した．正弦波状繰返し変動荷重による試験では，荷重振幅を図2b）に示すように，定荷重試験と同じ基本荷重を中心として ±10 kg/mm² の範囲で，正弦波状に変動させた．荷重変動は荷重増加からはじめ，破壊までのプログラムサイクル数は3～6回を予定した．用いた試験片の数は各荷重段階ごとに4～5本である．

4. 試 験 結 果

4.1. 両振引張り圧縮試験

定荷重疲れ試験結果の一例を図3a）に示す．S—N関係線は直線で近似し，すべての実験点をみこんで引いた．

同様の方法で求め描いた，各試験片の定荷重疲れ試験におけるS—N線図を，まとめて図3b）に示す．各荷重段階ごとに7～9本の試験片で行なつた定荷重疲れ試

表1 化学成分および機械的性質

a) 引張り圧縮疲れ試験用供試材

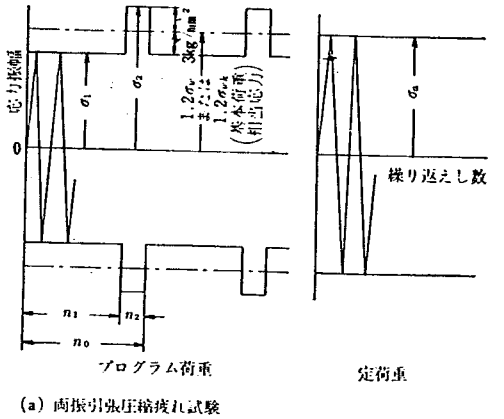
化学成分 (%)	C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Cu	Ni
	0.40	0.31	0.70	0.013	0.014	0.95	0.20	(0.21)	(0.17)

機械的性質	σ_S (kg/mm²)	σ_B (kg/mm²)	σ_T (kg/mm²)	ψ (%)	η (%)	硬さ Hv
	95.3	103.8	171.8	21.8	59.0	320

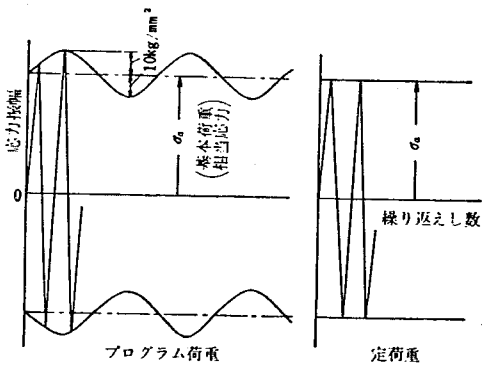
b) 回転曲げ疲れ試験用供試材

化学成分 (%)	C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Cu	Ni
	0.38	0.24	0.75	0.011	0.009	1.10	0.29	(0.21)	(0.09)

機械的性質	σ_S (kg/mm²)	σ_B (kg/mm²)	σ_T (kg/mm²)	ψ (%)	η (%)	硬さ Hv
	105.1	113.9	180.1	15.5	58.2	347



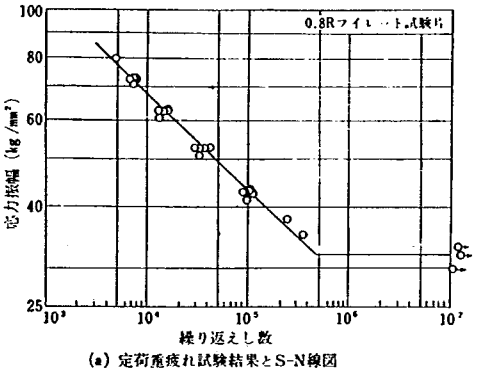
(a) 両振引張圧縮疲れ試験



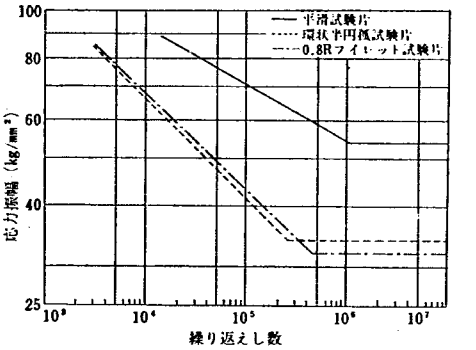
(b) 回転曲げ疲れ試験

図2 プログラム荷重および定荷重における応力状態

験結果から各試験片の非破壊確率[5]を求め，寿命との関係を対数正規確率紙上にプロットすると，ほぼ直線的な関係がえられる．図4には一例として耐久限度の 1.2



(a) 定荷重疲れ試験結果とS-N線図



(b) 各種形状試験片のS-N線図応力振幅(kg/mm²)

図3 両振引張り，圧縮，試験のS—N線図

倍の荷重段階での結果を示した．

二段多重重複繰返し荷重試験による寿命は，図3のS—N線図を用い，マイナー則によつて基本荷重の寿命に換算した．各試験片の非破壊確率と換算寿命の関係を対数正規確率紙上にプロットすると図5のようになる．

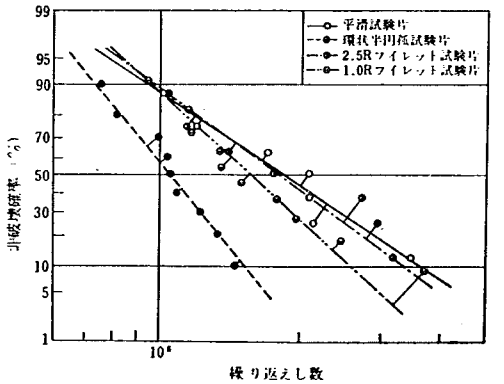


図4 定荷重疲れ試験結果の寿命の分散
($1.2\sigma_w$ または $1.2\sigma_{wk}$ のばあい)

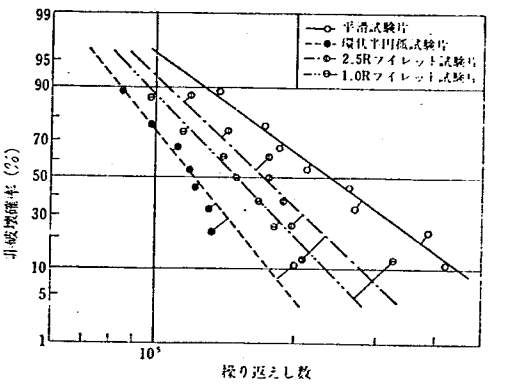


図5 二段多重重複繰り返し荷重試験の寿命の分散
($1.2\sigma_w$ または $1.2\sigma_{wk}$ の寿命に換算)

表 2　定荷重試験とプログラム荷重試験の寿命の分散

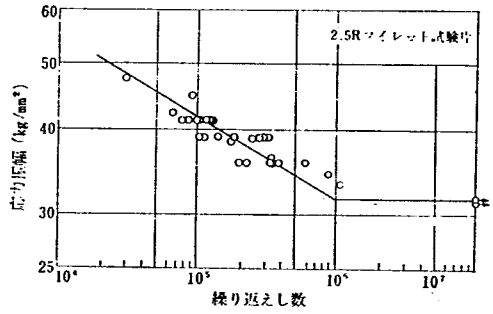
試験片の形状	定荷重試験		プログラム荷重試験	
	N_{90}/N_{50}	N_{10}/N_{50}	N_{90}/N_{50}	N_{10}/N_{50}
平滑試験片	0.51	1.96	0.53	1.87
環状半円弧試験片	0.71	1.46	0.70	1.46
2.5R フイレット試験片	0.54	1.86	0.62	1.61
1.0R フイレット試験片	0.60	1.63	0.65	1.56

表 3　プログラム荷重試験と定荷重試験の平均寿命の関係

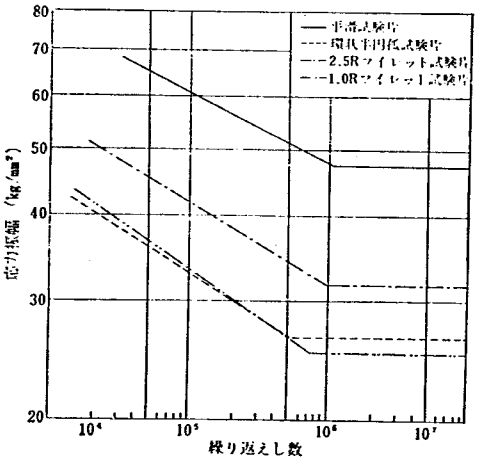
試験片の形状	プログラム荷重試験の基本荷重における平均寿命(N_{50}に相当) Np	定荷重の S-N 線図から求めた基本荷重における平均寿命 Nc	Np/Nc
平滑試験片	2.39×10^5	2.00×10^5	1.19
環状半円弧試験片	1.22×10^5	1.29×10^5	0.95
2.5R フイレット試験片	1.71×10^5	1.80×10^5	0.95
1.0R フイレット試験片	1.50×10^5	1.72×10^5	0.87

疲れ寿命は，このばあいも，ほぼ対数正規分布をなすことが認められる．図4，図5から非破壊確率50%の寿命(平均寿命)に対する非破壊確率90%および10%の寿命の比を求め，基本荷重段階について定荷重試験とプログラム荷重試験の寿命の分散幅を比較すると表2のようになる．寿命の分散幅は2.5R フイレット試験片を除き，両者ほぼ同ていどである．2.5R フイレット試験片の定荷重の寿命の分散がやや大きいのは，この試験片の，硬さのばらつきがやや大きかったことに対応する．

表3はプログラム荷重試験および定荷重試験の平均寿命を比較したものである．プログラム荷重試験のマイナー則による換算寿命（平均値）と定荷重試験の平均寿命との差は寿命の分散幅に比しかなり小さい．



(a)定荷重疲れ試験結果とS-N線図

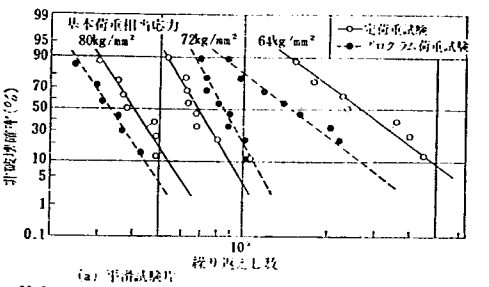


(b)各種形状試験片のS-N線図

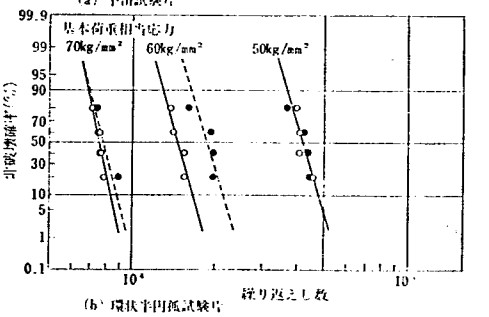
図6　回転曲げ試験の S—N 線図

4.2.　回転曲げ試験

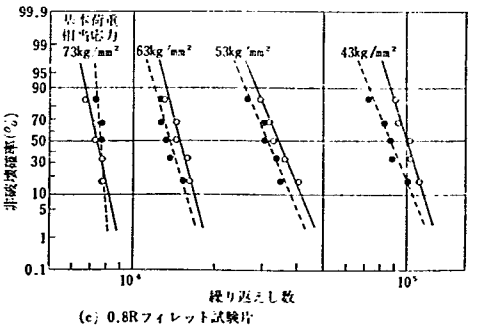
定荷重疲れ試験結果の一例を図6 a) に示す．S—N 線



(a) 平滑試験片



(b) 環状半円弧試験片



(c) 0.8R フィレット試験片

図7　定荷重試験および正弦波状繰り返し変動荷重試験の寿命の分散

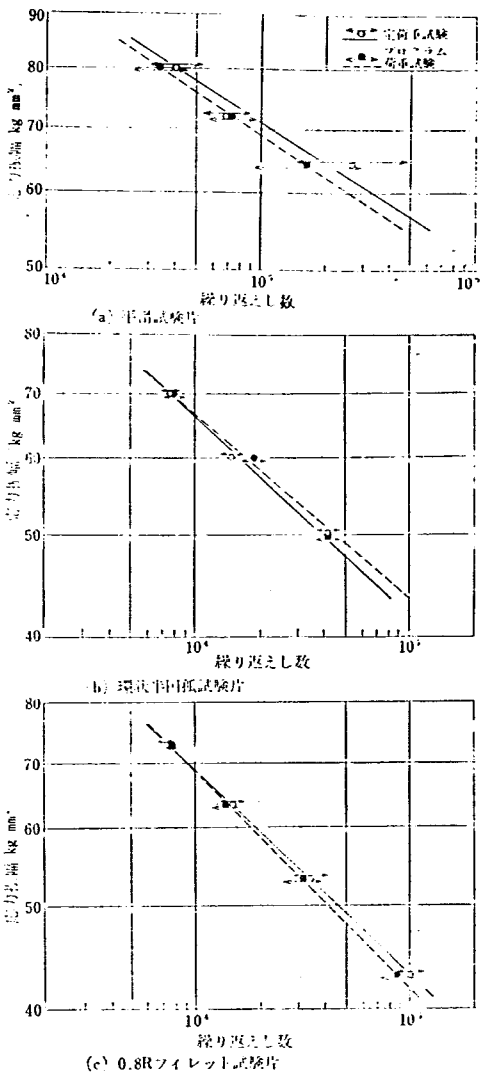


図8　定荷重試験とプログラム荷重試験の寿命の分散と時間強度線

図の求め方は前項のばあいと同様である．各試験片の定荷重疲れ試験におけるS—N線図を，まとめて図6 b)に示す．正弦波状繰返し変動荷重試験の寿命は，図6のS—N線図とマイナー則により，基本荷重の寿命に換算した．

各基本荷重に対し，定荷重試験およびプログラム荷重試験における各試験片の非破壊確率を求め，非破壊確率と寿命（プログラム荷重試験では換算寿命）との関係を対数正規確率紙上に整理すると，図7のようにほぼ直線的な関係がえられた．

図7から各基本荷重につき，非破壊確率90%および10%に相当する疲れ寿命の幅を求め，非破壊確率50%に相当する平均寿命とあわせてS—N線図上に図示すると図8のようになる．

図から，各基本荷重に対する寿命の分散幅は，プログラム荷重試験と定荷重試験とで，ほぼ同ていどであることが認められる．また，各平均寿命に対して引いた両者の時間強度線は，高荷重側ではほぼ一致し，低荷重側では若干差があるが，その差は寿命の分散幅に比し比較的小さいことが認められた．

5. むすび

われわれは，破壊までのプログラムサイクル数を複数とすること．プログラムに含まれる荷重振幅の水準を定荷重試験の耐久限度以上とすること．の二つの条件下でプログラム荷重試験と定荷重試験を行ない，疲労寿命を比較した．

その結果，つぎのことが明らかになつた．

(1) 疲れ寿命は，プログラム荷重試験，定荷重試験を通じ，おおむね対数正規分布をなす．その分散幅を平均寿命に対する非破壊確率90%および10%の寿命の比の範囲で表わすと，平滑試験片では0.5～2.0ていど，かなり鋭い切欠試験片でも0.7～1.4ていどとなる．

(2) プログラム荷重試験の寿命を定荷重試験によるS—N線図とマイナー則によつて基本荷重の寿命に換算すると，換算寿命の平均値は定荷重試験における平均寿命の0.8～1.2の範囲内に収まつた．

(3) したがつて，今回設定したような条件を満足するばあいの変動荷重下の寿命は，第一近似としてマイナー則で評価してもよいと思われる．

参考文献

(1) 実働応力と疲労文献集，Vol. 1—3，1957-6（自動車技術会・東京）
(2) M. A. Miner: Cumulative Damage in Fatigue, Journal of Applied Mechanics, Vol. 1 2, No3 1945-9) P.A-159.
(3) H. T. Corten, and T. J. Dolan: Cumulative Fatigue Damage, International Conference on Fatigue of Metals, (1956-9) P.235～246.
(4) F. R. Shanley: A Theory of Fatigue based on Unbonding during Reversed slip, P—350, 1952 (The Rand Corporation—California) P. 1～89.
(5) 横堀武夫：材料強度学，5・34年（技報堂・東京）P.261.

Journal of the
ENGINEERING MECHANICS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

LIFE EXPECTANCY OF HIGHWAY BRIDGES TO VEHICLE LOADS[a]

By Chi Chao Tung,[1] A. M. ASCE

INTRODUCTION

Recently much effort has been made to measure the stress history of response of bridges under controlled and actual traffic conditions (1,4,9,10,11).[2] Data of traffic counts, truck weight and types (1,4,9,10,11) are also being collected. The main purpose of conducting these field tests is to predict fatigue life of highway bridges under vehicle loads (1,11).

In this study a probabilistic model is used for traffic flow conditions taking into account the presently available data of truck weight and types. A mathematical model is established for the response of bridges under the modeled traffic and relevant statistical response quantities are obtained. These response quantities are applied to a particular bridge for the prediction of life of the bridge with respect to established fatigue strength properties.

IDEALIZATION

Present design practice ensures that bridges behave in a linear manner under normal traffic conditions and because of the presence of damping, bridges may be idealized as linear damped systems. Vehicles are considered to be of different type and weight but travel at the same constant speed. Let the response of bridge at time t resulting from the passage of a single vehicle which arrives at time τ_i be denoted by $W_i(t - \tau_i)$ in which $W_i(t) = 0; t < 0$. The response $Y(t)$ of bridge at time t due to the passage of all vehicles arriving at times τ_i, $i = -\infty, \ldots, 0, \ldots$ is therefore given by

Note.—Discussion open until May 1, 1970. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, No. EM6, December, 1969. Manuscript was submitted for review for possible publication on March 6, 1969.

[a] Presented at the April 14-18, 1969, ASCE Annual Meeting and National Meeting on Structural Engineering held at Louisville, Ky.

[1] Assoc. Prof. of Civ. Engrg., North Carolina State Univ. at Raleigh, Raleigh, N.C.

[2] Numerals in parentheses refer to corresponding items in Appendix I.—References.

$$Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_i(t - \tau_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

in which $W_i(t)$ = a random function, because, for a given value of its argument, $W_i(t)$ = a function of the random variables that characterize the type and weight of the vehicle population. Let $W_i(t)$, $i = -\infty, \ldots, 0, \ldots$ be identically distributed as the random function $W(t)$. It is also assumed that successive vehicle type and weight are independent of each other. Thus the response of the bridge due to the passage of each vehicle is independent of those due to other vehicles, i.e., $W_i(t)$, $i = -\infty, \ldots, 0, \ldots$ are independent of each other.

Several models have been suggested to describe various traffic conditions (2). When traffic is relatively light, the Poisson process was found to describe the traffic condition satisfactorily, i.e., if the number of vehicle arrivals in a given time interval $(0, t)$ is a Poisson process $N(t)$, then the probability that n vehicles arrive in time interval $(0, t)$ is given by

$$P[N(t) = n] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}; \quad t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

in which $n = 0, 1, 2, \ldots$; and λ = the average number of vehicle arrivals per unit time. The response of bridge as given by Eq. 1 is then a filtered Poisson process in its extended form (6). When traffic is heavier, the generalized Poisson process is a better model. The response of a bridge is then a filtered renewal process (8). Statistical quantities such as the probability density function, and expected rate of threshold crossings, for the filtered Poisson process and filtered renewal process may be obtained, as indicated in Refs. 7 and 8 respectively. However, to predict the fatigue life of highway bridges, quantities other than those previously mentioned must be determined. To illustrate the idea underlying the method of obtaining those response statistics of bridges relevant to fatigue life, the simple Poisson process will be used herein as the traffic model, i.e., the response of bridges is treated as a filtered Poisson process.

RESPONSE PEAK PROBABILITY DENSITY FUNCTION

The physical process governing fatigue damage has not been fully understood. The simplest and most generally known cumulative-damage theory is the Palmgren-Miner's rule. The theory utilizes information obtained from tests performed under constant amplitude cyclic loading conditions and provides an expression for the expected damage per unit time under random stress conditions (3) as

$$E(D) = c^{-1} E(M_T) \int_{-\infty}^{\infty} \xi^b f_p(\xi)\, d\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

in which, if $Y(t)$ as given by Eq. 1 is considered as the stress response process of the bridge, $f_p(\xi)$ = the probability density function of peak magnitude of $Y(t)$; M_T = the total number of peaks per unit time regardless of their magnitudes and $E(M_T)$ = the expected value of the random variable M_T. Term D = the random accumulated damage per unit time due to the random process

$Y(t)$; and $E(D)$ = its expected value. The constants b and c are material constants that appear in the widely adopted equation:

$$NS^b = c \quad \ldots\ldots\ldots\

$$f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3) = e^{-\lambda T}\Big\{\delta(z_1)\ \delta(z_2)\ \delta(z_3) + \lambda T g(z_1, z_2, z_3) + \frac{(\lambda T)^2}{2!}\, g(z_1, z_2, z_3)^*\ g(z_1, z_2, z_3) + \ldots + \frac{(\lambda T)^k}{k!}\,[\underbrace{g(z_1, z_2, z_3)^* \ldots * g(z_1, z_2, z_3)}_{k \text{ fold convolution}}] + \ldots\Big\} \quad \ldots\ (8)$$

in which $\delta(z)$ = the Dirac delta function; and $g(z_1, z_2, z_3)$ = the inverse Fourier transform of $\phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ and is the joint probability density function of $W(t - \Delta - \tau)$, $W(t - \tau)$, and $W(t + \Delta - \tau)$. Thus the joint probability density function $f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3)$ may be computed if λT is smaller than unity such that only the first few terms in Eq. 8 need be retained and if the convolution of $g(z_1, z_2, z_3)$ with itself may be obtained. For example, if the random function $W(t) = Xw(t)$ in which $w(t)$ = a deterministic function and X = a random variable, the joint probability density function $g(z_1, z_2, z_3)$ of the random

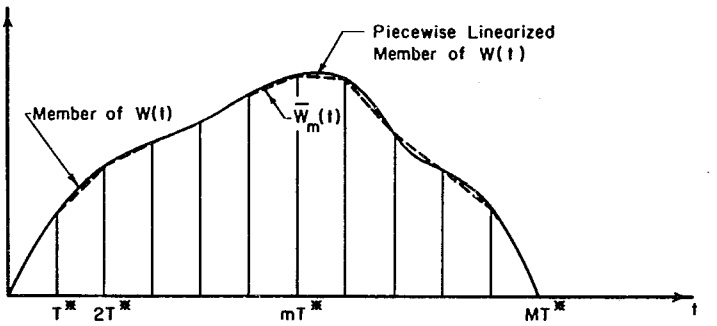


FIG. 1.—MEMBER OF INFLUENCE FUNCTION AND PIECEWISE LINEARIZED APPROXIMATION

variables $W(t - \Delta - \tau) = Xw(t - \Delta - \tau)$, $W(t - \tau) = Xw(t - \tau)$ and $W(t + \Delta - \tau) = Xw(t + \Delta - \tau)$ may be obtained by means of the technique of transformation of random variables if $w(t)$ is of simple form (5). If the random function $W(t)$ is such that $W(t) = w_1(t)$ with probability p_1 and $W(t) = w_2(t)$ with probability p_2, in which $w_1(t)$ and $w_2(t)$ = deterministic functions, then the joint probability density function of the random variables $W(t - \Delta - \tau)$, $W(t - \tau)$ and $W(t + \Delta - \tau)$ may also be obtained without difficulty provided $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are of simple form (5).

In general, $w(t)$, $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are quite complicated. An effective way of computing $f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3)$ is to approximate each member of the family of $W(t)$ by a sum of the same number, say M, of nonoverlapping trapezoids of equal base width T^*, as shown in Fig. 1, i.e.,

$$W(t) = \sum_{m=1}^{M} \overline{W}_m(t) \quad \ldots\ (9)$$

in which $\overline{W}_m(t) = W(t)$; for $(m - 1)\ T^* \leq t \leq mT^*$

$= 0$ otherwise . . . . . (10)

Let $W_i(t)$ be the piecewise linearized influence function of the filtered Poisson process identically distributed as the piecewise linearized random function $W(t)$, and $W_{i,m}(t)$ the mth linear function of $W_i(t)$ identically distrubuted as $\overline{W}_m(t)$ given by Eq. 10. For a given value of t, divide interval $(t - T, t)$ into M subintervals $(t - mT^*, t - (m - 1)\ T^*)$, $m = 1, \ldots M$. Let time instants of vehicle arrivals in the subintervals $(t - mT^*, t - (m - 1)\ T^*)$, $m = 1, \ldots M$ be denoted by $\tau_{i,m}$, $m = 1, \ldots M$ respectively. Then

$$Z_2(t) = Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_i(t - \tau_i)$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{i,m}(t - \tau_{i,m}) \right] = \sum_{m=1}^{M} Y_{2,m}(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

in which $Y_{2,m}(t)$ = the quantity enclosed in the square bracket anf for $m, n = 1, \ldots M$, $\tau_{i,m}$'s are independent of $\tau_{i,n}$'s for $m \neq n$. Thus, $Y_{2,m}(t)$, $m = 1, \ldots M$ are independent of each other. Similarly, it may be verified that

$$Z_1(t) = Y(t - \Delta) = \sum_{m=1}^{M} Y_{1,m}(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12a)$$

$$Z_3(t) = Y(t + \Delta) = \sum_{m=1}^{M} Y_{3,m}(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12b)$$

in which $Y_{1,m}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [W_{i,m}(t - \Delta - \tau_{i,m})$

$+ U(m - 1)\ W_{i,m-1}(t - \Delta - \tau_{i,m})] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13a)$

$$Y_{3,m}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{W_{i,m}(t + \Delta - \tau_{i,m})$$

$$+ U[(M - 1) - m]\ W_{i,m+1}(t + \Delta - \tau_{i,m})\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13b)$$

$U(\cdot)$ being the unit step function. For the same reason that $Y_{2,m}(t)$, $m = 1, \ldots M$ are independent, $Y_{1,m}(t)$, $m = 1, \ldots M$ are independent and so are $Y_{3,m}(t)$, $m = 1, \ldots M$. The joint characteristic function of $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ and $Z_3(t)$ becomes

376

$$\Phi_{Z_1 Z_2 Z_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = E\left\{ \exp\left[j \sum_{i=1}^{3} \omega_i Z_i(t) \right] \right\}$$

$$= E\left\{\exp\left[j \sum_{i=1}^{3} \sum_{m=1}^{M} \omega_i Y_{i,m}(t)\right]\right\} = \prod_{m=1}^{M} E\left\{\exp\left[j \sum_{i=1}^{3} \omega_i Y_{i,m}(t)\right]\right\} \quad (14)$$

In the same manner in which Eq. 7 is derived, it may be shown that for each value of $m = 1, \ldots M$

$$E\left\{\exp\left[j \sum_{i=1}^{3} \omega_i Y_{i,m}(t)\right]\right\} = \exp\{\lambda T^* [\phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - 1]\} \ldots\ldots (15)$$

in which $\phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = the joint characteristic function of $\overline{W}_m(t - \Delta - S_m) + U(m - 1)\, \overline{W}_{m-1}(t - \Delta - S_m)$, $\overline{W}(t - S_m)$ and $\overline{W}_m(t + \Delta - S_m) + U((M - 1) - m)\, \overline{W}_{m+1}(t + \Delta - S_m)$, S_m = a random variable uniformly distributed in interval $(t - mT^*, t - (m - 1)\, T^*)$. Substituting Eq. 15 into Eq. 14

$$\phi_{Z_1 Z_2 Z_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \prod_{m=1}^{M} \exp[\phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - 1] \ldots\ldots\ldots (16a)$$

$$= e^{-\lambda t} \exp\left[\lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16b)$$

$$= e^{-\lambda T}\left\{1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!}\left[\sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right]^2 + \ldots\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16c)$$

$$= e^{-\lambda T}\left\{1 + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!}\left[\sum_{m=1}^{M} \phi_m^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \phi_n(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right] + \ldots\right\} \ldots\ldots (16d)$$

in which, in carrying out the expansion of $\exp\left(\lambda T^* \sum_{m=1}^{M} \phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right)$, terms of higher order than $(\lambda T^*)^2$ are dropped. Taking the inverse Fourier transform of both sides of Eq. 16*d*, the joint probability density function of $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ and $Z_3(t)$ is

$$f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3) = e^{-\lambda T} \Bigg\{ \delta(z_1)\ \delta(z_2)\ \delta(z_3) + \lambda T^* \sum_{m=1}^{M} g_m(z_1, z_2, z_3) + \frac{(\lambda T^*)^2}{2!} \Bigg[\sum_{m=1}^{M} g_m(z_1, z_2, z_3)^*\ g_m(z_1, z_2, z_3) + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^{M} g_m(z_1, z_2, z_3)^*\ g_n(z_1, z_2, z_3) \Bigg] + \ldots \Bigg\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

in which, for each value of $m = 1, \ldots M$, $g_m(z_1, z_2, z_3)$ is the inverse Fourier transform of $\phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

As each of the random functions $\overline{W}_m(t)$, $m = 1, \ldots M$ is a linear function of its argument, the joint probability density function $g_m(z_1, z_2, z_3)$ may be obtained without difficulty (5).

Let $f_p(\xi)\ d\xi$ be the probability that, given occurrence of a peak in interval $(t, t + dt)$, its value falls in interval $(\xi, \xi + d\xi)$. By law of conditional probability

$$f_p(\xi)\ d\xi = \lim \Bigg[d\xi dt \int_{z_3=-\infty}^{\xi} \int_{z_1=-\infty}^{\xi} f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, \xi, z_3)\ dz_1\ dz_3 \Big/ dt \int_{z_2=-\infty}^{\infty} \int_{z_3=-\infty}^{z_2} \int_{z_1=-\infty}^{z_2} f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3)\ dz_1 dz_3 dz_2 \Bigg] \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

in which the denominator = the probability of occurrence of a peak, regardless of its magnitude, in $(t, t + dt)$; and the numerator = the probability of occurrence of a peak in (t, t + dt) with peak magnitude in $(\xi, \xi + d\xi)$.

The total number of peaks in $(t, t + dt)$ is $M_T dt$, in which M_T = a discrete random variable assuming values 1 and 0. It is easily seen that the expected total number of peaks per unit time $E(M_T)$ is equal to the denominator in Eq. 18 divided by dt.

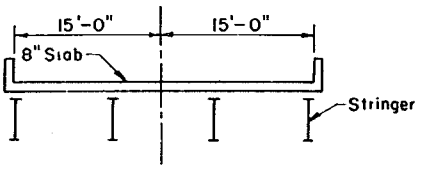
The expected damage per unit time $E[D]$ and the would be fatigue life $T_1 = 1/E(D)$ may thus be obtained by substituting $f_p(\xi)$ and $E(M_T)$ into Eqs. 3 and 5.

NUMERICAL RESULTS

In Ref. 1, results of a series of tests performed on eight existing bridges are presented and the fatigue life of the bridges are predicted. In order to demonstrate the application of the method developed here to the prediction of fatigue life, bridge 8 in Ref. 1 is used.

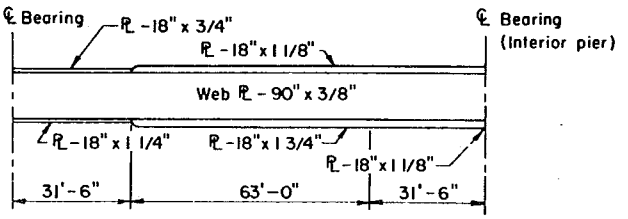
378 The bridge is a three span cantilever bridge with a center span equal to 142 ft and end spans approximately 126 ft each. As the hinges in the cantilever span are located near the interior supports, each of the three spans is treated

as simply supported on its ends. The bridge is one of the slab-steel stringer variety [see Fig. 2(*a*)]. The stringers contain welded partial length cover plates with thickness transition at quarter points [see Fig. 2(*b*)]. The bridge is a one way two lane highway. For convenience of computation, all vehicles are assumed to travel in one lane only. All vehicles are considered to consist of two axles 40 ft apart and the loads due to each axle are represented by two equal constant forces applied directly above the two stringers in the traffic lane. The front axle forces are assumed to be equal to the rear axle forces. Vehicles are divided into three types; those which weigh 142 kips and 72 kips constitute 1% and 20% respectively of the entire vehicle population. The response of the bridges to vehicles that weigh less than 72 kips are considered to have negligible effects on fatigue life. All vehicles travel at speed v = 60 ft per sec and the annual traffic volume is 293,000 vehicles, giving λ, the intensity of Poisson process equal to 0.0093.



(Shear conns. all span except conti.)

(a) Bridge Section



(b) End Span Stringer

FIG. 2.—PERTINENT DATA OF BRIDGE

The fatigue life of the end span of the bridge is identified with that of the flange thickness transition point at quarter span of the most highly stressed stringer. Thus the nominal stress at that point of the stringer is considered as the response. Neglecting dynamic effects, the response due to the passage of a vehicle of unit weight is computed and presented in Fig. 3.

The material constants b and c that appear in Eqs. 3 and 4 are determined from Eq. 1*a* of Ref. 1 which is obtained from 0-to-tension cycle tests for butt-welded flange thickness transition using the Modified Goodman law to transform the results to dead load tension-to-tension stress range cycle case. Specifically, b = 4.18 and $c = 0.24 \times 10^{12}$.

Based on the idealization previously described, and using Eqs. 3, 5, 17 and 18, the fatigue life of the end span of the bridge is computed to be 17,458 yr.

Although the fatigue life obtained here appears to compare quite favorably with that indicated in Table 4 of Ref. 1, it should be pointed out that due to many assumptions introduced in the numerical example presented herein and because information regarding vehicular composition of traffic on bridge 8 in Ref. 1 is not given, direct comparison of result of the fatigue life of the bridge with that in Table 4 of Ref. 1 is not possible.

Finally, because Palmgren-Miner's theory utilizes an S-N curve as given by Eq. 4 that does not take into account the scatter that is usually found in fatigue tests, and postulates that accumulation of damage is linear, implying that the order of load application has no effect on the resulting total damage,

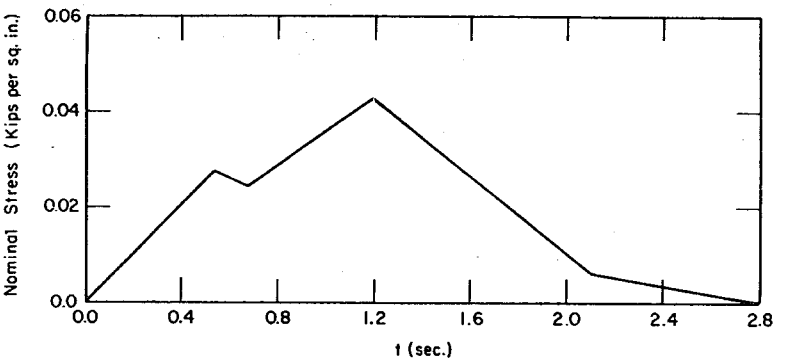


FIG. 3.—STRESS RESPONSE AT QUARTER POINT OF STRINGER TO VEHICLE OF UNIT WEIGHT

the predicted fatigue life of the bridge should only be considered a crude estimate.

CONCLUSIONS

The life expectancy of highway bridges to vehicle loads is considered herein. Vehicular traffic is represented by the Poisson process and the response of bridges to vehicle loads is treated as a filtered Poisson process in its extended form taking into consideration the fact that vehicles may be of different weight and types. A numerical procedure is developed to compute such quantities as the peak probability density function and expected total number of peaks per unit time of the response of bridges that are relevant to the prediction of fatigue life. These quantities are used in conjunction with the Palmgren-Miner's theory of cumulative damage to predict the fatigue life of an existing bridge studied in Ref. 1.

In the numerical example some assumptions are introduced that may be removed at the expense of more involved computation. For example, more vehicle types may be included and a more realistic idealization of vehicle load distributions on stringers may be employed. Response of bridges to single passage of various types of vehicles may be obtained either by means of more elaborate computational techniques or field measurements.

380 The numerical technique for the computation of peak probability density function and expected total number of peaks per unit time of response of

bridges may be extended to cover the case of multilane highway bridges, and, with some modifications, the case of a generalized Poisson traffic model.

Palmgren-Miner's theory of cumulative damage employed herein does not take into account the scatter in the S-N curve and the effects of order of load application on damage. The fatigue life, computed on the bases of Palmgren-Miner's theory should therefore only be considered a crude estimate.

ACKNOWLEDGMENTS

The study is part of the research program on the application of probabilistic concepts to safety analysis and design of structures carried out in the Civil Engineering Department of the University of Illinois, at Urbana, Illinois, supported by the National Science Foundation through Grant NSF-GK 1812X under the direction of A. H.-S. Ang. The assistance of B. Ellingwood, in writing the computer program and carrying out the numerical computation is gratefully acknowledged.

APPENDIX I.—REFERENCES

1. Cudney, G. R, "The Effects of Loading on Bridge Life," Michigan Department of State Highways," *Research Report No. R-638*, January, 1968.
2. Haight, F. A., Whistler, B. F., and Mosher, W. H., Jr., "New Statistical Method for Describing Highway Distribution of Cars," Highway Research Board, *Proceedings of the 41st Annual Meeting*. Washington, D.C., 1961, pp. 557-564.
3. Lin, Y. K., *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1967, pp. 332-337.
4. Novak, M. E., Heins, C. P., Jr., and Looney, C. T. G., "Induced Dynamic Strains in Bridge Structures due to Random Truck Loadings," Progress Report, Study of Effects of New Vehicle Weight Law on Structures, Civil Engineering Department, University of Maryland, College Park, Maryland, February, 1969.
5. Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1965, p. 234.
6. Parzen, E., *Stochastic Processes*. Holden Day, Inc., San Francisco, California, 1964, p. 152, pp. 153-155.
7. Tung, C. C., "Random Response of Highway Bridges to Vehicle Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division*. ASCE, Vol 93, No. EM5, Proc. Paper 5534, October, 1967, pp. 79-94.
8. Tung, C. C., "Response of Highway Bridges to Renewal Traffic Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division*. ASCE, Vol 95, No. EM1, Proc. Paper 6383, February, 1969, pp. 41-57.
9. Varney, R. F., and Galambos, C. F., "Field Dynamic Loading Studies of Highway Bridges in the U. S., 1948-1965," *Record No. 76*. Highway Research Board, 1965, pp. 285-305.
10. Walker, W. H., "Investigation of Dynamic Stresses in Highway Bridges," First Progress Report, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Illinois, October, 1967.
11. Werner, J. D., Heins, C. P., Jr., and Looney, C. T. G., "Induced Bridge Loads and Moments During a Ten Year Period," Progress Report, Study of Effects of New Vehicle Weight Law on Structures, Civil Egnineering Department, University of Maryland, College Park, Maryland, June, 1969.

APPENDIX II.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

b = material constant;
c = material constant;
D = random accumulated damage per unit time;
$E(\cdot)$ = expected value of quantity enclosed in parentheses;
$f_p(\xi)$ = probability density function of peak magnitude of $Y(t)$;
$f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3)$ = joint probability density function of $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ and $Z_3(t)$;
$g(Z_1, Z_2, Z_3)$ = joint probability density function of $W(t - \Delta - \tau)$, $W(t - \tau)$ and $W(t + \Delta - \tau)$;
$g_m(Z_1, Z_2, Z_3)$ = joint probability density function of $\overline{W}_m(t - \Delta - S_m) + U(m - 1)\,\overline{W}_{m-1}(t - \Delta - S_m)$, $\overline{W}_m(t - S_m)$ and $\overline{W}_m(t + \Delta - S_m) + U((M - 1) - m)\,\overline{W}_{m+1}(t + \Delta - S_m)$;
i = dummy index;
j = imaginary unit;
k = dummy index;
M = total number of segments of piecewise linearized random function $W(t)$;
M_T = total number of peaks per unit time of $Y(t)$;
m = dummy index;
N = number of cycles to failure in constant amplitude cyclic fatigue test;
$N(t)$ = number of vehicle arrivals in interval $(0, t)$;
n = dummy index;
$P[\cdot]$ = probability of event enclosed in the bracket;
p_1, p_2 = probabilities;
S = stress amplitude in constant amplitude cyclic fatigue test;
S_m = random variable uniformly distributed in interval $(t - mT^*, t - (m - 1)\,T^*)$;
T = maximum duration of members of random function $W(t)$;
T_1 = fatigue life;
T^* = interval of each segment of the piecewise linearized random function $W(t)$;
t = time;
$U(\cdot)$ = unit step function;
v = speed of vehicles;
$W(t)$ = random function;
$W_i(t)$ = response of bridge at time t due to passage of ith single vehicle arriving at $t = 0$;

$\overline{W}_m(t)$ = mth linear segment of piecewise linearized random function $W(t)$;
$W_{i,m}(t)$ = mth linear segment of piecewise linearized random function $W_i(t)$;
$w(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ = deterministic functions;
X = random variable;
$Y_{1,m}(t)$, $Y_{2,m}(t)$, $Y_{3,m}(t)$ = processes defined in Eqs. 11 and 13;
$Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ = response of bridge at time $t - \Delta$, t, and $t + \Delta$;
z_1, z_2, z_3 = dummy variables;
Δ = positive quantity;
$\delta(z)$ = Dirac delta function;
λ = average number of vehicle arrivals per unit time;
ξ = dummy variable;
τ = random variable uniformly distributed in $(t - T, t)$;
τ_i = time of arrival of ith vehicle;
$\tau_{i,m}$ = time of arrival of ith vehicle in subinterval $(t - mT^*, t - (m - 1)T^*)$;
$\Phi_{Z_1 Z_2 Z_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = Fourier transform of $f_{Z_1 Z_2 Z_3}(z_1, z_2, z_3)$;
$\phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = Fourier transform of $g(z_1, z_2, z_3)$;
$\phi_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = Fourier transform of $g_m(z_1, z_2, z_3)$;
ω_1, ω_2, ω_3 = dummy variables; and
$*$ = convolution of functions preceding and following it.

