



土木研究所資料

第 903 号

ダム工学における有限要素法 (1)

昭和49年 3 月

建設省土木研究所

正 誤 表

頁	行	誤	正
6	下 6	次に, 行列と.....	次に, 行数と.....
8	(16) 式	$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix}$
17	8	σ_a	σ_r
18	14	p_{ax}	p_{ax}
18	16	p_{ay}	p_{ay}
18	17	p_{az}	p_{az}
22	18	$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u$	$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u$
24	下 5	$\{u_a\}$	$\{u_a\}$
44	3	$+\tau_{yx} \cos(y, n) + \sigma_x \cos(z, n)$	$+\tau_{yz} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n)$
44	6, 9	$(p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w)$	$(p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w)$
52	(83) 式	$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$
55	3		
53	5	$\delta_\epsilon V =$	$\delta_\epsilon U =$
54	12	Mothea-	Mathema-
58	3	(31) 式においても	(31) 式において
65	11	$\frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$
67	3	なる関数 x が存在し,	なる関数 F が存在し,
70	3	$2G \frac{y}{\epsilon_x}$	$2G \bar{\epsilon}_x$
72	1 ~ 5		数式を (120) 式とする。
72	14 ~ 21	$\left. \vphantom{\frac{m-1}{m}} \right\} (120)$	除く
73	8	$+ 2 \frac{m-1}{m} \{-(1-\log r) \cos \theta +$	$+ 2 \frac{m-1}{m} \{-(1-\log r) \cos \theta +$
77	下 6	$\{D\}^T$	$\{D\}$
79	9	$b_j b_j$	$b_j c_j$
79	下 5	$2(1-\nu)(x_j - x_k) +$	$2(1-\nu)(x_j - x_k)^2 +$
82	9	$= \sqrt{\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{y_j - y_i}}$	$= \sqrt{\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{y_j - y_i}} dy$
82	下 3	$- S_{xk}^{jk} - S_{xk}^{ki}$	$- S_{yk}^{jk} - S_{yk}^{ki}$
83	2	$(y_i - y_k)$	$(y_j - y_k)$
83	19	(107) 式	(125) 式
84	下 1, 下 2	$(y_i - y_i)$	$(y_i - y_j)$
88	下 13	$+\rho K_{ik}^{xu} U_k + \rho K_{il}^{xv} V_l$	$+\rho K_{il}^{xu} U_l + \rho K_{il}^{xv} V_l$
88	下 7	$+\rho K_{ii}^{ku} +$	$+\rho K_{ii}^{xu} +$

目 次

飯 田 隆 一
梅 田 勝 彦
水 野 光 章
松 本 徳 久

1	有限要素法の特徴	1
2	行列 (マトリックス)	4
2-1	マトリックスの定義	4
2-2	マトリックスの四則演算	5
2-3	特殊なマトリックス	9
3	連続体の力学の基礎理論	13
3-1	応 力	13
3-2	ひ ず み	21
3-3	連続体の運動方程式	31
4	変 分 原 理	35
4-1	質点の力学における仮想仕事の原理	35
4-2	質点系の力学における仮想仕事の原理	39
4-3	質点系の運動と Hamilton の原理	40
4-4	連続体における仮想仕事の原理	42
4-5	連続体における最小仕事の原理	45
4-6	変分原理に対する考察	47
4-7	応用例 熱伝導問題に対する変分原理	48
5	弾 性 理 論	50
5-1	等方性弾性体における応力とひずみの関係	50
5-2	一般化された Hooke の法則 異方性弾性体における応力とひずみの関係	52
5-3	等方性体における弾性方程式	58
5-4	弾性問題における従来の解析方法	60
5-5	弾性問題における有限要素法の位置付け	62
5-6	二次元応力状態	64
6	有限要素法の弾性問題への適用(1)	75
6-1	等方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックス	75
6-2	節点力の物理的意味	80
6-3	異方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックス	83
6-4	要素の自由度	86
6-5	集積マトリックスと解法	88

1. 有限要素法の特徴

最近の電子計算機の発達により、数値解析の分野でも著しい進歩がみられ、新しい数値解法が数多く開発されているが、そのうちで現在最も注目されているのが有限要素法である。

この有限要素法は、元来、骨組構造において、各部材を要素と見なし、変分原理を適用すれば各要素における不静定力と変位との関係を容易に関係づけることが可能であり、これをマトリックス演算により整理すれば容易に多元一次方程式に持込むことが可能であることに着目して開発されたものである。しかし、この方法は骨組構造のみならず、連続体の力学などにおいても連続体をいくつかの要素に分割して、同様な手法を適用すれば、かなり精度の高い解析力が可能であり、部分的に材料の性質が異っている場合に容易に適用しうるのみならず、従来特殊な問題をのぞいて解析が困難視されていた、材料非線型問題、幾何学的非線型問題、非定常問題などに対しても反復計算を行うことにより解析可能となって来たため、大きな注目をあびるに至り、今後の中広い利用と著しい発展が期待される方法である。