展望

539.432

疲れ被害法則の展望*

山田敏郎**

1. まえがき

近年航空機を始めとし，船舶，車両などが急速に大形化，高速化し，その安全性，耐久性，経済性が非常に重大な課題となってきた．したがって，これらに最も関係の深い，構成部材の実働荷重（図1参照）に対する疲れ寿命の推定，予知，疲れ損傷度の検出などがますます重要の度を加えてきた．われわれはとにかく現在の知識でこれらに対処せねばならず，現在まで提唱されてきた種々の疲れ被害法則や疲れ寿命推定法について概観し，論評することも意義があると思われる．

一方，X線回折法，電子顕微鏡による観察などにより，疲れ過程中の材料の結晶構造や相の変化，き裂の進展過程などが漸次明らかにされつつあり，疲れ機構の説明も種々試みられているが，これらの研究が進むにつれて疲れ機構の複雑なることがますます明らかとなり，実働荷重に対する統一的な疲れ被害法則を導くことは現段階では困難のようである．

が，近年精密な試験機の発達と，種々の計測器の発達により，変動荷重をうける試験片の塑性ひずみの精密測定が可能となり，その履歴曲線による消費エネルギの究明などが行なわれ，疲れ被害法則の進展が試みられている．また理論的な破壊エネルギの考え方，転位論的な考え方，確率論的な考え方などによる法則の進展も盛んである．

最近の研究の特徴は，疲れ被害の進展過程を，①微視的き裂またはき裂の核の発生過程，②その巨視的き裂までの成長過程，③巨視的き裂の破壊までの進展過程などに分けて究明することに努力が払われつつあることである．したがって疲れ被害法則もこれに基づいて各段階に分けて導かれることになろう．

またもう一つの特徴は，統計的な考え方を導入して実働応力のひん度を解析し，疲れ寿命を推定する方式が開発されつつあることである．自動車メーカなどは現在主としてこの方式を採用しつつあるが，もともと疲れ寿命はばらつきの非常に大なるものであり，複雑な要因の多すぎる疲れ機構に対し画一的な法則を得ることが困難である以上，かかる統計的処理および忠実度の高い電気油圧式疲れ試験機による試験を併用する方法は現時点において当をえたものであろう．

なお実機の面からみれば，これに負荷される実働荷重の計測が困難である場合が多く，これが研究の進展をはばんでいる大きな障害の一つとなっている．できるだけ長期にわたる実働荷重の計測が行なわれ，発表されることが望まれる．

2. 直線被害法則

実働荷重に対する部材の破壊までの荷重繰返し数，すなわち疲れ寿命を推定する方法として，一定繰返し荷重の場合の実験値，すなわち S-N 曲線より疲れ寿命を推定しようとする試みが，古くより多くの人によって試みられてきた．これら幾多の疲れ寿命推定法の主たる基本となっているものは直線被害法則である．

1924年に A. Palmgren[1] がこの法則をころがり軸受の寿命推定のために提案した．そして現在でもころがり軸受の寿命算定方式として使用されているのみならず，一般に広く利用されている．この法則はつぎのようなものである．応力 σ_1, σ_2, ……, σ_i をそれぞれ単独に繰返して疲れ破壊するまでの繰返し数を N_1, N_2, ……, N_i とする．これらの応力をそれぞれ n_1, n_2, ……, n_i 回繰返したときに破壊が生じたとすれば次式が成立する．

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\cdots\cdots+\frac{n_i}{N_i}=1,\quad \text{または}\quad \sum_i \frac{n_i}{N_i}=1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

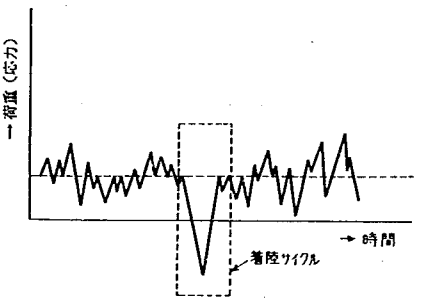


図1 実働荷重応力波（Payne の実験，航空機のシミュレーション）

* 原稿受付 昭和45年6月15日．
** 正員，京都大学工学部（京都市左京区吉田本町）．

この法則は実用的であるため，すでにわが国においても古くより航空機などの設計[2]に採用されていた．

その後 B.F. Langer[3] がき裂の進展の概念よりこの法則を導いていたが，実際に実験を行なってその信頼性を証明したのは，西原ら[4]と M.A. Miner[5] である．すなわち西原らは繰返し応力振幅が時間とともに正弦波状に変動する場合やその他種々のひん度曲線に対する繰返し変動応力の場合の実験を行ない，また腐食法による疲れ度の検出結果より，疲れ度は応力繰返し数比のある関数となることより，この法則を導き，実験値と計算値とがよい一致を示すことを発表した．また Miner[5] は応力の繰返しによる仕事量の累積は応力繰返し数と直線関係にあるという仮定のもとにこの法則を導き，2段ないし4段の重複繰返し応力疲れ試験を行ない，この法則が成立することを示した．現在では一般に Palmgren-Miner 則といわれている．

その後多くの実働荷重に関する実験，研究が行なわれてきた．その結果，式 (1) を変形し，

$$\sum_i (n_i/N_i)=C \cdots\cdots (2)$$

とおき，この C の値が検討され，C は必ずしも1にはならないという報告も多く出された．特に2段あるいは3段などの重複荷重の実験ではこの傾向が強く出ることが指摘された．

実働荷重の場合には，低応力と高応力とが混合して繰返されるため，それらの干渉効果があり，これが寿命を短くする場合，長くする場合など種々の複雑な現象が生ずる．特にき裂が発生すると，疲れ限度以下の応力でもこれを進展させることが考えられる．また過小応力（疲れ限度以下の応力）が繰返されると疲れ限度を上昇さすこともある[6]ので，あるひん度曲線の場合には実働荷重の場合の疲れ限度が上昇する[7][8]．また多くの応力のうち，最大応力の大きさによっては，試験片に大きな残留応力が発生し，これが寿命を長くする効果のある場合もある．が，これらの種々の現象も使用材料，試験片の形状，応力の種類などにより大きく変わる．

しかし多くの実験結果によれば，2段2重などのごとく荷重変動の段数およびその段数の繰返しが少ない場合を除くと，多くのプログラム荷重の場合，繰返し変動荷重の場合，式 (2) の C の値として1を示す実験結果が非常に多い．

西原・山田ら[9]は，累積ひん度曲線が正弦波の場合，実機のそれの場合などについて9種類の実験を行なった結果，各実験グループの C の平均値は 0.70～1.14 であり，さらにこれらの総平均値は 0.90 であった．Miner[5] は9種類のプログラム荷重について実験した結果，C の値として 0.61～1.32，その総平均値 0.95 を得た．Schijve[10] は多くの実験者のプログラム荷重に対する実験結果をまとめているが，種々の試験片，部品，種々の荷重スペクトルに対し，C の値として 0.3～3.6 を得た．また切欠き試験片に正の平均応力を伴う負荷を与えた場合，一般に $C>1$ で，平均 1.5～2.0 であり，C の低い値は，平均応力が0のとき，応力集中の小なるとき，周期的な負の荷重が働くとき，低い荷重で大なる繰返しが行なわれるときに多く発生するとしている．

航空機の荷重パターンに対しては，さらに膨大な実験データがあり，$C\geqq 1$, $C\geqq 0.62$[11][12], $C=1/2\sim 1/3.5$[15], C の平均値 (C_{mean})$=1$ ($C=0.65\sim 1.35$)[69], $C=0.7\sim 1.1$[71], $C=0.92\sim 1.22$ (ピーク応力計数法による，図1参照)[81] の例があげられる．その他，$C_{mean}=1$ ($C>0.5$, ランダム荷重)[13], $C_{mean}=1$ ($C>0.635$)[70], $C_{mean}=0.7$[20] などの例が多く，大局的にみて C が1に近い場合が多い．

なお設計基準として，$C=0.5$[16], $C=0.3$[17] を採用している例が外国にあり，参考になろう．ただし，これら C の値は変動応力波形の計数法によって異なることはいうをまたない．

3. 疲れ被害法則の進展

もともと疲れ寿命はばらつきの大なるものであるから，その下限の場合は C は1より小となることが多い．これらの欠点を補うため種々の修正が加えられた．また過小応力の強化作用も考えられ，これを取入れた被害法則も導かれた．つぎにその概要を述べる．

3·1 直線被害法則の変形

3·1·1 修正直線被害法則 疲れ限度以下の応力の疲れ被害を推定し，これを加算するため，図2に破線

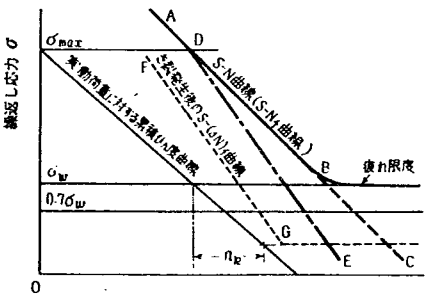


図 2 疲れ曲線，累積ひん度曲線

で示すように S-N 曲線の時間強さの部分 $\overline{AB}$ を疲れ限度以下 C まで延長し，これをあらためて S-N 曲線として採用し，式(1)を用いるものである．

ただし，疲れ限度以下どの値までの応力を採用するかが問題であるが，疲れ限度 σ_w の70～80%の値まで採用するという考え方もある[7][8]．

3·1·2 Corten-Dolan の方法[18][19]　図2に示すように，材料の S-N 曲線上に実働応力の最大応力 D の点をとり，これより S-N 曲線の傾きを修正した別の S-N 曲線（一点鎖線 $\overline{DE}$）を引き，これを用いて上述の修正直線被害法則を適用し，疲れ寿命を計算する．一定繰返し応力疲れ試験の S-N 曲線を $N\cdot\sigma_a^m=K$，修正 S-N 曲線を $N'\cdot\sigma_a^{m'}=K'$ で表わし，$\beta=m'/m$ を実験結果より求めると，$\beta=0.80\sim0.95$ が適当であるとしている．この方法は簡便であり，一応，応力間の干渉をも加味することができるので，実用されつつある．が，同一試験片に対してもひん度曲線が若干変われば，β の値が変わるという報告もある[20]．

3·1·3 Freudenthal-Heller の方法[21]　ある一つの応力 σ_i に対する寿命 N_{σ_i} はそれより高い応力 σ_{i+m} の作用をうけて $N'_{\sigma_i}=N_{\sigma_i}/w_i$ になると考え，応力干渉係数 w_i の適当な値を用いて，実働荷重に対する疲れ寿命 N_t（疲れ破壊までの総繰返し数）を求める．すなわち，新疲れ曲線 S-N の N としては N_{σ_i} の代わりに N'_{σ_i} を採用し，これに直線被害法則を適用する．$N_t=1/\sum_i(p_iw_i/N_{\sigma_i})$ となる．ただし，p_i は応力 σ_i の相対ひん度である．$N/\bar{N}=(\bar{\sigma}/\sigma_i)^\nu$，$N'/\bar{N}=(\bar{\sigma}/\sigma_i)^\rho$ はそれぞれ元の疲れ曲線，新疲れ曲線を表わすものとすると，

$$N'=N\cdot\left\{\sum_i p_i(\sigma_i/\bar{\sigma})^\nu\right\}\Big/\sum_i p_i(\sigma_i/\bar{\sigma})^\rho \qquad \cdots\cdots(3)$$

$\bar{\sigma}$ は高応力と低応力の境界の応力であり，$\bar{N}$ は 10^3 ないし 10^4 の間の数である．ρ のみが未知数であり，これを実験より求める．航空機の突風荷重のようなひん度分布をもつ場合には，この計算式による寿命はよく実験値と一致すると述べている．

3·2 疲れ度を応力およびその繰返し数の関数として導いた法則

3·2·1 西原・山田の方法[7][8]　実働荷重の場合は疲れ限度以下の応力がむしろ多く繰返される場合が多く，この効果を取入れる必要がある．それで応力の繰返しによる微視的塑性ひずみの変形量と疲れ被害とが関係するという概念より，またその加工硬化により，$(N'-1)$ 回めおよび N' 回めの応力の繰返しによる疲れ被害をそれぞれ $F_{N'-1}$，$F_{N'}$ とすると，両者の間に $F_{N'}=F_{N'-1}\cdot e^{-m\varepsilon}$ なる関係があるとし，疲れ度関数として $F_{N'}=e^{A\sigma+D}\cdot e^{-m\alpha(N'-1)}$ を採用した．累積ひん度曲線を $\sigma=H(n)$ とすると（図2参照），疲れ破壊までの総繰返し数 N_t は，疲れ破壊の条件式(4)より(5)となる．

$$\int_0^{N_t}F_{N'}\cdot dN'=C,\ (\text{一般に}\ C=1) \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$N_t=-n_0/m\int_0^{n_{c0}}H(n)dn\cdot\log_e\left\{1-C\cdot m\times\int_0^{n_{c0}}H(n)\Big/\int_0^{n_{c0}}\exp[AH(n)+D]dn\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

A, D, m は定応力の S-N 曲線より求める．

実働荷重の場合の疲れ限度は，$N_t\to\infty$ として次式より求まる．

$$C\cdot m\int_0^{n_{c0}}H(n)dn\Big/\int_0^{n_{c0}}\exp[AH(n)+D]dn=1 \qquad \cdots\cdots(6)$$

n_{c0} の値としては σ_w の70～80%の値をとる．繰返し変動応力に対する疲れ寿命，疲れ限度ともによく実験値と計算値とが一致することが確認された．かつ，応力振幅が正弦波状に変動する場合にいずれも実働荷重に対する疲れ限度が一定繰返し応力のそれよりも上昇している．一般に過大応力の被害のみが強調されているが，実際の機械部分においては，本実験のように過小応力による強化作用もあると考えられ，さらにこれらの関係が明らかにされることが望ましい．なお，鯉淵ら[20]のプログラム荷重（図3）に対する実験結果，および本方法による計算値〔式(5)による〕を図4に示す．本実験では式(4)における C の値を0.7にした場合の計算値が疲れ寿命，疲れ限度ともに実験値と一致するとみなしうる．

この疲れ寿命算定方法は，実働荷重に対する疲れ限度の算定が可能であるが，疲れ限度以上の応力ひん度が大なる場合は，直線被害法則にほとんど一致する．

3·2·2 その他　疲れ度を応力および繰返し数の関数として導いた算定方式として，Marco-Starkey[22]

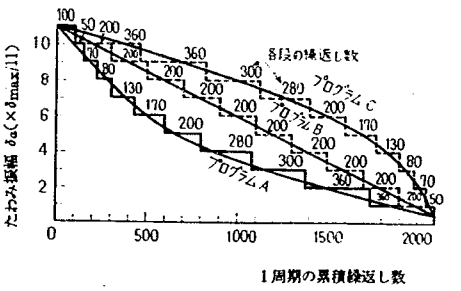


図3　プログラム荷重，累積ひん度分布

の方法，Shanley[23] の方法などがある．

3·3 Gatts の方法[24][25] 累積疲れ被害の考え方として，σ_f を材料の強さの瞬時値とし，応力 σ の繰返しによる「強さ」の減少，すなわち疲れ損傷の速度は，

$$d\sigma_f/dn=-kD(\sigma)$$

で表わされる．

$$D(\sigma)=(\sigma-\sigma_e)^2$$

とし，σ_e は疲れ限度の瞬時値である．材料の破損は $\sigma=\sigma_f$ になったとき生ずる．第1回の負荷で材料が破損するためには，$\sigma=\sigma_B$（引張強さ）である．かつ，常に $\sigma_e=c\sigma_f$，c=定数の関係があるとする．$n=0$ で σ_{e0} とし，$n/N=\beta$，$\sigma/\sigma_{e0}=\gamma$，$\sigma_e/\sigma_{e0}=\gamma_e$（疲れ限度の低下率）とすれば，

$$\gamma_e=\gamma\left[1-1\Big/\left\{\frac{\beta}{1-c}+\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\beta)\right\}\right]\cdots(7)$$

式(7)は重複繰返し疲れ試験結果とよく一致し，低応力から高応力に応力をかえたときは，$\sum(n/N)>1$，逆に高応力から低応力にかえたときは，$\sum(n/N)<1$ となり，実験の一般的傾向とよく一致している．

さらに，ランダム荷重の場合には，σ_i が生ずる確率を p_i とすれば，$d\sigma_e/dn=-k\sum_i p_i(\sigma_i-\sigma_e)^2$ で，また確率密度関数 $p(\sigma)$ をもつ場合にも上式が適用され，これよりかかる場合の寿命推定方式をも導いている．

3·4 き裂の伝ぱより導かれた疲れ被害法則 応力の繰返しにより結晶中にすべりが生じ，また，すべり線に沿って微視的き裂が発生し，その線中に小孔が発生すること，また extrusion, intrusion なる現象が見られることなどについては多くの研究報告[26][27]がある．また最近では転位論の立場からも研究[28]~[30]がなされつつある．Machlin ら[31]は材料には最初から微視的き裂が存在していて，これが繰返し応力のもとでその先端における転位の発達によって成長してゆくのであるなどの考え方を提唱している．

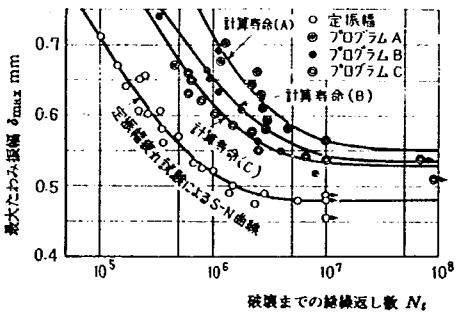


図 4 プログラム荷重疲れ試験結果（図3のプログラム荷重による），計算寿命は式(5)による．ただし $C=0.7$ とする．

これらの研究を背景として，微小き裂は寿命のごく初期に発生するものであり，き裂の伝ぱ，成長が全寿命の大部分を占めるという考え方から，多くの疲れ被害法則が提唱されてきた．

ただし，微小き裂の発生時期が明確でないので，種々の仮定のもとに法則が導かれている．特に微小き裂の大きさとしては，0.1 mm 前後，あるいは2~3の結晶粒にわたるき裂などといわれているが，これはき裂の概念や，測定装置に負うところが大であるため，きめにくい問題である．

(1) Head[32] はき裂先端部分の弾塑性分布を考慮して，塑性要素，せん断要素，弾性要素よりなる弾塑性モデルを考え，これが応力の繰返しに伴い加工硬化などの現象を伴いながらき裂が進行してゆくものとして次式を導いた．

$$dl/dn=F\cdot\sigma^3\cdot l^{3/2}/12E\sqrt{\lambda}(\sigma_f-\sigma_s)(\sigma_s-\sigma)^2 \quad\cdots\cdots(8)$$

$$l^{-1/2}=F\cdot\sigma^3\cdot(N_\infty-n)/24\sqrt{2}E\sqrt{\lambda}(\sigma_f-\sigma_s)\times(\sigma_s-\sigma)^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

ここに，l：き裂長さ，F：加工硬化係数，σ_s：降伏点，N_∞：破壊までの繰返し数．

式(8)はき裂の進展速度はき裂がおおきくなるにつれて急速に大になること，式(9)は $l^{-1/2}$ が繰返し数 n に対して直線的関数にあることを示している．

(2) Liu[33] および Yang[34] はき裂進展に影響すると考えられる諸因子を取上げ，$dl/dn=cl$，(c：材料および応力に関する定数）を導いた．また，石橋[35]も繰返し数とき裂の大きさの関係式を導いている．

(3) Scharton と Crandall[36] は，き裂伝ぱの一般式として，

$$dl/dn=l^{m+1}f(\sigma_i) \quad\cdots\cdots(10)$$

$$dl/dn=l^{m+1}f(\sigma_{if}) \quad\cdots\cdots(11)$$

とおき，これより応力振幅およびその平均応力がともに変動する実働荷重の場合の寿命推定式を導いた．ここに σ_{if} は応力振幅 σ_i，平均応力 σ_f の繰返し応力である．寿命推定式は次式となる．

$$1=\sum_{if}\frac{l_{0if}^{-m}-l_{fsif}^{-m}}{l_0^{-m}-l_f^{-m}}\cdot\frac{n_{if}}{N_{if}} \quad\cdots\cdots(12)$$

この式は各係数の値によっては直線被害法則に近似なものとなる．多段多重疲れ試験結果について，計算値と実験値がよく一致することが示されている．

なお式(10)については，多くの研究者がこの形の式を提案し，Weibull[37] は $m=-1$，Liu[33]，Frost と Dugdale[38]，Shanley[39]，Valluri[40] は $m=0$，Head[32] は $m=1/2$，Paris と Erdogan[41] および

McClintock[12] は $m=1$ となることを示している．

横堀[43]は，m は材料定数，温度などによって決定されるべきであることを導いており，さらに微視的な疲れき裂進展速度は K 値 (Stress Intensity Factor)[44]の関数になること，また疲れき裂に見られるearingの形成には数サイクルの応力繰返しが必要であることなどを実験[45]より示している．

(4) R.W. Lardner[46] は，l_0 を初期き裂長さ，$\sigma_0=C/\sqrt{l_0}$ を Griffith の理論によるそのときの破壊強さとすれば，一定繰返し応力 σ のもとでのき裂進展速度が，

$$dl/dn=f(\sigma)\cdot l^{3/2} \quad \cdots\cdots(13)$$

で表わされるとして，ランダム荷重のもとでの N サイクルまでの破壊しない確率 $P(N)$ を求めている．

$$P(N)\cong 1-Ae^{-h\sigma_0}(e^{N/A}-1) \quad \cdots\cdots(14)$$

(5) Irwin[47] はき裂の破壊条件式として K 値の概念を導入した．これはき裂の先端部における応力分布または変位分布を弾性論より決定し，応力発散(Stress Singularity) に関する尺度として，応力拡大係数 K 値を採用するものである．たとえば，無限板では，

$K=\sigma_y\sqrt{\pi l}$，l：き裂長さの 1/2

Paris[48], Smith[49] らはこの K 値を用いてランダム荷重に対する実験結果の説明をしている．

Paris によれば，

$dl/dn=CK_h^4$　　K_h：応力全振幅に対する K 値．

Smith によれば，

$K=\bar{\sigma}_h\sqrt{W\tan(\pi l/W)}$

$\bar{\sigma}_h$：ランダム荷重に対し応力波形がその平均値を横切る間のピーク応力の平均値，l：き裂長さの 1/2，W：板幅．

石田ら[50]は，$dl/dn=C\cdot K_{\max}^a\cdot K_{\mathrm{amp}}^b$ を与えている．

(6) Frost と Dugdale[38] は，実験式 $dl/dn=C_1l\sigma^3$ を求めている．

(7) Manson[51], Coffin[52] らは実験結果より，$\Delta\varepsilon_p\cdot N^w=\mathrm{const.}$，$\Delta\varepsilon_p$：繰返し塑性ひずみ，を与えている．この式は簡単なるため実働荷重に対してよく使われている．さらに，$\ln(l_f/l_0)=2.5C\Delta\varepsilon_pN^{2/3}$ を与えている．

(8) J.C. McMillan ら[53] は多くのプログラム荷重に対して，電子顕微鏡にてき裂の進展を調べ，Striationの間隔を測定し，次式を導いた．

$$dl/dn=C\cdot\sigma_a^n\cdot\sigma_{\max}^m,\quad (n=1\sim4,\ m=3\sim5) \quad \cdots\cdots(15)$$

山田・北川ら[54]はアルミニウム合金に対し，重畳波形に対する疲れ破面の観察より，繰返し応力波形とStriation がめいりょうな対応をしていることを明らかにしている．平均応力が変動する場合には各サイクルの応力振幅のみならず，その平均応力値を加えた極大値応力がき裂進展速度に対して大きい効果を与えること，また二次波の振幅がある限度以下であれば，それに対応する Striation は現われず，この場合もいわゆる無効振幅として扱われうることを示している．

Bates ら[55]の実験では，合金鋼，アルミニウム合金に対して，Striation の間隔を d とすれば，$d=5.4(K/E)^{2.1}$ としている．

3·5 き裂の発生過程とき裂の進展過程とに分けて導かれた疲れ被害法則　Grover[56] はき裂発生までの期間と破損までのき裂進展期間とに分けて，おのおのについて直線被害法則を適用し，全寿命の計算式を導いた．S.S. Manson ら[57] もこれと同一の考え方に基づき計算式を導き，2段2重繰返し応力の実験を行ない，所要の係数を見出した．すなわち，き裂発生までの繰返し数を N_0，き裂進展段階を $(\Delta N)_f$ とすれば（図2参照），全寿命 N_f は，$N_f=N_0+(\Delta N)_f$，かつ $(\Delta N)_f=PN_f^{0.6}$ で表わされ，P は実験より求める．実験では $P=14$ であった．両段階に対して直線被害法則を適用して次式よりそれぞれの寿命を計算する．

$$\sum(n/N_0)=\sum n/\{N_f-PN_f^{0.6}\}=1$$

$$\sum n/(\Delta N)_f=\sum n/PN_f^{0.6}=1$$

山田・市原[58]は実働重荷に対する応力波形の計数法としてレンジペアミーン法を採用し，さらに，繰返し応力およびその平均応力がともに，き裂の発生過程と進展過程とで異なった疲れ被害を与えると仮定し，平均応力を有する各応力振幅を両振り応力に換算し，これに直線被害法則を適用して，いわゆる二重直線被害法則の応用を試みた．かつ平均応力が長方形波状に変動する場合の疲れ試験を行ない，計算式が相当の精度をもって適用されうることを示した．

3·6 応力繰返し中の塑性ひずみに基づき導かれた疲れ被害法則　今まで述べた法則の多くが何らかの形で，ひずみエネルギの蓄積という概念から導かれているが，近年疲れ試験機の発達，計測技術の進歩により，実験的事実に基づいて信頼性のある法則，その諸係数が発表されている[59]-[61]．特に塑性疲れの場合の塑性ひずみの計測結果が多く発表され，さらにこれを一般の疲れの場合に拡張して法則が導かれている．菊川[61]，河本・鯉淵ら[62] は実働荷重に対する変動応力波形の計測法を提案しており，菊川ら[61]の方法による計算寿命は塑性疲れの実験結果とよく一致している．これは実働荷重に対する応力-ひずみ波形 ($\sigma-\varepsilon_p$ 波形) に対し，閉じたヒステリシスループを小さいほう

から順に一つずつカウントしてゆき，残った大きなヒステリシスループも当然カウントし，これらが順序に関係なく独立に疲れ被害を与えるとするものであり，このカウント法はレンジペア法[63]と称されるものと同一である．疲れ破壊の条件式は次式となる．

$$D=\int_0^{\infty}\left(\frac{\Delta\varepsilon_{pr}}{\varepsilon_0}\right)^a\left\{-\frac{dF(\Delta\varepsilon_{pr})}{d\Delta\varepsilon_{pr}}\right\}d\Delta\varepsilon_{pr}=1 \quad \cdots\cdots(16)$$

ここに，D：疲れ損傷値，$\Delta\varepsilon_p$：塑性ひずみレンジ，a：2に近い値をとる定数，ε_0：破断延性にほぼ比例する材料定数，$F(\Delta\varepsilon_{pr})$：$\Delta\varepsilon_{pr}$ の全寿命間の累積ひん度．

なお，$\Delta\varepsilon_{pr}=\Delta\varepsilon_0(\Delta\sigma_r/\Delta\sigma_0)^m$ と仮定し，式 (16) を応力に対して採用する．

中川[60]は変動ひずみ振幅下の疲れに対して，$(1/C_0)\int_0^N\varepsilon_{pa}^{\alpha}dn=1$ による計算寿命が実験値とよく一致することを示し，$\alpha=1.4$ を与えている．

白鳥[64]は破壊までの累積塑性仕事量と変動応力中の最大引張応力との間に繰返し荷重条件にはよらない一義的な関係があるとし，多段多重疲れの場合，破壊が p 段めに生ずるものとすると，それまでの累積塑性仕事量の総和が p 段めの最大応力によって定まるある値に達したとき破壊が生ずると仮定して次式を導いた．

$$\sum_{i=1}^{p}(n_i\cdot\Delta W_{ci})(\sigma_{\max i})^{\alpha}=c(\sigma_{\max p})^{\beta}\cdots\cdots(17)$$

かつ，多段多重疲れ試験を行なって，式が妥当であることを示している．

3·7 実働応力波の rms 値に基づく被害法則

Fuller[65] は広帯域ランダム荷重下の疲れ寿命曲線を求める方法を提案している．これは一定繰返し応力による S-N 曲線よりランダム荷重に対する σ-N 曲線（σ：root mean square stress, rms 値）を求めるものである．すなわちランダム荷重パワースペクトルより応力分布係数 β と感度係数 q を求め，S-N 曲線を用いて σ-N 曲線を作図により求める．S.L. Bussa ら[66]はさらに S-N 曲線として，Manson[67] が示した疲れ曲線 $\Delta\varepsilon=3.5\sigma_B/EN_f^{0.12}+D^{0.6}N_f^{0.6}$ を使用して，この Fuller の方法を採用し，疲れ寿命を推定している．かつ種々のランダム荷重に対して，計算値と実験値の比 $i=0.233\sim2.1$ であり，直線被害法則で計算した場合，$i=5\sim100$ であるのに比してこの方法が非常に正確であるとしている．

3·8 確率論より導かれた被害法則 横堀ら[68]は実働荷重に対し，確率過程論に基づいて $\sum_i n_i/N_i=1$ を導いた．Freudenthal[72] は信頼度関数 $R(N)=\exp[-(kN)^a]$ として，$\sum_i(p_iV_Rw_{si}/V_{si})^{a'si}=1$ なる非直線累積被害法則の式を導いている．さらに最小寿命の算定式を提案[73]している．

Lardner[74] は一般の広帯域のランダム荷重下において残留疲れ寿命の確率を計算する理論を提案した．すなわち疲れ損傷の成長はサイクルごとの不連続に生じるものでなく，連続的に生じているものとみなす．疲れ損傷は損傷速度の関数 F を，与えられた応力時間 $(S-t)$ 曲線に沿って積分することによって得られる．損傷 $\psi(t)=\int_0^t F[S(t),\dot{S}(t),\cdots\cdots]dt$．これより正規分布のランダム荷重に対して，損傷の平均値，標準偏差，残存寿命を算出することを提案した．

4. 実働応力の計数方法

その簡便さのために，直線被害法則がよく使用されているが，その計算の入力となる応力とその繰返し数は計数法によって大きく変動する．

従来主として提唱されている計数法はつぎのごときものである[75]~[79]．(1) ピーク応力計数法 (Peak Count Method)，(2) 平均応力経過ピーク応力計数法 (Mean-Crossing Peak Count Method)，(3) 応力幅計数法 (Range Count Method)，(4) 応力幅-平均応力計数法 (Range-Mean Count Method)，(5) 応力幅対計数法(Range-Pair Count Method)，(6) 応力レベル経過計数法 (Level-Crossing Count Method)，(7) 半波法 (Half-Wave Method)[76]，(8) 対応ピーク値法 (Peak Pair Count Method)[77]，(9) 履歴法 (Hereditary Method)[78]，(10) 片振幅計数法 (P_0-Method)[79]，(11) 区間最大片振幅計数法 (P_{30}, P_{100}-Method)[79]．

ピーク応力計数法については，さらに ① 変動応力波形全体の正負のピーク値の平均レベルを求め，この平均レベルの上側では正のピーク値のみを計数し，下側では負のピーク値のみを計数し，おのおのピーク値に相当する応力振幅がそれぞれ 1/2 回ずつ繰返すとする方法，② 上述の前段の操作後，正負それぞれの累積ひん度曲線を描き，平均レベルに関して相対応する正負の振幅の応力が繰返されるとする方法とがある．①の方法は中村・田中らの P_0-Method と同一であり，②の方法は山田・北川の対応ピーク値法とほとんど同一である．対応ピーク値法[77]は応力繰返しの計数区間を適当な累積繰返し数または時間間隔に区切り，②の方法を適用するものである．これらの方法については，プログラム荷重，あるいは重畳変動荷重の実験の結果について適用され，計算値と実験値とがよく一致すると報告されている例がある[77][83]．

前述の菊川ら[61]の方法は (5) の応力幅対計数法と同じ手法をとるものであり，すべての応力対を計数する

ことになる.

最近，河本ら[80]は上述の(5)の方法を採用し，さらに各対の繰返し応力振幅 σ_{ai} の中心位置の大きさを示す平均応力 σ_{mi} をも計数し，一定繰返し応力 $(\sigma_{ai}, \sigma_{mi})$ の破断繰返し数 N_i を推定し，これに直線被害法則を適用する方法（全波法）を提唱した．これらの各計数法による応力ひん度と前述の多くの疲れ被害法則とを組合わせて，実働荷重に対する種々の疲れ寿命算定方式を導くことができる.

実働荷重の応力変動波形は多くの機械，構造物について測定されているが，そのおのおのについては非常に差がある．これらのすべての変動荷重に対して適用できる疲れ被害法則の誘導は非常に困難と思われる．上述のように応力変動波形を単一の繰返し応力に分解することの物理的意味づけが現在ではいまだあいまいであり，連続的に考える解析方法なども進展されてよいであろう.

5. 考　　察

(1) 材料の疲れ機構について考えると，少なくとも微視的き裂が発生するまでの期間と，発生してからそれが進展する期間とでは，その疲れ機構が異なると考えられる．したがって，今後この二つの期間を区別して計算する方式がさらに進展されるべきであろう.

(2) またある荷重ひん度分布の場合には，低応力の繰返しによる強化作用のため，実働荷重の最高応力値で示される疲れ限度が上昇する場合がある．また切欠き試験片などでは，ひん度の小なる最大荷重のため，かえって応力分布が平均化され，圧縮残留応力が発生し，強化の影響が現われることも考えられ，これらとひん度曲線との関係が追究されるべきであろう.

(3) 疲れ被害法則も材料のミクロ的な見地よりなる疲れ理論をその基盤として確立さるべきは当然である．統一的な疲れ理論のいっそうの発展が望まれる．特に高応力と低応力による疲れ機構は相当異なるから，これらの相互の干渉効果などについて，その解明が望まれる．また，繰返し応力のために材料の時効が考えられ，特殊鋼などでは割れ先端での相の変化もみられ，これらの影響も知る必要があろう.

(4) が，現在のところ，疲れに関する理論は，転位論を始めとし，主として材料の局部的な考察を基盤としている．が，試験片，実際の部品などについては，その全体の応力分布，き裂の性質，材質の特性などを考慮する必要がある．たとえば，実働荷重の場合，軟鋼の平滑材で，最大のピーク応力が上下両降伏点の間にくるときは，一種の不安定現象を示し，その全疲れ寿命は非常に小となる[7][8]．平滑材と切欠き材とで，また鋼材とアルミニウム合金とでは，その巨視的き裂の発生時期が非常に異なる．当然，破断までの寿命の計算には，この要因を取入れるべきである．これらのことはミクロの立場のみならずマクロ的な研究が必要であることを示唆するものである.

(5) 直線被害法則式 (2) における C の値が従来，また現在も問題になっている.

これはもちろん，応力計数法によっても異なることであり，これとの関連のもとにさらに研究が進められる必要がある.

今まで行なわれてきた実働荷重の疲れ試験は，破壊までに繰返される応力の総繰返し数が約 2×10^7 回程度以下の場合である．これは実験期間などの制約があり，あまり長期の実験ができにくい事情があるからである．が，かかる応力範囲の実験では，どうしても大部分の繰返し応力または大部分の疲れ被害を与える応力が疲れ限度以上の応力となる．また実機のひん度曲線に相似のひん度分布を与えたと称する実験でも，上記のように比較的短期間で破壊する場合の実験では，どうしても疲れ限度以下の疲れに影響を与えると考えられる範囲の応力繰返し数 n_k が少ない（図2参照）．このとき，疲れ被害 $D=\sum(n_i/N_i)$ は大部分疲れ限度以上の応力で与えられる．実機の場合は，疲れ限度以下の繰返し応力が大部分である．したがって，従来の実験では実働荷重を再現したものとはいえない．実験室においても，疲れ限度以下の，しかも疲れを進行させ得る範囲の応力ひん度を与えた実験を行なうべきである．$C=0.01\sim0.001$ になるという報告[14][82]もある．筆者ら[84]が電磁式実働荷重疲れ試験機を使用し，走行中の自動車の板ばねより得た実働応力波形を再現して疲れ試験を行なった結果，疲れ限度以上の応力ひん度分布が全体の約2%の場合，修正直線被害法則を適用し，$0.7\sigma_w$ までの応力を計算に入れた場合，式(2)の $C=0.30\sim0.74$ であり，すべての応力を導入したときは $C=0.94\sim2.35$ であった．これらより疲れ限度以下の応力の実態を明らかにする必要があると思われる．このように実際の実働荷重について実験研究を進めると同時に，正確なる応力ひん度の測定，機械部品の他の要因などについて十分なる究明がなされることが望ましい.

現在 $C=0.5$[16]，$C\geqq0.3$[17] が妥当であるという説や設計基準がある．工学的見地からは，とにかく C の値を決めて，試験片による実験のみならず，多くの実際の部品についての破損例，事故例などより，C の値の最適値，あるいは安全率などを決定してゆくべきで

あろう.

(6) 実働応力の計数方法については，その応力の累積ひん度曲線の形，疲れ限度以上の応力のひん度，パワースペクトルの形状などによりそれぞれ考究されるべきであろう．またその繰返し応力波形（正弦波，三角波，長方形波など）の形の影響も大であり，材料によっては繰返し速度の影響もあり，多くの実験より決められるべきものであろう．

文 献

(1) A.A. Palmgren, *VDI-Z*, **68**-14 (1924), 339.
(2) 井町，航空機の負荷と所要強度，(昭 19)，90，山海堂.
(3) B.F. Langer, *J. Appl. Mech.*, **4** (1937), A-160.
(4) 西原・ほか2名，機械学会論文集，**10**-38 (昭 19-2)，I-23.
(5) M.A. Miner, *J. Appl. Mech.*, **12** (1945), A-159.
(6) J.B. Kommers, *ASTM., Proc.*, 30, Part II (1930), 368.
(7) 西原・山田，京都大学工学部紀要，**18**-3 (昭 31-6)，172.
(8) 山田，材料試験，**6**-45 (昭 32-6)，373.
(9) 西原・山田，機械学会論文集，**14**-47 (昭 23-10)，I-6.
(10) J. Schijve & F.A. Jacobs, *Tech. Report*, M. 2070 (1960), National Aeronautical Research Institute, Amsterdam.
(11) E.C. Naumann & R.L. Schott, *NASA, TN D*-1253 (1962).
(12) E.C. Naumann, *NASA, TN D*-1522 (1962).
(13) 田中，機械の研究，**21**-12 (昭 44-12)，1647.
(14) 中村・ほか2名，機械学会講演論文集，No. 203 (昭 44-4)，277.
(15) A.K. Head & F.H. Hooke, *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, (1956), 301.
(16) C.M. Harris & C.E. Crede, *Shock and Vibration Handbook*, **2** (1961), 24, McGraw-Hill.
(17) R.M. Mains, *Random Vibration*, (1958), Technology Press of MIT.
(18) H.T. Corten & T.J. Dolan, *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, (1956), 235.
(19) H.T. Corten, *Trans. SAE*, **72** (1961), 447.
(20) K. Koibuchi & M. Yamane, *Proc. JSME 1967 Semi-Int. Symp., Exper. Mech.*, **1** (1967-9), 81.
(21) A.M. Freudenthal & R.A. Heller, *J. Aero-Space Sci.*, **26**-7 (1959), 431.
(22) S.M. Marco & W.L. Starkey, *Trans. ASME*, **76** (1954), 627.
(23) *Metal Fatigue : Theory and Design*, (1969), 192, John Willey & Sons, Inc.
(24) R.R. Gatts, *Trans. ASME*, Ser. D, **83**-4 (1961-12), 529.
(25) R.R. Gatts, *Trans. ASME*, Ser. D, **84**-3 (1962-9), 403.
(26) P.J.E. Forsyth, *Phil. Mag.*, **2** (1957-4) 437.
(27) W.A. Wood, *Fracture*, (1959), 412, John Wiley & Sons, Inc.
(28) N.F. Mott, *Acta Metallurg.*, **6** (1958-3), 195.
(29) A.J. McEvily, Jr. & E.S. Machlin, *Fracture*, (1959), 450, John Willey & Sons, Inc.
(30) 平・阿部，機械学会論文集，**35**-272 (昭 44-4)，679.
(31) E.S. Machlin, *NACA TN*, No. 1489 (1948).
(32) A.K. Head, *Phil. Mag.*, **44** (1953-9), 925.
(33) H.W. Liu, *Trans. ASME*, Ser. D, **83**-1 (1961-3), 23.
(34) C.T. Yang, *Trans. ASME*, Ser. D, **89**-3 (1967-9), 487.
(35) T. Ishibashi, *Proc. 1st Japan Cong. Test. Mat.*, (1958), 37.
(36) T.D. Scharton & S.H. Crandall, *Trans. ASME*, Ser. D, **88**-1 (1966-3), 247.
(37) W. Weibull, *Acta Metallurg.*, **11** (1963-7), 745.
(38) N.E. Frost & D.S. Dugdale, *J. Mech. Phys. Solids*, **6**-2 (1958), 92.
(39) F.R. Shanley, *Rand Corp., Report*, P-350 (1953).
(40) S.R. Valluri, *Acta Metallurg.*, **11** (1963-7), 759.
(41) P. Paris & F. Erdogan, *Trans. ASME*, Ser. D, **85**-4 (1963-12), 528.
(42) F.A. McClintock, *Trans. ASME*, Ser. D, **82**-2 (1960-6), 423.
(43) 横堀，日本材料強度学会誌，**3** (昭 43)，1.
(44) 横堀・南部，機械学会講演論文集，No. 188 (昭 43-4)，85.
(45) 横堀，第14回材料強度と破壊国内総合シンポジウム論文集，(昭 44-3)，106.
(46) R.W. Lardner, *J. Mech. Phys. Solids*, **14** (1966-5), 141.
(47) G.R. Irwin, *Encyclopedia of Physics*, **6** (1958), Springer.
(48) P.C. Paris, *Fatigue—An Interdisciplinary Approach*, (1964), 107, Syracuse Univ. Press.
(49) S.H. Smith, *ASTM STP*, No. 404 (1966), 74.
(50) 石田・ほか4名，機械学会講演論文集，No. 213 (昭 44-10)，89.
(51) S.S. Manson, *NACA TN*, No. 2933 (1953).
(52) L.F. Coffin & J.F. Tavernelli, *Trans., ASM*, **51** (1959), 438.
(53) J.C. McMillan & R.M.N. Pelloux, *ASTM STP*, No. 415 (1967), 505.
(54) 山田・北川，材料，**18**-191 (昭 44-8)，689.
(55) R.C. Bates & W.G. Clark, Jr., *Trans. ASM*, **62** (1969), 380.
(56) H.J. Grover, *ASTM STP*, No. 274 (1960), 120.
(57) S.S. Manson, *Int. J. Fract. Mech.*, **2**-1 (1966), 327.
(58) 山田・市原，日本材料学会講演会前刷，(昭 45-5)，127.
(59) J. Morrow, *ASTM STP*, No. 378 (1964), 45.
(60) 中川・辻，機械学会論文集，**33**-255 (昭 42-11)，1734.
(61) 菊川・ほか3名，機械学会論文集，**35**-278 (昭 44-10)，2020.
(62) 河本・鯉渕，機械学会論文集，**30**-212 (昭 39-4)，475.
(63) J. Schijve, *Fatigue of Aircraft Structures*, (1966), 115, Pergamon Press.
(64) 白鳥，機械学会講演論文集，No. 213 (昭 44-10)，33.
(65) J.R. Fuller, *SAE J.*, **71**-6 (1963), 110. (*SAE Paper* 671C).
(66) S.L. Bussa & J. Der Hovanesian, *Proc. 3rd Conf. on Dimensioning*, (1968), 613, Budapest.
(67) S.S Manson, *Exper. Mech.*, **5**-7 (1965), 193.
(68) 横堀，材料強度学，(昭 39)，232，岩波書店.
(69) K. Ohji・ほか2名，*Trans. ASME*, Ser. D, **88**-4(1966-12), 801.
(70) 中沢・児玉，材料，**12**-117 (昭 36-6)，439.
(71) J. Kowalewski, *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), 60, Pergamon Press.
(72) A.M. Freudenthal, *ASTM STP*, No. 284 (1960), 207.
(73) A.M. Freudenthal, *ASTM STP*, No. 404 (1966), 67.
(74) R.W. Lardner, *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967-5), 205.
(75) J. Schijve, *Fatigue of Aircraft Structures*, (1961), 115, Pergamon Press.
(76) W.L. Starkey & S.M. Marco, *Trans. ASME*, **79**-6 (1957), 1329.
(77) 山田・北川，機械学会論文集，**32**-239 (昭 41-7)，1021.
(78) 河本・鯉渕，機械学会論文集，**30**-212 (昭 39-4)，475.
(79) 中村・田中，機械学会論文集，**32**-244 (昭 41-12)，1755.
(80) 河本・ほか2名，機械学会講演論文集，No. 700-3 (昭 45-4)，65.
(81) A.O. Payne, *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), 427, Pergamon Press.
(82) 中村，材料，**16**-161 (昭 42-2)，71.
(83) 山田・北川，材料，**13**-131 (昭 39-8)，619.
(84) 山田・北川，機械学会講演論文集，No. 198 (昭 43-9)，65.

539.432

展望

実働応力と実働荷重およびその因子*

星野次郎**

1. まえがき

近年の産業界の技術革新は，生産設備の集約化，生産資材の流通速度の向上などによって推進されており，その結果として生産資材を輸送する交通機関にも最近著しい変革が生じている．すなわち，船舶については石油精製設備の集約化，製鉄設備の拡充によって30万tを越える巨大タンカ，10万tを越える鉄鉱石運搬船などが建造されている．また，船舶自体においても輸送機関としてのか動率を向上させるため，鉱石と石油とを交互にとう載できる兼用船が生まれ，一方では経済の流通速度向上に対応して雑貨のコンテナ輸送専門の高速貨物船が作られている．

このような輸送手段の根本的変革によって船舶の性能に対する要求も逐年変化しており，数年前には高か動高収益を誇った船も，現在では旧式な低収益のやっかい物として扱われることが多くなっている．それゆえ，従来は30年またはそれ以上と考えられていた船舶の耐用年数も，最近では10年に短縮され，従来の無限寿命的な強度設計から有限寿命設計に基礎概念を変えて，製造価格を低減し，海運業界の競争に耐えうるものにすることが要求されている．

しかしながら他方，船舶の大形化によって運搬している荷物の価格は著しく増し，エネルギ源の輸送に際しては，船舶の主要構造物の致命的な損傷は計り知れない災害を広範囲に及ぼす危険がある．また，産業界の資材の流通速度の向上によって予備的に保有する原料ストックも生産量に比して著しく減少しており，船舶用機関の部分的な故障などによって運航の定時性が乱された場合には，その資材に依存する生産ルートは多大の被害を受けるおそれがある．

このように考えると，船舶関係の強度設計者は，合理的設計による価格の低減と，強度的な安全性の維持という相反した条件のなかで，今後の設計を試みることが要求されており，その結果としてきわめて精度の高い実働応力の推定と十分な信頼度を持つ実働荷重疲れのデータが必要とされている．

構造部材または機械部品の実働応力および実働荷重下における材料の疲れ強さについては，本特集号に示されているように多くの実測例と強度試験データとがあるが，数多くの船舶がさまざまな使用条件のもとでか動する場合に対して，実働荷重を考えて有限寿命設計を行なうことを考えると，なお多くの疑問が残されている．すなわち，具体的にいえば，数多くの対象物のなかから摘出した少数のサンプルについて，その対象物の全寿命に比べてきわめて短期間の応力実測を行ない，その結果から全対象物の全使用期間にわたっての実働応力を予測しうるかどうか，ということ，および強度については，きわめてまれに起こる異常な応力状態が全応力履歴の累積である疲れ強さにどのような影響を与えるか，などである．

筆者らは戦後20年間にわたって船舶用機械部品の損傷実例を調査[1][2]するとともに，大形鋳鍛鋼品の疲れ試験，および船舶の駆動軸系，ディーゼル機関のクランク軸などについて数多くの実働応力計測[3][4]を行ない，機械部品の損傷原因の解析を行なってきたが，実際に損傷を生じたものに対しては応力測定および強度試験を実施すればほぼ正確に損傷原因を解明できるが，より一般的に有限寿命設計の基準を作成するには，なお多くの困難があることを痛感している．その最大の理由は，それぞれ機種および使用条件の異なった対象物について，少数の実測例から普遍的な実働応力を推定し得ない点である．少数なサンプルから全体の挙動を推定するには統計的手法が有効なことはいうまでもないが，実働応力を対象とした場合にはその変動状態を支配する数多くの因子があるため，統計的には多変量解析の手法を用いる必要があり，今後の研究課題として注目に値するものである．このような統計的手法にいたる段階として，解析的に実働応力と実働荷重の対応関係を検討していくつか因子を抽出し，これらを組合わせて実働応力と実働荷重（ここでは実働外力と表現するほうがよいかもしれない）との対応関係を解析的に表わす方法が考えられる．この方法は筆者が実施した多くの実働応力測定結果を整理し類形化する手段として現在検討中のものであり，一般的な手法として確立されるにはいたっていないが，実働応力

* 原稿受付 昭和45年5月25日．
** 正員，日本海事協会技術研究所（三鷹市新川 6-20-1）．

下における疲れ破壊の挙動について研究している関係各位に，一つの概念として参考までに以下その大要を記述する．

2. 実働荷重と実働応力との対応関係

疲れ試験などの強度試験においては試験片の破壊起点の応力と荷重とが比例するように試験機の構造と試験片の形状が選ばれており，実働応力と実働荷重とは同じ意味で用いることができる．しかし，実際に使用される構造物および機械部品については，ある一点の応力状態が直ちに実働外力と比例することはまれであり，いくつかの影響因子によって変換された外力が応力状態を決定する．それゆえ，

〔実働応力〕=〔影響因子〕×〔実働外力〕

という関係を想定することが可能であり，かつこのような解析が可能な場合には，実働応力をそのまま統計的に解析することは不要となり，外力を統計的に解析するだけで十分であるため，データ解析の労力は著しく軽減されるとともに解析結果も普遍化しやすいものとなる．このような意味において，筆者が応力測定を行なった回転軸についての影響因子を考えると，つぎの4種に大別される．

2·1 構造物の形状による影響因子 構造物の変形に際しての加速度によって各部に生ずる慣性力を無視できる場合には，静的な場合に準じて力のつり合い条件から応力と外力の関係を求めることができ，一般に構造物に作用する外力をベクトル $\boldsymbol{F}$，対応点の変位をベクトル $\boldsymbol{u}$ で表わすと，構造物の剛性行列 $\boldsymbol{K}$ を用いて両者の関係は式（1）で示される．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots(1)$$

一方，構造部材のひずみ $\{\varepsilon\}$ と応力 $\{\sigma\}$（$\{\ \}$ は列行列を表わす）との関係は，材料特性を含む弾性行列 $[D]$ を用いて式（2）のように表わすことができ，式（1）と式（2）はひずみが変位を座標成分で微分したものであることによって結びつけられる．

$$\{\sigma\}=[D]\cdot\{\varepsilon\} \quad \cdots\cdots(2)$$

したがって，応力と外力との間には変位を微分してひずみを導くという操作があるため，構造物の応力（厳密にはひずみというべきであるが，応力とひずみは式（2）で変換できるので，ここでは応力と呼ぶ）を測定しても，その値から外力を求めることは困難である．それゆえ，普通には構造物のなかで経験的に予見できる破壊起点について実働応力を測定し，その結果を統計的に解析する方法が用いられる．しかし，この方法では外力の変動状態がはあくできないため，測定した期間内の状況が求められるのみであって，多自由度の外力が構造物の使用条件に応じて複雑に変化するような場合には統計的手法を用いても普遍化することは困難である．また，とくに問題となる点は，構造物の締付部のゆるみ，支持部の変形，部材寸法の衰耗などによる経時的変化を考えると，統計的解析も著しく困難なものとなる．

ただ，構造物が単純であって形状的な対称性のあるものについては，応力から直ちに外力を算定できる場合がある．すなわち，図1に示すように軸力 F，曲げモーメント M，ねじりモーメント T がそれぞれ独立に作用する円形断面の軸においては，曲げモーメント作用面上にひずみゲージ a1, a2 と b1, b2 を，軸方向と ±45° に t1, t2 と取付けると外力とひずみ測定値（ε_{a1}, ……, ε_{t2} と書く）は式（3a）の関係があり，これらを式（3b）によって演算し ε_a, ε_b, ε_t を求めるとそれぞれ外力 F, M, T に対応したものとなる．

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{a1}\\ \varepsilon_{a2}\\ \varepsilon_{b1}\\ \varepsilon_{b2}\\ \varepsilon_{t1}\\ \varepsilon_{t2}\end{vmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}\frac{1}{A} & \frac{1}{Z} & 0\\ \frac{1}{A} & -\frac{1}{Z} & 0\\ \frac{1}{A} & \frac{1}{Z} & 0\\ \frac{1}{A} & -\frac{1}{Z} & 0\\ \frac{1}{2A} & \frac{1}{2Z} & \frac{2(1+\nu)}{Z_P}\\ \frac{1}{2A} & \frac{1}{2Z} & -\frac{2(1+\nu)}{Z_P}\end{bmatrix}\times\begin{vmatrix}F\\ M\\ T\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots(3a)$$

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_a\\ \varepsilon_b\\ \varepsilon_t\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\times\begin{vmatrix}\varepsilon_{a1}\\ \varepsilon_{a2}\\ \varepsilon_{b1}\\ \varepsilon_{b2}\\ \varepsilon_{t1}\\ \varepsilon_{t2}\end{vmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}\frac{2}{A} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{Z} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4(1+\nu)}{Z_P}\end{bmatrix}\times\begin{vmatrix}F\\ M\\ T\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots(3b)$$

ここに E, A, Z, Z_P, ν はそれぞれ縦弾性係数，軸の断面積，軸の断面係数，軸の極断面係数およびポアソン比を表わす．これらのひずみ ε_a, ε_b, ε_t に $E/2$

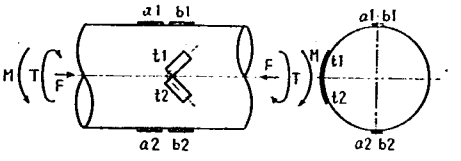


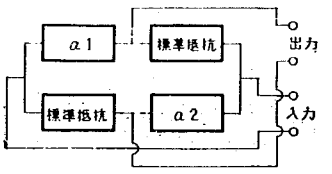
図1 軸表面のひずみゲージ取付位置

を乗じたものはそれぞれ垂直応力，曲げ応力，ねじり応力と呼ばれ，この軸に応力集中がある場合も形状係数はそれぞれの応力について定義されているため，破壊起点の応力状態を簡単に求めることができる．なお式(3 b)の演算は図2に示すひずみゲージの結線を表わしたものである．

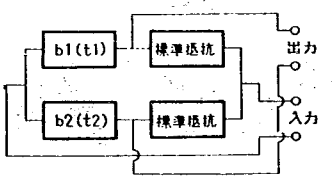
上に示した例からもわかるように，もし実働応力測定において応力と荷重との関係を式(3 b)のように対角化できれば，応力測定値から直ちに外力と応力集中部の応力状態とを求めることができるとともに，動的な計測点数を減らすことが可能であり，いずれの意味においてもきわめて有利である．それゆえ，複雑な構造物については，あらかじめ静的な測定で，予想される自由度の外力についてひずみとの関係を求め，これらを組合わせて外力と応力とが対角化できるような演算回路を考案することが必要である．

2·2　構造物の固有振動応答による影響因子　構造物が外力によって変形する際に，変形の加速度によって各部に生ずる慣性力が無視できない場合には，外力のほかに構造物の全体にわたって分布する慣性力を含めて平衡条件を求める必要があり，外力の周波数スペクトラムが問題になる．固有振動応答については本特集号に専門的な記事が示されているため，ここでは実働応力の測定に際して注意すべき点のみについて述べる．

a)　計測装置の周波数特性　実働応力を長期間にわたって多くの測定点について連続的に記録し，統計解析のデータを得るには，各測定点のひずみをある時間ごとにつぎつぎに読取って A-D 変換する方法が広く用いられている．この場合データを読取る時間間隔に制限があるため，測定点数と各測定点について復元



(a)　11形結線



(b)　1−1形結線

図2　ひずみゲージの結線

可能な最高周波数との積は一定しており，最近のデータ集録装置でも3000点·c/s 程度である．それゆえ，もし構造物に周波数の高い振動応答があると，記録装置の周波数帯域を越えたものは測定されないことになり，記録値と実際の応力値とは著しく異なったものになる．したがって，実働応力を長期間連続記録する場合には，対象物の振動応答をあらかじめ解析し，起こりうる最高の周波数を求め，これに若干の余裕を見て記録器の周波数帯域を定めなければならない．この点は疲れのように，応力の最高値が問題になる場合にはとくに重要であり，先に述べた応力と外力の対角化を計って計測点は可能な限り減少させ，完全に再現性のある実働応力記録を得なければならない．

b)　ステップ状の入力による応答　あらかじめ外力が周期的に変動することが知られている場合には，構造物の振動応答は強度設計に際して十分に検討されるが，一定の外力が常時作用しており，それがときどきステップ状に変化する場合のような過渡的な振動応答は見落されやすく，後に示すようにタービン，電動機，発電機などについてしばしば問題となる．構造物に外力がステップ状に作用すると，あらゆる周期の起振力が同時に加わった場合と同じように，構造物の固有振動数のすべてについて共振が生じ，非常に複雑でかつ周期性のない実働応力が発生する．この系の振動減衰率が大きければステップ応答による振動は短期間に減衰するため疲れ強さに対してそれほど問題にならないが，振動減衰率が小さい回転機械については，1回のステップ状の入力変化によって強度上無視できない程度の応力が数百回繰返されることがあり，実働荷重を実働応力に変換する際の影響因子として無視できない．

2·3　応力波形の変調による影響因子　構造物が静止している場合には，外力と応力とはフーリエ展開した成分の周波数について完全に一致しており，振動応答によって両者の大きさの割合と位相が変化するだけである．しかし構造物が周期的に運動する場合には外力の周波数と応力のそれとは一致しなくなるため，両者の対応関係を見出すためには若干の考慮が必要である．一般的に，それぞれ異なった周波数を持つ二つ以上の sin 波形を描く現象が相互に持ちうる関係はつぎの3種に大別される．

a)　加算的な関係　一般的に式(4)で示され，疲れ試験においては重畳波と呼ばれる．

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n} A_i \sin(\omega_i t+\delta_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに，A_i, ω_i, δ_i はそれぞれ N_0. i 成分の振幅，

角周波数および位相角を表わす．図3は A_0 が0，ω_1/ω_2 が0.1，A_1/A_2 が5の重畳波形の一例を示す．

b） 乗算的な関係（振幅変調）　一般的に式（5）で示され，n が2の場合を疲れ試験においては多重重複と呼ぶ．

$$G_{(t)}=\prod_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i t+\delta_i) \quad \cdots\cdots(5)$$

しかし普通に扱われるのは n が2で，式（4）の重畳波 $F_{(t)}$ を振幅変調（sin 項を乗ずる操作）する式（6）のかたちで表わされる．

$$H_{(t)}=\sin(\omega_k t+\varphi_k)\sum_{i=0}^{n} A_i \sin(\omega_i t+\delta_i) \quad \cdots\cdots(6)$$

図4(a),(b),(c) は式（6）の振幅変調波形を示し，(a) は A_1/A_0（変調率と呼ぶ）が0.43，(b)は A_1/A_0 が1.5，(c)は無限大（A_0 が0）の場合をそれぞれ表わしている．これらの波形は回転の角周波数が ω_k の回転曲げ疲れ試験において，A_0 に相当する一定の荷重と $A_1\sin(\omega_1 t+\delta_1)$ に相当する変動荷重を加えた場合の試験片表面上の1点に作用する応力に相当するものである．なお，重複荷重疲れ試験は普通 A_1/A_0 が1以下で行なわれるが，これが1以上になると荷重が反転した際に，正荷重で引張応力を受けた回転角度で圧縮応力を受けることになり引張応力と圧縮応力が交互に等間隔で繰返されない状態となる．また，回転曲げ疲れ試験の場合には A_r の代わりに M_r/Z（M_r は曲げモーメント，Z は試験片の断面係数）を代入すれば $H_{(t)}$ は応力を表わす．

いま，n が1の場合について $H_{(t)}$ を曲げ応力 σ_b で書くと式（7）のようになりこれを演算すると式（8）をうる．

$$\sigma_b=\frac{1}{Z}\sin(\omega_k t+\varphi_k)\{M_0+M_1\sin(\omega_1 t+\delta_1)\} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\sigma_b=\frac{M_0}{Z}\sin(\omega_k t+\varphi_k)+\frac{M_1}{2Z}\cos\{(\omega_k-\omega_1)t+(\varphi_k-\delta_1)\}-\frac{M_1}{2Z}\cos\{(\omega_k+\omega_1)t+(\varphi_k+\delta_1)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

これらの式から，外力の角周波数 ω_1 は，振幅変調によって，応力については $(\omega_k-\omega_1)$ と $(\omega_k+\omega_1)$ とに変換されることがわかる．したがって，回転する軸の表面で測定された曲げ応力を調和解析すると曲げモーメントの調和成分と違ったものが現われることになり，曲げ応力から外力を求めることは不可能になる．しかしこのような場合でも，図1に示したように互いに直交する方向の軸表面に2組の曲げ応力検出用のひずみゲージを取付け，それぞれの測定値を σ_{b0}，σ_{b90} として式（9）の変換を行なえば，静止した座標系上の曲げモーメントの変動状況をはあくできる．

$$\begin{vmatrix} M_V \\ M_H \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\omega_k t & -\sin\omega_k t \\ \sin\omega_k t & \cos\omega_k t \end{bmatrix}\times\begin{vmatrix} Z\sigma_{b0} \\ Z\sigma_{b90} \end{vmatrix} \cdots(9)$$

ここで M_V，M_H は静止座標系における垂直面内および水平面内の曲げモーメント成分，$\omega_k t$ はひずみ測定点を通る回転座標軸と静止座標系の垂直軸とのなす角度である．なお，M_V，M_H を $Z\sigma_{b0}$，$Z\sigma_{b90}$ に変換する場合は式（9）の逆行列を用いればよい．

式（9）において σ_{b0}，および σ_{b90} を式（7）または式（8）のものと考えれば，回転による座標変換は振幅変調の一種であることがわかる．

c） 関数的な関係（周波数変調）　一般的には式（10）で示され，角周波数 ω が周期的（ここでは正弦波）に変化する場合に現われる．

$$J_{(t)}=A_0\cos\{\omega t+\delta+m\sin(\omega_k t+\varphi_k)\} \quad \cdots\cdots(10)$$

すなわち，回転半径 r で W なる重量が ω の角周波数で回転する際のある方向の慣成力成分 P は角変位 θ と ω とが式（11a），（11b）で示される場合式

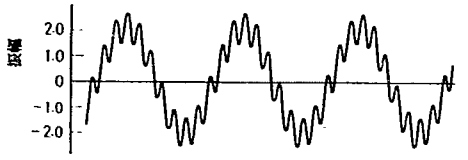
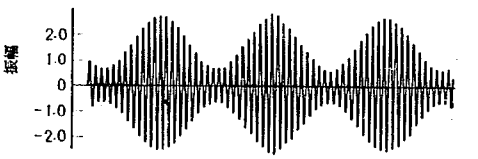
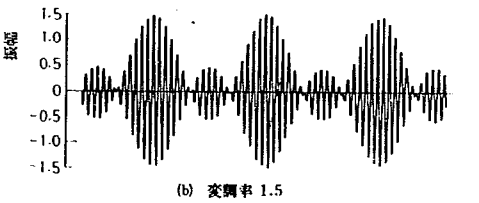


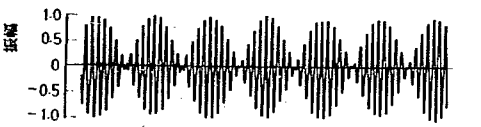
図3　重畳波形



(a) 変調率 0.43



(b) 変調率 1.5



(c) 変調率無限大

図4　振幅変調波形

(10) と同じように式 (12) で示される.

$$\theta=\omega_0 t+\delta_0+m\sin(\omega_k t+\varphi_k) \quad \cdots\cdots(11\,a)$$

$$\omega=\omega_0+m\omega_k\cos(\omega_k t+\varphi_k) \quad \cdots\cdots(11\,b)$$

$$P=\frac{W}{g}r\omega^2\cos\theta=\frac{W}{g}r\{\omega_0+m\omega_k\cos(\omega_k t+\varphi_k)\}^2\cos\{\omega_0 t+\delta_0+m\sin(\omega_k t+\varphi_k)\} \quad \cdots\cdots(12)$$

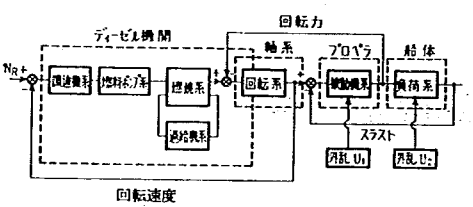
ここに，m は位相変調指数と呼ばれ，式 (11 a) から明らかなように，角変位の振幅である.

なお式 (12) は第1種の Bessel 関数 $J_{n(x)}$ を用いて書き表わすことができ，m が小さい場合（内燃機関のねじり振動の場合 0.05 rad 以下）高次の微小項を省略して式 (13) をうる.

$$P=\frac{W}{g}r\{\omega_0^2+2m\omega_0\omega_k\cos(\omega_k t+\varphi_k)\}\times[J_{0(m)}\cos(\omega_0 t+\delta_0)+J_{1(m)}\cos\{(\omega_0+\omega_k)+(\delta_0+\varphi_k)\}-J_{1(m)}\cos\{(\omega_0-\omega_k)+(\delta_0-\varphi_k)\}] \quad \cdots\cdots(13)$$

式 (13) から，周波数変調されたものがさらに振幅変調されて，P の周波数成分としては ω_0, $\omega_0\pm\omega_k$, $\omega_0\pm2\omega_k$ などが現われることがわかる.

2·4 制御系の応答による影響因子　動力源と被動機で構成される原動機械システムは何らかのかたちで自動的に制御を行なうような機構を付加されていることが多い．図5はディーゼル機関を原動機とする船舶の推進システムのブロック線図を示す．この系は入力信号 N_R によって基準回転数が設定され，この回転数に応じた回転力がディーゼル機関で作られ，軸系を経てプロペラにいたり，ここでスラストに変換されて船体を推進させる．この系には，概念的に軸系の回転数を調速機へ（回転数の平衡），プロペラの回転力をディーゼル機関へ（回転力の平衡），船体スラストをプロペラへ（船体抵抗とスラストの平衡），という3種のフィードバックループがあり，それぞれがオーバラップしている．一方，この系には外乱 U_1 としてプロペラ部のきっ水変化（船体のピッチング運動と波浪の関係）によって回転力をスラストに変換する関数関係が変わるもの，U_2 として波浪と船体運動との関係によって船体抵抗が変化するものなどが作用する.



N_R：設定基準回転速度

図 5　船舶推進系のブロック線図

この系はフィードバックループによって閉じているため，外乱 U_1, U_2 の影響は系のすべての部分に及び，この系全体として定義される応答特性によって支配される．それゆえ，系の各部材に作用する力は系の応答特性によって外乱が変成されたものとなる．図5に示したおのおのの系については応答特性が解明されていないものもあり，現状では全体としての伝達関数を求めることはできないが，たとえ概念的であっても，一つの系の全体について広域的な応答特性を考えることは，実働応力を解析する場合にきわめて有効な手段である.

3. 影響因子の実例

上に述べたそれぞれの影響因子について，筆者が行なった各種の機械部品の実働応力測定結果から，二，三の実例を示す.

3·1 形状的な影響因子　図6は四サイクル，6シリンダ，2 100 PS，600 rpm，シリンダ直径 310 mm，ストローク 380 mm のディーゼル機関の自由端側から4番めのクランクスローの自由端側すみ肉部ピン下（ピンすみ肉部の表面でピンとジャーナルの中心線を含む平面と交わる線上の部分）の曲げ応力とねじり応力を示す．この場合には，ピン下の子午線方向と接線方向に曲げ応力検出用ひずみゲージ各1枚を，子午線と ±45° 方向にねじり応力検出用ひずみゲージ各1枚を，それぞれ取付け2ゲージ結線[3]したものであり，図からもわかるように，外力すなわち曲げモーメント

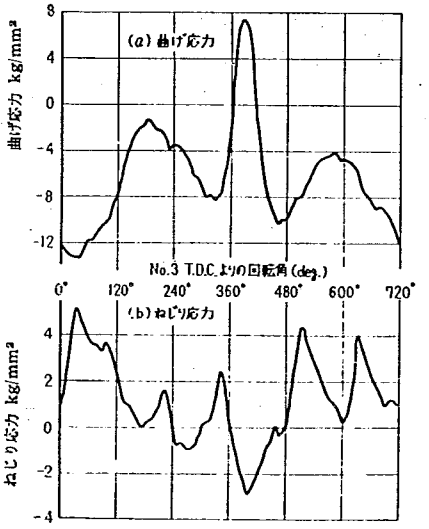


図 6　クランク軸ピン下すみ肉部の応力

とねじりモーメントについて完全に対角化した実働応力が得られており，曲げモーメントとねじりモーメントを解析的[3]に求めれば実働応力を求めることができる．このような方法は，二つの計測点でクランク軸に作用する力を求めうるため数多くの実測[4]に際して用いられている．ただし，クランク軸のピンすみ肉部に作用する曲げ応力はクランク腕厚さの中央で考えた曲げモーメントと対応[3]するが，この曲げモーメントはさらに図7(a),(b),(c)に示す3種の要素に分割することができるため，曲げモーメントが図の(a),(b),(c)のいずれによるものかは判別できないことになり，(a),(b)は解析的に求められるが，(c)は実測値と解析的に求めた値との誤差となる．

3·2　電動発電機のステップ状負荷変動による振動応答　図8は三相 60 cycle, 450 V, 1 300 kVA の発電機2台を直結し，片方を同期電動機として用いた試験装置において 300 V の出力端子電圧に励磁電流を調整した状態で出力端子を短絡した場合の電流（一相のみを示す）と軸トルクの変動状態[5]を示している．短絡によって瞬間的に 3 000 A を超こす電流が流れるが電気的な制御回路が作動し 0.25 秒程度で標準状態（450 V に対し 1 300 kVA の出力となるような負荷に 300 V を加えた場合）に復帰するが，ねじり応力は標準状態のトルクに対する値 0.37 kg/mm² の約5倍（片振幅）が瞬間的に生じその後2個の回転子と軸で形成される2質点振動系のねじり振動がしだいに減衰しながら約3秒間繰返される．これは電気的なステップ応答と機械的なそれとが加重されたものと考えられ，瞬間的な大電流によって 60 cycle の起振トルクが生じ，振動系の固有振動数 53 c/s に近いため，著しく大きな振動を生じたものと思われる．またこの振動系の振動減衰率 ζ が 0.002 程度であるため長く振動が持続されたものである．この例のように振動減衰率の小さい回転機械のステップ状の負荷変動は実働応力として無視できない．また，鍛造のドロップハンマの軸などに見られる非常に高い周波数のインパルス状の応答は衝撃的な荷重を受ける機械部品にしばしば現われ，実働応力として振動応答を考慮しなければならない．

3·3　プロペラ軸の曲げ応力における振幅変調の影響因子　図9は 34 000 重量 t の鉱石運搬船（主機関二サイクル，6シリンダ，13 800 PS, 119 rpm, プロペラ5枚羽根）の推進軸系に対する，曲げ応力（σ_1, σ_2, σ_3, σ_4），ねじり応力 τ，スラスト t の測定方法を示す[6]．図10は測定結果の一例を表わしている．このような測定結果についてプロペラ圧入部端（図9の記号①，②）の曲げ応力 σ_1, σ_2 に軸の断面係数を乗じて曲げモーメント M_1, M_2 として，種々の回転数におけるものをフーリエ解析すると，表1のようになる．一方，式 (9) を用いて静止座標上の曲げモーメント M_V, M_H に変換してフーリエ解析すると表2のように表1と異なったものになる[7]．すなわち，振幅の大きい 0, 1, 4, 5, 6 の次数について比較すると，$(M_1)_1$ と $(M_2)_1$（括弧外のサフィックスは次数を示す）はほぼ等しく，低回転では $(M_V)_0$ が高回転では $(M_H)_0$ が振幅変調されており，また $(M_1)_4$, $(M_1)_6$, $(M_2)_4$, $(M_2)_6$ はいずれもほぼ等しく $(M_V)_5$ のほぼ 1/2 になっている．これらのことから，プロペラ軸に作用する曲げモーメントは静止座標上の0次と5次が主体であり，0次はプロペラの自重による正の曲げモーメント[7]と，回転数の上昇につれて絶対値が増すスラストの偏心による負の曲げモーメントから，また5次は船尾の水流の乱れをプロペラの羽根が横切るときに生ずる垂直面内の正方向の曲げモーメントから，それぞれがなっており，これらが軸の回転によって振幅変調されて M_1, M_2 として現われていることがわかる．

3·4　主機関の制御系応答特性による影響因子　上に示した船舶で北太平洋を航行中に波高 14 m の荒天に遭遇したときの軸系各測定点の応力変動状況[6]を図11に示す．曲げ応力（σ_1, σ_3, 測定点 ①, ③），ねじり応力(τ)，スラスト (t) ともプロペラのレーシング

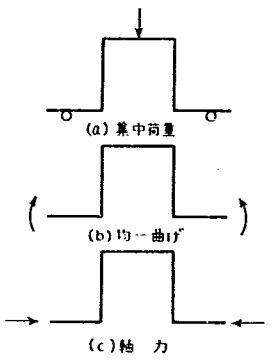


図7　クランク軸の荷重モード

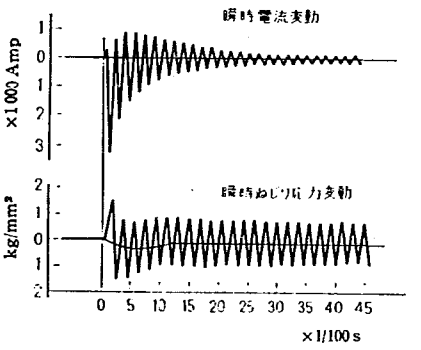


図8　発電機軸のステップ的な応答

表 1　回転座標系上での曲げモーメント成分 M_1, M_2

	軸		$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$		$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$		$n=10$		$n=11$		$n=12$	
	rev/min	X_0	X_1	α_1	X_2	α_2	X_3	α_3	X_4	α_4	X_5	α_5	X_6	α_6	X_7	α_7	X_8	α_8	X_9	α_9	X_{10}	α_{10}	X_{11}	α_{11}	X_{12}	α_{12}
M_1	31.6	0.0	15.1	98	0.4	− 1	0.1	− 15	0.2	− 52	0.4	123	0.4	107	0.1	168	0.1	−168	0.1	−103	0.1	79	0.1	88	0.1	150
	56.0	0.0	10.7	99	0.8	−177	0.3	− 81	0.4	83	0.1	− 8	1.0	52	0.4	−109	0.2	113	0.3	133	0.3	100	0.2	81	0.1	30
	75.6	0.0	10.3	113	1.2	− 56	1.4	− 34	0.5	−149	1.2	− 22	1.1	146	0.7	40	0.6	85	1.0	80	0.2	44	0.7	59	0.2	69
	95.4	0.0	10.0	144	0.7	−130	0.1	135	2.9	−115	0.5	12	1.5	− 82	0.2	39	0.3	20	0.4	21	0.1	140	0.3	59	0.1	162
	100.4	0.0	11.0	160	0.9	−168	0.6	132	5.1	−104	0.8	22	1.5	− 92	0.9	41	0.9	11	2.0	33	0.7	− 6	1.4	16	0.4	− 69
	106.0	0.0	7.6	160	1.6	− 55	2.2	− 48	7.5	−125	4.0	− 16	4.1	− 77	1.9	33	2.4	108	1.1	− 15	0.7	113	0.3	55	0.8	106
	119.0	0.0	16.2	−169	1.6	166	2.1	121	10.0	−101	0.2	176	10.7	− 83	1.6	− 31	1.4	−128	1.0	43	0.9	−131	1.0	64	0.5	− 49
	121.5	0.0	13.7	−168	4.7	77	3.7	−178	13.1	− 69	4.2	11	10.8	− 71	1.3	− 88	1.3	− 118	3.0	61	1.5	−147	2.7	146	1.0	− 16
M_2	31.6	0.0	12.7	−176	0.6	38	0.3	− 52	0.2	−107	0.2	62	0.2	156	0.1	−102	0.1	160	0.1	−175	0.1	− 31	0.1	176	0.1	171
	56.0	0.0	10.0	−170	0.5	87	0.4	− 45	0.7	− 39	0.4	−170	0.4	46	0.2	− 29	0.1	−135	0.2	63	0.1	10	0.1	119	0.1	60
	75.6	0.0	11.2	−157	0.7	19	0.2	− 17	1.6	97	0.1	−121	1.2	−140	0.4	156	0.3	− 9	0.6	− 45	0.3	55	0.3	116	0.4	− 31
	95.4	0.0	10.2	−130	1.3	8	0.6	111	2.6	148	0.6	−122	0.7	0	0.4	146	0.4	− 94	0.3	− 92	0.1	87	0.2	127	0.1	−122
	100.4	0.0	10.7	−118	0.4	− 47	0.8	59	5.3	178	1.1	167	1.8	− 15	0.5	18	0.6	82	0.5	− 41	0.4	− 78	0.4	125	0.3	118
	106.0	0.0	9.0	−124	1.1	61	0.7	118	7.0	125	2.4	− 68	4.6	− 30	0.4	72	0.2	−166	1.1	−124	0.8	67	1.0	2	0.1	− 88
	119.0	0.0	16.2	− 91	1.9	38	1.3	−135	11.2	179	0.9	33	9.2	14	1.5	76	1.4	21	0.3	6	0.8	−148	0.4	173	0.7	38
	121.5	0.0	14.9	− 85	0.4	63	1.7	− 17	12.2	179	1.6	155	11.2	0	2.0	− 26	0.5	− 51	1.1	46	0.8	−115	0.7	−128	0.8	−128

表 2　静止座標系上での曲げモーメント成分 M_V, M_H

	軸		$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$		$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$		$n=10$		$n=11$		$n=12$	
	rev/min	X_0	X_1	α_1	X_2	α_2	X_3	α_3	X_4	α_4	X_5	α_5	X_6	α_6	X_7	α_7	X_8	α_8	X_9	α_9	X_{10}	α_{10}	X_{11}	α_{11}	X_{12}	α_{12}
M_V	31.6	13.8	0.4	− 33	1.3	122	0.2	108	0.3	52	0.2	44	0.4	141	0.2	143	0.0		0.1	−155	0.0		0.2	91	0.0	
	56.0	10.2	0.1	−166	0.1	116	0.8	−175	0.3	51	1.0	46	0.5	− 92	0.7	82	0.0		0.2	101	0.3	112	0.2	77	0.1	82
	75.6	9.9	0.9	− 62	1.2	− 50	0.8	− 13	1.2	− 23	1.9	163	0.9	10	0.1	−153	0.3	81	0.5	59	0.1	60	0.2	−154	0.6	49
	95.4	6.2	0.9	− 97	0.2	− 66	0.3	138	0.4	158	3.7	−109	0.7	9	0.3	− 82	0.0		0.4	9	0.6	27	0.1	157	0.1	−158
	100.4	4.4	0.6	−158	0.7	−114	0.8	163	1.1	92	6.8	− 98	0.7	− 27	1.0	9	1.3	43	0.3	11	2.1	29	0.7	− 9	0.6	− 1
	106.0	3.8	1.4	− 45	2.2	− 58	1.6	− 65	2.4	− 58	10.7	−122	4.0	5	1.8	45	1.0	49	1.2	35	1.3	− 38	1.1	129	0.8	134
	119.0	−1.4	0.6	−106	0.9	−159	2.7	144	0.1	67	20.3	− 88	1.1	− 11	2.1	−106	0.4	− 6	1.2	175	1.3	63	1.1	− 75	0.5	36
	121.5	−2.1	2.3	72	2.1	−131	3.7	39	2.0	67	23.3	− 80	2.3	− 55	1.2	− 12	2.0	37	1.3	−148	2.9	112	0.5	−103	1.7	139
M_H	31.6	− 1.5	0.4	57	1.4	24	0.3	− 12	0.2	−104	0.4	−153	0.2	29	0.1	29	0.1	− 87	0.1	130	0.1	175	0.1	− 97	0.0	
	56.0	− 1.7	0.1	− 76	0.6	− 16	0.4	83	0.2	−147	0.3	43	0.2	− 79	0.5	31	0.2	−177	0.0		0.3	86	0.2	32	0.1	69
	75.6	− 4.2	0.9	29	0.3	73	0.4	110	0.1	−128	1.0	173	0.7	−160	0.3	167	0.4	−121	0.5	16	0.3	3	0.2	3	0.3	75
	95.4	− 8.0	0.9	− 7	0.7	142	0.7	34	0.4	132	2.0	134	0.5	−139	0.5	−160	0.2	175	0.4	− 87	0.2	−129	0.0		0.2	− 25
	100.4	− 9.9	0.6	− 68	0.9	139	0.3	−119	1.0	105	3.5	173	0.5	160	0.6	85	0.4	67	0.2	− 5	0.5	− 23	0.3	− 70	0.5	− 67
	106.0	− 7.3	1.4	45	1.1	122	1.0	47	0.4	87	4.5	104	2.3	−105	2.4	−122	0.7	− 54	1.0	34	0.9	− 94	0.4	69	0.9	− 47
	119.0	−16.1	0.6	− 16	3.2	−159	0.6	62	0.8	15	2.9	106	2.0	61	0.4	35	0.6	135	0.2	59	0.2	−148	0.5	113	0.3	− 6
	121.5	−14.1	2.3	162	2.8	− 87	3.4	42	4.1	95	1.6	−162	2.5	− 60	2.6	− 61	0.9	138	0.9	−101	1.9	− 69	0.7	− 1	0.6	107

注：X, α はそれぞれ調和成分の振幅 (t-m) および位相 (degree) を表わす．

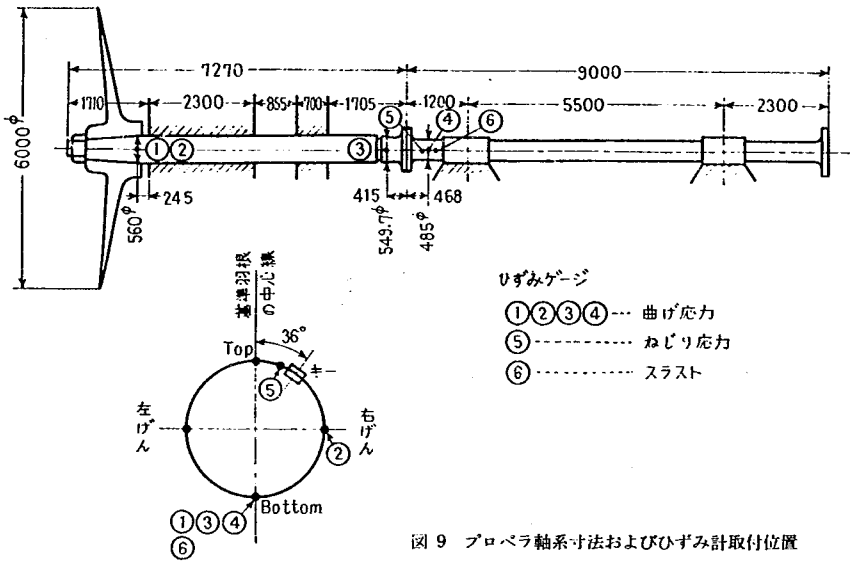
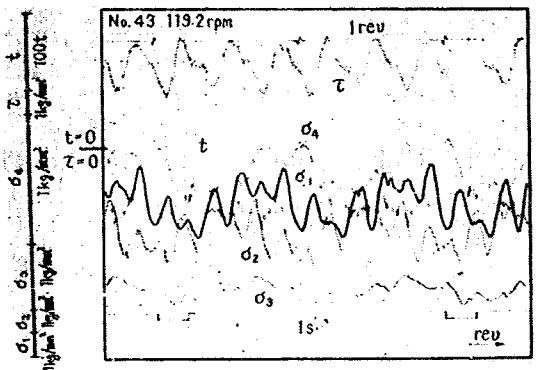


図 9 プロペラ軸系寸法およびひずみ計取付位置



σ_1：曲げ計測点 (1)，　σ_2：曲げ計測点 (2)
σ_3：曲げ計測点 (3)，　σ_4：曲げ計測点 (4)
τ：ねじり計測点 (5)，　t：スラスト計測点 (6)

図 10 プロペラ軸の応力波形

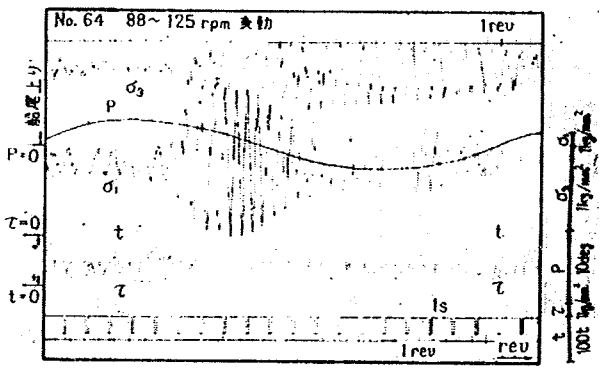
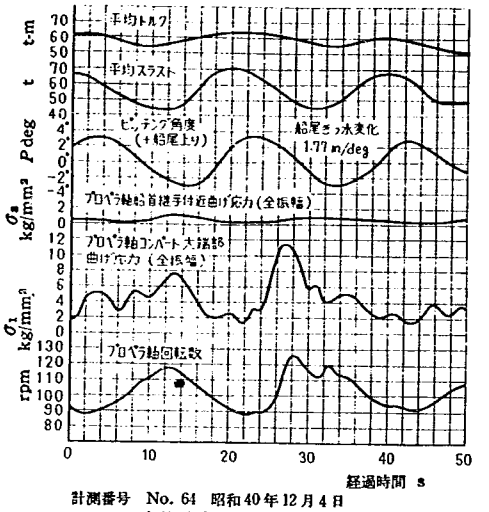


図 11 荒天時のプロペラ軸応力の変動状況

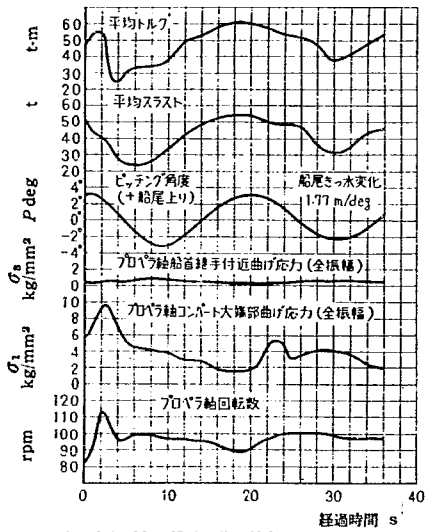
によって激しく変動しており，この状態における船体のピッチング角度が P として示されている．図 12(a) は図 11 から曲げ応力全振動，軸トルクおよびスラストの平均値，ピッチング角度，軸の回転数を読取り時間的な経過を示している．この場合は，機関調速機の設定点を上げて定トルク制御に近い状態になっている．図 12(b) はほぼ同一な海況で機関調速機の設定点を下げ定回転制御に近い状態とした場合である．両者を比較すると，調速機の感度が低い(a)の場合は，軸のトルクとスラストの変動は少ないが，曲げ応力はきわめて大きく，また回転数の変動も大きい．これに対して調速機の感度を高めると，逆にトルクとスラストの変動が増して，曲げ応力と回転数の変動は少なくなる．このように，外乱（図 5 の U_1）はほぼ同じであっても制御系の応答特性を変えることにより，系内の各部品に及ぼす実働応力は大幅に変化するものであり，この傾向は応力要素ごとに異なって現われるため，どの応力要素によって疲れ破壊が生ずるかを十分に考えて系の応答特性を選択する必要がある．

4: 影響因子を考慮した実働応力のシミュレーション

上に述べたことを要約し，測定された実



計測番号　No. 64　昭和40年12月4日
午前10時42分（往航バラスト状態）
曲げ応力が最大値を示した例
調速機指針：7.0，燃料指針：5.3
(a)

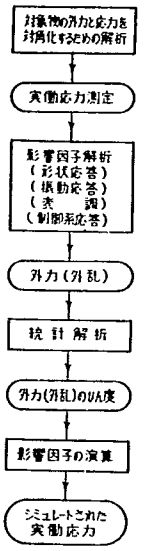


計測番号　No. 65-4　昭和40年12月4日
午前10時55分（往航バラスト状態）
主機調速機特性が曲げ応力に及ぼす影響を調査のため，No. 64 の場合より，特性を敏感にした例
調速機指針：6.0，燃料指針：5.3
(b)

図 12　軸系の諸計測値の時間的変化

働応力から疲れ試験の実働荷重をシミュレートする方法を考えると，図13に示すようになる．

すなわち，まず対象物について静的な応力解析を行なって応力と外力を対角化して実働応力測定を行なう．つぎにその結果を解析して影響因子を線形結合のかたちに分離して求め，外力または外乱を推定する．さらにこれらを統計的に解析し個々の外力，外乱のひん度を求める．最後に，外力，外乱のひん度を影響因子によって逆変換して実働荷重を導く，というものである．このような方法は概念的には可能であるが，実際にシミュレートを行なうには，影響因子の解析およびこれを用いての逆変換に多大の困難があり，今後の研究課題として多くの問題が残されている．筆者がこのような方法を検討している最大の理由は，船舶用機械などのように多機種少量生産の場合にも適用できるような実働応力の類形化が必要なためである．すなわち，航空機，自動車，鉄道車両などのように少機種多量生産の場合には1機種の1サンプルについて長期間の実働応力計測を行なえばただちにその機種に対する実働応力がはあくされ，これを疲れ試験にシミュレートすれば高精度の有限寿命設計が可能である．しかし，多機種少量生産の機械に対してもまえがきで述べたような理由で有限寿命設計が要求される現時点においては，多少精度が低下してもそれは安全率で補うことにして，影響因子を用いて実働応力を類形化する方法を考えなければならない．



実働応力から疲れ試験の実働荷重をシミュレートする場合のフローシート

図 13

5. むすび

本稿を終わるにあたり，筆者らの行なった数多くの応力実測に対し，積極的に協力をいただいた，船主，造船所，機械メーカの関係各位に謝意を表するとともに，本稿の作成にあたって専門的な見地から助言をいただいた，日本海事協会技術研究所の佐々木，岡，梅野各君にお礼を申し述べるしだいである．

文　献

(1) 星野，機械学会第150回講習会教材，(昭 36-5)，79.
(2) 学振129委員会，金属材料の組織および欠陥と強度資料集成，(昭 45-8)，丸善．
(3) 星野，機械学会誌，70-581 (昭 42-6)，827.
(4) 新井，舶用機関学会誌，4-10 (昭 44-12)，28.
(5) 飛田，舶用機関学会第9回講演会前刷，(昭 45-5)，155.
(6) J. Hoshino & H. Kume, *Japan Shipbuilding & Marine Engng.*, 3-3 (1968-5), 23.
(7) J. Hoshino & H. Kume, *Advance Copy of International Marine and Shipping Conf.*, Section 15 (1969-6), 1.

技術論文

539.432

ランダム荷重による疲れ寿命へのパワースペクトルの影響について*

菊川　真**，城野政弘**，溝口孝達***

1. まえがき

道路のでこぼこ，突風，波浪などにより自動車，航空機，船舶の構造部材が受ける荷重のような，いわゆる不規則荷重には，構造の減衰が小さくて強く共振する場合のように，含まれる周波数成分の範囲，すなわち帯域幅が十分狭く，ほぼ一定の周波数の振動の振幅が比較的ゆっくりランダムに変化する形となる不規則度の小さい狭帯域ランダム荷重の場合もあるが，周波数の帯域幅が広い不規則度の大きい場合も含まれるので，任意のパワースペクトル分布をもつ一般的なランダム荷重による疲れの問題の解決が要求されている．しかしこの問題を，このような不規則な荷重波形をそのまま忠実にシミュレートした実働荷重疲れ試験のみによって直接一つ一つ実験的に解決して行くことは，試験コストの点で実際上なかなか困難と思われる．なぜならば，これには広帯域の荷重波形を忠実に再現する必要があり，共振の利用できる狭帯域のランダム荷重疲れ試験，さらにこれを近似した，振幅をそのひん度分布にほぼ等しく変動させたプログラム荷重疲れ試験とくらべ，試験装置がはるかに高価となり，試験所要時間も帯域幅とともに長くなるからである．また理論的にも狭帯域の場合には，疲れにおもに関係する荷重波形の因子は振幅だけで，Miner 則の成否やその修正など累積損傷則のみが問題となるが，広帯域の不規則な荷重波形では，その前にいわば不規則さの影響の問題，すなわち不規則な荷重波形のどのような因子を疲れ損傷を支配するものとして取ればよいかのいわゆるカウント法の問題を解決する必要がある．これには当然広帯域のランダム疲れ試験が必要で，実験的にはかなりめんどうであるが，荷重波形の不規則さの影響の大きさは，後にもわかるようにあまり大きくない．そこでまず合理的なカウント法を求めておいて，これにより諸種の場合について荷重波形の不規則さの影響をあらかじめ計算して見積っておけば，これを補正して不規則な広帯域の場合を狭帯域の実験でおきかえることは，精度の点から比較的容易である．筆者らはさきに基礎的な実験により累積損傷則とともにカウント法について以下に述べる結論を得たので，本論文ではこれによる不規則さの影響の具体的な計算方法と若干の計算例について述べる．

2. ランダム荷重疲れに関する筆者らの実験結果のまとめと本研究の目的

ランダム波形において，あるレベルを波形が一方向へ経過するひん度，すなわち経過ひん度が一定のガウス分布をするようないわゆるガウス性定常ランダム波形は，実際にも短時間の荷重波形をとれば近似的にはしばしばあらわれる．筆者らは，さきに発表したように[1]，帯域幅を変えたガウス性定常ランダム荷重による小形平滑試験片の引張圧縮疲れ試験を，これに近い経過ひん度分布をもつ振幅変動プログラム荷重試験，ならびに一定振幅荷重試験とともに熱間圧延のままの二種の炭素鋼 S 20 C, S 40 C について行ない，試験中微小繰返し塑性ひずみを測定して，応力と疲れ寿命の関係を塑性ひずみと疲れ寿命，応力と塑性ひずみの関係に分けて明らかにし，つぎの結論を得た．

1) S 20C については疲れ損傷を支配するおもな因子として，図 1 の応力-塑性ひずみ履歴曲線で閉ループの幅に対応する，塑性ひずみレンジペア $\Delta\epsilon_{pr}$ をとればそのほぼ二乗に比例した疲れ損傷が線形に累積するとの仮定，すなわち D を疲れ損傷値とすると $D=\sum(\Delta\epsilon_{pr}/\epsilon_0)^a=1$ ($a=1.9$, $\epsilon_0=0.59$, S 20 C) が低繰返し数領域における[2]と同様，上記すべての場合に対して成り立ち，塑性ひずみレンジペアの損傷の重みをつけた全寿命間の平均値 $\Delta\tilde{\tilde{\epsilon}}_{pr}$ を用いれば図 2 (a) に示すように，これらの実験結果がすべて一直線上にのる．さらに図 1 (d) のばね-スライダモデルで漸近的に成立することが証明され[1]，実際の材料でもほぼ成り立つごとく，各閉ループの形が位置に関係せずループの大きさのみによって定まるとすると，塑性ひずみレンジペア $\Delta\epsilon_{pr}$ は不規則度など応力波形のいかんに関係な

* 昭和 43 年 11 月 8 日　第 18 回応用力学連合講演会および昭和 45 年 4 月 2 日　第 47 期通常総会講演会において講演，原稿受付　昭和 45 年 6 月 16 日．

** 正員，大阪大学工学部（吹田市字山田上）．
*** 正員，大阪大学大学院．

く応力レンジペア $\Delta\sigma_r$（図1参照）のみの関数となり，応力あるいは荷重についてもレンジペアカウントをすればよく，広帯域ランダム荷重を応力レンジペアのひん度分布の等しい狭帯域ランダム荷重もしくはプログラム荷重で置き換えてよいことがわかる．

2) 実際の材料では疲れにともなう軟化，硬化があるが，それがゆるやかで，かつランダム荷重が定常でさえあれば，応力レンジペア，塑性ひずみレンジペアの全寿命期間での累積ひん度分布を考え，累積ひん度の等しい点の値を対応させれば，疲れ損傷に関し等価な応力，ひずみの平均的な関係が得られる．この実験ではランダム荷重の帯域幅に関せず，十分高いレベルまで近似したプログラム荷重の場合を含め，$\Delta\varepsilon_{pr}=\Delta\bar{\varepsilon}_0(\Delta\sigma_r/\Delta\bar{\sigma}_0)^{\bar{m}}$（$\bar{m}$=5.8, S 20 C）と表わせる．なおこの関係は実験した範囲では応力レベルによらないようである．しかし一定振幅荷重のときの等価な塑性ひずみ振幅，すなわち a 乗平均値，$\Delta\bar{\varepsilon}_p/2$ と応力振幅 σ の関係

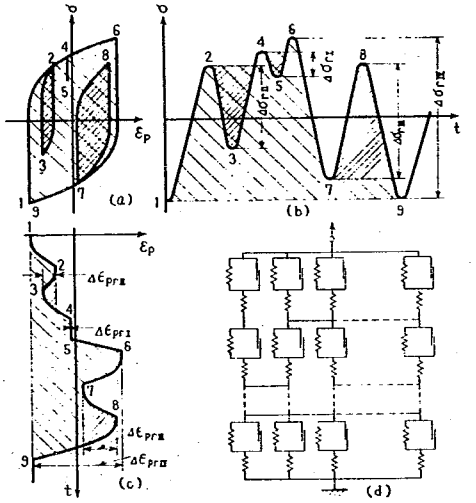


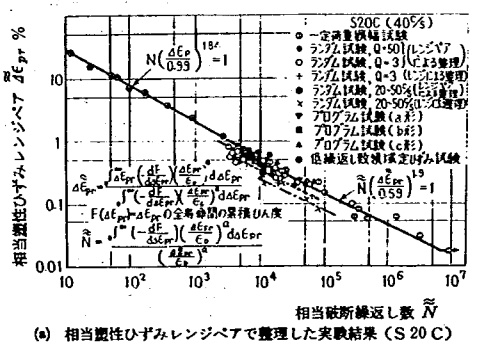
図 1　応力-塑性ひずみ履歴曲線とレンジペアカウント

$\Delta\bar{\varepsilon}_p=\Delta\bar{\varepsilon}_0(2\sigma/\Delta\bar{\sigma}_0)^{\bar{m}_0}$（$\bar{m}_0$=9）はこれと傾斜がことなり，一点[$\Delta\bar{\varepsilon}_0$, $\Delta\bar{\sigma}_0$]（$\Delta\bar{\sigma}_0$=60 kg/mm²）で交わる．このように定常ランダム荷重の場合全寿命期間の平均を考えれば，疲れ損傷は応力レンジペアの $\bar{m}a$（=11, S 20 C）乗に比例し，線形に累積するとしてよく，$\Delta\sigma_r/2$ の $\bar{m}a$ 乗平均値 $\Delta\bar{\sigma}_r/2$ と破断までの応力レンジペアの総数 N_1 を両対数線図上にとれば，図2(b)の CB 線に示すような傾斜 $1/\bar{m}a$ の S-N 曲線となる．また単位時間当たりの応力レンジペアの累積ひん度を $\varphi(\Delta\sigma_r)$ とすれば破断時間 T は次式で求まる．

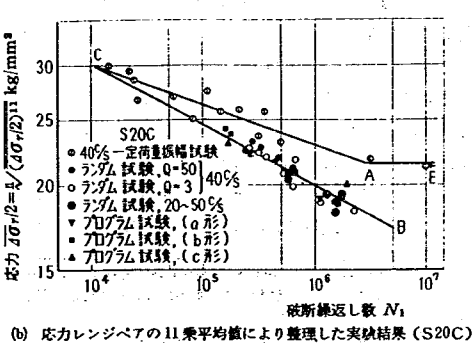
$$D=T\int_0^{\infty}\left(\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}\right)^{a}\left(\frac{\Delta\sigma_r}{\Delta\bar{\sigma}_0}\right)^{\bar{m}a}\times\left(-\frac{d\varphi(\Delta\sigma_r)}{d\Delta\sigma_r}\right)d\Delta\sigma_r=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

しかして CB 線は一定振幅荷重のときの S-N 曲線 CAE と C 点（$\sigma_c=\Delta\bar{\sigma}_0/2$=30 kg/mm²）で交わり傾斜が $1/\beta=\bar{m}_0/\bar{m}$ 倍（β=0.64, S 20 C）急となる．これはランダムあるいはプログラム荷重の場合，高いレベルの応力による軟化，すなわち転位の増殖により，低い応力レベルでの塑性ひずみが増すこと，この種の材料が高繰返し数領域では軟化が，低繰返し数領域では硬化が著しくあらわれ中間に両者が打消し合って小さくなるレベルがあることなどによるものと思われる．

3) S 40 C の場合も $\bar{m}$=4.7, a=2.2 と若干定数のことなるほか $\bar{m}_0$=9, $\Delta\bar{\sigma}_0$=60 kg/mm² となり，ほぼ同様であるが，次の点がすこし異なる．図3(a)に示すように，ガウス性ランダム荷重試験の実験結果が一定振幅荷重試験の直線より左側にずれ寿命で約半分になる．この実験では最大応力は約 40 kg/mm²，経過ひん度の二乗平均値 σ_{rms} の 4～5 倍のレベルまでとっているが，プログラム荷重試験の場合に最大応力のレベルを 3 σ_{rms}（a 形プログラム），3.5 σ_{rms}（b 形），4 σ_{rms}（c 形）とすると，一定振幅荷重の側からしだいにランダム荷重の場合に近づく．これは S 40 C では材料が少



(a) 相当塑性ひずみレンジペアで整理した実験結果（S 20 C）



(b) 応力レンジペアの 11 乗平均値により整理した実験結果（S20C）

図2　ランダム，プログラム，一定荷重振幅試験結果（S20C）

しかたいためか，0.1% 程度の小ひん度の高いレベルの引張応力が繰返し塑性ひずみ以外に第二の因子として疲れ破壊のある損傷過程に直接あずかるためと思われる．図3(b)でもランダム荷重の場合の S-N 曲線 CB が左へずれるので一定振幅荷重の場合との交点 C のレベルは $\sigma_c=32\ \mathrm{kg/mm^2}$ と $\Delta\bar{\sigma}_0/2=30\ \mathrm{kg/mm^2}$ より少し上へずれるが傾斜は $1/\bar{m}a$ ($\bar{m}=4.7, a=2.2, \bar{m}a=10.3$, S 40 C) になっている．

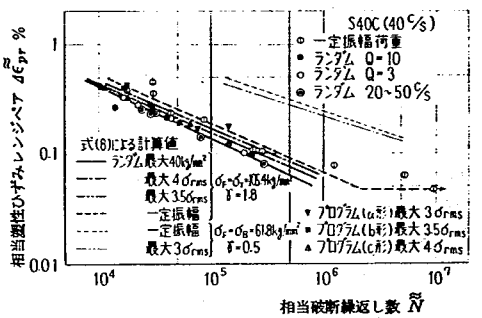
以上の結論は焼ならしまたは焼なました炭素鋼にてはほぼ成り立つと思われるが，高繰返し数領域で微小塑性ひずみがマクロに認められない焼入れ焼もどし合金鋼など高強度材料や切欠き材については，荷重ひん度分布の著しく異なった場合などとともに今後の実験にまたねばならない．しかし適用する範囲を荷重波形の不規則さの影響の程度を大きく出ない範囲に限り，内容も「定常ランダム荷重による疲れ寿命は応力レンジペアの $\bar{m}a$ 乗に比例した疲れ損傷が形式的に線形に累積すると仮定して計算できる」ことにしぼり，さらに $\bar{m}a$ の値を疲れ寿命の実験値から直接求めることとするならば，一般の場合に用いて実際上さしつかえないと思われる．

しかし不規則度の大きい場合を含む一般的なランダム波形にてはレンジペアを計測[1]，あるいは手計算することはかなりめんどうである．

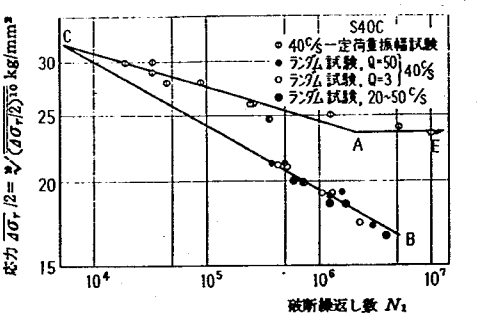
そこで本論文では与えられた一般的な定常ランダム荷重波形に対し，これに十分近く，計測，計算に便利で，疲れ試験が比較的容易にできる基準の荷重波形として，その経過ひん度分布をずらして平均値の上下に対称とし〔図10(a), (b)参照〕，さらにその平均値を0に移した経過ひん度分布をもつ狭帯域のランダム荷重波形を考える．そして両者の応力レンジペアをディジタルにカウントしてその ma 乗の単位時間当たりの積算値の比 κ_r，すなわち前記仮定による疲れ寿命の逆比，を計算するプログラムを作り不規則度の影響を評価することにした．したがって比較的容易なこのような狭帯域ランダム荷重，もしくはさらにこれを近似した振幅変動プログラム荷重の試験を行なって疲れ寿命 T_0 を求め，必要ならばレベルを変えた試験を追加して $\bar{m}a$ をも実験的に定めると，所期の一般的なランダム荷重による疲れ寿命を T_0/κ_r で推定することができる．

ランダム荷重による疲れ損傷を支配するおもな因子は応力レンジペアであるが，これが引張側にあるときは明らかに圧縮側にあるときより平均応力の影響により疲れ損傷が大きくなると思われる．この効果は荷重が完全に正負対称であれば一次の項が打消されあまり大きくならないはずで，前述の実験では分離して認められなかった．しかし非対称のときは問題となり得るのでこれによる損傷の増加倍数 κ_m を計算するプログラムを作った．これをも考慮した疲れ寿命の推定値は $T=T_0/(\kappa_r\cdot\kappa_m)$ となる．また前記(3)項に述べた小ひん度の高いレベルの最大引張応力の影響についても，適当な仮定による計算をこころみた．なお周波数依存性，休止時間の影響など時間に関する問題はここには省略して考えた．

定常ランダム波形はガウス性であれば，不規則度などすべての統計的性質はそのパワースペクトル分布のみによって定まる．そこで本論文では，ディジタル計算機によるシミュレーションにより，任意のパワースペクトル分布の定常ガウス性ランダム波形をつくるプログラムを作り，パワースペクトル分布を系統的に変えた典型的な定常ガウス性ランダム波形の系列をつくり，さらに非ガウス性，非対称，および実測の荷重波形例をも加え，これらに対し κ_r, κ_m を計算し，ランダム荷重による疲れ寿命の推算に必要な資料を作った．



(a) 相当塑性ひずみレンジペアで整理した実験結果（S 40 C）



(b) 応力レンジペアの10乗平均値により整理した実験結果（S40C）

図3　ランダム，プログラム，一定荷重振幅試験結果（S40C）

3. 応力レンジペア，平均応力，最大引張応力による疲れの累積損傷則の仮定と疲れ寿命の計算法

まず応力レンジペア $\Delta\sigma_r$ のみを考える．前章に述べ

た累積損傷則式（1）を用い，これを正規化するため，ランダム波形の平均値を σ_{mean}，そのまわりの二乗平均値を σ_{rms}，単位時間当たりのレンジペアの数，〔極大（小）の数に等しい〕を ν_1，正（負）方向経過数の最大を ν_0，応力レンジペアの正規化した累積ひん度分布関数を $q_r(x)=\varphi(\Delta\sigma_r/2\sigma_{rms})/\nu_1$，$[x=\Delta\sigma_r/2\sigma_{rms},\ q_r(0)=1,\ q_r(\infty)=0]$ 正（負）方向経過ひん度分布の密度関数を $q_1(x)$，$[x=(\sigma-\sigma_{mean})/\sigma_{rms},\ q_1(0)=1,\ q_1(\infty)=0]$ とすると，応力レンジペアのみによる疲れ損傷の繰返し数当たりの平均値 $b_r=1/(T_r\nu_1)$，（T_r=寿命時間），は次式となる．

$$b_r=\frac{1}{T_r\nu_1}=\left(\frac{\Delta\bar{\epsilon}_0}{\epsilon_0}\right)^a\left(\frac{2\sigma_{rms}}{\Delta\bar{\sigma}_0}\right)^{ma}\times\int_0^\infty\left(-\frac{dq_r(x)}{dx}\right)x^{ma}dx \quad \cdots\cdots(2)$$

またその経過ひん度分布を0の上下に対称にずらした経過ひん度分布をもつ基準の狭帯域ランダム波形については，応力レンジペアの正規化した累積ひん度分布関数が $q_0(x)=q_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=q_1(x_1)=q_1(-x_2)$〔図10(a)参照〕となり単位時間当たりのレンジペアの数が ν_0 となるから，このときの寿命時間を T_0，$b_0=1/(T_0\nu_0)$，とすれば $\kappa_r=T_0/T_r$ は次式で与えられる．

$$\kappa_r=\frac{T_0}{T_r}=\frac{\nu_1 b_r}{\nu_0 b_0}=\frac{\nu_1}{\nu_0}\frac{\int_0^\infty\left(-\frac{dq_r(x)}{dx}\right)x^{ma}dx}{\int_0^\infty\left(-\frac{dq_0(x)}{dx}\right)x^{ma}dx} \quad \cdots\cdots(3)$$

つぎに平均応力の疲れ寿命への影響の一つの考え方は，毎回の応力レンジペアによる疲れ損傷が平均応力により増加すると考えるもので，平均応力の影響をもっとも簡単に一定応力振幅の場合と同じと考えて計算する．一定応力振幅の場合，平均応力0，応力振幅 σ_a のときの破断繰返し数を N，S-N 曲線を $\sigma_a^k N=$一定とし，平均応力 σ_m，応力振幅 σ_a のときと平均応力0，応力振幅 σ_{a0} のときに同じ繰返し数 N_m で破断したとすると，平均応力 σ_m のため疲れ損傷が平均して $\kappa_{m0}=N/N_m=(\sigma_{a0}/\sigma_a)^k$ 倍となったことになる．今引張強さ σ_B を用いて無次元化した図4の時間強度線図をStüssi[3]に従い次の実験式（4）で表わせば，κ_{m_0} は式（5）で与えられる．

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_B}=\frac{\frac{\sigma_{a0}}{\sigma_B}\left(1-\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right)}{\left(1-\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right)+\frac{\sigma_{a0}}{\sigma_B}\cdot\frac{\sigma_m}{\sigma_B}} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\kappa_{m0}=\left[\frac{1-\frac{\sigma_m}{\sigma_B}}{1-\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\left(1+\frac{\sigma_a}{\sigma_B}\right)}\right]^k \quad \cdots\cdots(5)$$

ランダム荷重の場合にも，各応力レンジペアによる疲れ損傷がそれぞれの平均応力により同様に増し，繰返し数当たりの平均値が $b_m=\kappa_m b_r$ となるとすると，$x=\Delta\sigma_r/2\sigma_{rms}$，$y=\sigma_m/\sigma_{rms}$，の結合確率密度関数を $p(x,y)$ とすれば，$\sigma_{rms}/\sigma_B=r$ とおき κ_m は次式で計算できる．

$$\kappa_m=\frac{\int_0^\infty x^{ma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1-ry}{1-ry(1+rx)}\right]^k p(x,y)dydx}{\int_0^\infty x^{ma}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dydx} \quad \cdots\cdots(6)$$

k の値は実験的裏づけはないがここでは一応 $k=ma$ にとった．後に示す図8～11のひん度分布が正負対称な荷重波形に対する計算例からわかるように，これらは $r=\sigma_{rms}/\sigma_B$ にかなり大きい値1/5をとっているにもかかわらず，$\kappa_m=1\sim1.2$ でほとんどが1.1以下となる．このことは，$p(x,y)$ が y のある値 y_m の上下に対称で $p(x,y_m+\Delta y)=p(x,y_m-\Delta y)$ となるとき式(6)の分子の被積分関数の Δy を含む部分を $r\ll1$ としてそのべき級数に展開すれば，

$$\kappa_m=\frac{\int_0^\infty x^{ma}2\int_0^\infty\left[\left\{\frac{1-ry_{ri}}{1-ry_m(1+rx)}\right\}^k+kr^3x\Delta y^2\times(1+3ry_m)\{1+O(r)\}\right]p(x,y_m+\Delta y)d\Delta ydx}{\int_0^\infty x^{ma}2\int_0^\infty p(x,y_m+\Delta y)d\Delta ydx} \quad \cdots\cdots(7)$$

となり y_m が0となれば κ_m-1 は r の三次以上の項のみとなることからもわかる．

このように上述の考え方ではひん度分布が正負対称な荷重の場合の平均応力の影響は小さく，S40C材で0.1%程度のごく小ひん度の高いレベルの応力の有無が，平均応力のないプログラム試験の場合をも含め，寿命に1/2程度の影響を与える前章(3)項の実験結果は説明できない．そこでもう一つの考え方として，引張応力の最大値が疲れ損傷のある短い過程，たとえばマクロき裂の発生や最終破断などにのみ影響すると考え，もっとも簡単な極限として塑性ひずみの繰返しにより減少して行くある強さを最大引張応力 σ_{max} が越えるときで疲れ寿命が定まるとする．このとき問題と

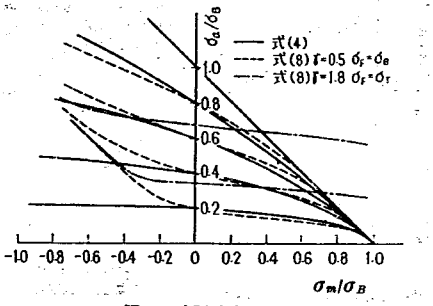


図4　時間強度線図

なるのは，ごく高いレベルの極大値の分布のみで，これは不規則度が非常に高くなければ，ほぼ経過ひん度分布のみで定まり，パワースペクトル分布にはほとんど関係しない．

非常にだいたんであるが，いま繰返し塑性ひずみにより，そのレンジペア $\Delta\epsilon_{pr}$ の二乗の和に比例した分散をもつ表面のでこぼこを生じ，その分散の平方根に比例した有効深さともいうべき値 t により有効応力集中係数 $\alpha_e=1+c(t/\rho)^\gamma$（$\rho$=有効切欠き半径，材料定数）が定まり，ある材料定数 σ_F（破壊応力）を $\alpha_e\sigma_{\max}$ が越えたとき疲れ寿命がくると仮定して次式を導いた．

$$\sigma_{\max}=\frac{\sigma_F}{1+CD^{\gamma/2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\text{ここに}\ CD^{\gamma/2}=c\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma$$

$$D=\sum\left(\frac{\Delta\epsilon_{pr}}{\epsilon_0}\right)^2=N\left(\frac{\Delta\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_0}\right)^2$$

$$=N\left\{\frac{\Delta\bar{\epsilon}_0}{\epsilon_0}\left(\frac{2\sigma}{\Delta\bar{\sigma}_0}\right)^{\bar{n}_0}\right\}^2 \text{（一定応力振幅）}$$

$$=\tilde{\tilde{N}}\left(\frac{\Delta\tilde{\tilde{\epsilon}}_{pr}}{\epsilon_0}\right)^2=N_1\left\{\frac{\overline{\Delta\epsilon_0}}{\epsilon_0}\left(\frac{\overline{\Delta\sigma_r}}{\Delta\bar{\sigma}_0}\right)^{\bar{n}}\right\}^2$$

（ランダム応力）

$\gamma=0.5$, $\sigma_F=\sigma_B$ とすると図4の破線のごときほぼ妥当な時間強度線図ができるが，図3(a)のランダム荷重の実験値にあわせ C を定めると一定振幅の場合の計算値は細い破線のように実験値から遠くはなれる．$\gamma=1.8$, $\sigma_F=\sigma_T$（真破断応力）とすると図3(a)の太線のように実験値とほぼ合うが，時間強度線図は図4の一点鎖線のようになり，平均応力の影響がほとんどないこととなる．これらより実際には以上二つの考え方の中間もしくは組合わさったものと思われる．

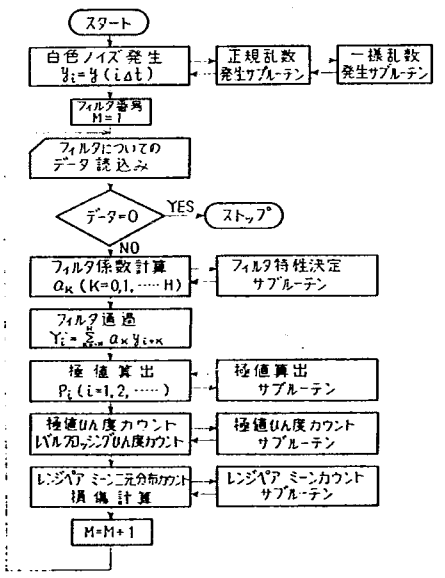


図5　A形フローチャート（線形フィルタ用）

4. 計算プログラムの概要

計算全体のフローチャートの一例を図5に示す．乗算合同法により発生した一様乱数を変換して正規乱数列 y_i〔図6(a)黒丸の縦座標に示す，横座標は $i\Delta t$〕を作り，これを一定時間間隔 Δt でガウス性白色ランダムノイズから採取したサンプル値と考え，数値フィルタをとおして所定のパワースペクトル分布をもつガウス性ランダムノイズのサンプル値 y_i〔図6(b)〜(e)黒丸〕に変換する．疲れの問題で必要なのは波形の極値であるから，となりあった三点を放物線で補間して極値 P_i〔図6(b)〜(e)白丸〕を求める．一般に時間間隔 Δt のサンプル値の伝達しうる情報の最大周波数は $f_F=1/(2\Delta t)$ であるが，たとえば極値を最大誤差3％程度で求めるには1周期間に6個以上のサンプル点が必要となり，スペクトルの上限周波数 f を f_F で割った無次元周波数 f/f_F をほぼ0.3にとればよい．

なお正負対称なはずの荷重系列の場合も系列の長さ

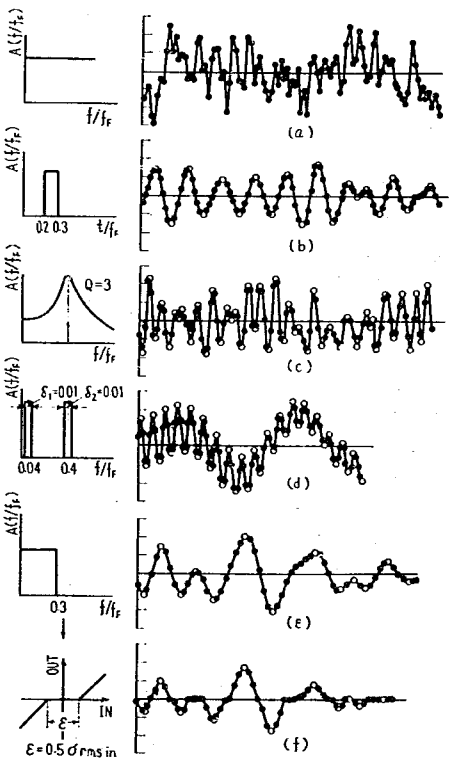


図6　計算したランダム波形例

が十分でないと，完全に対称にならず，最大レンジペアの半分と最大値が一致しないため計算結果に誤差を生ずる．これを防ぐため同じ荷重系列を前後点対称に接続して完全に正負対称とした．

数値フィルタはその周波数特性を $A(f/f_F)$ とすれば，そのフーリエ係数 a_k で重みづけをした次の移動平均で与えられる．

$$y_i=\sum_{k=-H}^{H} a_k y_{i+k} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$a_k=\sigma_k\int_0^1 A\left(\frac{f}{f_F}\right)\cos k\pi\frac{f}{f_F}\,d\left(\frac{f}{f_F}\right),$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots H)\cdots\cdots(10)$$

ただし σ_k は周波数スペクトルが急に不連続に変化した点の Gibbs の現象を避けるためのつぎの係数で，Lanczos' σ-Factor と呼ばれる．H はフィルタの帯域幅 B に対し $H\geqq 2/(\Delta tB)$ にとる．

$$\sigma_k=\frac{\sin(k\pi/H)}{k\pi/H},\ (k=1, 2, \cdots\cdots H);$$

$$\sigma_k=1,\ (k=0) \quad \cdots\cdots(11)$$

図6は計算した波形の一例を示す．

このようにして得た極値の系列からレンジペアとその平均値の二元分布を求めた．その方法はレンジの第 k レベルの大きさ RP_k を設定し，$|P_i-P_{i+1}|$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ と逐次比較し，これが RP_k より大きいときはそのまま i を一つ進め，小さいときは $(P_i+P_{i+1})/2$ の平均値をもった第 k レベルのレンジペアが1個存在することになり，該当カウンタを1個進めるとともに，そのレンジを抜出すため P_{i+1} の内容に P_{i-1} の値を入れかえ，P_i, P_{i-1} の内容には後で極値と区別して抜出すため十分大きな一定値，たとえば10000を入れて i を二つ進める．最後の i まで進めば10000のはいっているところを抜出し，残った極値を始めから順につめて，RP_k より小さいレンジを抜出した新しい系列をつくり，第 $k+1$ レベルに進む．実際のプログラムには，たまたま $RP_k>|P_i-P_{i+1}|>|P_{i+1}-P_{i+2}|>|P_{i+2}-P_{i+3}|$ などとなったときに常に最小のレンジから処理して行く方法，極値列の始端，終端に小レンジがあったときの処理などを含み，かなり複雑なプログラムとなるが詳細の説明は省略する．この二元分布を式(6)に入れ数値積分して κ_m を，$q_r(x)$ を $q_r(x)=\int_y^\infty p(x, y)\,dy\Big/\int_0^\infty p(x, y)\,dy$ により求め式(3)にて κ_r を計算する．

5. 計算結果

典型的な定常ランダム荷重の系列に対し κ_r, κ_m を計算した結果を示す．$\bar{m}a$ の値は平滑試験片では10～12であり，切欠き試験片の場合は，切欠き係数によりことなるが平滑試験片の場合の1/2前後になることが多いと思われるので $\bar{m}a=12, 6$ について計算した．κ_m に対しては前述のように平均応力の影響が大きくなると思われる，$\sigma_{rms}=\sigma_B/5$ なるかなり高いレベルの場合について計算した．

図7，8はもっとも典型的な5系列のパワースペクトル分布に対してパラメータを系統的に変えたガウス性ランダム波形の場合で図7は(a)に示すような上下のしゃ断周波数の比 λ を1から50までかえたシャープカットの帯域ろ波，$\lambda=\infty$ に相当する低域ろ波，(b)に示す1オクターブ −12 dB で両側をカットした帯域ろ波，および(c)に示す共振倍数*Q を10，3，1とかえた1自由度系の共振の場合で κ_r はこの順序に1より小さくなり，また $\bar{m}a$ が大きいほうがより小さくなるが最後の一例（0.7弱）を除き0.75以上となる．κ_m も同じ順序で1より大きくなるが5％程度以下でほとんど問題とならない．

図8は中心周波数 $f_2=0.3f_F$ と f_1 との比が λ，帯域幅 $\Delta f_2=\delta_2 f_F$, $\Delta f_1=\delta_1 f_F$ $(\delta_1=\delta_2=1/100)$ の2個の狭帯域のスペクトルがある場合で，κ_r は λ が2のとき大きく下がり，3でほぼ1へもどり以後小さく上下しながら減少していく．低い周波数の側が大きいすなわち ξ が大きいほど，また $\bar{m}a$ が大きいほうが低下が著しい．図中細い実線は帯域幅の十分小さい極限として一定振幅波形，

$$y(t)=\xi\cos(\omega_1 t+\phi)+\cos\lambda\omega_1 t \quad \cdots\cdots(12)$$

を考え，その位相 ϕ を $0\sim\pi/\lambda$ まで変化させたときの κ_r の平均値をとったもので，ランダム波形のシミュレ

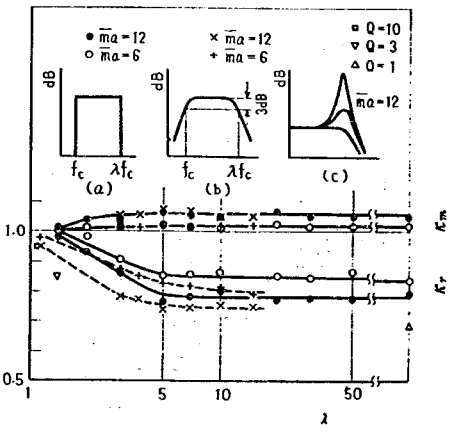
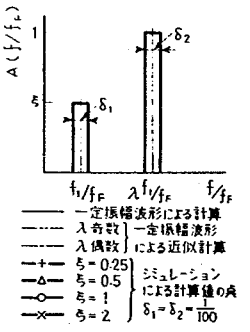


図7　ガウス性ランダム波形の計算結果
（帯域ろ波，低域ろ波，1自由度系共振スペクトル）

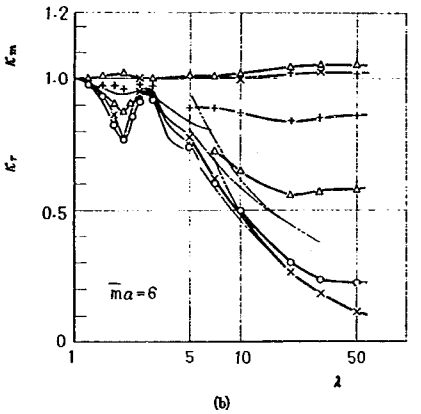
* 共振時の最大振幅の同じ強制力による静的振幅に対する倍数．

ーションによる計算点とよく一致している．$\lambda=2$ のときの切込んだ低下は基本波と二次高調波では，山と山が重なったとなりは山と谷とが重なり最大のレンジペアが大きくならないのに対し，三次高調波では山と山，谷と谷がとなりあって重なるためである．図の細い一点鎖線および二点鎖線は周波数の比 λ が大きい整数，それぞれ偶数および奇数の場合の近似値で，λ が大きいと正，負の極値の包絡線が $\xi\cos\omega_1 t\pm1$ で近似できるので，$2\pi/\omega_1$ の間に大きさ2のレンジペアが $(\lambda-1)$ 組と，λ が偶数のときは $2+\xi\cos\phi+\xi\cos(\phi-\pi/\lambda)$，$\lambda$ が奇数のときは $2+2\xi\cos\phi$ のいずれかの大きさのレンジペアが1組とがあることとなり，この位相 ϕ を変化させて平均値をとり計算した値である．図8(b), (c)で ξ が大きいときはシミュレーションによる計算点がほぼその間にくるが，ξ が小さくなるにつれて λ の大きいところで，はなれてくるのは帯域幅 $\Delta f_2=\delta_2 f_F=0.01 f_F$ による振幅変調の平均周波数 $0.6411\Delta f_2=0.0064 f_F$ と $f_1=f_2/\lambda=0.3 f_F/\lambda$ が近づき干渉するためではないかと思われる．κ_m については $\lambda=2$ で1よりかなり大きくなるが最大で20%程度で，あとは10%程度にとどまる．

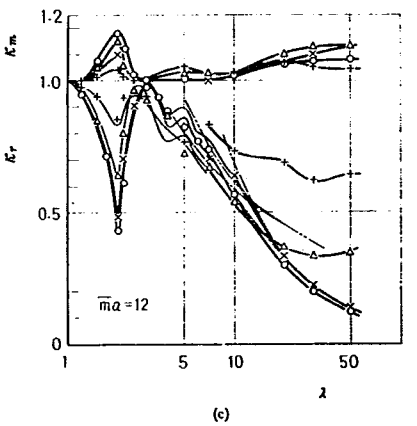


両周波数成分の振幅比＝ξ：1

(a)



(b)



(c)

図8　ガウス性ランダム波形の計算結果
（2個の狭帯域スペクトルのある場合）

図9は図6(e)のごとき低域ろ波したガウス性ランダム波形を不感帯をもつ対称な折線非線形フィルタを通し，非ガウス性にした図6(f)に示す波形の場合で，κ_m, κ_r の値は不感帯の幅がそれぞれ $0.5\sigma_{\text{rms in}}$, $\sigma_{\text{rms in}}$ をこえるまでガウス性の場合とあまりかわらず以後 κ_m は増加し，κ_r は減少する．

図10は正負対称でない場合で，図の実線は(b)に示すように狭帯域ガウス性ランダム波形が平均応力 σ_{mean} だけずれるときの疲れ損傷の増加倍数 κ_{mm} で，破線，一点鎖線は(a)に示すように狭帯域ガウス性ランダム波形をレベルe−fの上と下とで $1+e:1-e$ に拡大，縮小して非対称にした場合の影響を示す．破線は分布の平均値c−dを0レベルとした場合の値 κ_{me}，一点鎖線は平均値を $\sigma_{\text{mean}}=4\sigma_{\text{rms}}$ $(\sigma_{\text{rms}}/\sigma_B=1/15)$ としたときの値 κ_{mem} である．

図11は乗用車のリアスプリングの実測応力波形をAD変換し $\bar{n}a=12$, $r=\sigma_{\text{rms}}/\sigma_B=1/15$ として上記計算

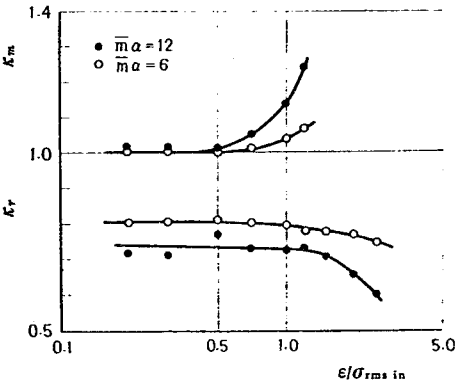


図9　非ガウス性ランダム波形の計算例

を行なった一例で(a)に実波形，(b)にパワースペクトル分布，(c)にひん度分布を示し，$\sigma_{mean}=4\sigma_{rms}$ で $\kappa_r=0.595$，$\kappa_m=2.73$，$\kappa=\kappa_r\kappa_m=1.63$ を得た．一方図11(b)の実線，これを2自由度系で近似した破線，二直線で近似した一点鎖線のパワースペクトル分布をもつガウス性定常ランダム波形に対し κ_r を求めるとそれぞれ $\kappa_r=0.739, 0.715, 0.595$ となりほぼ推定できたといえる．しかし κ_m を平均応力 $\sigma_{mean}=0$ のときのこれらに対する κ_m の値 κ_{m0} と，狭帯域の場合の図10の $\sigma_{mean}=4\sigma_{rms}$ に対する κ_{mm}，κ_{mem} の値との積で近似できると仮定して $\kappa=\kappa_r\kappa_{m0}\kappa_{mm}\kappa_{mem}$ を計算すると，それぞれ $\kappa=2.32, 2.42, 1.96$ となりその推定誤差はかなり大きくなる．

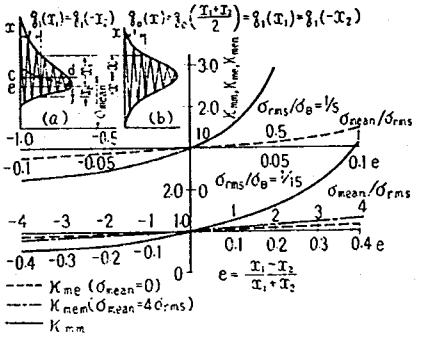


図 10　正負非対称性の影響

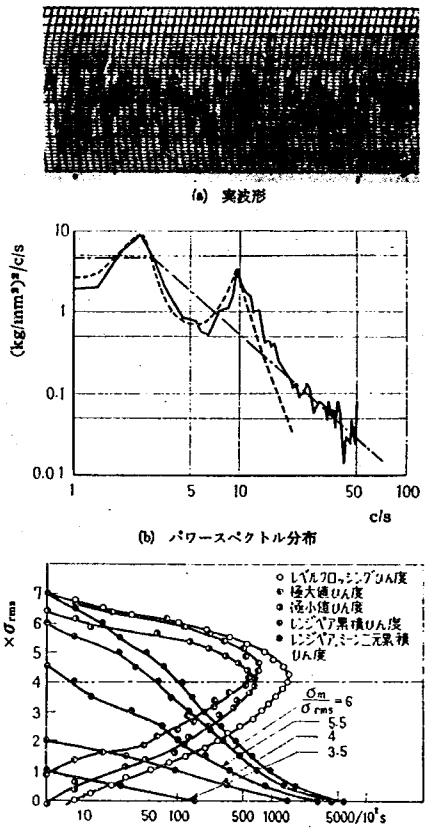


図 11　実測応力波形の計算例
（乗用車のリアスプリング）

6. 結　　論

さきの基礎的実験より得た，定常ランダム荷重による疲れ寿命は応力レンジペアの m 乗に比例した疲れ損傷が形式的に線形に累積すると仮定して計算できるとの結論を用い，疲れ寿命 T を求めようとする不規則度の大きい広帯域の場合を含む一般の定常ランダム荷重に対し，これと等しい経過ひん度分布をもつ狭帯域のランダム波形を正負対称に修正した基準の荷重波形を考え，後者による疲れ寿命 T_0 を実験の容易な狭帯域対称ランダム荷重試験もしくは振幅変動プログラム試験で求め，不規則さの影響，平均応力の影響に対する修正係数 κ_r，κ_m を計算で求め，$T=T_0/\kappa_r\kappa_m$ で T を見積る方法を考えた．またディジタル計算機でシミュレートして作った典型的な各種のランダム荷重系列に対し κ_r，κ_m を計算し，これらのおおよその値を計算せずに見積るための資料を作製した．平均応力の影響については二種の考え方を試みたがいずれもまだ実験結果の全体はカバーできず，今後にまたねばならない．

最後に乗用車の応力測定データを使用させていただいた，いすゞ自動車会社山川新二氏，その AD 変換につきお世話になった大阪大学工学部土木教室 小松研究室，東京大学生産技術研究所第二部 柴田研究室，佐藤研究室のかたがたに厚く謝意を表します．

文　　献

（1） 菊川・ほか3名，機械学会論文集，35-278 (昭44-10)，2020.
（2） 菊川・ほか3名，機械学会誌，70-585 (昭42-10)，1495.
（3） F. Stüssi, *Mém. Ass. Int. Pont, Charp.*, **18** (1953), 357; **14** (1954), 253; W. Weibull, *Fatigue Testing and Analysis of Results*, (1961) 154, 181, Pergamon Press.

技術論文

539.432:620.178.3.05

新しく試作した機械的方法による ランダム疲れ試験機と試験結果*

河本　実**　石川　浩**

1. 緒　言

実働荷重に対する疲れ強さや疲れ寿命を知ることは，合理的な設計を行なう見地から必要不可欠である．しかしながら実働荷重は一般には発生時点においてそのとき独特の不規則さを持ったものであるから再現性はないものと考えられる．したがって変動の特性あるいはその特性下における材料の疲れに対する効果などの研究に際しては，その不規則性の中に存在する統計的な性質を見出し，同じ統計的性質を有するものに対しては同じ疲れ強さあるいは疲れ寿命を持つという仮定を置かねばならない．疲れ効果は荷重振幅のみならず，その上下限の大きさを規定する平均荷重のひん度分布が考慮されねばならない．また変動の発生ひん度特性を知ることを目的とすれば，時間を考慮した波長成分を評価するために自己相関関数あるいはパワースペクトル密度などを考える必要がある．

一方，ランダム荷重すなわち実働荷重を与えうる疲れ試験機に関しては，最近の高度な電子工業技術を応用した電磁式あるいは電気-油圧式の疲れ試験機が二，三開発されている[1]．しかし，これらの疲れ試験機はその製作に多額の費用を要し，簡単に実施できない欠点がある．またそのような試験機は一般に複雑な電子回路を含んでおり，そのため幾多の難点を生じやすいきらいがある．そこで著者らはランダム荷重を与えうる新しい疲れ試験機として，以下に述べるような機械的な機構によるものを考案した．すなわち，質量の異なる種々の大きさの鋼球を任意の割合で混合しておき，それを順次連続的に落下衝突させ，その衝突のエネルギをレバーを介して試験片に与えることにより機械的にランダム荷重を試験片に与える形式のものである．

本論文においては，上述した原理によるランダム荷重疲れ試験機の実用性を荷重ひん度，不規則波の自己相関関数あるいはパワースペクトル密度などを求めて検討し，さらに全波法[2]による荷重計数を電子計算機を用いて行ない寿命推定を行なった結果と実際のランダム試験結果の比較などについて論じる．

* 昭和45年4月2日　第47期通常総会講演会において講演，原稿受付　昭和45年5月4日．

** 正員，京都大学工学部（京都市左京区吉田本町）．

2. 試験機の原理および構造

試作した試験機の原理を図1に示す．図において，試験片①はチャック②により一端は固定され，他端は鋼球衝突受③および緩衝器④を持った左右一対のレバー⑤に結合されている．⑥は鋼球収納箱で，この中には種々の大きさの鋼球⑦が任意の割合で混合されてはいっており，この中の鋼球は二つの案内⑧により左右に分けられて落下し，左右の衝突受③に衝突し，レバー⑤を介して試験片に曲げ荷重を与える．鋼球の質量の大きさの相違により作用する曲げ荷重の大きさは異なり，またその落下の順序は不規則であるから，鋼球の大きさ，それらの混合比および落下の高さを適当に定めることにより，ランダム変動をなす曲げ荷重を試験片に作用せしめることができる．落下して衝突を終えた鋼球は衝突受の下方にある鋼球再収箱⑨に集められ，コンベヤ⑩により再び鋼球収納箱⑥に運ばれる．このように連続的にランダム荷重を負荷し試験片がランダム荷重により破断する．左右のレバーの長さの比を任意に変えることによりランダム波全体の持つ平均荷重を変えることもできる．本原理によるランダム荷重の負荷は全く機械的であるため，電子工学的なものに比しきわめて安価で，かつ容易に実施できる特徴がある．なお試験片には曲げモーメントのほかに圧縮荷

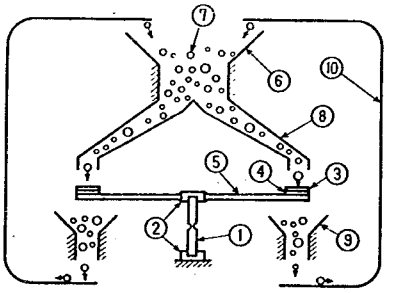


図1　試験機の原理図

重が作用するが，これは⑤のレバーが長いから無視できる．

ここでは試作した片振り形のランダム疲れ試験機について，その構造の概略を図2に示す．これは図1において鋼球を左右に分ける二つの案内の一方を閉じた場合に相当する．レバーにはその固有振動数を高めるためアルミニウム合金を使用し，またその横たわみを防ぐため，これを鉛直案内板によって案内し，さらにレバーの自重が試験片に作用しないようにばね定数の小さいばねを用いてレバーをささえるようにした．鋼球の落下距離を変えるにはハンドルによって調節台を上下させることによった．図に示したリミットスイッチをタイマおよびコンベヤ駆動モータに連動させることによって，試験片の破断時間の測定，および破断後の運転の停止が行なわれるようにした．試験片に作用するモーメントは図に示したようにチャック部にひずみゲージをはり，この部分のひずみを検出することによって求めた．

3. 供試材料，試験片および実験方法

試験に供した材料は厚さ 3.3 mm の圧延鋼板で，その化学成分を表1に，機械的性質を表2に示す．試験片は素材を図3に示す形状および寸法に機械加工の後，納入のままあるいは 900°C, 30 分真空焼なましを施して用いた．

本試験機によるランダム荷重疲れ試験の手法は以下のとおりである．機械的方法により発生させたランダム荷重は試験片に与えられ，これをチャック部にはったひずみゲージにより動ひずみ計を通して検出する．動ひずみ計の出力はペンオシロあるいはデータレコーダに記録し，後者の場合はさらに A-D 変換器によりディジタル化して，電子計算機を用いて荷重ひん度，自己相関関数あるいはパワースペクトル密度を求める．

納入のままの試験片を用いたランダム試験は，鋼球の混合比を3種類，A, B および C に変えて行なった．使用した鋼球の大きさおよび混合比はそれぞれ実験結果を表わす図中に示したとおりである．いずれのランダム波についても荷重ひん度分布，自己相関関数あるいはパワースペクトル密度を求めて比較した．また熱処理を施した試験片に3種類のランダム荷重 D, E および F を与えて疲れ試験を行なった．ランダム荷重 D は直径 25 mm および 20 mm の二種の鋼球を 3：7 の割合で，ランダム荷重 E はそれらを 7：3 の割合で，またランダム荷重 F はそれらを 1：0 の割合で混合して得たものである．それにより得た結果と，それらのランダム荷重を全波法によって解析し寿命の推定を行なった結果あるいはピーク法およびレインジ法による結果とを比較し，ランダム荷重に対する疲れ寿命の推定法について検討した．

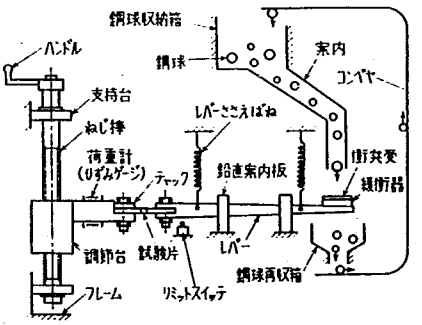


図 2　試験機の構造の概略

4. 実験結果および考察

4·1 試作したランダム荷重疲れ試験機について

ランダム試験 A, B および C において測定したオシログラムの例を図4に示す．図は記録紙送り速度 30 mm/s でペンオシロに記録させたものであり，本試験機が満足なランダム性を示していることがわかる．このランダム荷重波の変動に対する情報をうるために，自己相関関数およびパワースペクトル密度について考察する．いまランダム振動を経過時間の関数 $x(t)$ で表わすと，定常エルゴードランダムプロセスを仮定すれば，その自己相関関数 $R(\tau)$ およびパワースペクトル密度 $S(f)$ は一般に次式で表わされる(3)．

表 1　供試材料の化学成分 %

C	Mn	P	S	Cu	Cr	Al
0.03	0.28	0.008	0.008	0.03	0.03	0.001

表 2　供試材料の静引張試験結果

熱処理条件	上降伏点 σ_{su} kg/mm²	下降伏点 σ_{su} kg/mm²	引張強さ σ_B kg/mm²	伸び ϕ %
供給のまま	33.5	31.6	37.0	38
900°C, 30分 真空焼なまし	21.6	20.1	31.3	52

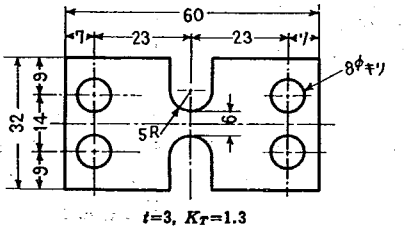


図 3　試験片形状および寸法

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot x(t+\tau)dt$$

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}2R(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$=4\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau$$

$R(\tau)$ および $S(f)$ は時間 t の全区間 $(-\infty, \infty)$ に対して定義されたものであるが，実際には有限の測定区間について近似的に取扱われる．データレコーダに記録した連続的なランダム変動 $x(t)$ は A-D 変換器により量子化して離散的なデータの集合として取扱い，ディジタル方式の計算機を用いてまず $R(\tau)$ を求め，その後 $2R(\tau)$ のフーリエ変換を行なうことにより $S(f)$ を求めた．量子化は毎秒約 114 個のスピードで約 20 秒間行ない，データ総数は 2 000 個，また計算に当たっては全遅延時間 (Total Delay) は 1.75 秒とした．ランダム試験 A に対する自己相関関数を図 5 に示す．図は横軸に時間間隔 τ をとり，縦軸には自己相関関数 $R(\tau)$ の値を $\tau=0$ のときの値 $R(0)$ で除した自己相関係数をとってある．図から明らかなように，一度小さくなった $R(\tau)$ があとで周期性を示しているが，このことは，この変動が規則的な周期振動成分とランダム成分とから成っていることを表わしている．ランダム試験 B および C においても自己相関関数は図 5 とほとんど同じ傾向を示し，したがって図は省略する．それぞれの変動に対して周期成分と不規則成分を分離すれば，周期成分はいずれの場合もほぼ 10～15%以内であり，ランダム成分が全変動の少なくとも 85%以上を占めていることは，この変動が十分ランダム性を有したものであることを意味する．周期的に変動する部分の $R(\tau)$ の形から見てこの周期成分は三角関数的であろうと推定されるが，これは本試験機の構造上試験片とレバーを含む振動系の振動が三角関数的であることから，これが周期成分として重畳しているものと思われる．

つぎに本ランダム試験においてパワースペクトル密度 $S(f)$ を求めた結果を図 6 に示す．縦軸には $S(f)$ の値をその最大値で除して無次元化した値をとり，横軸には周波数 f をとってある．パワースペクトル密度分布にピークが存在し，この部分の振動が支配的であることがわかる．ピーク値を示すときの周波数の値は，混合比および用いた鋼球の大きさに依存して多少変化を示しているが，疲れに及ぼす速度効果はほとんどないものと考えてよいから[4]，実用にあたっては，このことはあまり影響を及ぼさないものと思われる．

つぎに本試験機の動作の定常性を荷重ひん度分布の観点から検討する．図 7 は上述したランダム試験 B において，試験開始直後から 1 分間，試験開始直後から 5 分間，および試験開始後 4 時間経過した時点で 1 分間，それぞれペンオシロに荷重波形を記録し，それを全ピーク計数法によって解析した結果を，縦軸にピークレベル，横軸にひん度および累積ひん度をとって図示したものである．図から明らかなように測定時点の相違による荷重ひん度分布の相違はほとんどなく，作動は安定している．図中に示した全ピーク数とは，測定時間内に存在した正負ピークの総数を表わし，毎分当たりの平均全ピーク数はほぼ 1 454 である．オシログラムから目測でピーク値を判定した関係上，計数結

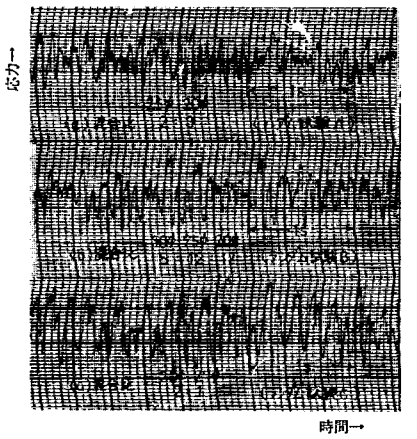


図 4　ランダム荷重波の記録例

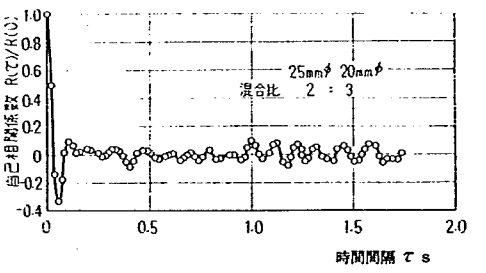


図 5　ランダム荷重波の自己相関関数（ランダム試験A）

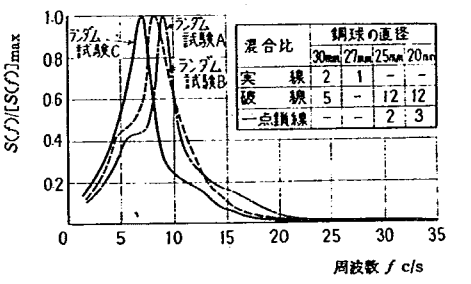


図 6　ランダム荷重波のパワースペクトル密度分布

果に個人誤差もあるが，その差は少なく無視してさしつかえない程度である．なおランダム試験Bにおいては，試験開始後565分経過して可視的なき裂を試験片最小段面部の一端に生じ，以後これが急速に成長して試験開始後630分して破断した．図には示していないが，試験開始後6時間および8時間経過後の荷重ひん度分布もほとんど変化を示さなかった．き裂発生後は多少の変化を示したが，本試験機は荷重一定形に近く，き裂発生は破断に近く，したがって荷重履歴をき裂のない場合で代表してもあまり誤差を生じないものと思われる．ランダム試験Aおよびランダム試験Cにおいて，同様にして求めた荷重ひん度分布を上述のランダム試験Bの結果を含めて図8に示す．ランダム試験Cは，用いた鋼球が大きく，したがって作用する荷重が大きく試験開始後短時間で大きな塑性変形を生じ実験を中止した場合に相当するが，この場合の正負両ピークのひん度分布の形は他の場合と異なり，正ピーク側あるいは負ピーク側へのかたよりを示している．図に示されるように，混合比および鋼球の大きさが相違すれば，それに応じて荷重ひん度分布も相違することが明らかである．

以上述べたように波形分析により本試験機が十分ランダム荷重疲れ試験機として使用しうることが明らかとなった．

4·2　ランダム荷重疲れ試験と全波法による評価について　つぎに本試験機により行なった三種のランダム荷重D, EおよびFに対する疲れ試験と全波法を用いて行なった疲れ寿命の推定について述べる．

4·2·1　ディジタル形計算機を用いた全波法による荷重計数の手法について　実働荷重に対する疲れ寿命の推定にあたっては，その荷重計数方法がきわめて重要な問題となる．この点に関して著者らは，実働荷重を構成する一連の波を平均応力を有した個々の両振り波として独立に分離させて解析する方法が合理的であると考え，全波法[2]と名づけて先に報告した．本法は平均応力をも考慮するため波形解析方法としては，ピーク法あるいはレインジ法などに比べて複雑となり，実際の応用に際して多大の労力を要することは当然である．そこで機械的に処理する方法が望まれるわけであるが，以下ディジタル形の電子計算機を用いて処理する方法について述べる．

全波法による波形分析をディジタル方式によって処理する際の基本操作を図9に示す．まず順番に並べたN個のピーク値間で最小振幅AMINの部分を選び，この部分を全波として抽出する．同時にこの全波の平均値XSMを求め，振幅AMIN，平均値XSMの全波として分類する．全波として分離すればピーク値が2個減少し，図9(a)において第I番めと第(I+1)番めのピーク値が存在しなくなる．したがって同図(b)に示したように，最初第(I+2)番め以降に存在したピーク値をその順序を変えることなく，新しく第I番めから始まるように順番を2個繰上げる．したがって最初第N番めに存在したピークは再編成により第$(N-2)$番めに位置することになる．この操作を順次繰返すことにより基本的には全波法計数が可能である．さらに具体的に電子計算機による処理の流れ図を図10に示す．まずデータとしてピーク値$P(I)$，ピークの総数N，振幅値および平均値

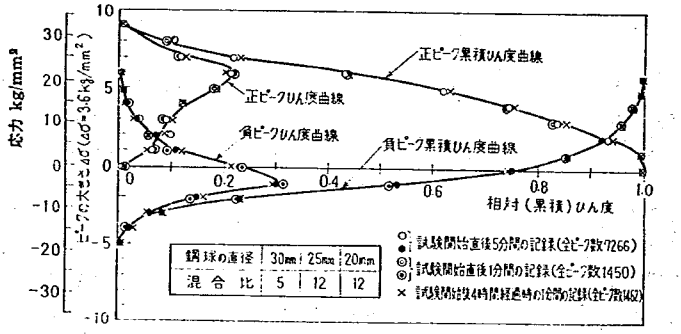


図7　異なった測定時点での全ピーク計数法による荷重ひん度分布
(ランダム試験B)

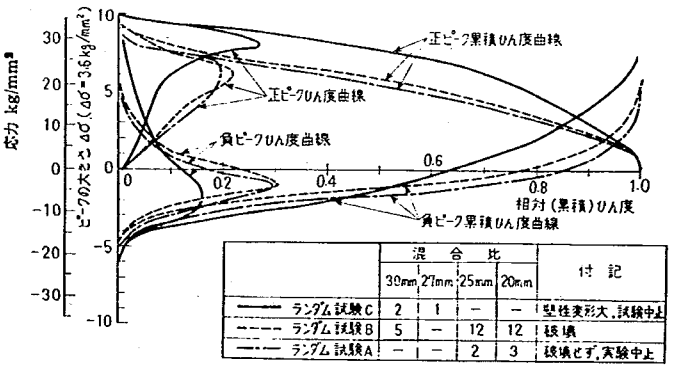


図8　混合比の相違による荷重ひん度分布の変化

の分割レベル DA, DM などを読込ませた後，最大ピーク値，最小ピーク値，平均値，平均値経過率 (Mean Crossing Rate) などを計算し，寿命推定の参考とする．つぎに振幅値および平均値の判定レベル，SAL(J) および SML (K) を計算させ，その位置に分類される全波の個数 NFW (J, K) の初期値を 0 にセットする．全波法の基本原理が荷重変動の最も少ない部分から順次全波として分離させる方法であり，一つの全波を取出すごとに原変動中に残るピークの数は上述したように 2 個ずつ減少することになるから，抽出した全波の個数 NEX と残りピーク数 NRES を考え，最初の値をセットする．その後に互いに相隣るピーク間の最小振幅 AMIN とその位置を決定する動作を行なわしめる．このためには AMIN の初期値を原変動の持つすべての振幅値よりも大きく設定しておく必要がある．AMIN が判定されれば前述した図 9 の操作を行なわしめればよい．分離した全波はその分類すべき位置を判定して，その箇所の個数を 1 個計数する．

$$NFW(J, K)=NFW(J, K)+1$$

全波を 1 個分離するごとに抽出した全波の総数および残りピーク数を計数する．

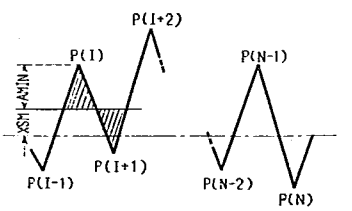
$$NEX=NEX+1$$

$$NRES=N-NEX*2$$

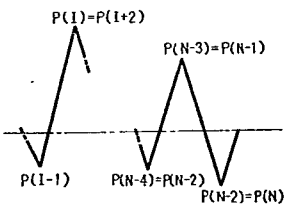
ピーク値の並べ換えが終われば再びつぎの最小振幅を見つける操作を同様にして繰返す．繰返しにつれて NRES の値は減少し，これが 2 個未満になれば全波として分離させることができないので，そのときはこの操作を中止し，計数した結果を印刷してやればよい．今ここで示した流れ図においては正の応力幅および負の応力幅は特に区別はしないで，その絶対値で考えてある．

以上ディジタル方式による処理法について述べたが，このような方法によればデータとしてピーク値を用意するだけできわめて簡単に実働荷重の全波法による計数が実施でき，実用に際しては有用なものと思われる．なお A-D 変換器によりサンプリングされたデータからピーク値を判別する方法も簡単に実施できるが，ここでは省略した．

4·2·2 全波法による実働荷重に対する疲れ寿命の推定について　実際に試験片にランダム荷重を与えて疲れ試験を行ない，またそれを全波法により解析し



(a) 全波の抽出と振幅，平均値の区分け



(b) 抽出した全波より後のピーク値の並べかえ

図 9　全波法の基本操作

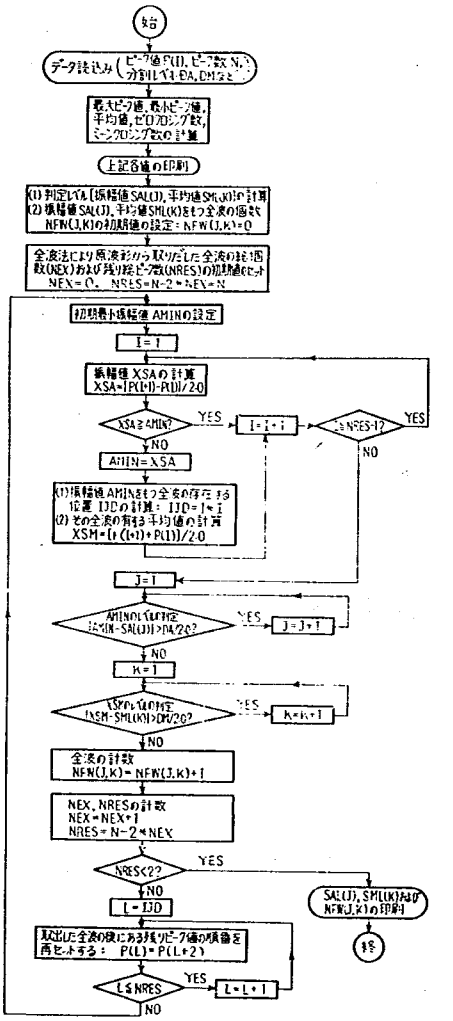


図 10　全波法による実働荷重計数の電子計算機的手法の流れ図

疲れ寿命の推定を行なった．負荷した荷重はランダム荷重D，EおよびFの3種類であって前述したとおりである．これらのランダム荷重の変動の状態を調べるために，連続した1200個のピーク値を求め，区間幅をピーク値100個と定めて，これを最初のピーク値を出発点とし順次1倍，2倍，3倍，…，12倍した計12種の試長を選んで，そのおのおのの試長内における平均値，標準偏差および平均偏差を求めた．その一例を図11に示すが，いずれのランダム荷重においても平均値，標準偏差および平均偏差は図のような傾向を示し，試長幅が変わってもほとんど変化を示さず定常していることがわかる．平均値はD，E，Fの順に大きい．一方，平均値経過率を同様にして求めた図12によれば，区間幅が短い場合は多少の異同があるが，試長幅が大きくなればほぼ定常となる．零値経過率(Zero Crossing Rate)についても同様の傾向が認められた．最大試長幅におけるこれらの諸量を表3に示した．

つぎにおのおののランダム荷重に対して，上述した1200個のピーク値をデータとして電子計算機を用いて全波法による荷重計数を行なった結果を平均応力をパラメータとして図13～15に示す．ただし，計数に当たっては平均値および振幅値の分割幅はそれぞれ$2\Delta\sigma$および$\Delta\sigma$とした．$\Delta\sigma$は2.0 kg/mm²に相当する．また平均応力および応力振幅が各判定レベルの間に存在する場合は近いほうの判定レベルに分類した．

表3　ランダム荷重の変動諸量（$\Delta\sigma$=2.0 kg/mm²）

	ランダム荷重D	ランダム荷重E	ランダム荷重F
平均値	2.0 $\Delta\sigma$	2.7 $\Delta\sigma$	2.8 $\Delta\sigma$
標準偏差	5.5 $\Delta\sigma$	5.5 $\Delta\sigma$	6.1 $\Delta\sigma$
平均偏差	4.8 $\Delta\sigma$	4.8 $\Delta\sigma$	5.4 $\Delta\sigma$
平均値経過率	0.88	0.90	0.92
零値経過率	0.83	0.83	0.81

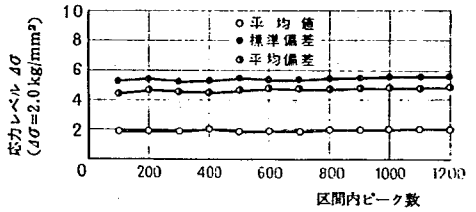


図11　ランダム荷重の変動状態の一例
（ランダム荷重D）

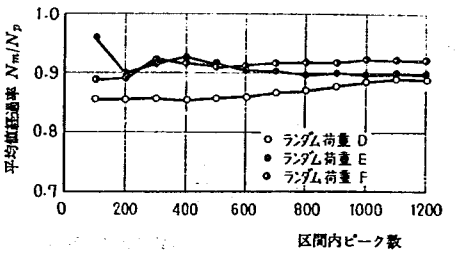


図12　平均値経過率の変化

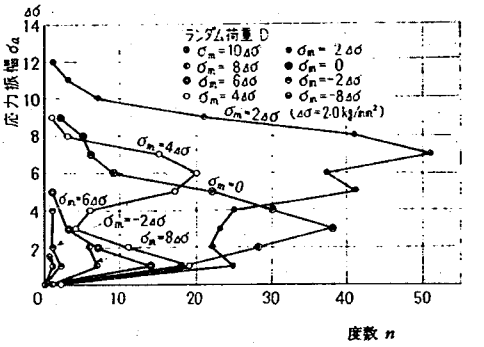


図13　全波法による計数結果に基づく荷重ひん度分布
（ランダム荷重D）

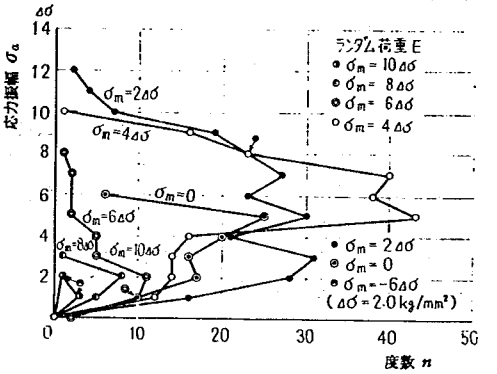


図14　全波法による計数結果に基づく荷重ひん度分布
（ランダム荷重E）

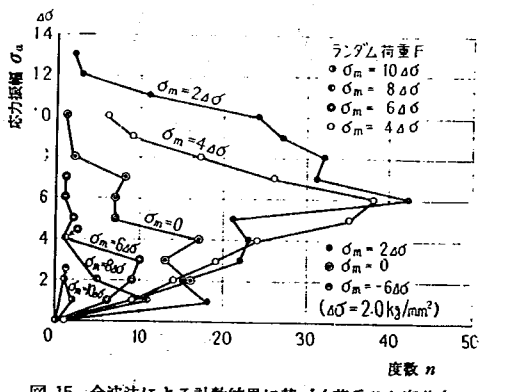


図15　全波法による計数結果に基づく荷重ひん度分布
（ランダム荷重F）

ただし，分割幅のちょうど半分の位置にある場合はいずれも大きいほうの判定レベルに分類した．それゆえ，応力振幅が0の全波とはその振幅が分割幅の半分未満のものを意味する．いずれのランダム荷重も通常よく見られる荷重ひん度分布を示しており，高い平均応力に対する全波のひん度は小さい．さらに比較のために，おのおののランダム荷重を全ピーク計数法およびレインジ法で計数し，その結果を図示したのが図16～18である．この計数法の場合にはまずランダム荷重波全体としての平均応力を求め，その位置を基準レベルとして上下に分割幅 $\Delta\sigma$ で分割し判定レベルとした．レインジ法においては各レインジの半分をその振幅とした．正負振幅はおのおの上昇レインジおよび下降レインジに対応したものである．各判定レベルの間に存在するピーク値あるいは振幅値の取扱いは全波法による計数の場合と同様とした．当然のことながら全ピーク計数法ではレインジ法に比べて，大きな応力レベルのひん度が大きく，特にランダム荷重Dの場合にめいりょうである．

以上の計数結果をもとにして疲れ寿命の推定を行なった．本供試材の一定応力振幅疲れ試験結果を図19に示す．図は平均応力が0の場合である．全波法による荷重計数結果はもちろん，全ピーク計数法やレインジ法においても波形全体の平均応力を考慮しているので，この平均応力の効果を何らかの方法で評価する必要がある．その平均応力における S-N 曲線を実験により求めておくのが最も望ましいが，ここでは修正グッドマン線図を時間強度の領域にまで拡張して両振り波に換算した[5]．

いま観測時間 t における記録から各計数方法により荷重ひん度が求まったとする．これを前述したような方法で両振り波の荷重ひん度分布に換算し，図19の S-N 曲線を用いて観測時間 t 内での累積繰返し数比 $(\Sigma n/N)_t$ を求める．この際，全ピーク計数法における平均応力より小なる値をもつ正ピークおよび平均応力より大なる値をもつ負ピークについてはこれを考えないで，いわゆる通常のピーク法として処理し，また過小応力の破断繰返し数は $N=\infty$ とした．もし，マ

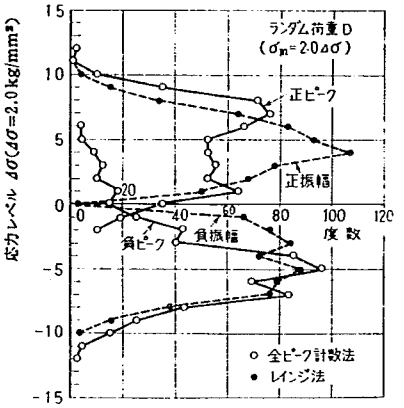


図16　全ピーク計数法およびレインジ法による荷重ひん度分布（ランダム荷重D）

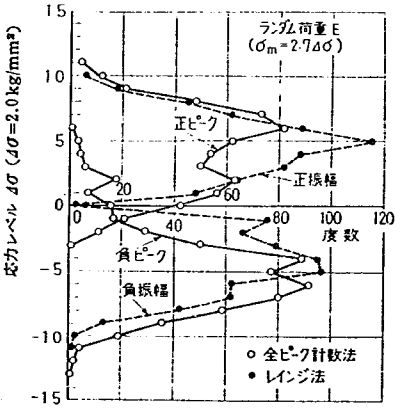


図17　全ピーク計数法およびレインジ法による荷重ひん度分布（ランダム荷重E）

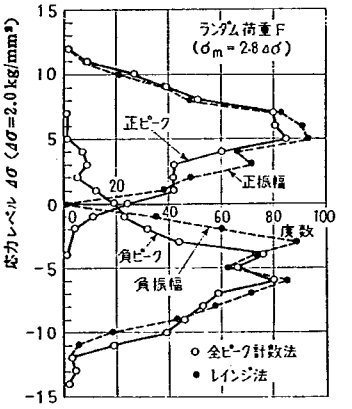


図18　全ピーク計数法およびレインジ法による荷重ひん度分布（ランダム荷重F）

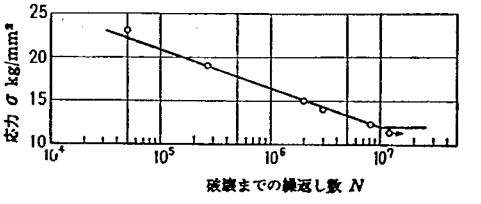


図19　供試材の一定応力振幅試験結果（$\sigma_m=0$）

イナーの法則を仮定するならば，$\Sigma n/N=1$ にて破壊が起こるはずであるから，破壊までのマイナー法則による理論的推定寿命 N_{th} は，

$$N_{th}=n_t/(\Sigma n/N)_t$$

で与えられる．ただし，n_t は観測時間 t における荷重繰返し数の総和である．

この方法によって全波法，ピーク法およびレインジ法によるそれぞれのランダム荷重に対する推定寿命 N_{th} および実際のランダム試験による実寿命 N_f を表4に示す．表4の結果に基づき，実寿命を1として，各種波形解析方法による推定寿命の妥当性を，縦軸に寿命比 N_{th}/N_f，横軸に先に述べた波の乱れの程度を表わすとみなされる平均値経過率をとって比較したのが図20である．波の乱れが大きくなれば，レインジ法による寿命の推定値が実寿命と大きく相違するのは当然と考えられるが，ピーク法による寿命推定値は実寿命の50～80%の間にありレインジ法に比しあまり変化しない．同様に全波法による寿命の推定値は，波の乱れにあまり影響されず，実寿命の75～100%となり，実寿命にさらに近い値を示す．このことは，この推定値が安全側であることも考え合わせて，全波法による寿命の推定が他の方法に比べて最も合理的であることを示している．これと類似した傾向は他の実験結果[6][7]にもみられるが，波形の不規則さが大きくなるほど，実働荷重を構成する一連の波を，個々に平均応力を考慮した全波として分離して計数する全波法の妥当性がますます重要となることが示唆される．

表4　各種解析法による疲れ寿命の推定値

		ランダム荷重D	ランダム荷重E	ランダム荷重F
実破断寿命 N_f		3.84×10^5	3.29×10^5	1.30×10^5
推定寿命 N_{th}	全波法	3.82	2.46	0.99
	ピーク法	2.94	2.10	0.65
	レインジ法	14.16	7.39	1.38

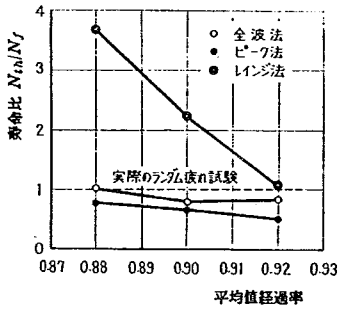


図20　波形の不規則さが荷重計数結果に及ぼす影響

5. 結　　言

機械的に，かつ簡便にランダム荷重を与え得る疲れ試験機を試作し，これを用いてランダム荷重疲れ試験を実施し，寿命の推定を数種の計数方法を用いて行ない，その妥当性を検討した．得られた結果はつぎのとおりである．

(1) 大きさの異なる種々の鋼球を用いて，機械的にランダム荷重を与えうる本疲れ試験機は十分実用しうる．

(2) 試作した本疲れ試験機ではランダム性は85%以上であり，機構上7～12 c/s が最も支配的な周波数である．

(3) 全波法による実働荷重解析は平均応力をも考慮するため，他の解析法に比べて複雑となるが，電子計算機などを用いて機械的に処理できる．

(4) 全波法による疲れ寿命の推定値は実寿命の75～100%の範囲にあり，この値は波の乱れの程度にあまり影響されない．また全波法による推定値はピーク法による推定値よりもさらに実際に近く，この推定寿命が安全側であることも考慮すれば，全波法による寿命推定が最も妥当であることを示している．

本研究に当たっては，沼津工業高等専門学校伊吹幸彦教授に終始有益な助言を賜わり，また当時立命館大学学生鈴木光典，高野　一両君の協力を得た．記して謝意を表する．

文　　献

(1) たとえば鯉渕・山根，機械学会論文集，31-232 (昭 40-12)，1803.
(2) 河本・ほか4名，機械学会関西支部講演論文集，No. 44-5 (昭 44-3)，35；河本・ほか2名，機械学会講演論文集，No. 700-3 (昭 45-4)，65.
(3) 堀川，ランダム変動の解析，(昭 40)．104，共立出版．
(4) 河本，金属の疲労，(昭 37)，63，朝倉書店．
(5) 河本・柴田，材料，15-156 (昭 41-9)，575.
(6) J. Kowalewski, *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), 60, Pergamon Press.
(7) A.O. Payne, *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), 76, Pergamon Press.

解説

539.432:629.13

航空機の実働荷重と疲れ設計*

竹　内　和　之**

1. はじめに

航空機構造における疲れ強さについては，わが国でも零戦の主翼について問題となったことがあると聞いているが，世界的に問題とされてきたのは第二次大戦後のことであり，とくに，1954年のコメット機の相つぐ事故以来，本格的な研究が各国で行なわれるようになった．最近の航空機，とくに輸送機においては，機体構造設計では，疲れ強さに対する配慮が最も重要な要素となっている．

本稿では，構造の疲れ設計が最も重視される輸送機に関して，疲れに関係する荷重，設計の方針，試験などについて，またジェット機の場合に問題となる音響疲れについて，概略を述べる．

2. 荷　　重

輸送機がその運航中にうける荷重およびそのひん度を，どのような考え方でまとめるかは，荷重の種類によって異なる．ここでは疲れに関係する荷重のおもなものについて概説する．

2·1 突風荷重[28]　航空機が大気の乱れに遭遇すると，機体は複雑な荷重をうける．この突風荷重は，輸送機がうける繰返し荷重の中で最も重要であるが，つかみにくい問題であって，現在なお研究対象となっている分野である．

突風によって航空機がうける荷重ひん度を統計資料としてうけるために，航空機の重心位置付近に取付けた上下加速度計によって機体に生じた上下加速度を測定することは，1930年代より始められている．これらの資料を航空機の特性と関係のない突風そのものの資料とするために1954年に提案[2]された式(1)，もしくは式(1)を少し修正した方法で，機体の上下加速度 a_n を有効突風速度 U_{de} に換算して評価[23]することが広く行なわれている．

$$a_n=\frac{m\rho_0 S V_e U_{de}}{2W}K_g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで，V_e：航空機の対気速度（EAS），W：機体総重量，S：翼面積，ρ_0：海面上空気密度，m：揚力傾斜，$K_g=0.88\mu_g/(5.3+\mu_g)$，$\mu_g$：航空機質量比，

式(1)の導入に当たつて用いられた仮定は，突風速度の変化は航空機の運行方向には単一の正弦波形（航空機の翼幅方向には一様）のもので，波長は翼弦の25倍とする．機体は剛体で，突風に遭遇する前は水平定常飛行をしており，突風に遭遇しても飛行速度は不変で，機体は上下移動の運動をするのみである．

このようにして求められた有効突風速度 U_{de} の累積ひん度の例を図1に示す．図中の実線はMcDougalら[1]の実測資料を少し修正[7]したもので，現在のアメリカ軍用規格[10]に盛りこまれたものは，これを参考にしている．一点鎖線は，Smith[8]の資料でSuper Constellation形機で，イギリス～オーストラリア間の航路を13 500～17 500 ftの高度で巡航中の約40万mile分を集計したものである．点線は，日本国内唯一の武田ら[24]による資料で，DC-4形機による札幌～東京～福岡～沖縄の航路を巡航中の約10万mile分を集計したものである．

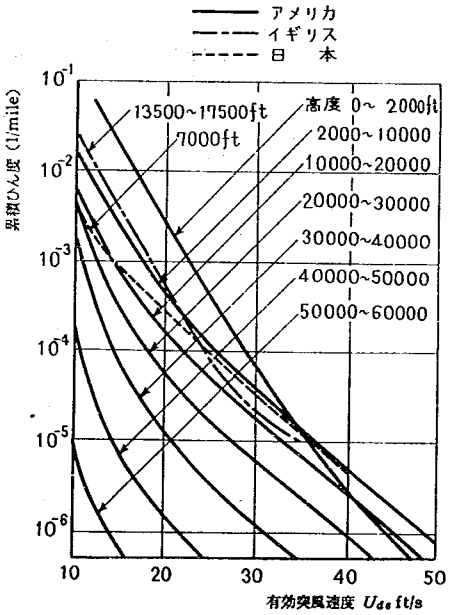


図1　突風ひん度分布

* 原稿受付　昭和45年5月4日．
** 正員，航空宇宙技術研究所（三鷹市大沢 6-13-1）．

このように，U_{de} のひん度を直接集めた資料は他にも多く発表されているが，これらをもう少し統一して表現する試みがなされている．その代表的なものはアメリカ軍用規格にも採用されているものであるが，突風を引起こす大気の乱れは，局所的に比較的短い区間中では，正規定常確率過程と考え，同時に，機体の突風に対する応答を線形と仮定し，航空機が運航中に突風によってうける上下加速度 a_n の単位時間あたりの累積ひん度 $M(a_n)$ として式 (2)[6] でまとめている．

$$M(a_n)=P_1N_0e^{-(|a_n|)/(b_1A)}+P_2N_0e^{-(|a_n|)/(b_2A)} \quad \cdots\cdots(2)$$

ここでは，突風を non-storm turbulence の場合（右辺第1項）と，storm turbulence の場合（右辺第2項）とに分け，おのおのの突風の強さ（突風速度の rms 値）の rms 値を b_1, b_2 とし，航空機の全使用期間中を平均して，non-storm turbulence に遭遇している時間割合を P_1, storm turbulence に遭遇している時間割合を P_2 としている．N_0 は，機体の上下加速度が零レベルを正こう配で単位時間に横ぎる平均回数，A は単位の強さの突風によって生じる上下加速度の rms 値（A^2=機体上下加速度の二乗平均値/突風速度の二乗平均値）である．

これら b_1, b_2, P_1, P_2 の提案されているものの例を図2に示す．図中の実線はアメリカ軍用規格において定めている値を，一点鎖線は Pritchard[17] の提案した値を，点線は Hoblit ら[16] の提案した値を示す．他にも提案されているものがあるが，おのおの隔たりがあって，どのような値がよいかは一概に断定できないのが現状である．

式 (2) における A の値は，式 (1) を求める場合と同様の仮定で計算されることが多いが，最近の高速でたわみやすい機体に対しては，機体の運動の自由度とたわみの自由度をさらに加えて精密に計算されることがしだいに行なわれるようになってきている．

以上のような資料をもととして，航空機の特性に従ってその機体の疲れ寿命の評価あるいは疲れ試験に必要な突風荷重を定めるわけであるが，図3にターボジェットの運航中にえられた資料[11]および DC-9 の疲れ試験[15]に用いられた突風荷重スペクトルを比較して例示する*．

2·2 操だ荷重　操だによって生じる荷重は，同様な過去の機種の資料によって安全側に見積って定

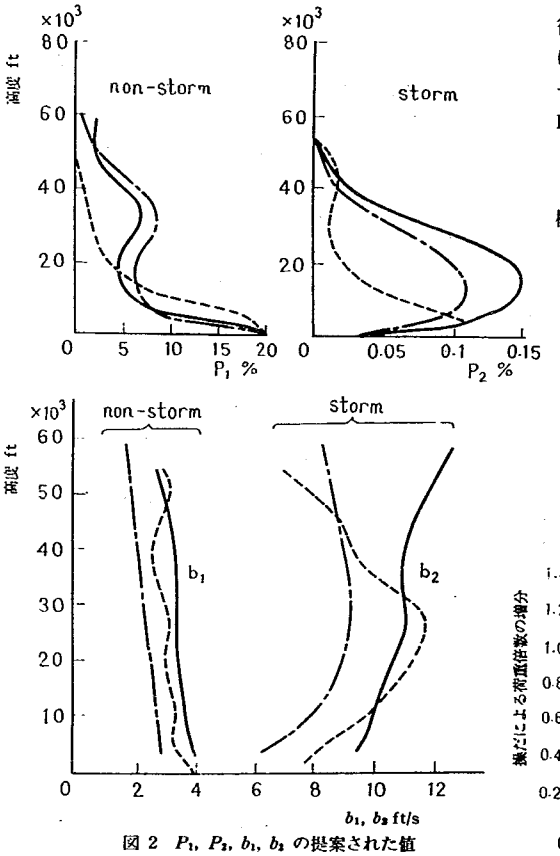


図2　P_1, P_2, b_1, b_2 の提案された値

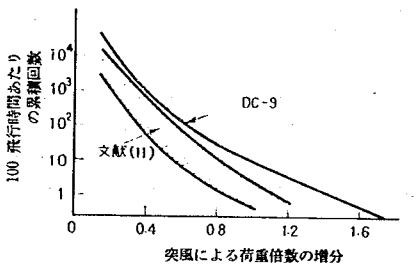


図3　突風荷重スペクトルの例

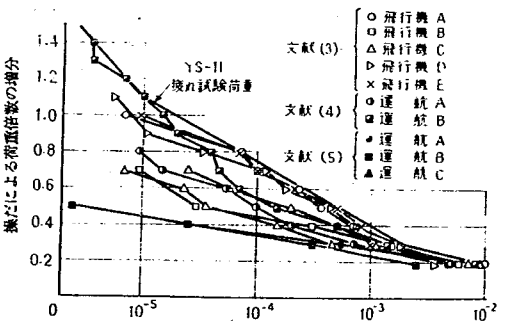


図4　操だ荷重スペクトルの例

* 図3および図4に示す荷重倍数の増分とは，突風あるいは操だによってふえた荷重と，そのときの航空機重量との比である．

めることが多い．図4にその方法で YS-11 の疲れ試験荷重を定めた場合の資料を例として示す[26]．

2·3 地—空—地（G A-G）荷重 G-A-G（Ground-Air-Ground）荷重とは，航空機が地上に静止しているときと，空中を飛んでいるときの荷重サイクルである．

その代表的なものは，胴体の内圧サイクルである．飛行高度が高い最近の輸送機では，巡航中には客室，操縦室がある胴体の内圧は外気圧より高くしており，地上では外気圧と等しくなるので，1飛行に1回の内圧サイクルが生じる．

G-A-G 荷重は胴体の内圧以外にもある．たとえば，主翼の付根付近で脚より外側の主翼下面の外板は，飛行中は主翼がうけもつ揚力のために引張荷重がかかる（この引張荷重を平均荷重として突風や操だの振幅荷重がかかる）．しかし，地上静止中は主翼の重量（翼内に燃料タンクがあるものが多い）のために圧縮荷重をうける．

このように1飛行に1回の荷重サイクルで生じるような荷重を G-A-G 荷重と呼んでいる．前者の胴体内圧サイクルは，コメット機の事故原因となった荷重で重要である．後者は突風や操だの荷重における部材の平均荷重を大きく変える種類の荷重で，疲れ寿命に相当の影響をおよぼすにもかかわらず，寿命の予測[14]が非常に困難であって（Miner の仮説に合いにくい）十分注意しなければならない重要な荷重である．しかし，両者とも荷重の大きさ，ひん度は，航空機の運用条件が決まれば簡単に定まるものである．

2·4 その他の荷重 以上のほかに地上走行中のブレーキ荷重，えい航荷重や着陸衝撃荷重，エンジンスラスト荷重，ジェットエンジンの音響荷重（後述）などの荷重も疲れに関係する荷重として考えなければならない．

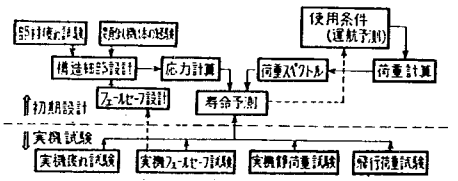


図5 輸送機の疲れ設計および フェールセーフ設計の手順

* 航空機構造の疲れ設計における寿命の算定，安全率のとり方，信頼性の考え方については，上山の一連の研究[21][25][27]がある．

** 民間機の飛行ならびに構造上の安全性についての国際的な協力機関である International Civil Aviation Organization の第4回耐空性委員会（1960年）において，"民間航空機に対する疲れ寿命の許容破壊確率は 10^{-5} 以下とする" という暫定基準が定められている．

3. 疲れ設計*

輸送機には2章で述べたような各種の荷重がその運航中にかかる．これらの荷重下にある輸送機の設計を行なう手順は大略図5に示すようなものである．

まず，その輸送機の使用条件を定める．すなわち，使用中の重量，速度，高度，飛行時間などの分布を予測するとともに，使用する期間を定める．たとえば，YS-11 の場合は，使用期間10年，飛行時間3万時間，着陸回数3万回として設計されており，最近就航したジャンボジェット，ボーイング747の場合は，使用期間，飛行時間は YS-11 と同じであるが，着陸回数は原形機で1万5000回，短距離航路に使用する場合は30000回として計画されている．

このような使用条件に従って，その航空機の全寿命中（使用期間中）の荷重スペクトルを決定する．一方機体の重要部材の疲れ試験を行ない，また過去の類似機体や類似部材の経験をもととして構造の細部設計を行ない，詳細な応力計算と荷重スペクトルから寿命の推定を行なう．この予想された寿命が使用条件と合致するように構造の細部設計を調整するわけである．

上述の手順中，寿命を推定する方法として最もよく用いられるのは，よく知られた Miner の線形累積損傷法による方法である．しかし，この方法が正しい寿命予測をなしえない場合があることは周知のとおりであって，最近では，この方法を若干修正した方法が多くとられている．すなわち，輸送機にかかる荷重スペクトルが比較的きまった形をしていることから，簡単な部材のスペクトル荷重疲れ試験結果や，過去の経験をもととして，仮想 S-N 曲線を作り，あるいは，破壊にいたる損傷の値を修正し，これによって寿命を予想する方法である．

4. フェールセーフ設計[22]

以上は，設計の初期段階において，機体の各部材が使用期間中に疲れ破壊を生じないように一応の設計を行ない，また，それを確認する手順である．しかし，このような複雑な構造部材の疲れ寿命を正確に予測することは非常に困難であり，航空機の使用期間中に絶対に疲れ破壊を生じない（正しくは，十分許容できるほどに小さい確率で疲れ破壊が生じる**）ように設計することは非常にむずかしく，また機体が非常に重くなってしまうおそれがある，ということから，いわゆるフェールセーフ設計の思想が最近の輸送機の設計ではとられている．

すなわち，場合によっては，疲れき裂などの部分的

な破壊が生じたとしても，その破壊は部分的な狭い範囲にとどまり，致命的な事故や，飛行性能を極度に阻害するような変形が起こる心配がなく，安全な飛行がある期間は続けられるような構造にしておき，その損傷箇所が致命的な破壊に発展する前に発見して，補強あるいは新品との交換などの対策をとりうるようにしよう，という設計思想である．

そのような構造の具体的なものとしては，たとえば

（i） 主翼，胴体などの外板にき裂がはいった場合に，縦通材，ろく材などがき裂の進行を妨げるような構造．

（ii） 翼構造のけたあるいは縦通材の数を多くして（不静定部材を多くして）おき，どれか1本が切れても他の部材で十分に荷重をもちこたえうるような構造．

（iii） 窓ガラスを二重にしたり，大きな部材を2個以上の部材の組合せで製作したりして，1個が破損しても大丈夫な構造．

（iv） 圧力をうける構造の一部にあらかじめ弱い箇所を設けて，そこが破壊すると圧力がかからなくなってしまうような構造．

などであって，これらは最近の輸送機ではすべて採用している設計様式である．

5. 疲れ試験

以上のように，輸送機の設計においては，疲れ寿命とフェールセーフ性の配慮が細部にわたってなされているが，実際に完成した機体において，どの部分が疲れに対して危険であるか，その寿命はいかほどか，また，フェールセーフ性は大丈夫かを確認しなければならない．そこで輸送機を新しく製作したり，大幅な改造を行なう場合には図5に示すように実物機体について荷重をかけて各種の試験を行なうことが多い．その試験の方法や装置については他を参照されたいが，一例としてボーイング727の実機疲れ試験において機体の各部にかけた荷重のパターンを図6に示す．また，YS-11の主翼の実機疲れ試験を行なっている状態を図7に示す．このような試験の結果，細部設計の変更を行なって十分な寿命とフェールセーフ性を確保し，また，機体の運航中の点検間隔を定め，あるいは点検手順を定める資料とするわけである．

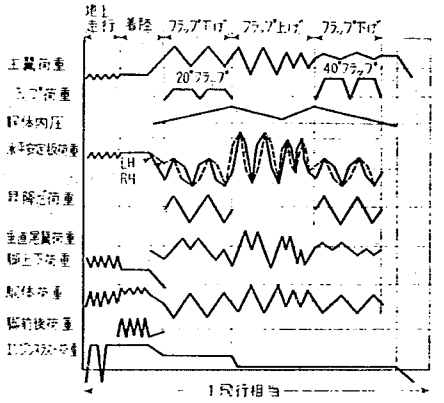


図6 ボーイング727の実機疲れ試験の荷重パターン

6. 音響疲れ

音響疲れは，ジェット機の出現によって問題となったもので，前述の他の疲れとは異質であるので，ここで別に概説する．

一般に，ジェットエンジンのまわりの音場は著しい指向性をもち，最も音圧レベルが高い方向はジェットの中心線をはさんで約35°である．したがって，最も強い音場にさらされる構造部分は，ごく限られた部分となる．輸送機の場合に音響疲れが特に問題となる部分は，主翼後縁，フラップ，尾翼，後胴である．

音響疲れに対する設計資料をうるためには，音響発生源としてサイレンあるいはジェットエンジンのテストスタンドを用いて，種々の構造様式について音響疲れ試験が行なわれ，それらの資料によって，また，実機における経験をもととして実際の設計が行なわれている．具体的な設計例としては，後胴にエンジンをとう載するボーイング727は，尾翼全体が多少とも音響加振されるため，その部分には，対称断面材，積層板，金属ハニカム，およびFRPハニカムを使用している[13]．

ボーイング737では音響疲れに対して抵抗の大きいFRPを多用し，主翼後縁とけた間リブには押出し材のT形補強材および積層パネルを用いている．またき裂の伝ぱ速度を小さくし，ダンピング効果を大きくするために接着構造も広く用いられている．

ボーイング747でもボーイング727の経験を生かして，FRPおよびFRPハニカムを多く採用している[20]．

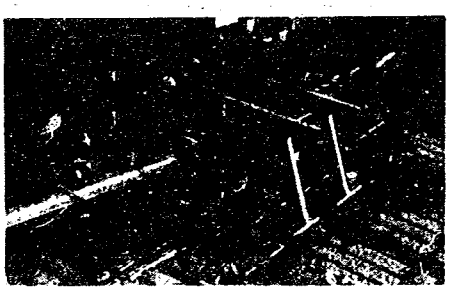


図7 YS-11 主翼疲れ試験実施中

DC-8 では 24 in² のパネル試験片を使ってサイレン試験を行ない，さらに，長さ 5 ft の主翼後縁，フラップ，および補助翼部の組立供試体についてサイレン試験を行ない，その結果に基づいて，後縁リブにT形補強材を追加している．また，実機の J-71 ジェットエンジンを音響発生源として，外板-リブ構造供試体についての試験を行ない，それによって，主翼フラップおよび補助翼のリブ間隔は 4 in が最適であり，一般にリブの板厚は，音響疲れを考えないで定めたものより1ゲージ大きくすればよいとしている[9]．それより低い音響荷重を受ける昇降だおよび方向だには，より広いリブ間隔を採用し，スパンが大きい垂直および水平安定板には，外板にビードをつけた構造が使用されている[12]．主翼後縁の上面には，狭い間隔で縦通材を入れ，下面には 1/2 in 厚さのハニカムサンドイッチ板を 15 in 間隔で支持した構造が用いられている．

同様な手法が DC-9，DC-10 の構造設計にも採用されている．DC-10 ではとう載エンジンを高バイパス比のターボファン形式とし，さらに消音装置をつけるなどして音圧レベルを下げ，現用の他のジェット輸送機と比較して，音圧レベルが低くなるようにくふうしている．

フォッカー F-28 では音響荷重を受ける尾胴部のすべてのフレームと外板の結合部はアングル材による2列リベット結合とし，縦通材には接着構造を採用している．この機体はT形尾翼であって，水平安定板に対する音響疲れを避けている[18]．

同じような配慮はサーブ1073でもなされている[19]．

ロッキード L-1011 では特に音響荷重の影響を受ける部分には金属ハニカム構造を採用している．初期設計の段階では，離着陸を模したジェットモデル試験で音圧分布を求め，これと音響疲れ試験および運用経験に基づいて設計している．

トライデントでは実機について，3基のエンジンを同時に全出力で運転し，尾部，方向だ，昇降だなどについて，ピーク応力，rms 繰返し応力，パネルの振動数を計測して，設計値と比較し，音響疲れに対する強度を確認している．

ロッキード C-5A では強い音場にさらされる主翼後縁には接着ハニカム構造を多用し，後胴にあるとびらの内外板とも 5/8 in アルミハニカムサンドイッチを使用している．初期設計段階では 168 dB の音圧レベルまでのランダムノイズを発生することができるサイレン試験装置で，チタニウムおよびアルミハニカムのパネル試験を行なっている．この際に，音響荷重と同時に温度も加えている．さらに，設計値の妥当性を裏づけるため，エンジンテストスタンドでフラップ，油圧ジャッキなどをつけた主翼後縁構造について実機のエンジンを用いて試験し，各部のひずみ，加速度，音圧レベルを測定しつつ，1 500～3 000 飛行時間に相当する耐久性を調べている．

以上のように，音響疲れに対しては，具体的には，構造物の振動減衰効果を大きく，部分的な剛性を高め，また疲れき裂が生じにくいような材料や工作法に留意し，き裂が生じてもその伝ぱ速度を遅くするように，構造の細部にわたって細かい配慮がなされている．しかし音響疲れ破壊を予測しまたその寿命を推定するためには，さらに進んだ研究にまたなければならない．

7. おわりに

以上，航空機のうちで，疲れ設計がとくに重視される輸送機について，疲れを考慮した設計の方法，思想などを概説した．説明不十分のために，理解しにくい点が多くあることをおそれるが，詳しくは文献を参照されるよう希望する．拙文によって，航空機構造設計において，疲れに対する考慮がいかに重要であるかの一端でも認識いただければ幸いである．

本稿を草するに当たり，航空宇宙技術研究所機体第2部の飯田宗四郎，藤森義典，下河利行，佐野政明各氏のご協力をいただいたことを感謝します．

文 献

(1) R.L. McDougal・ほか2名, *NACA*, RM L 53 G 15a, (1953).
(2) K.G. Pratt & W.G. Walker, *NACA Report*, 1206 (1954).
(3) T.L. Coleman & M.R. Copp, *NACA TN*, 3086 (1954).
(4) M.R. Copp & T.L. Coleman, *NACA TN*, 3475 (1955).
(5) T.L. Coleman・ほか3名, *NACA TN*, 3365 (1955).
(6) H. Press・ほか2名, *NACA Report*, 1272 (1956).
(7) H. Press & R. Steiner, *NACA TN*, 4332 (1958).
(8) J.R.H. Smith, *A.R.C. Technical Report*, C.P. No. 432 (1959).
(9) P.M. Belcher・ほか2名, *Aero-Space Engng.*, (1959-6), 24.
(10) Military Specification, MIL A-8886 (ASG), (1960).
(11) Staff of Langley Airworthiness Branch, Langley Research Center, *NASA TN*, D-1392 (1962).
(12) P.R. McGowan, *SAE*, 671A (1963).
(13) *Flight*, (1963-5-9), 675.
(14) E.C. Naumann, *NASA TN*, D-1584 (1964).
(15) M. Stone, *Douglas Paper*, 3342 (1965).
(16) F.M. Hoblit・ほか3名, *FAA-ADS*-53 (1966).
(17) F.E. Pritchard, *The AGARD Specialists' Meeting on Stability and Control*, (1966-9).
(18) *Aircr. Engng.*, (1967-6), 19.
(19) *Aviation Week and Space Technology*, (1968-6-3).
(20) *Flight*, (1968-12-12), 978.
(21) 上山，日本航空学会誌，No. 58 (昭 33).
(22) 上山，日本航空学会誌，No. 89 (昭 34).
(23) 耐空性審査要領，運輸省令第45号，(昭 35).
(24) 武田・田辺，運輸技研資料，No. 28 (昭 35).
(25) 上山，日本航空学会誌，No. 88 (昭 36).
(26) 竹内・ほか3名，航空宇宙技術研究所資料，NAL TM-21, (昭 38).
(27) 上山，日本航空学会誌，No. 129 (昭 39).
(28) 竹内・山根，日本航空学会誌，No. 173 (昭 43).

解説

539.43.012:629.113

自動車の疲れ設計*

岸本秀弘**

1. 自動車の特殊性

自動車は量産で成り立っている．重量軽減を通じて性能向上ないしは原価低減を計ることは，自動車設計における重要な課題である．同様により安価な材料ないしはより軽い材料への移行も重要な課題である．これを成功りに実施するには疲れ設計が必要である．

自動車を運転するのは素人であり，速度制限を除いては運転方法は特に制限されないし走行する道路状況も千差万別なので，自動車部品に発生する荷重は運転者しだいで大きなばらつきを示す．保守についても2年に1度の車検を除いては特に義務づけされないので，保守によって自動車の信頼性を保つことはできない．

最近のごとくモータリゼーションが普及して生活必需品になり，また自動車の故障が人身事故につながる場合もあるために，自動車における信頼性は社会問題であり，高信頼性への要求は日ごとに強くなる．自動車における故障をクレーム品について調査したところ，件数で約70%が疲れ破壊によるものであった．また昭和30年ごろ，自動車主要部材の損傷事故の本質を究明するために主として運輸省で集められた保安部品の損傷事故を検討した結果では，保安部品の損傷はその報告された全部が繰返し荷重による疲れ破壊であることが判明したと報告されている(1)．自動車の信頼性を考える上で疲れ破壊の重要性を示している．以下に自動車における疲れ設計の現状について若干説明しご参考に供する．

2. 自動車における強度設計の手順

自動車における強度設計の手順を図1に示す．この手順中の試作設計段階および耐久性評価の段階について述べる．

設計段階では強度寿命に関する資料と負荷条件に関する資料が必要である．前者は文献，過去の強度検討結果，および設計のための基礎研究が中心になる．後者についても同様であるが文献の占める比重は少ない．負荷条件としてはあらゆる使用条件を考慮する必要があり以下のごときものがあげられよう．すなわち悪路走行，波状路走行，ねじり路走行，くぼみへの落下，突起物への乗上げまたは衝突，操だ，すえ切り，制動，高速運転，発進，停止—運転—停止など周期的運転条件，および共振である．主要部材の設計に当たって考慮すべき負荷場合を示し，これを設計に適用する場合の考え方を示したものに自動車技術会強度委員会で作成された"自動車負荷計算基準"があり参考になる．

耐久性評価の段階では，主として部品単体を対象にして実働荷重（応力）測定，応力解析および疲れ試験によって評価する方法と，走行耐久試験ないしは台上耐久試験などアッセンブリ状態で運転して評価する方法とを併用して総合的に判断される．前者は実働荷重（応力）測定結果と部品強度から耐久寿命を推定する場合，実働荷重（応力）測定を基礎にしてシミュレーション試験を実施し耐久寿命を推定する場合，および計算荷重と部品の応力解析結果とから安全率を用いる場合がある．なおSAE Iron and Steel Technical Committee第4分科会編集のFatigue Design Handbook(2)はたいへんに参考になる．

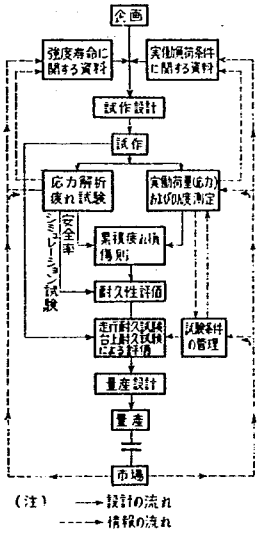


図1 強度設計の手順

3. リヤアクスルハウジングの疲れ設計

作用荷重が走行路面の影響を強く受ける例としてリヤアクスルハウジングを採り上げた．図2に小形乗用車リヤアクスルハウジングの構造の概略を示した．設計段階で主要部の寸法を決定するためにはまず負荷計算が行なわれる．前述の自動車負荷計算基準に従って負荷計算をし

* 原稿受付 昭和45年5月18日．
** 正員，トヨタ自動車工業会社第2技術部（豊田市トヨタ町1）．

422

てみよう．それに先立ち同負荷計算基準で与えている負荷の場合を述べるとつぎのようになる．

A：対称上下荷重，B：非対称上下荷重，C：横荷重，D：対称前後荷重，E：非対称水平荷重，F：伝導トルク荷重，G：かじ取り装置荷重，H：操作荷重，J：特殊荷重．

さてこれら負荷の場合のうちで，リヤアクスルハウジングに作用する荷重はいくつかあるが，特に重要な場合について詳述するとつぎのようになる．

A_2：単独落下

車両の前輪および後輪が別々に平たん路より地表凹所に落下した場合で，落下のエネルギはばね系により完全に吸収されるものとし，車両重量および負荷倍数はつぎの式で計算する．

$$R=k\delta_2=nR_s$$

$$W_0(h-\delta_0+\delta_2)=\frac{1}{2}(k\delta_2^2-k\delta_0^2)$$

ただし

R：車輪荷重　kg

k：ばね系の剛性　kg/mm

n：負荷倍数（車両の任意の点に加わるすべての方向の慣性力および重力のベクトルの和のある方向の分力を重力で除した値をその方向の負荷倍数という）．

R_s：静止時の車輪荷重　kg

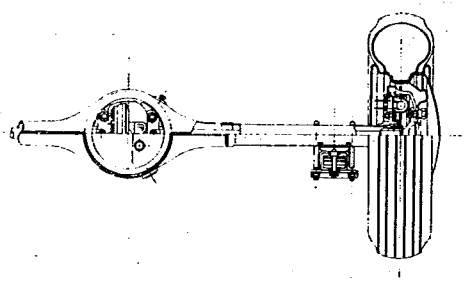


図 2　リヤアクスルハウジング

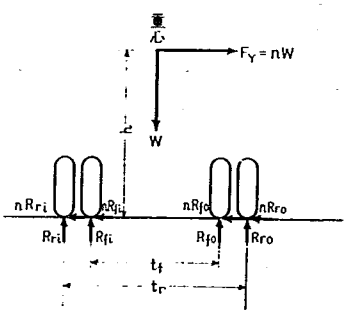


図 3　一様横荷重

W_0：ばね上分担重量　kg

δ_0：ばね系の初期たわみ　mm

δ_2：ばね系の最大たわみ　mm

h：車両接地点の落差で下のように定める．

普通貨物自動車：$h_f=100$ mm，$h_r=150$ mm

小形および旅客自動車：$h_f=80$ mm，$h_r=120$ mm，（h_f：前車輪，h_r：後車輪）

以上の計算の代わりに経験上 $n=2.5$ がとられることがある．

A_4：繰返し上下荷重

車両が正規積載状態で水平凹凸路を直線走行する場合で，負荷倍数はつぎのように定め，繰返し回数は 10^7 とする．車両全重両に対しては

（平均±振幅）負荷倍数 1±0.5

ただし足まわり部材については各車輪分担荷重に対して 1±0.8，回転曲げを受ける部分では±1.2．

C_1：一様横荷重（図 3）

車両は横方向の慣性力 F_Y を受けるものとし，車輪荷重 R は次式で計算する（a，b は重心と前後車軸心との距離）．

$$\text{前輪外側}：R_{fo}=\frac{1}{2}R_{fs}+\frac{nWh}{t_f+(a/b)t_r}$$

$$\text{後輪外側}：R_{ro}=\frac{1}{2}R_{rs}+\frac{nWh}{(b/a)t_f+t_r}$$

$$\text{前輪内側}：R_{fi}=\frac{1}{2}R_{fs}-\frac{nWh}{t_f+(a/b)t_r}$$

$$\text{後輪内側}：R_{ri}=\frac{1}{2}R_{rs}-\frac{nWh}{(b/a)t_f+t_r}$$

ただし $F_Y=nW$，n の値は車種によりつぎの値をとる．

貨物車，乗合車および三輪車　$n=0.5$

乗用車　$n=0.6$

D_4：後進不偏制動後期

水平路面上にある車両の各制動輪接地点に鉛直力とその 0.6 倍以上の前向水平力とが同時に作用する．

$$\text{前輪}：R_f=\frac{b-\mu h}{a+b}W$$

$$\text{後輪}：R_r=\frac{a+\mu h}{a+b}W$$

ただし W は車両総重量．

さてこれらのうち破壊ないしは永久変形に対して問題になる 3 種類の負荷の場合を図 4 の上方に示した諸元を持つ車両について計算しリヤアクスルハウジングの曲げモーメント分布を求めると図 4 のごとくになる．本リヤアクスルハウジングは中央部を除いてパイプ状であるから A_2 ないしは A_4 負荷の場合が最も危険であることがわかる．A_2 負荷の場合は図 4 における④点が危険断面である．このときの曲げ応力は図 4

に示した諸元の下では 17.2 kg/mm² になる．A_4 負荷の場合スプリングシート溶接部(図4㊁点)と中央寄りの突合せ溶接部(図4㊄点)が危険断面である．図4に示した寸法の下ではスプリングシート部で 6.6±5.3 kg/mm²，中央寄りの突合せ溶接部では 6.4±5.2 kg/mm² の曲げ応力になる．A_2 負荷の場合には材料の降伏点と対比し，また A_4 負荷の場合には溶接部の疲れ強さと対比して，それぞれに余裕を有した値になるようパイプ寸法が決定されるが，余裕のとりかたには経験が大きな比重を占める．

つぎは耐久性評価の段階である．リヤアクスルハウジングは車輪上下荷重などによる上下曲げ，車輪前後荷重などによる水平曲げおよびねじりを受ける．したがってこれら各種荷重下で大きな応力の発生する部位における応力測定を実施し耐久性を評価する必要がある．応力測定では電気抵抗線ひずみゲージにより，ひずみ—時間履歴を測定し，ひずみ（応力）ひん度を計測する．ひずみゲージてん付位置の選定はぜい性塗料ないしは光弾性皮膜法などにより実験的に行なうが，一見して明らかな場合とか破壊実績がある場合のごとく容易に定まる場合も少なくない．

ひずみゲージてん付位置が決まれば，つぎは主要な走行条件下での実働応力の測定である．市場における信頼性目標を達成するために，かなりきびしい悪路を想定して経験的に作られたテストコースがある．このテストコースでの走行寿命と市場での信頼性との関連がはあくされていれば，市場での信頼性の評価はテストコースでの走行寿命の評価で置き換えることが可能になる．このアプローチの詳細は図1のとおりであるが，累積疲れ損傷則を用いてテストコースでの走行寿命を推定し市場における信頼性を予測する例を述べよう．図5はテストコースにおけるスプリングシート部バウンド側称呼応力の平均値交さ最大値法[3]によるひん度分布である．一方リヤアクスルハウジングの片振り曲げ疲れ試験を実施し，修正グッドマン線図の考えを時間強度の領域まで拡張して静止時での応力を平均応力とする S-N 曲線を推定すると図5を得る．これから Palmgren-Miner 則[4]によって走行寿命を推定すると 73 000 km になる．この結果に対しては Palmgren-Miner 則の妥当性，市場での環境条件と実験室のそれとの相違，試作品と量産品との相違，およびリバウンド側応力はバウンド側応力よりも小さい点など多数の問題点がある．しかしこの結果は，テストコース走行耐久試験結果および過去の実績などを総合評価して本リヤアクスルハウジングのスプリングシート溶接部の市場における信頼性を予測する上で有効な根拠を与える．なおこの実働応力測定結果および耐久寿命推定を通じて設計時に用いられた負荷計算の妥当性が検証されつぎの設計に生かされる．

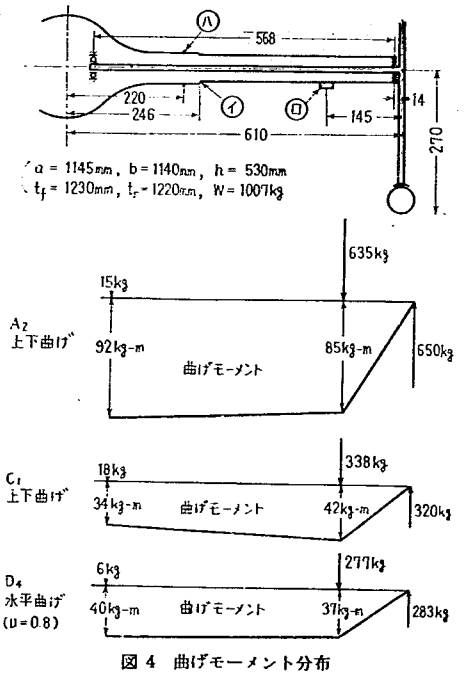


図4　曲げモーメント分布

4. 原動機連接棒の疲れ設計

連接棒に作用する荷重は爆発による圧縮荷重とピストンなどの慣性による引張荷重である．かりに 20 万 km 走行する車両では原動機は約 6×10^8 回転する．さらに原動機の最高回転数は定まっているので引張荷重の上限は比較的限られていると思われる．また圧縮荷重のばらつきは異常爆発の影響もあり無視できないかもしれないが，圧縮荷重が強度に及ぼす効果は少な

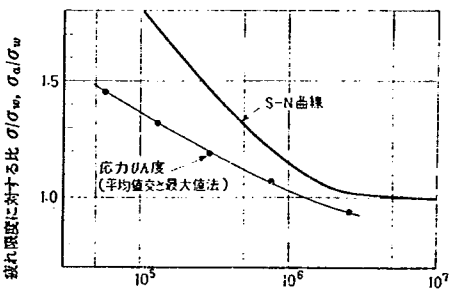


図5　スプリングシート部バウンド側応力 (σ) のひん度と，静止時応力を平均応力とした S-N 曲線（推定）

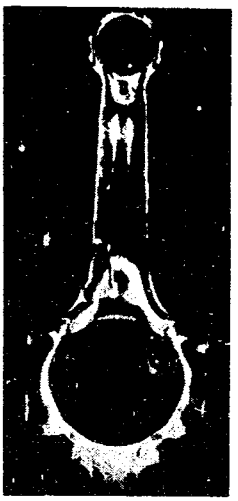


図6　三次元光弾性写真

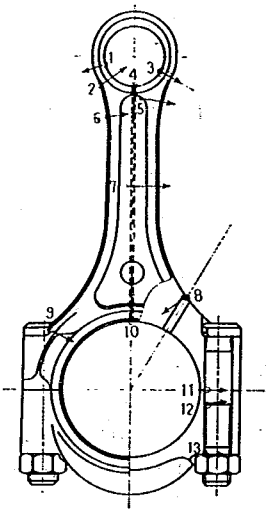


図7　疲れ破壊の位置

い．この理由から連接棒では疲れ限度を基礎にした設計になる．

設計段階では簡単な計算で連接棒各部の荷重を求めることができるのでこれに耐える寸法の決定をすることになる．大端部および小端部は形状が若干複雑なので光弾性実験ないしはひずみゲージなどにより求めたひずみ分布測定結果が有効に生かされる．三次元光弾性写真を図6に示す．市場，台上耐久試験ないしは連接棒単体の疲れ試験で疲れ破壊したことのある位置を図7に示した．同図は各種連接棒の結果をひとまとめにしたので図の形状はかりのものである．

耐久性評価段階では連接棒各部のひずみ測定を実施し荷重とひずみの関係を求める．これと計算にて求めた荷重の範囲より運転時の連接棒各部のひずみの範囲が求まる．つぎに疲れ限度線図上にて安全率を算出し耐久性を判定する．この場合も台上耐久試験および過去の実績などを総合して最終的に判定が下されるのは前の例と同じである．図7で位置 *1*, *4*, *10*, *11* はフレッチング条件下にある．位置 *2*, *5*, *6*, *7*, *9* は鍛造黒皮であり，位置 *3*, *8* は鍛造黒皮にきり穴がある．ボルトは曲げの影響が大きい[5]．これらの疲れ強さは製造条件，組付け条件の影響が大きいと思われるので，安全率を算出する際に用いる疲れ限度線図は連接棒の疲れ試験結果から得たものがよい．

5. むすび

以上自動車における疲れ設計の概略を述べた．自動車の強度試験をしてもその自動車はよくならない．よい自動車はよい設計で作られる．このためには実験に立脚したすぐれた設計基準を作ることがたいせつである．

文　献

(1) 自動車技術会，自動車負荷計算基準，(昭 37-6)，9.
(2) SAE, *Fatigue Design Handbook*, (1968).
(3) 尾上・ほか2名，機械学会講演論文集，No. 700-3 (昭 45-4)，65.
(4) A. Palmgren, *VDI-Z.*, **68**-14 (1924), 339, および M.A. Miner, *Proc. ASME*, **12** (1945-9), A159.
(5) 佐々木・ほか2名，自動車技術，**22**-10 (昭 43-9)，915.

解説

539.432:629.113

自動車の不規則振動による疲れの解析*

望月 澄男**

1. まえがき

自動車は高速道路のようなよい道を疾走するという用途から，通常の交通機関がはいらないへき地の悪路，ときにはゲレンデを運転者の意志によって，はせめぐるという使い方まであり，きわめて多面的な用途をもった乗物である．したがって自動車は“走る性能”と同時に，航空機，船舶，鉄道車両さらには橋りょう，建築物などと同じく構造物としての“強度，信頼性”が当然のこととして要求される．また，自動車の重量軽減はユーザ，メーカにとって直接・間接にいろいろメリットがあるが，強度はその重量に密接な関連のある一つの要素でもある．

ところで自動車に働く実働荷重としては，乗員，積載物，自重あるいは組立誤差，加工ひずみなどによる静荷重，路面が平たんでないための振動荷重，旋回・制動にともなう荷重，機関駆動による荷重，けん引・被けん引，ドアの開閉，ジャッキアップによる荷重，積雪，飛石，空気力その他多種多様のものがある．これらの荷重による強度問題は塑性変形，座屈，疲れ，その他いろいろな形をとって現われるが実際上最も重要なのは疲れである．

ところが最近にいたっても走行中の自動車の強さ，ことに疲れ強さに関する解析はほとんど報告されていない．その理由は，①強度以外の必要条件や制約条件からきめられる自動車の構造形態は，強度解析しにくい形になっていること，②たとえ動的な応力解析ができたとしても，それが最終的に必要な疲れ強さ，ないしはその他の強さの評価に結びつけにくいこと，③実物での試験が他の輸送機器や構造物にくらべれば比較的容易に実施できることなどにあると考えられる．

しかし一方において大形電子計算機の普及にともない，大規模な数値計算が短時間で安価にできるようになると，自動車の分野でも成果の期待できる方面から動的な構造解析が実行されるようになることも予見できることである．実際，解析的手段を用いることにより，より合理的な自動車の構造について知見を広めることができるであろう．そのような期待が今後高まっていくと思われる．ここでは路面の凹凸による上下方向の振動が原因になって自動車に生ずる疲れの解析に関連し，最近までに行なわれた研究の成果を中心に概観しよう．

2. 路面の形状—自動車の入力

路面の凹凸は自動車の加振源であるが，その性状について最近まで多くおこなわれている研究・調査はパワースペクトル密度（以下 PSD と略記する）解析である．PSD は変動波形を構成する各周波数成分のパワーに比例するものである(1)が，わが国においてはすでに昭和28年に高橋が舗装路面の PSD を求め，その結果を利用し自動車の振動を論じている(2)．その後も兼重・川合らの報告や外国の研究者の報告が数多く提出されている．

図1は筆者らが求めた路面 PSD の測定例である．図の(a)は通常最も多く見うけるタイプの普通の無舗装路であり，(b)は直径 2～3 m の大きくて深いくぼみが相ついで並んだきわめてひどい悪路である．(c)はほぼ規則的に凹凸が続く道である．このように，いわゆる悪路の路面形状はいろいろなものがあり，俗にじゃり道，でこぼこ道，洗たく板状路などと呼ばれている．そのほかぬかるみ路のように形状を規定しにくいもの

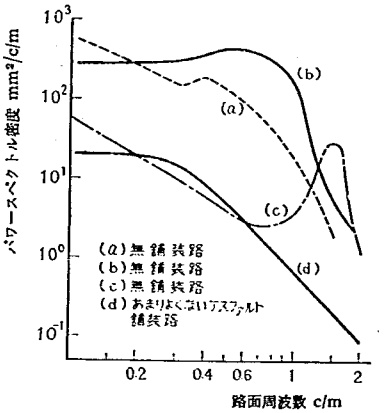


図1 各種路面プロフィルの PSD
（東洋工業社内データ）

* 原稿受付 昭和45年5月6日．
** 正員，東洋工業会社実験研究部（広島市外府中町新地）．

もある．こうした多くの測定例から無舗装悪路の多くは，その路面プロフィルの PSD $S(\lambda)$ が $S(\lambda)=c/\lambda^n$（λ：路面周波数，c：定数，n：定数）なる式で近似でき，しかも n は2～4程度，ことに2に近いことが多いとされている．

ところで，このような路面形状の PSD 以外の性格となると，まだ十分わかっていない．

たとえば左と右の車輪が通過する路面の形状の相互関係も知りたい性格の一つである．図2はある道路上で幅方向に 1.4 m 隔たった二つの部分の路面プロフィルを実測し，一方を入力，他方を出力のようにみたてて，その間の周波数応答関数を求め，そのゲインと位相をプロットしてみたものである．図3は同じくある道路上の 1.5 m 隔たったプロフィルのコヒーレンシー〔出力中のある周波数成分のパワーのうち，どれだけが入力と直線的な関係で与えられているかをしめす量[1]〕を求めた例である[3]．これらからみると波長が5～8m より長い成分は比較的位相のずれが少なく，左右輪に対して同位相に近い刺激になるのに対して，それより波長の短い成分は位相関係，関数関係が乱れているようである．しかしこの問題については定説といえるほどのデータの裏づけがまだない．また路面の形状がガウス過程〔変動量の確率分布がガウス分布に従うような確率過程[1]〕でどの程度近似されるかについても，まだよくたしかめられていない．

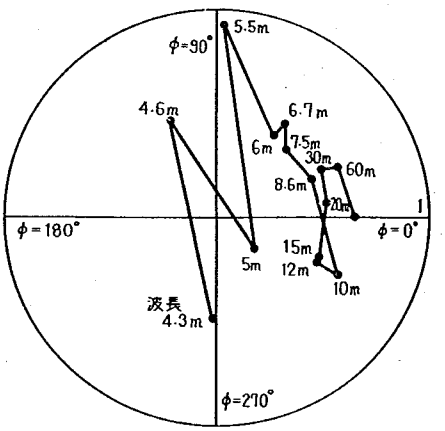


図 2　左右輪通過部路面プロフィルの伝達関数，ベクトル軌跡（東洋工業社内データ）

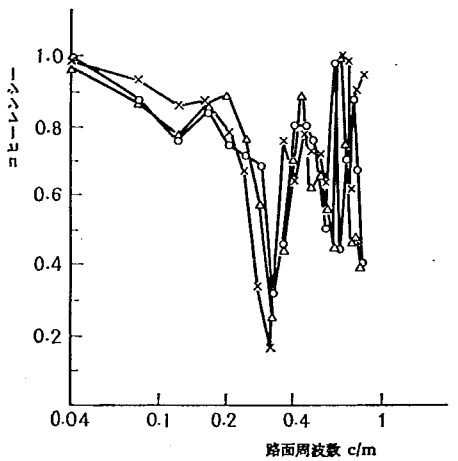


図 3　左右輪通過部路面プロフィルのコヒーレンシー（Kaneshige）

今後はこれら PSD や路面プロフィルそのもの以外の道路面形状の性状について多くの情報をうる努力が必要とされるであろう．

3．動的応力の解析

平たんでない路面から加わる力によって自動車には上下方向の振動加速度が生ずる．この加速度を車体あるいは部材が十分剛であるとの仮定のもとに算出して，これから分布荷重を定め応力を求めるという方法がしばしば採用されている．しかし普通の単体構造の乗用車ボデーでは 25～30 c/s，フレーム付き分離構造のトラックでは 10 c/s 前後に一次の曲げ振動，ねじり振動の共振点があって，車体に発生する応力に相当大きな影響をもたらす[4]．したがって自動車車体などの動的応力解析には二つの課題がある．第1は単純な形状でない通常の路面からの加振に対する応答を求めるという点，第2は自動車という複雑な構造物の動的応答を計算するという点である．この第1の課題に対しては，路面形状すなわち自動車への入力を決定論的（deterministic）なものとして扱う方法と，ランダムなものとして扱う方法が考えられる[5][6]．それぞれに長所短所があるが，普通の自動車の振動計算にはランダム入力とし，PSD を用いられている例が多い．第2の課題に対しては，最も問題の車体を有限要素法[7]，伝達マトリックス法[8]，大マトリックス法[9]などで解析することが考えられる．現在のところ振動騒音の分野で車体の振動解析がかなり行なわれているが，車体の動的応力を求めた例はきわめて少ない．

筆者らはトラック車体を図4のように集中質量系にモデル化してメーンフレームの曲げ応力を計算した[10][11]．まず車体系の固有振動数，固有モードを大マトリックス法で求めておき，一般化質量，一般化力を用いて各次曲げ振動の方程式を作り，これを解いて車体系の振動加速度の周波数応答を求める．これによる車体系各部の慣性力と，前後のサスペンション，機関系

から加わる力によってフレームのある点に生ずる曲げモーメントを算出すれば，前輪刺激および後輪刺激に対するフレームの曲げ応力の周波数応答関数 $H_F(f)$, $H_R(f)$ がそれぞれ計算できる．

つづいて，自動車は一定車速 V で直進するものとし，前輪および後輪から加わる入力の PSD が $S(f)$ で表わされるとすれば，応力の PSD $\Phi_p(f)$ は次式のようになる．

$$\Phi_p(f)=S(f)\{|H_F(f)|^2+|H_R(f)|^2 +2|H_F(f)||H_R(f)|\sin(2\pi\tau f+\varphi)\}$$

（ただし τ=ホイールベース/V, φ：位相）

図5はこうして計算した応力の PSD と実測した応力の PSD の一例を示したものである．このように振動系の線形性を仮定できる場合は応力の周波数応答関数を計算し，つづいていわゆる不規則振動論を利用して自動車に生ずる応力の PSD を求めることができる．

なお最近では複雑な構造物の構造解析を計算機で行なうためのはん用計算プログラムが開発され実用されるようになりつつある[12]．

4. 動的応力解析から疲れ強さの評価へ

応力を時間領域で計算した場合には，実測応力に準じて処理を行ない，疲れ被害，換算応力を計算するなり，あるいは疲れ試験を実行して疲れ強さを評価すればよいであろう．

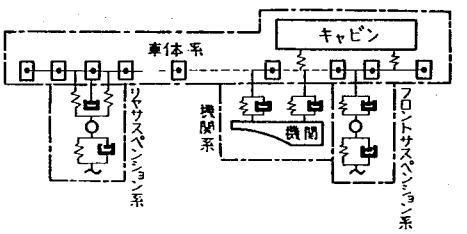


図 4　トラックの曲げ振動解析用モデル

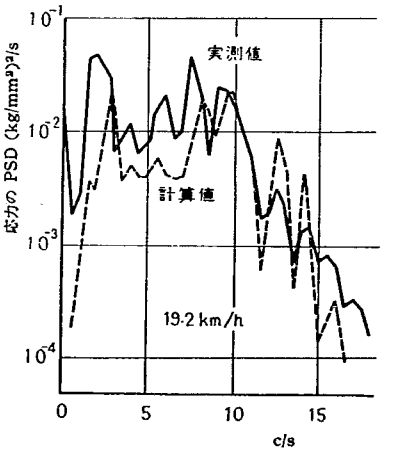


図 5　応力の PSD（計算値と実測値）

ここで換算応力とは，実働応力による疲れ被害がそれと同じ繰返し数の一定振幅応力による疲れ被害に等しいとき，その一定振幅応力をいう[13]．しかし応力を周波数領域で計算し解が PSD の形で求まっている場合には，疲れ強さの評価に不便であり，もっと直接に疲れ強さを評価しうる値に置き直すことが望ましい．

Miles は減衰の少ない1自由度振動系が広帯域スペクトルをもつ刺激力を受けたときに示す応答のひん度分布がレイリー分布になるとの結果を導き，これにマイナーの法則を適用して換算応力を算出している[14]．また，Powell や Bolotin は多自由度系について考察し，変動応力の極大値，極小値のひん度分布（極値ひん度分布）が S.O. Rice の式[15]で求められるものとし，これにマイナーの法則を適用して寿命を論じている[16]．

ところで自動車が悪路を走行したとき，各部に発生する応力について，Rice の式が成り立ち，応力の PSD から極値ひん度を求められるかどうかという問題がある．もし応力波形が定常不規則なガウス過程とみなしてよいならば，以下に述べる前提のもとに疲れ被害，換算応力を算出できる．筆者らはこの点について実験データを検討し，Rice の式は大きい応力の発生回数を実際より少なく見積ることが多いこと，そのために後述する式(1)による換算応力は実測応力ひん度から求められる換算応力より平均 10% 程度小さいこと，しかしこれら二つの換算応力はほぼ比例関係にあるとの結論をえている[17]．

まず前提として，①応力は極値ひん度をカウントするものとし，②疲れ被害法則は Corten-Dolan の法則[18]を適用するものとする．①については自動車技術会構造強度研究委員会（山本峯雄委員長）のプログラム方式疲労試験小委員会（萩原和典委員長）の研究で，自動車の場合，無効振幅除去-極値法が比較的妥当な応力ひん度表示法とみなされている[19]．②については，各種溶接箇所，切欠き部，段つき部，穴あき部，アール部など，何らかの応力集中箇所を考えねばならぬ自動車にマイナーの法則を適用するのは危険と思われる．そのうえ最近の研究では，疲れ限度以下の応力も疲れの進行に寄与し，累積被害の算出にあたっては疲れ曲線を一定振幅応力に対するものから修正して用いるほうがよいとの見解が多くえられている．このような観点からすれば，マイナーの法則よりCorten-Dolan の法則を用いるほうがよいと考えられる．

さて，応力の PSD $\Phi_p(f)$ が既知であれば，以上の前提のもとに，単位時間あたりの疲れ被害 D は次式で与えられる．

$$D=(-\psi_0''/\psi_0)^{1/2}/(2\pi A^{1/m}\psi_0)\times\int_0^\infty x^{(1/m)+1}e^{-(x^2/2\psi_0)}dx$$

ただし修正した疲れ曲線を $N=(A/\sigma)^{1/m}$ として用いている（ここで N：応力の繰返し数，σ：応力，A：定数，m：定数，$\psi_0=2\int_0^\infty \Phi_p(f)df$，$\psi_0''=-8\pi^2\int_0^\infty f^2\Phi_p(f)df$，$x$：時間の関数としての応力である）．

とくに $1/m$ が奇数であれば D は次式のようになる．

$$D=\{1\cdot3\cdot\cdots\cdots(1/m)2^{1/2\{(1/m)-1\}}\sqrt{\pi}/A^{1/m}\}\times\left\{\int_0^\infty f^2\Phi_p(f)df\right\}^{1/2}\times\left\{\int_0^\infty \Phi_p(f)df\right\}^{1/2\{(1/m)-1\}}$$

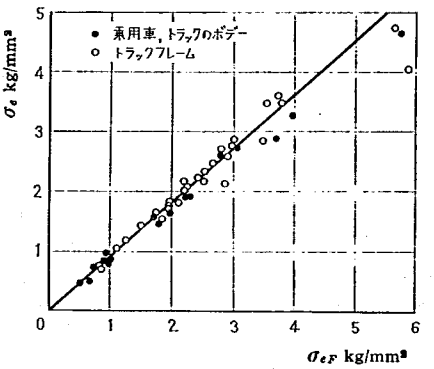


図 6　σ_e と σ_{eF} の比較

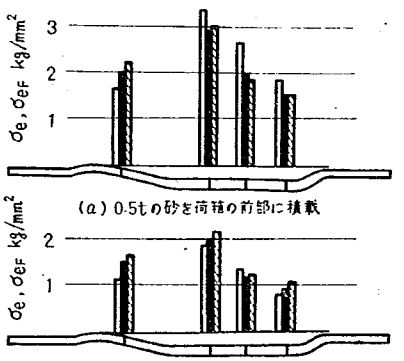


図 7　積載条件がトラックフレームの曲げ応力におよぼす影響の計算例（悪路 30 km/h 走行）

また $1/m$ が偶数のときには D は次式のようになる．

$$D=\{(1/2m)!\,2^{1/m}/A^{1/m}\}\times\left\{\int_0^\infty f^2\Phi_p(f)df\right\}^{1/2}\left\{\int_0^\infty \Phi_p(f)df\right\}^{1/2\{(1/m)-1\}}$$

最近の多くの実験結果では $1/m$ として 6 に近い値がえられていることが多いから，$1/m=6$ として上の式を書き直すと

$$D=(384/A^5)\left\{\int_0^\infty f^2\Phi_p(f)df\right\}^{1/2}\times\left\{\int_0^\infty \Phi_p(f)df\right\}^{5/2}$$

となる．

これから換算応力を求めることができるが，通常の定義に従う換算応力よりも，むしろ設計段階での利用には単位時間あたりあらかじめ定められた繰返し数で等価な被害を与える応力として定義しなおすほうが便利である．自動車では 10 c/s あたりの振動成分が最も大きくなることが多いので，毎秒 10 回を換算応力の繰返し数にとるならば次式によって換算応力 σ_e が算出される（ここで $1/m$ は 6 としている）．

$$\sigma_e=1.84\left\{\int_0^\infty f^2\Phi_p(f)df\right\}^{1/12}\left\{\int_0^\infty \Phi_p(f)df\right\}^{5/12}\quad\cdots\cdots(1)$$

図 6 は実測応力から $\Phi_p(f)$ を計算し，これを式 (1) に代入して求めた σ_e と，実測応力から直接に応力の極値ひん度をカウントして計算した換算応力 σ_{eF} の関連を示した例である．

このように上式を用いれば自動車の振動応力解析の結果求められる応力の PSD から換算応力を算出することができ，疲れ強さの評価が可能となる．図 7 は 1 t 積み小形トラックにおいて，積載条件をかえることにより，悪路走行中のフレームの曲げ応力が変わることを実験値とともに前述のモデルで計算して示したものである．

なお変動応力の大きさを表わすために，rms 値を用いることは自動車においてもほぼ許されるとみてよい．ただし式 (1) による σ_e にくらべて σ_{eF} との相関がやや悪い．

5. むすび

以上，主として路面の凹凸によって自動車に生ずる振動応力の解析と，つづく疲れ強さを評価するための換算応力について述べた．しかしこの分野の研究は，まだその緒についたばかりであって，今後，構造力学，振動学，材料強度学などの各方面から検討を必要とする問題はきわめて多い．

終わりに本稿をまとめるにあたり引用させていただ

いた文献の著者に謝意を表するとともに，永光哲次郎，保田紀孝，中矢裕介，上利米治，その他の諸君の協力にお礼申しあげる．

文　献

(1) 赤池，不規則振動のスペクトル解析，(昭40)，統計数理研究所．
(2) 高橋，自動車技術，7-11，12 (昭 28-11，12)，286.
(3) I. Kaneshige, *SAE Paper*, No. 690111 (1969).
(4) 山川，機械学会講演前刷集，No. 149 (昭 41-4)．101.
(5) J.S. Bendat & A.G. Piersol, *Measurement and Analysis of Random Data*, (1966), 2, John Wiley & Sons.
(6) B.D. Van Deusen, *SAE Paper*, No. 670021 (1967).
(7) O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister, *Stress Analysis*, (1965), John Wiley & Sons.
(8) C.E. Pestel & F.A. Leckie, *Matrix Method in Elasto Mechanics*, (1963), McGraw-Hill.
(9) R.H. Scanlan & R. Rosenbaum, *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, (1960), Macmillan.
(10) 望月・保田，機械学会講演論文集，No. 190 (昭 43-4)，107.
(11) 望月・保田，自動車技術会講演前刷，(昭 45 春)，19.
(12) 川井，生産研究，22-1 (昭 45-1)，34.
(13) 河本，金属の疲労，(昭 37-5)，朝倉書店．
(14) J.W. Miles, *J. Aeron. Sci.*, 21-11 (1954-11), 753.
(15) S.O. Rice, *Bell System Tech. J.*, 24 (1945), 46.
(16) A. Powell, *J. Acous. Soc. Amer.*, 30-12 (1958-12), 1130.
(17) 望月・保田，機械学会関西支部講演論文集，No. 44-5 (昭 44-3)，38.
(18) H.T. Corten & T.J. Dolan, *Proc. Intern. Conf. on Fatigue of Metals*, (1956), 235.
(19) 萩原・坂口，自動車技術会講演前刷集，(昭 42 春)，15.

工業技術院　定量的評価法開発

新技術開発に当たって，開発しようとするその技術の重要性を予知し，評価することが技術革新時代の大きな課題となっているが，工業技術院では定量的評価法と呼ぶユニークな新技術評価の手法を開発した．

これは新技術開発のねらいである効果，投資，条件の3要素を細分化して多数の各項目ごとに採点し，その総合点で技術の重要性や他技術との優劣をきめるものである．

工業技術院としては，今回開発した定量的評価法をさらに改良，発展させ，政府，民間の技術開発の役割や産業技術振興政策の立案などの際に役立てるとともに技術開発の計画化をはかるうえでの新しい武器として活用していくことになっている．

ところで，わが国の技術開発はこれまで国際競争力の強化という観点から進められてきたが，最近は社会開発の推進，産業のシステム化など新たな背景を加え，技術開発や研究を多面的に進める必要が出てきた．

これにはわが国経済社会の未来像を想定し，それに見合った技術開発の方向を見出すとともに，長期的，しかも計画的に技術開発を遂行していくことがたいせつである．

このためにはしっかりした技術評価法にもとづいて技術開発を行なうことが必要である．

従来の技術開発に対する評価法としては企業単位，研究所単位で独自に考慮されてはきたが，どちらかといえば定性的であるため，客観的な評価法とはいえない．

そこで工業技術院では定量的な手法を盛込んだ技術評価法を開発すべきと考え，2年前から新手法の開発に取組んできた．

開発に当たっては，これまでの手法であるパターン法，関連樹木法などが基本的には研究開発の投資効果をあげる点に集約されている点に着目，さらに評価基準を数値的に掌握しやすくするため「投資」対「効果」の考え方をベースとし，これを「条件」に補正していく手法を開発した．

この手法では効果，投資，条件の3要素について，あらかじめ設定された段階的点数配分および採点基準にしたがって採点し，評価点を算出するもので，客観的な評価が可能となると同時に，評価面で見方が分れた場合でも論点を明らかにできるという．

▽効果要因

この評価手法のうち，効果要因では経済効果，社会効果，技術的効果の三効果に大きく分けている．

さらに各効果を，たとえば加工度，生産規模，生活の快適化，人的資源の活用などに細分化，三効果の点数合計は40点満点にしている．

▽投資要因

投資要因では対象技術の開発に必要な費用の度合を研究開発段階だけでなく，企業化段階，市場開拓段階まで含めて分析する．

さらに人的資源の確保の必要性のていども考慮に含めている．

したがって，投資要因では研究開発費，企業化設備費，市場開拓費，研究者投入の4項目に分け，20点を満点にしている．

▽条件要因

条件要因についてはある技術テーマの評価について投資および効果を定量的に掌握した場合，その開発のための外的，周辺環境の優劣度をまた定量的にとらえる必要がある．

このため，アンケート結果，世論の要請，経済的要請，開発の緊急性，外国との競合性，所要期間など8項目に分け，40点で満点にしている．

これらの評価基準による採点結果から新技術の開発の優先度などを決定するわけであるが，それには ①投資効果，②効果および条件などを組合わせ，採点にもとづいたグラフを作成分析する．さらに研究開発テーマの性格づけなどを行なって，総合的に技術評価を進めていく．

工業技術院は，この手法にもとづいて新技術の技術評価を試算した結果，点数面でみたかぎり，たとえば海底掘削装置は48点，MHD 発電は51点の採点を得た．

工業技術院はこの手法のうち，各項目の採点配分のウェイト，評価項目間の重複などの面にまだ問題点があるため，さらに改良を加えて完全なものに仕上げていく予定である．

〔服部　敏夫〕

T. K. CAUGHEY
Professor,
Division of Engineering,
California Institute of Technology,
Pasadena, Calif.

H. J. STUMPF
California Institute of Technology,
Pasadena, Calif.

Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation

This paper analyzes the transient response of a simple harmonic oscillator to a stationary random input having an arbitrary power spectrum. The application of the results of this analysis to the response of structures to strong-motion earthquakes is discussed.

A NUMBER of recent papers [1, 2, 3, 4][1] have considered the response of dynamic systems to random excitation. With the exception of Bogdanoff's paper [3], the analysis has been confined to the stationary aspects of the motion. The study of the transient motion of a system under random excitation has a history extending over the past 30 years. The first solution to the problem was given by Uhlenbeck and Ornstein [5] in 1930, and in a later paper Uhlenbeck and Wang [6] solved the same problem using the Fokker-Planck equation for the system. Housner [7] was the first to treat the earthquake problem as an example of random excitation; unfortunately, he did not publish his results. The most recent paper on the subject is that of Bogdanoff and Goldberg [3] who solved exactly the same problem as Uhlenbeck and Ornstein [5]. With the exception of Housner [7], all these authors assumed the input process to be white; this assumption radically simplifies the mathematical problems of analysis.

The purpose of this paper is to analyze the transient motion of a single-degree-of-freedom oscillator subjected to a stationary random input having an arbitrary power spectrum. An approximate solution is presented for the case of small damping and a smooth power spectrum having no sharp peaks. The application of the results of this analysis to determining the response of structures to strong motion earthquakes is discussed.

Analysis

Consider a simple harmonic oscillator acted upon by a random force. The equation of motion is

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = m\alpha(t) \tag{1}$$

where

$$\left.\begin{aligned} m &= \text{mass of oscillator} \\ \beta &= \text{constant of viscous damper} \\ k &= \text{linear spring constant} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$m\alpha(t)$ = external force acting on mass

Divide both sides of (1) by m:

Let

$$\left.\begin{aligned} \beta/m &= 2\zeta\omega_0 \\ k/m &= \omega_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Equation (1) becomes

$$\ddot{x} + 2\omega_0\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha(t) \tag{4}$$

In the analysis which follows, it will be assumed that:

$$\left.\begin{aligned} &(a)\ \alpha(t) \text{ is stationary} \\ &(b)\ \alpha(t) \text{ is Gaussian} \\ &(c)\ \alpha(t) \text{ has mean zero} \\ &(d)\ \alpha(t) \text{ has power spectrum } \phi(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Let $h(t)$ be the impulse response of the system:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_1}\sin\omega_1 t, \quad t \geq 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad t < 0 \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\omega_1 = \omega_0(1 - \zeta^2)^{1/2}$$

Only the case where $\zeta < 1$ will be considered, since it is the case of most interest.

If the initial conditions are

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = b \tag{7}$$

Then, if $\alpha(t)$ is assumed to be mean square continuous, a valid solution of (4) is

$$x(t) = ae^{-\zeta\omega_0 t}\left[\cos\omega_1 t + \frac{\zeta\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right] + \frac{b}{\omega_1}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_1 t + \int_0^t h(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau \tag{8}$$

Since it was assumed that $\alpha(t)$ was Gaussian, and since the system is linear, it may be shown that $x(t)$ is Gaussian also [6, 9]. For a Gaussian process, only the mean and the variance are required to characterize the complete process. It is therefore necessary to compute the stochastic, or ensemble average, $\langle x(t)\rangle$, and the variance $\sigma^2(t)$ to characterize the $x(t)$ process. Once these two functions of time are known, the probabilistic description of $x(t)$ is known.

Stochastic Average of $x(t)$

The stochastic average of $x(t)$ is obtained by taking the stochastic average of equation (8).

$$\therefore \mu(t) = \langle x(t)\rangle = ae^{-\omega_0\zeta t}\left[\cos\omega_1 t + \frac{\omega_0\zeta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right] + \frac{b}{\omega_1}e^{-\omega_0\zeta t}\sin\omega_1 t + \int_0^t h(t-\tau)\langle\alpha(\tau)\rangle d\tau \tag{9}$$

[1] Numbers in brackets designate References at the end of the paper.

Presented at the West Coast Conference of the Applied Mechanics Division, Seattle, Wash., August 28–30, 1961, of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS.

Discussion of this paper should be addressed to the Editorial Department, ASME, United Engineering Center, 345 East 47th Street, New York, 17, N. Y. and will be accepted until January 10, 1962. Discussion received after the closing date will be returned. Manuscript received by ASME Applied Mechanics Division, September 21, 1960; revised draft, March 2, 1961. Paper No. 61—APMW-20.

43]

But by assumption (5c), $\langle \alpha(\tau) \rangle = 0$. Hence,

$$\mu(t) = \langle x(t) \rangle = ae^{-\omega_0 \zeta t}\left[\cos \omega_1 t + \frac{\omega_0 \zeta}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right] + \frac{b}{\omega_1} e^{-\omega_0 \zeta t} \sin \omega_1 t \quad (10)$$

It is seen from the foregoing that the stochastic mean of the motion depends only on the initial conditions.

Variance of $x(t)$

The variance of $x(t)$ is defined to be

$$\sigma_x^2(t) = \langle [x(t) - \mu(t)]^2 \rangle \quad (11)$$

Using equations (8) and (10) and substituting in (11),

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^t \int_0^t h(t - \tau) h(t - \tau') \langle \alpha(\tau) \alpha(\tau') \rangle d\tau \, d\tau' \quad (12)$$

The quantity $\langle \alpha(\tau)\ \alpha(\tau') \rangle$ is by definition, $R_\alpha(\tau,\tau')$, the autocorrelation function for $\alpha(\tau)$. Since it was assumed in (5a) that $\alpha(t)$ was stationary, then

$$\langle \alpha(\tau)\ \alpha(\tau') \rangle = R_\alpha(\tau,\tau') = R_\alpha(\tau - \tau') \quad (13)$$

The autocorrelation function for a stationary process depends only on the time difference $(\tau - \tau')$, and not on τ and τ' individually. The simplest problem to treat is that of a completely random function, for which $R(\tau - \tau')$ is given simply by $2D\ \delta(\tau - \tau')$. Such a process has a white power spectrum with a spectral density $4D$/cycle. Although such a process allows considerable mathematical simplification, it is a process which can never be realized physically since it would involve infinite mean-squared power. All physically realizable processes involve power spectra which go to zero for sufficiently high frequencies. If $\phi(\omega)$ is the power spectrum under consideration, the requirement of physical realizability is that

$$\int_0^\infty \phi(\omega) d\omega < \infty \quad (14)$$

For a stationary random process, the autocorrelation function may be obtained from the power spectrum or vice versa, since they form a Fourier cosine pair (6).

The autocorrelation function $R_\alpha(\tau - \tau')$ is given by

$$R_\alpha(\tau - \tau') = \int_0^\infty \phi(\omega) \cos \omega(\tau - \tau') d\omega \quad (15)$$

where $\phi(\omega)$ is the power spectrum of $\alpha(t)$. Substituting (15) into (12), the variance is given by

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^\infty \phi(\omega) \cos \omega(\tau - \tau') h(t - \tau) h(t - \tau') d\omega d\tau d\tau' \quad (16)$$

Since the integrals involved in (16) are convergent, the order of integration may be reversed. Using the expression for $h(t)$ given in equation (6),

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^\infty \frac{\phi(\omega)}{\omega_1^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\zeta\omega(2t - \tau - \tau')} \sin \omega_1(t - \tau) \sin \omega_1(t - \tau') \cos \omega(\tau - \tau') d\omega d\tau \, d\tau' \quad (17)$$

The double integral on t occurring in (17) may be evaluated after some tedious algebra, giving

$$\sigma_x^2(t) = \int_0^\infty \frac{\phi(\omega)}{|z(\omega)|^2}\left[1 + e^{-2\omega_0 \zeta t}\left\{1 + \frac{2\omega_0}{\omega_1} \zeta \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t - e^{\omega_0 \zeta t}\left(2 \cos \omega_1 t + \frac{2\omega_0 \zeta}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right) \cos \omega t - e^{\omega_0 \zeta t} \frac{2\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \sin \omega t + \frac{(\omega_0 \zeta)^2 - \omega_1^2 + \omega^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t\right\}\right] d\omega \quad (18)$$

where

$$|z(\omega)|^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_0\zeta)^2 \quad (19)$$

Equation (18) exhibits some interesting properties. They are:
(1) As $t \to 0$

$$\sigma_x^2(t) \to 0, \text{ as would be expected;}$$

(2) As $t \to \infty$

$$\sigma_x^2(t) \to \int_0^\infty \frac{\phi(\omega) d\omega}{|z(\omega)|^2},$$ the result which would be predicted from generalized harmonic analysis for the stationary problem;

(3) If $\phi(\omega)$ is set equal to $(2D/\pi)$ and the integral (18) evaluated by contour integration, then

$$\sigma_x^2(t) = \frac{D}{2\zeta\omega_0^2}\left[1 - \frac{e^{-2\omega_0\zeta t}}{\omega_1^2}\left\{\omega_1^2 + \omega_0\omega_1\zeta \sin 2\omega_1 t + \frac{(2\omega_0\zeta)^2}{2} \sin^2 \omega_1 t\right\}\right] \quad (20)$$

As would be expected, this result is identical with the result obtained by Uhlenbeck [5] for a white process.

Approximate Evaluation of Equation (18)

For any analytic function $\phi(\omega)$, equation (18) can be evaluated by contour integration. If $\phi(\omega)$ is given numerically, then equation (18) can be evaluated numerically. However, if $\phi(\omega)$ is a smooth function of ω, having no sharp peaks, and ζ is small, then a very good approximation may be obtained in the following way: If ζ is small, the function $1/|z(\omega)|^2$ is sharply peaked at $\omega = \omega_0$; therefore, the main contribution to the integral comes from the region around $\omega = \omega_0$. By analogy with Laplace's method of evaluating integrals, equation (18) may be approximated by

$$\sigma_x^2(t) \simeq \phi(\omega_0)\left[\left[\int_0^\infty \frac{1}{|z(\omega)|^2}\left[1 + e^{-2\omega_0\zeta t}\left\{1 + \frac{2\omega_0\zeta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t - e^{\omega_0\zeta t}\left(2 \cos \omega_1 t + \frac{2\omega_0\zeta}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right) \cos \omega t - e^{\omega_0\zeta t}(\sin \omega_1 t \sin \omega t)\left(\frac{2\omega}{\omega_1}\right) + \frac{(\omega_0\zeta)^2 - \omega_1^2 + \omega^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t\right\}\right] d\omega\right]\right] \quad (21)$$

Evaluating the integral in (21) by contour integration,

$$\sigma_x^2(t) \simeq \frac{\pi\phi(\omega_0)}{4\zeta\omega_0^2}\left[1 - \frac{e^{-2\omega_0\zeta t}}{\omega_1^2}\left\{\omega_1^2 + \frac{(2\omega_0\zeta)^2}{2} \sin^2 \omega_1 t + \omega_0\omega_1\zeta \sin 2\omega_1 t\right\}\right] \quad (22)$$

Zero Damped Oscillator

Of special interest is the case when ζ is zero. The results for this case can be obtained from equation (22) by a limiting process:

$$\sigma_x^2(t)_{\zeta=0} = \lim_{\zeta\to 0} \frac{\pi}{4}\frac{\phi(\omega_0)}{\zeta\omega_0^3}\left[1 - \frac{e^{-2\omega_0\zeta t}}{\omega_1^2}\left\{\omega_1^2 + \frac{(2\omega_0\zeta)^2}{2}\sin^2\omega_1 t + \omega_0\omega_1\zeta \sin 2\omega_1 t\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{\phi(\omega_0)}{\omega_0^3}\lim_{\zeta\to 0}\left[\{1 - (1 - 2\omega_0\zeta t)(1 + \zeta \sin 2\omega_0 t) + 0[(\zeta t)^2]\}\zeta^{-1}\right] \quad (23)$$

$$\therefore \sigma_x^2(t) \simeq \frac{\pi}{4}\frac{\phi(\omega_0)}{\omega_0^3}[2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t] \quad (24)$$

Results

For convenience, equation (22) may be written

$$\frac{2\sigma_x^2}{\pi}\frac{\omega_0^3}{\phi(\omega_0)} \simeq \frac{1}{2\zeta}\left[1 - e^{-2\zeta\theta}\left\{1 + \frac{2\zeta^2}{1-\zeta^2}\sin^2(1-\zeta^2)^{1/2}\theta + \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}\sin 2(1-\zeta^2)^{1/2}\theta\right\}\right] \quad (25)$$

where $\theta = \omega_0 t$.

Plots of equation (25) are shown in Fig. 1 for $\zeta = 0$, 0.025, 0.05, and 0.10. It will be observed that for $\zeta = 0.1$, the system approaches stationarity in roughly three cycles. Hence, even though the output process is nonstationary, only a slight error is made by treating it as a stationary process, provided the stationary input is applied for a sufficiently large number of cycles.

Distribution Functions for $x(t)$

As was pointed out previously, $x(t)$ is Gaussian if $\alpha(t)$ is Gaussian. Hence the probability that x lies in the interval x to $x + dx$ is given by

$$p(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma(t)}\exp\left\{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right\}dx \quad (26)$$

where

$$\mu(t) = \langle x(t)\rangle$$
$$\sigma^2(t) = \langle[x(t) - \mu(t)]^2\rangle \quad (27)$$

The stochastic average $\mu(t)$ is given by equation (9), and depends only on the initial velocity and displacement. The variance $\sigma^2(t)$ is given by equation (18), and is independent of the initial conditions.

Probability of Exceeding a Given Value

The probability that $x(t)$ exceeds a given value, $k\sigma$, is obtained by integration of equation (26):

$$P(x > k\sigma) = \int_{k\sigma}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \quad (28)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left\{\frac{k\sigma - \mu}{2^{1/2}\sigma}\right\}\right] \quad (29)$$

where erf is the error function.

For some physical processes, for example brittle failure, the sign of $x(t)$ is unimportant. The probability that the modulus of $x(t)$, $|x|$, exceeds a given value, $k\sigma$, is obtained by integration of equation (26):

$$\therefore P(|x| > k\sigma) = \int_{k\sigma}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx + \int_{-\infty}^{-k\sigma}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \quad (30)$$

$$\therefore P(|x| > k\sigma) = 1 - \tfrac{1}{2}\left\{\operatorname{erf}\frac{(k\sigma-\mu)}{2^{1/2}\sigma} + \operatorname{erf}\frac{(k\sigma+\mu)}{2^{1/2}\sigma}\right\} \quad (31)$$

In the special case of a system starting from rest, the probability that x exceeds $k\sigma$ is given by

$$P(|x| > k\sigma) = \left(1 - \operatorname{erf}\frac{k}{2^{1/2}}\right) \quad (32)$$

It is interesting to note that the right-hand side of equation (32) does not involve time, even though x and σ are both functions of time. This is in contrast to the situation in equations (29) and (31), where the right-hand side of the equations is also a function of time.

Application of Results to Strong Motion Earthquakes

An intensive study of strong motion earthquakes has been

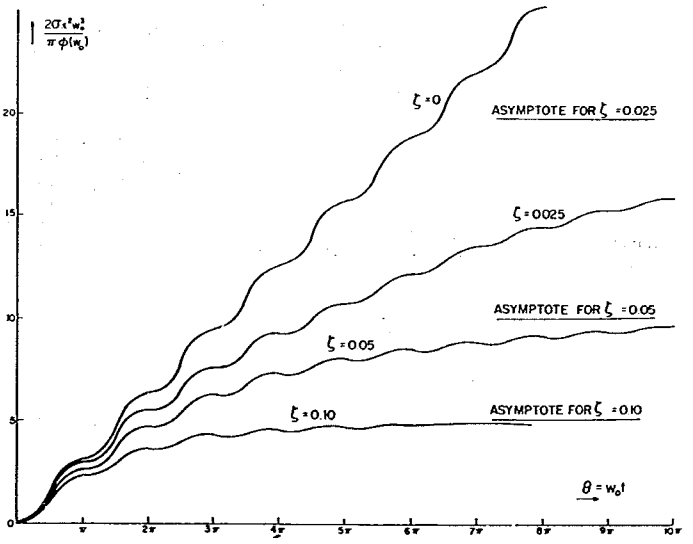


Fig. 1 Transient response of a dynamic system under random excitation

made at the California Institute of Technology [8] over the past 25 years. As a result of these studies, the following statements may be made:

1 The duration of strong motion earthquakes is in direct relation to their intensity. The stronger the earthquake, the longer it lasts.

2 The strong earthquakes tend to be quite random in nature. The weak ones tend to be more deterministic.

3 While no earthquake is completely stationary, since it must first build up, and must eventually die out, the very strong earthquakes exhibit long portions of quasi-stationary behavior.

4 No earthquake exhibits a white-power spectrum. All earthquakes so far analyzed show a peaked power spectrum falling off sharply at high frequencies.

5 Unfortunately, the amount of data on strong motion earthquakes is quite limited, so it has not been possible to obtain anything like a complete statistical description of earthquakes. However, the available data show that, at least out to the 3σ point, the stronger earthquakes exhibit Gaussian statistics with mean zero.

Applying these statements to the foregoing analysis we see that:

(*a*) The results of the analysis may be applied with some confidence to the very strong, long-duration earthquakes, since the analysis did not assume a white process.

(*b*) For the shorter earthquakes, some attempt should be made to account for the nonstationarity of the input process. This has been done for a particular class of inputs by Stumpf [9] in his Doctoral thesis.

(*c*) Some caution must be exercised in applying the distribution function for the displacement in the case of earthquakes. It is well known that the probability of exceeding a specified value is quite sensitive to the tail of the distribution function, and this is the very area where our ignorance is greatest in the earthquake problem.

Example

As an illustration of the application of the foregoing theory to earthquakes, consider the response of a single-story building to a strong motion earthquake. For the purposes of analysis, the building will be treated as a roof of mass m, supported by columns of shear stiffness k. The variable x in equation (1) will then represent the displacement of the roof relative to the base of the building.

Let ω_0 and ζ in equation (4) be given by

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= 5 \text{ rad/sec} \\ \zeta &= 0.025 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Kanai [10] has analyzed a large number of earthquakes and has suggested that the spectral density, $\phi(\omega)$, of the ground motion of earthquakes may be expressed by

$$\phi(\omega) = \frac{1 + 4h_g^2 \dfrac{\omega^2}{\nu_g^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\nu_g^2}\right)^2 + 4h_g^2 \dfrac{\omega^2}{\nu_g^2}} B \tag{34}$$

$$B = \text{const}$$

where

B = spectral density at bedrock

ν_g, h_g = parameters depending on local geology

For the purposes of illustration let

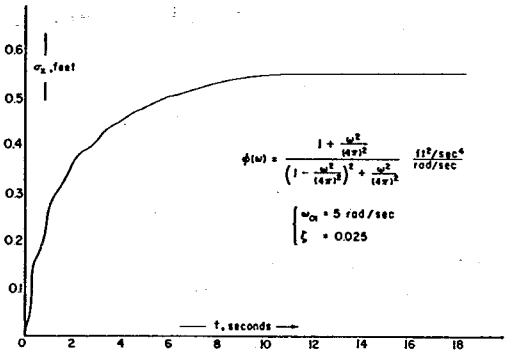


Fig. 2 Transient response of building to random earthquake

$$\left.\begin{aligned} h_g &= 0.5 \\ \nu_g &= 4\pi \\ B &= 1 \text{ ft}^2/\text{sec}^4/\text{rad/sec} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

These values were so chosen that $\phi(\omega)$ approximates that for the El Centro, Calif., earthquake of May 1940 [8], which lasted for 25 sec. Using equation (22), the root-mean-squared displacement, $\sigma_x(t)$, is given by

$$\sigma_x(t) \simeq \left[\left[\frac{\pi\phi(\omega_0)}{4\zeta\omega_0^3}\left\{1 - \frac{e^{-2\omega_0\zeta t}}{\omega_1^2}\left[\omega_1^2 + \frac{(2\omega_0\zeta)^2}{2}\sin^2\omega_1 t + \omega_0\omega_1\zeta \sin 2\omega_1 t\right]\right\}\right]\right]^{1/2} \tag{36}$$

Fig. 2 shows the numerical results of substituting (33), (34), and (35) into (36).

It will be seen that the root-mean-squared displacement σ_x reaches a stationary value of 0.57 ft in roughly 9 sec. Since the earthquake is assumed to last for 25 sec, little error would result in treating the problem as a stationary one.

References

1 A. C. Eringen, "Response of a Tall Building to Random Earthquakes," *Proceedings of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME, June, 1958, pp. 141–153.

2 A. C. Eringen, "Response of Beams and Plates to Random Loads," JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, vol. 24, TRANS. ASME, vol. 80, 1957, pp. 46–52.

3 J. L. Bogdanoff and J. E. Goldberg, "On the Transient Behavior of a System Under a Random Disturbance," Fourth Mid-Western Conference on Solid Mechanics, The University of Texas, September, 1959, pp. 488–496.

4 W. S. Thomson and M. V. Barton, "The Response of Mechanical Systems to Random Excitation," JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, vol. 24, TRANS. ASME, vol. 80, 1957, pp. 248–251.

5 G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, "On the Theory of the Brownian Motion, I," *Physical Review*, vol. 36, September, 1930, pp. 823–841.

6 G. E. Uhlenbeck and M. C. Wang, "On the Theory of the Brownian Motion, II," *Reviews of Modern Physics*, vol. 17, nos. 2 and 3, April–July 1945, pp. 323–342.

7 G. W. Housner, "Random Excitation of Vibrating Systems," unpublished manuscript, 1945.

8 J. L. Alford, G. W. Housner, and R. R. Martel, "Spectrum Analysis of Strong-Motion Earthquakes," California Institute of Technology Earthquake Research Laboratory Report, August, 1951.

9 H. J. Stumpf, "Response of Mechanical Systems to Random Excitation," PhD thesis, California Institute of Technology, June, 1960.

10 K. Kanai, "Semi-Empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground," *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, University of Tokyo, Tokyo, Japan, vol. 35, 1957.

Statistical Energy Analysis of Vibrating Systems

ERIC E. UNGAR
Senior Engineering Scientist,
Bolt Beranek and Newman, Inc.,
Cambridge, Mass.
Mem. ASME

The "statistical energy analysis" approach provides a relatively simple means for understanding and estimating the significant properties of multimodal random vibrations of complex systems, since this approach permits one to treat complex vibration problems in terms of much simpler energy balances. This paper delineates the concepts and relations which form the basis for the statistical energy approach, indicates its range of validity, and illustrates some of its applications.

Introduction

RECENT years have seen a continuation and acceleration of the trend toward higher performance vehicles, toward increased propulsion-system power, and toward more highly sophisticated equipment and instrumentation. This trend has brought with it a greater incidence of problems associated with high-frequency vibrations and has caused aerospace engineers to concern themselves increasingly with vibrations at frequencies considerably above the fundamental structural resonances.

Classically, vibration engineers have focused their attention on low-frequency oscillations, since the lowest few vibration modes are generally the ones which are associated with the greatest deflections, the highest stresses, and gross structural failures. The rather complete arsenal of analysis techniques that has been developed for dealing with low-frequency vibration problems, however, contains none which can deal simply and effectively with most high-frequency problems, such as those relating to sonically induced fatigue, instrumentation performance, or noise transmission.

Although the classical methods are valid in principle at all frequencies, their use is very often impractical for high frequencies, particularly for randomly excited complex structures. The classical approach consists of determining the natural modes, of calculating the responses of these modes to a specified excitation of interest, and of superposing these responses to determine the total structural response. Use of this approach to determine the responses of structures to broadband excitation requires inordinate amounts of computation because of the large number of modes that affect the total response in the band of interest.

Determination of the shapes of higher modes also presents practical problems. Since the displacement fields associated with the higher modes are much more sensitive to details of the structure than are those of the lower modes, one must be able to describe the structural and material properties with greater precision in order to be able to perform higher-mode calculations meaningfully. The required precision can generally be achieved only for ficticious structures because of the manufacturing tolerances and the variation in material properties one inevitably encounters in realistic cases.

Even if one could perform a high-frequency multimodal analysis meaningfully, one would still be faced with the problem of interpreting the large mass of results generated in such a set of calculations. In general, additional calculations will be required (e.g., to determine average values of various response properties) in order to reduce the large amount of information to tractable size.

The statistical energy analysis approach to structural vibration problems was developed in response to the need for a simple means for understanding and estimating significant properties of multimodal vibrations of complex systems. It is the purpose of this paper to fill the apparent need for a presentation of the fundamentals of the statistical energy analysis approach in easily accessible form, for an explanation of its area of applicability, and for an illustration of how these fundamentals may be used.

The first of the following sections reviews the concepts and properties of modes of structural vibrations and points out some useful relations between modal response and total average response properties. The second section derives the basic relations that govern the exchange of energy between two coupled modes. The third section generalizes this relation to enable one to determine the flow of energy from one set of modes, representing one structure or fluid system, to another set of modes, representing another such system. The fourth and final section illustrates some applications of the statistical energy approach.

Modes of Continuous Systems

Orthogonality and Normalization

Modal vibrations of an elastic system are defined as those in which all points of the system move in unison, sinusoidally (in time) at the same frequency, in absence of external excitation. For two-dimensional systems,[1] such as plates or shells, such vibrations may be described by [1, 2][2]

$$u(x, y, t) = \psi_{jk}(x, y)[B \cos(\omega_{jk}t + C)], \qquad (1)$$

where u denotes the deflection of the system from equilibrium, as a function of time t and of the spatial coordinates x, y, and where B and C are constants. The functions ψ_{jk}, which satisfy the system equation of motion and the boundary (edge) conditions applicable in a given case, are called the *mode shapes* of the system. The associated frequencies ω_{jk} are known as the corresponding *modal* or *natural frequencies* of the system. To each n-dimensional continuous system ($n = 1, 2, 3$) there corresponds an n-fold infinite set of natural frequencies and mode shapes; the subscript indexes j, $k = 1, 2, \ldots$ are used to differentiate between modes.

The mode shapes of systems whose edges are elastically con-

Contributed by the Machine Design Division and presented at the Vibrations Conference, Boston, Mass., March 29–31, 1967, of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. Manuscript received at ASME Headquarters, December 1, 1966. Paper No. 67—Vibr-8.

[1] The discussion here is presented in terms of two-dimensional systems, since these are of greatest practical interest. Expressions applicable to one and three-dimensional systems can be deduced by analogy.

[2] Numbers in brackets designate References at end of paper.

strained against lateral and rotational deformations[4] possess the property of "orthogonality," that is, they satisfy

$$\iint_{A_s} \mu(x, y)\psi_{jk}(x, y)\psi_{j'k'}(x, y)dA_s = \begin{cases} m & \text{for } j = j', \quad k = k' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

where μ denotes the mass distribution and m the total mass of the system, and where the integration is carried out over the entire system (here shown as over the entire area A_s of a two-dimensional system).

The equation of motion and the boundary conditions of a system determine its mode shapes only within an arbitrary multiplicative constant. In order to eliminate this arbitrariness one usually defines a "normalization," that is, one sets down some more or less arbitrary rule for determining the multiplicative constant to be used in a given analysis. One commonly used normalization (and the one used here from now on) is that implied in equation (2); others involve multiplication of m on the right-hand side of that equation by (generally nonunity) constants whose values are specified for all j and k.

Modal Responses

The deflection of a viscously damped elastic system due to the action of a distributed load $p(x, y, t)$ is governed by a differential equation of the form [1, 2]

$$\mu\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \bar{K}u = p(x, y, t) \tag{3}$$

where $\bar{K}$ is a linear differential operator which involves only the spatial coordinates and represents the stiffness characteristics of the system; γ in general is a similar operator or function which accounts for energy dissipation (viscous damping) in the system; and the dots indicate differentiation with respect to time.

To determine the equations that govern the responses of the system modes, one may make use of the fact that one may express any mathematically "well-behaved" system deflection $u(x, y, t)$ as a series

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk}(t)\psi_{jk}(x, y) \tag{4}$$

in terms of the mode shapes ψ_{jk} and "modal amplitude coefficients" $U_{jk}(t)$, which depend only on time [1, 3]. Since, by definition, the modal vibrations (1) must satisfy the system equation (3) with zero damping γ and excitation p, one observes that

$$\bar{K}\psi_{jk} = \mu\omega_{jk}^2\psi_{jk}. \tag{5}$$

If one substitutes equations (4) and (5) into equation (3), one obtains

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\ddot{U}_{jk} + \gamma\dot{U}_{jk} + \mu\omega_{jk}^2 U_{jk})\psi_{jk}(x, y) = p(x, y, t). \tag{6}$$

If one multiplies both sides of equation (6) by $\psi_{j'k'}(x, y)$, integrates over the entire system, and applies the orthogonality condition (2), then one finds, for the special case where $\gamma = \beta\mu$ (with β a constant), that each U_{jk} obeys[4]

$$m\ddot{U}_{jk} + c\dot{U}_{jk} + K_{jk}U_{jk} = F_{jk}(t), \tag{7}$$

where

$$c \equiv m\beta, \qquad K_{jk} \equiv m\omega_{jk}^2,$$
$$F_{jk}(t) \equiv \iint_{A_s} p(x, y, t)\psi_{jk}(x, y)dxdy. \tag{8}$$

Equation (7) may be recognized to be the same as the well-known equation that governs the displacement of a linear single-degree-of-freedom system consisting of a mass m, mounted on a parallel arrangement of a spring (with stiffness K_{jk}) and dashpot (with viscous damping coefficient c), subject to a force $F_{jk}(t)$ which varies with time.

Spatial Averages of Response Quantities; Kinetic Energies

If one squares both sides of equation (4), multiplies the result by μ, integrates over the entire system, applies the orthogonality and normalization of equation (2), and divides through by the system mass m, one obtains

$$\frac{1}{m}\iint_{A_s} u^2(x, y, t)\mu(x, y)dxdy \equiv \overline{u^2(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk}^2(t). \tag{9}$$

The left-hand term here may be recognized to represent the weighted spatial average value of u^2, with the averaging done over the entire system and with μ as a weighting function; the symbol $\overline{u^2}$ has been introduced to represent this weighted spatial mean-square displacement more compactly. Equation (9) thus shows that the aforementioned mean-square displacement is equal to the sum of the squares of all the modal displacements $U_{jk}(t)$.

If one replaces the displacement $u(x, y, t)$ by the velocity $v(x, y, t)$ in equation (9), and correspondingly replaces U_{jk} by the modal velocity coefficient V_{jk}, then the integral on the left-hand side of the resulting equation may be seen to represent $2/m$ times the total kinetic energy T_T of the system. Therefore, one may write

$$T_T(t) = \frac{1}{2}\iint_{A_s} v^2(x, y, t)\mu dxdy = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{jk}(t)$$
$$T_{jk}(t) \equiv \frac{1}{2}\, mV_{jk}^2(t), \tag{10}$$

indicating that the total kinetic energy T_T is equal to the sum of the modal kinetic energies T_{jk} and also to $(1/2)m\bar{v}^2$, where $\bar{v}^2$ is the weighted mean-square velocity.

Power Flow Between Two Modes

Before concerning oneself with the interaction of two (or more) interconnected elastic systems, where each system contains many modes, one does well to develop an understanding of the interaction of just two modes. It is clear that in the steady state the vibrational energy of a mode of a two-mode system is affected by the power supplied to the mode from external sources, by the power dissipated by the mode, and also by the power that the mode in question receives from (or supplies to) the other mode. The directly supplied and the dissipated power can generally be evaluated and related to modal parameters and energies with relative ease. In order to make an energy approach useful, however, one also needs expressions which relate the mode-to-mode power flow to modal energies. It is the purpose of the present section to develop such expressions.

Since, as has been pointed out in the previous section, a mode of an elastic system behaves precisely like an ideal mass-spring-dashpot system, the energy transfer between two modes is studied here by analyzing the corresponding behavior of two coupled mass-spring-dashpot systems, as shown schematically in

[4] Zero and infinite values of constraint stiffness are permitted, but in the general case the boundaries exert restoring forces which are proportional to the deformations and/or restoring moments which are proportional to the rotations. Infinite lateral stiffness and zero rotational boundary stiffness correspond to the usual "simple support" conditions. The case where both stiffnesses are infinite corresponds to clamped edges; the case where both are zero corresponds to free edges (reference [1], p. 269).

[4] It is of interest to note that equation (7) applies for each mode (i.e., for all values of j and k), but that the equation for a given j and k does not involve terms in other values of j and k. There is then no interaction between the modal motions, and the modes are said to be "uncoupled." Such uncoupling does not occur in the most general case where $\gamma \neq \mu\beta$, in which orthogonality cannot be applied to the damping terms involving γ, and in which a summation involving all modes would appear in equation (7) instead of the single $c\dot{U}_{jk}$-term. Fortunately, the case where $\gamma = \mu\beta$ serves as a good approximation for many kinds of lightly damped systems.

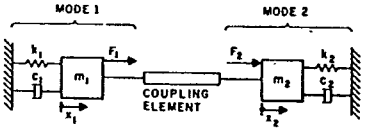


Fig. 1 Two coupled modes

Fig. 1. In order to facilitate the analysis, and since linear systems are of primary interest, all of the present discussion is restricted to linear coupling.

Time-Average Modal Kinetic Energies

The time-average value of the kinetic energy T_j of a mode j is given by

$$\langle T_j \rangle = {}^1/_2 m \langle V_j^2(t) \rangle, \tag{11}$$

where m denotes the modal mass (which is equal to the mass of the system of which j is a mode, if the previously discussed normalization is used) and V_j the modal velocity, and where the brackets $\langle \ldots \rangle$ indicate averaging with respect to time. In the steady state, and for long enough averaging intervals, the mean-square modal velocity $\langle V_j^2 \rangle$ is independent of time. The average kinetic energies thus are related to the mean-square velocities, and these in turn are related to the actual system velocities.

In order to study the mean-square modal velocities, let the velocity of mass r in Fig. 1 due to a unit impulse force $\delta(t)$ acting on this mass be given by $y_{rr}(t)$, and let the velocity of mass r due to a unit impulse acting on mass s be given by $y_{rs}(t)$; $r, s = 1,2$. Then the velocity $V_1(t)$ of mass 1 resulting from a general force $F_1(t)$ acting on mass 1 and a force $F_2(t)$ acting on mass 2 may be determined by superposing the two corresponding (convolution) results [1, 4]; that is

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{11}(\alpha) F_1(t - \alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} y_{12}(\beta) F_2(t - \beta) d\beta, \tag{12}$$

where α and β are dummy time variables.

The mean-square value of $V_1(t)$ is obtained by squaring the foregoing equation and averaging over all time.[5] If the two integrals of equation (12) are denoted by $J_{11}(t)$ and $J_{12}(t)$, respectively, then one may write

$$\langle V_1^2 \rangle = \langle (J_{11} + J_{12})^2 \rangle = \langle J_{11}^2 \rangle + \langle J_{12}^2 \rangle + 2\langle J_{11} J_{12} \rangle. \tag{13}$$

The mixed product term may be expressed as

$$\langle J_{11} J_{12} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{11}(\alpha) y_{12}(\beta) \langle F_1(t - \alpha) F_2(t - \beta) \rangle \, d\alpha \, d\beta, \tag{14}$$

where the averaging brackets have been placed around only those quantities which involve the variable t, with respect to which the averaging is to be performed. If F_1 and F_2 are uncorrelated, that is, if the time average term within the integral of equation (14) vanishes, then $\langle J_{11} J_{12} \rangle = 0$.

The $\langle J_{11}^2 \rangle$-term of equation (13) may be written analogously to equation (14). Here, however, the term within the averaging brackets may be recognized as the autocorrelation function R_1 of $F_1(t)$. This autocorrelation function obeys [4]

$$\langle F_1(t - \alpha) F_1(t - \beta) \rangle = R_1(\alpha - \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{i\omega(\alpha - \beta)} d\omega \tag{15}$$

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

where S_1 is known as the mean-square spectral density of the stationary random force $F_1(t)$.

The functions $S_1(\omega)$ and $R_1(\tau)$ are a Fourier transform pair. So also are corresponding impulse response and frequency response functions $y_{rs}(t)$ and $Y_{rs}(\omega)$, which obey[6]

$$y_{rs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{rs}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad Y_{rs}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{rs}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{16}$$

Substitution of equation (15) into the expression for $\langle J_{11}^2 \rangle$ and use of equations (16) yields

$$\langle J_{11}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y_{11}(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha \times \int_{-\infty}^{\infty} y_{11}(\beta) e^{-i\omega\beta} d\beta \right] d\omega \tag{17}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) |Y_{11}(\omega)|^2 d\omega.$$

Use of this result and the analogous one for $\langle J_{12}^2 \rangle$ in equation (13) permits one to obtain the following expressions for the mean-square velocity $\langle V_1^2 \rangle$ of mass 1 and (by analogy) for the mean-square velocity $\langle V_2^2 \rangle$ of mass 2:

$$\langle V_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) |Y_{11}(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega) |Y_{12}(\omega)|^2 d\omega;$$
$$\langle V_2^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) |Y_{21}(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega) |Y_{22}(\omega)|^2 d\omega. \tag{18}$$

Equations (18) in conjunction with (11) then give the time-average modal kinetic energies.

Net Average Power Flow Between Modes

In order to study the power flow (i.e., the rate of flow of energy) from one mode to another, it is convenient to consider one force to act at a time, and then to add the power flows obtained in the two cases to obtain the net power flow. By expressing the force F_c exerted on mass 1 by the coupling element analogously to equation (12), as a superposition of convolutions involving the appropriate impulse-response functions, one may demonstrate that such addition of power flows is permissible provided that the forces F_1 and F_2 are uncorrelated [6].

One may thus write the net time-average (steady-state) power flow from mode 1 to mode 2 as

$$P_{12} = P_{12a} - P_{21b} \tag{19}$$

where now P_{12a} denotes the flow from mode 1 to mode 2 if only mode 1 is excited, P_{21b} denotes the flow from mode 2 to mode 1 if only mode 2 is excited, and where the two excitations are taken to be uncorrelated.[7]

[5] In most cases one obtains an adequate approximation by averaging over many periods of the lowest frequency contained in $V_1(t)$.

[6] Note that several different valid Fourier transform definitions may be used. These differ only in the coefficients attached to the integrals, but all result in a factor of $1/2\pi$ for a complete transformation cycle; e.g., some authors use $1/\sqrt{2\pi}$ in each transformation. Here $1/2\pi$ has been used where the integrations are performed with respect to ω and unity where the integrations are performed with respect to τ.

Note also that all convolution and Fourier transform integrals here have been written in terms of both positive and negative frequencies (and times), whereas only positive frequencies have physical meaning. An experimentally determined spectrum (involving only positive frequencies) may be converted to a spectrum corresponding to equations (15) by halving the measured spectrum at each value of ω, and plotting the result at both positive and negative numerical values of ω[5].

[7] One may, of course, calculate the net power flow directly by evaluating $P_{12} = \langle F_c(t) V_1(t) \rangle$, as Scharton [7] has done for a particular kind of coupling. The approach taken here permits one to present a simple argument and to retain a greater degree of generality.

If mode 2 is not directly excited (that is, if $F_2 = S_2 = 0$), then mass 2 is excited only through the coupling element, and in the steady state all of the power dissipated by the damping of system 2 must be supplied to this system from system 1 via the coupling element. This energy balance argument and an analogous one for $F_1 = S_1 = 0$, $F_2 \neq 0$, permit one to write

$$P_{12a} = c_2\langle V_{2a}^2\rangle = c_2\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)|Y_{21}|^2 d\omega$$
$$P_{21b} = c_1\langle V_{1b}^2\rangle = c_1\int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega)|Y_{12}|^2 d\omega, \tag{20}$$

where use has been made of equations (18). Considering equations (19) and (20), the *net* power flow from system 1 to 2, when both (uncorrelated) external forces are acting, obeys the equation

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} [c_2 S_1(\omega) - c_1 S_2(\omega)]|Y_{12}|^2 d\omega, \tag{21}$$

if $|Y_{12}| = |Y_{21}|$.

From a study of the character of the complex admittances Y_{12} and Y_{21} [6] or from the analogous properties of passive electrical networks [8], one finds the foregoing equality of the absolute values of the admittances is satisfied as long as the coupling is "conservative," that is, as long as the coupling neither absorbs nor generates energy. Clearly, it is only for conservative coupling that all the energy leaving one mode via the coupling element is supplied to the other mode, and it is only for such coupling that one may speak unambiguously of the energy flow between the two modes. Conservative coupling is assumed from now on throughout this paper.

Relation Between Power Flow and Kinetic Energies

If F_1 and F_2 are "white noise" forces, that is, if $S_1(\omega) = S_1$ and $S_2(\omega) = S_2$ are independent of frequency, then one may take these spectral densities outside of the integrals of equations (18) and (21). One may then solve equations (18) for S_1 and S_2 in terms of $\langle V_1^2\rangle$ and $\langle V_2^2\rangle$, introduce the result into equation (21), and obtain an expression for the power flow P_{12} in terms of the mean-square velocities. By expressing these velocities in terms of the time-average kinetic energies $\langle T_j\rangle$ as indicated in equation (11), one finds that one may then write

$$P_{12} = \phi_{12}\langle T_1\rangle - \phi_{21}\langle T_2\rangle \tag{22}$$

where

$$\phi_{12} = \frac{\alpha}{m_1}(c_1 I_{22} + c_1 I_{12}), \qquad \phi_{21} = \frac{\alpha}{m_2}(c_1 I_{11} + c_2 I_{12}),$$
$$\alpha \equiv 2I_{12}[I_{11}I_{22} - I_{12}^2]^{-1}, \qquad I_{rs} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |Y_{rs}|^2 d\omega. \tag{23}$$

It turns out that the power flow coupling coefficients ϕ_{12} and ϕ_{21} are equal in some cases of considerable practical interest. One such case occurs if the two systems in Fig. 1 are weakly coupled; that is, if the transfer-admittance integrals $I_{12} = I_{21}$ have values which are much smaller than those of the "self-admittance" integrals I_{11} and I_{22}, and if the transfer admittances Y_{12}, Y_{21} do not affect the values of I_{11} and I_{22} significantly. (Note that weak coupling does not require the transfer impedances and admittances to be strictly negligible over the entire frequency range; it requires only the values of the "self" integrals to be not significantly affected by contributions corresponding to the transfer term values, which may not be negligible in an absolute sense.)

Hence, for weak coupling, one finds from equations (23) that

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} |m_1(i\omega) + c_1 + k_1(i\omega)^{-1}|^{-2} d\omega = \frac{\pi}{c_1 m_1} \tag{24}$$

and

$$\phi_{12} = \phi_{21} = \frac{2}{\pi} c_1 c_2 I_{12}. \tag{25}$$

If the coupling element in Fig. 1 consists of an ideal stiffness (represented by a spring constant k_c) and an ideal gyroscopic element[8] (represented by a force/velocity coefficient c_g), then one finds that one may evaluate the integrals I_{11}, I_{22}, I_{12} exactly (for example, from the tabulated expression given in [4]), regardless of the strength of the coupling. One finds that the two coefficients ϕ_{12} and ϕ_{21} are here again exactly equal and are given by

$$\phi_{12} = \phi_{21} = \frac{2}{m_1 m_2} \frac{k_c^2\alpha_k + c_g^2\alpha_c}{\alpha_k\alpha_c + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}, \tag{26}$$

where

$$\alpha_k \equiv \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \qquad \alpha_c \equiv \frac{c_1(k_2 + k_c) + c_2(k_1 + k_c)}{m_1 m_2}$$
$$\omega_1^2 \equiv (k_1 + k_c)/m_1, \qquad \omega_2^2 \equiv (k_2 + k_c)/m_2. \tag{27}$$

This result agrees with that which Scharton [7] derived by calculating explicitly the power flow through the coupling elements. For small coupling the foregoing result also reduces to that which was obtained by Lyon and Maidanik [10] by means of an explicit power flow calculation based on small coupling approximations.

Although the previous discussion was based on force spectra S_1 and S_2 that are assumed constant for all frequencies, a little reflection permits one to relax this assumption somewhat. If one chooses to deal with only a finite frequency band, one may replace the infinite limits appearing in the integrals of equations (20)–(24) by the frequencies limiting the band. Equations (23) then still apply, although the various I_{jk}-integrals that enter them now are different. It is well known [11, 12] that, for a not too highly damped single-degree-of-freedom system, the magnitude of the admittance $Y(\omega)$ is much greater near the system natural frequency than at other frequencies, so that the greatest contribution to the value of the integral I_{rs} of equation (23) is due to the frequency region near the system resonance. Consequently, the value of the integral will be changed only slightly by replacing the infinite limits with finite ones, if the interval of integration (i.e., the frequency band under consideration) still encompasses the system resonance.

Similar reasoning applied to a two-degree-of-freedom system (made up of two coupled single-degree-of-freedom systems), which has two resonances, leads one to conclude that the results of equations (24)–(27) also are good approximations if the excitation frequency bands are finite, but encompass both system resonances. Further, in view of the predominance of the responses near the resonances, the aforementioned results may also be taken to be good approximations for cases where the excitation spectra are not flat. All that is required for these approximations to hold is that the excitation spectra exhibit no violent peaks; i.e., no peaks that are of the same order as the peaks in the $|Y|^2$-curves.

Recapitulation

In the present section it has been shown that the *steady-state time-average power flow from one mode to another is proportional to the difference between the time-average kinetic energies* of the two modes, *provided* that

1 The coupling between the two modes is linear, conservative, and light and/or purely spring-like and/or gyroscopic; and

[8] A gyroscopic element is defined [9] as one which produces a negative force on mass 2 due to a positive velocity of mass 1, if it results in a positive force on mass 1 due to a positive velocity of mass 2. In contrast, a viscous damping element results in forces of the same sign on both masses due to positive velocities. Gyroscopic coupling may readily be shown to be conservative.

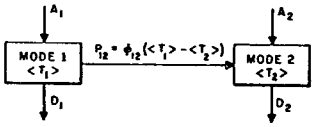


Fig. 2 Power flow diagram for two coupled modes

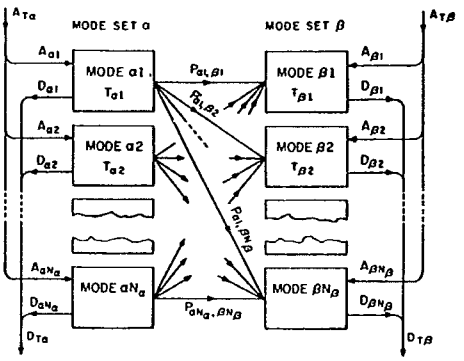


Fig. 3 Two coupled sets of modes

2 the forces acting on the two modes are uncorrelated and have relatively flat spectra (as compared with the system admittance spectra) within the frequency band encompassed by the resonances of the coupled system.

This proportionality between power flow and kinetic energy difference permits one to analyze the average dynamic behavior of coupled modes rather simply, on the basis of energy balance considerations. For such energy analyses it is convenient to visualize coupled modes as shown in Fig. 2, where the modes are represented as storage elements (containing kinetic energies $\langle T_1 \rangle$ and $\langle T_2 \rangle$), connected by power flow P_{12}, supplied with power inputs A_1 and A_2 from sources external to the system, and experiencing power losses (dissipations) D_1 and D_2.

Power Flow Between Two Sets of Modes

As has been discussed earlier, one may analyze the vibrations of an elastic system in terms of the vibrations of the set of the modes of the system. The interaction between two elastic systems may correspondingly be studied by investigating the interaction between two sets of modes which represent the two systems. Accordingly, the present section deals with two sets of modes, one designated by α, the other by β, as shown schematically in Fig. 3. The modes of each set are assumed not to be coupled to each other directly, but each mode of the α-set is assumed to be coupled to each mode of the β-set. It is desired to study the flow of energy from the α-set to the β-set under conditions where each of the modes of each set may dissipate energy and may be supplied with energy from outside the system.

It is of particular interest to develop relations for the power flow $P_{\alpha\beta}$ between two *sets* of modes in the form

$$P_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} T_\alpha - \phi_{\beta\alpha} T_\beta, \tag{28}$$

in analogy to equation (22), which pertains to power flow between two *single* modes. T_α and T_β represent suitable functions of the set kinetic energies; $\phi_{\alpha\beta}$ and $\phi_{\beta\alpha}$ are appropriate coefficients, which should be independent of T_α and T_β and preferably equal to each other.

Throughout the following discussion it is assumed that the power flow between each pair of coupled modes is proportional to the difference between the time-average modal kinetic energies, as indicated by equation (22) with $\phi_{12} = \phi_{21}$.

Power Flow Between Mode Sets in Terms of Set-Average Energies

The total power flow $P_{\alpha\beta}$ from mode set α to mode set β is the sum of all the individual mode-to-mode power flows. If set α contains N_α modes and set β contains N_β modes, then one may express the set-to-set power flow as

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \sum_{k=1}^{N_\beta} \phi_{\alpha j,\beta k}(\langle T_{\alpha j} \rangle - \langle T_{\beta k} \rangle), \tag{29}$$

where $\langle T_{\alpha j} \rangle$ and $\langle T_{\beta k} \rangle$ denote the time-average kinetic energies of the jth mode of the α-set and of the kth mode of the β-set, and $\phi_{\alpha j,\beta k}$ denotes the power flow coefficient between these two modes.

If one defines the set-average modal kinetic energies T_α and T_β of the two sets as

$$T_\alpha \equiv \frac{1}{N_\alpha} \sum_{j=1}^{N_\alpha} \langle T_{\alpha j} \rangle, \qquad T_\beta \equiv \frac{1}{N_\beta} \sum_{k=1}^{N_\beta} \langle T_{\beta k} \rangle \tag{30}$$

and requires equation (29) to reduce to equation (28) for all values of $T_{\alpha j}$ and $T_{\beta k}$, then one finds that the set-to-set coupling factors $\phi_{\alpha\beta}$ and $\phi_{\beta\alpha}$ must obey

$$\frac{\phi_{\alpha\beta}}{N_\alpha N_\beta} = \frac{1}{N_\beta} \sum_{k=1}^{N_\beta} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_\alpha} \phi_{\alpha j,\beta k} \langle T_{\alpha j} \rangle \right) \div \left(\sum_{j=1}^{N_\alpha} \langle T_{\alpha j} \rangle \right) \right]$$
$$\frac{\phi_{\beta\alpha}}{N_\alpha N_\beta} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left[\left(\sum_{k=1}^{N_\beta} \phi_{\alpha j,\beta k} \langle T_{\beta k} \rangle \right) \div \left(\sum_{k=1}^{N_\alpha} \langle T_{\beta k} \rangle \right) \right]. \tag{31}$$

Inspection of equation (31) shows that $\phi_{\alpha\beta}$ and $\phi_{\beta\alpha}$ are $N_\alpha N_\beta$ times certain weighted averages of the $\phi_{\alpha j,\beta k}$-coefficients (with the modal energies $\langle T_{\alpha j} \rangle$ or $\langle T_{\beta j} \rangle$ acting as weighting factors). This result implies that the power flow between mode sets is equal to the average mode-to-mode flow times the number of mode pairs between which power flow occurs—a result which one would expect intuitively.

Modal Energy-Independent Coupling Factors

If equation (28) is to be convenient for calculating set-to-set power flows, then the set-to-set coupling factors $\phi_{\alpha\beta}$ and $\phi_{\beta\alpha}$ should not depend on the modal energies $T_{\alpha j}$ and $T_{\beta k}$, and should preferably be equal. These conditions are found to be satisfied in a number of practically important cases.

For the case where all of the *mode-to-mode coupling factors are equal* ($\phi_{\alpha j,\beta k} = \phi_0$ for all j and k), one finds from equation (31) that

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta\alpha} = N_\alpha N_\beta \phi_0. \tag{32}$$

Equation (26) indicates that the mode-to-mode coupling between two mode sets is uniform if all modes of set α are similar to each other (i.e., have nearly the same resonance frequency and the same amount of damping), if all modes of set β are similar to each other, and if all α-modes are similarly coupled to all β-modes (i.e., if all mode-to-mode coupling is characterized by the same kinds and magnitudes of coupling elements). Indeed, an essential step in most practical applications of the statistical-energy approach consists of organizing the set of all modes of a system into subsets within which all modes have similar characteristics, so that relations like equation (32) can be applied to these subsets.

For the case where all of the modes of a set have *equal kinetic energies*, equation (31) yields

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta\alpha} = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \sum_{k=1}^{N_\beta} \phi_{\alpha j,\beta k}. \tag{33}$$

One may show [6] that one condition under which uniform modal kinetic energy distributions within a set are obtained occurs if all modes in the set are loosely coupled (to modes of other sets)

437

and are uniformly excited and damped. More precisely, if the modes of set α are loosely coupled to modes of set β (so that the power dissipated by a mode of set α exceeds the power flow from that mode to all β modes), then $\langle T_{\alpha j} \rangle$ will be the same for all α-modes if $S_{\alpha j}/\epsilon_{\alpha j}$ is the same for all these modes.

For the important case where one wishes to deal with collections or "ensembles" of mode sets (corresponding to ensembles of elastic systems), e.g., in order to account for practical variations in dimensions and material properties, one may also show [6] that the *ensemble average* power flow is governed by equations (28) and (33). Here, however, $\phi_{\alpha j,\beta k}$, T_α, T_β must be interpreted as the statistical averages of the corresponding quantities, and the simple expression (33) applies only if the (statistical) average modal energies are uniformly distributed within a set and if the coefficients $\phi_{\alpha j,\beta k}$ and modal kinetic energies $T_{\alpha j}$, $T_{\beta k}$ are statistically independent. Such statistical independence is likely in practice, particularly if each mode is coupled to many others, and/or if excitation variations occur within the ensemble [6].

Recapitulation

It has been shown that the *steady-state time-average power flow from one set of modes to another is proportional* (or approximately proportional) *to the difference between the set and time-average modal kinetic energies* of the two sets, provided that

1 The mode-to-mode coupling satisfies conditions under which the power flows between modes of the two sets may be taken as proportional to the modal kinetic energy differences (as discussed in the previous section); and

2 either (*a*) the mode-to-mode coupling is (at least approximately) the same for all mode pairs, or (*b*) all modes in a set have (at least approximately) equal time-average kinetic energies.

It has also been stated that the *ensemble average* of the steady-state time-average power flows from one set of an ensemble to a set of another ensemble is proportional to the difference between the ensemble average of the set average modal kinetic energies of the two sets, provided (*a*) that the first of the previously listed conditions is satisfied, (*b*) that the mode-to-mode coupling coefficients and modal kinetic energies are statistically independent, and (*c*) that the modal kinetic energies in the ensemble average are uniformly distributed within a set.

In the special cases discussed in this section, and only in these cases, the average response and dynamic interactions of mode sets can be reduced to simple terms, represented schematically in Fig. 4. In analyzing the total interaction of two systems by the statistical energy approach, one must generally classify the modes of the two systems into sets, such that the modes within each set are sufficiently similar to satisfy the conditions which permit this simple treatment of set interaction to be applied.

Some Applications

Response of Indirectly Excited Systems

The "statistical energy" approach is particularly useful for the analysis of two coupled mode sets, where one of these sets is not directly excited. Consider, for example, the two mode sets in Fig. 4, and assume that conditions are such that the power flow between the sets obeys equation (28) with $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta\alpha}$. If no external excitation acts on set β ($A_\beta = 0$), then the time-average power $D_{T\beta}$ dissipated by set β must be equal to the power supplied to it by set α.

The total power $D_{T\beta}$ dissipated by set β is composed of the contributions of the N_β individual modes of the set. Therefore,

$$D_{T\beta} = \sum_{k=1}^{N_\beta} c_{\beta k}\langle V_{\beta k}^2 \rangle = \frac{2c_\beta}{m_\beta} N_\beta T_\beta, \tag{34}$$

where the right-most expression was obtained by use of equations (11) and (30), where m_β denotes the mass of the system to which the modes of set β belong, and where c_β denotes the average

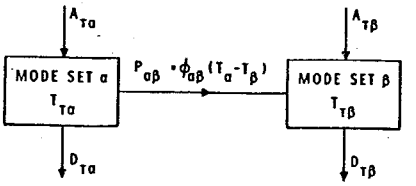


Fig. 4 Power flow between two sets of modes

viscous damping coefficient[9] of set β.

The power balance mentioned in the foregoing leads to the relation

$$\phi_{\alpha\beta}(T_\alpha - T_\beta) = \frac{2c_\beta}{m_\beta} N_\beta T_\beta. \tag{35}$$

Solution of the equation (35) yields

$$1 + \frac{2c_\beta N_\beta}{m_\beta \phi_{\alpha\beta}} = \frac{T_\alpha}{T_\beta} = \frac{m_\alpha N_\beta}{m_\beta N_\alpha} \frac{\overline{(v_\alpha^2)}}{\overline{\langle v_\beta^2 \rangle}}, \tag{36}$$

where equations (10), (11), and (30) have been used to convert the average kinetic energy ratio to a ratio of mean-square velocities.

Equation (36) represents a useful and surprisingly simple result, which permits one to calculate the mean-square velocity of the indirectly excited system from that of the directly excited system. For example, the two systems may be panels joined along a common edge (which may be reinforced by a beam, so that the panels are poorly coupled). If panel α is subject to an excitation in a broad frequency band with a minimum frequency considerably above the fundamental, then equation (36) gives the ratio of the mean-square velocities of the panels in that frequency band. For such excitation the ratio N_β/N_α is equal to the ratio of the numbers of modes per unit frequency interval (called "modal densities"), or the reciprocal of the ratio of the average frequency spacings between modes. For plates made of the same material N_β/N_α then is equal to $(A_s/h)_\beta/(A_s/h)_\alpha$, where A_s/h denotes the ratio of plate area to thickness [6, 10]. Applications of equation (36) to a beam cantilevered from a plate and to two edged-joined plates are presented in [13], together with related experimental results that show generally good agreement with theoretical predictions.

Evaluation of Effect of Added Damping

Inspection of equation (36) also permits one to make some observations concerning the effectiveness of adding damping to indirectly excited systems (e.g., of adding viscoelastic damping layers [14] to a panel which is indirectly excited by a sound field, where the sound field is made up of the modes in an acoustic volume), and to gain some insight into the reason for the experimentally observed fact that the addition of a given amount of damping is useful in some cases, but not in others. From equation (36) one may deduce that the addition of damping to an indirectly excited system which is lightly damped initially (with $2c_\beta N_\beta/m_\beta\phi_{\alpha\beta} \ll 1$) will have no appreciable effect on the system vibrations $\langle \overline{v_\beta^2} \rangle$, unless the added damping is great enough to make $2c_\beta N_\beta/m_\beta\phi_{\alpha\beta}$ at least of the order of unity. For highly damped systems, on the other hand, $\langle \overline{v_\beta^2} \rangle$ is found to vary approximately inversely with the damping coefficient.

Errors in Damping Measurement

One may also observe that the time-average power $A_{T\alpha}$ supplied to set α must, in the steady state, be equal to the total power lost by set α, both by dissipation and by "flow" to set β.

[9] More precisely, $c_\beta = (N_\beta T_\beta)^{-1} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} c_{\beta k}\langle T_{\beta k} \rangle$.

Therefore,

$$A_{T\alpha} = 2c_\alpha N_\alpha T'_\alpha/m_\alpha + \phi_{\alpha\beta}(T'_\alpha - T'_\beta). \quad (37)$$

By use of equation (36) one may then obtain

$$\frac{A_{T\alpha}}{2N_\alpha T'_\alpha/m_\alpha} = \frac{A_{T\alpha}}{(\overline{v_\alpha^2})} = c_\alpha\left[1 + \frac{c_\beta N_\beta m_\alpha/c_\alpha N_\alpha m_\beta}{1 + (2c_\beta N_\beta/m_\beta\phi_{\alpha\beta})}\right] = c_{\alpha_{app}} \quad (38)$$

where the equivalence of $2N_\alpha T'_\alpha/m_\alpha$ and $(\overline{v_\alpha^2})$ follows from equations (10), (11), and (30).

If set α were not connected to set β, then its total power dissipation $D_{T\alpha}$ would be equal to the power A_α supplied to it, and one would obtain for c_α the left-most expression of equation (38). However, with set β coupled to set α, this same expression yields only an "apparent" damping coefficient value $c_{\alpha_{app}}$; the error one would make by considering this value as the actual dissipation loss factor is evident from equation (38). One may observe that $c_{\alpha_{app}}$ always exceeds c_α, so that, unless one is aware that the system concerned is coupled to another system, one always obtains damping values which are too large. Equation (38) indicates that the error is insignificant, however, if the coupling is poor ($\phi_{\alpha\beta}m_\beta/2c_\beta N_\beta \ll 1$) and/or the coupled set is relatively lightly damped ($c_\beta/c_\alpha \ll 1$).

Equation (38) also shows that the response $(\overline{v_\alpha^2})$ of set α to a given excitation A_α is not controlled by the actual damping coefficient c_α (as in the uncoupled case), but rather by the apparent damping coefficient $c_{\alpha_{app}}$. The coupled, indirectly excited system β thus is seen to increase the effective damping of the directly excited system α—a conclusion which is "obvious" if one considers the problem in terms of energies.

Interaction of Sound and Structures

Some of the previous results of this section are particularly useful for estimating the sound produced in an acoustic volume due to vibrations of a structure, or for predicting the structural vibrations induced by sound. Here, one of the two mode sets is that associated with the structure; the other is that associated with the acoustic volume. Space limitations do not permit an adequate treatment of such problems here. A brief discussion appears in [6]; more complete treatments are given in [10] and [11]; applications are discussed in [15], [16], and [17].

Concluding Remarks

In the brief introduction to statistical energy analysis approach presented in this paper we have endeavored to set down the basic concepts which underlie this approach in enough detail to indicate its range of validity and applicability. Of course, complete coverage is impossible within the confines of a single paper.

Although the results discussed here were obtained for linear coupling, recent studies [18, 19] have shown that similar results apply also in the presence of some nonlinearities. Extension of the results of this paper to more than two coupled mode sets can also readily be accomplished for light coupling. Such extensions, and applications thereof, appear in [17], [20], and [21].

At present, the usefulness of the statistical energy approach for quantitative prediction of vibration responses under practical circumstances is limited by the amount of information available concerning coupling coefficients and damping. Sound-to-structure coupling coefficients may be readily estimated in some cases [11]; structure-to-structure coupling estimation usually is difficult (see [13], for example), but further work is under way. A reasonable amount of information on the dissipative properties of materials and simple structures is available in the technical literature (e.g., [22]), but the loss factors of built-up structures still cannot be estimated with much confidence, although some progress is being made [23].

The statistical energy approach is a uniquely simple and powerful tool for providing a qualitative understanding of the most important aspects of the vibrations of complex systems. When combined with other information, analytically or experimentally derived, concerning the energy transport and dissipation parameters involved in a given case, this approach also permits one to arrive readily at quantitative answers to complex vibration problems.

Acknowledgment

The work presented in this paper was sponsored by the Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, United States Air Force, and is based on the report [6] which was prepared for the sponsor by the author. The author is grateful for the many helpful comments and suggestions provided by his colleagues, Drs. Preston W. Smith, Jr., Richard H. Lyon, Terry D. Scharton, and Jerome E. Manning.

References

1 Kin N. Tong, *Theory of Mechanical Vibration*, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1960.

2 E. E. Ungar, "Mechanical Vibrations," *Mechanical Design and Systems Handbook*, edited by H. A. Rothbart, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., 1964.

3 B. Friedman, *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., chapter 4, 1956.

4 S. H. Crandall and W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*. Academic Press, New York, N. Y., 1963.

5 D. C. Karnopp, "Basic Theory of Random Vibration," *Random Vibration*, vol. 2, edited by S. H. Crandall, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.

6 E. E. Ungar, "Fundamentals of Statistical Energy Analysis of Vibrating Systems," U. S. Air Force AFFDL-TR-66-52, April, 1966.

7 T. D. Scharton, Random Vibration of Coupled Oscillators and Coupled Structures," Doctoral thesis, Massachusetts Institute of Technology, October, 1965.

8 W. R. LePage and S. Seely, *General Network Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., chapter 1, 1952.

9 Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Dover Publications, New York, N. Y., vol. I, 1945, p. 104.

10 R. H. Lyon and G. Maidanik, "Power Flow Between Linearly Coupled Oscillators," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 34, May, 1962, pp. 623–639.

11 P. W. Smith, Jr., and R. H. Lyon, "Sound and Structural Vibration," NASA CR-160, March, 1965.

12 S. H. Crandall, "Statistical Properties of Response to Random Vibration," *Random Vibration*, chapter 4, edited by S. H. Crandall, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1958, pp. 21–32.

13 R. H. Lyon and E. Eichler, "Random Vibration of Connected Structures," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 36, July, 1964, pp. 1344–1354.

14 D. Ross, E. E. Ungar, E. M. Kerwin, Jr., "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae," *Structural Damping*, section 3, edited by J. E. Ruzicka, ASME, New York, N. Y., 1959.

15 P. A. Franken and R. H. Lyon, "Estimation of Sound-Induced Vibrations by Energy Methods, With Applications to the Titan Missile," *Shock, Vibration, and Associated Environments*, Bull. No. 31, part III, 1963, pp. 12–26.

16 I. Dyer, "Response of Space Vehicle Structures to Rocket Engine Noise," *Random Vibration*, chapter 7, vol. 2, edited by S. H. Crandall, the MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.

17 E. Eichler, "Thermal Circuit Approach to Vibrations in Coupled Systems and the Noise Reduction of a Rectangular Box," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 37, June, 1965, pp. 995–1007.

18 D. E. Newland, "Energy Sharing in the Random Vibration of Nonlinearly Coupled Modes," *J. of Institute of Math. and Its Applications*, vol. 1, September, 1965, pp. 189–207.

19 D. C. Karnopp, "Power Balance Method for Nonlinear Random Vibration," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, TRANS. ASME, vol. 89, Series E, 1967, p. 212.

20 R. H. Lyon and T. D. Scharton, "Vibrational-Energy Transmission in a Three-Element Structure," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 38, August, 1965, pp. 253–261.

21 R. H. Lyon, "An Energy Method for Prediction of Noise and Vibration Transmission," *Shock Vibration and Associated Environments*, Bull. No 33, pt. II, 1964, pp. 13–25.

22 B. J. Lazan, "Energy Dissipation Mechanisms in Structures, With Particular Reference to Material Damping," *Structural Damping*, Section 1, edited by J. E. Ruzicka, ASME, New York, N. Y., 1959.

23 E. E. Ungar, "Energy Dissipation at Structural Joints; Mechanisms and Magnitudes," U. S. Air Force, FDL-TDR-64-98, August, 1964.