最近の大型電子計算機の利用により数値計算の面でも大きな変化がみられた。すなわち、電子計算機が利用され始めた初期には、従来手計算で非常に複雑であった計算が、そのままの方法で計算機にのせられるという方法がとられた。しかし、手計算と電子計算機による計算とでは、計算機構も多少異るし、判断機構においては大きな相違がある。このため、手計算に適した計算システムと電子計算機に適した計算システムとは異っている筈であり、電子計算機の利用が進むにつれて電子計算機により適した計算システムが開発されていった。例をあげれば、常微分方程式の解法は、手計算時代には Runge-Kutta 法が用いられたが、計算機の登場により Runge-Kutta-Gill 法に変わっていったし、多元連立方程式の解法も消去法から、反復法、Cholesky 法などへと変わっていった。

このような変化を通して最も著しい進歩をみせたのは、多元一次連立方程式の解法である。手計算時代には、10元以上の連立方程式を解くこともかなり困難であったのに、数百元はおろか数千元あるいは数萬元の連立方程式も方程式の性質がよければ解を得ることが可能となって来た。またこのような多元連立方程式の解法の進歩にともなって、マトリックス演算も電子計算機のプログラムとして整備され、一般化され、電子計算機による数値解析の中で、マトリックス演算→多元連立方程式の解法という流れは最も適したもので、最も進歩したものとなって来た。したがって、数値解析を行うにあたって、これらを利用しうるようにしたならば、きわめて有利である。

ここで、弾性問題を例にとって検討を加えてみよう。連続体の運動ないし平衡方程式を立てる場合に、一般に微小体の運動ないし平衡関係から出発するため偏微分方程式の形をとり、これをそのまま数値解析しようとするならば、微分方程式の数値解析となり、電子計算機の利用において、最も進歩の著しいマトリックス演算→多元一次連立方程式の解法という手法ができなくな

る。

一方、振動問題においては連続体においてこれを連続体のままで解析することが困難なことが多いので、連続体を近似的に質点系として取扱い、線型化することが行われて来た。

この方法では、質点が 1, 2, …… P あって、質点 i は質点 j, k, l, n と内力 X_{ij}, Y_{ij} ; X_{ik}, Y_{ik} ; …… X_{in}, Y_{in} により結ばれ、外力として X_i, Y_i が作用しているとすれば、運動方程式としては

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} + X_{ik} + \dots + X_{in} + X_i &= m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \\ Y_{ij} + Y_{ik} + \dots + Y_{in} + Y_i &= m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

の形で表わされ、各内力が弾性的なバネで表わされるならば、内力 $X_{ij}, Y_{ij}, \dots, X_{in}, Y_{in}$ は各質点間の相対変位に比例する量として表わされるから、容易に各質点の変位を未知数とした多元一次方程式として表わされる。従ってこの方法は電子計算機による数値解析としては有利なものであるが、精度があまりよくないので連続体の静力学ではほとんど用いられていなかった。しかし、このような形での数値解析が電子計算機の利用において、最も有利であるならば、この方法よりも、連続体としての性質をよりよく表現し、質点系の力学と同じような解析方法をとれる数値解析法の開発が必要となる。

このような方向での数値解析法の開発がいくつか試みられたが、そのうちで、精度も比較的良好適用範囲が最も広いのが有限要素法である。

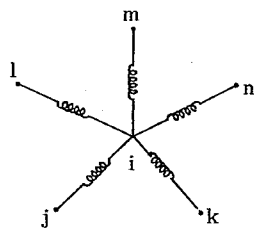


図 - 1

すなわち従来用いられて来た連続体を近似的に質点系の力学で取り扱う方法は質点と質点との間に線的なバネを考え解析している。これに対し、有限要素法では図-2(c)に示すように連続体をいくつかの要素に分割し、その要素の頂点（および辺上）に節点（質点に対応するものと考えてよい）を設け、要素を節点間を結ぶ面的なバネと考えて、各要素毎に節点にかかる力に対応した節点の変位を求め、これにもとづいて、質点系の力学と同

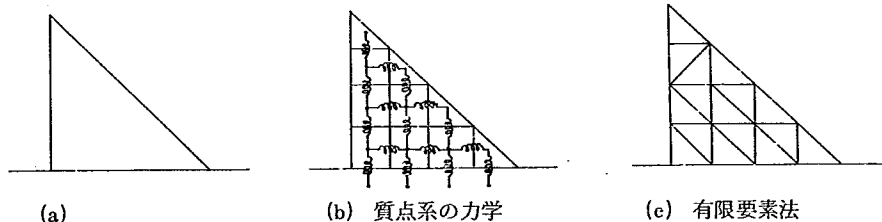


図 - 2

じょうな多元連立一次方程式に持込んでいる。

以上から有限要素法は、物理的には従来の質点系の力学としての取扱いでは質点間を線的なバネで結んでいたのに対し、要素という面的なバネで結ぶことにより、より忠実に連続体としての特性を加味し得るようになり、精度を著しく向上させることが可能となった。

このため、従来の質点系の力学として近似的に取扱う方法は連続体の静力学においては精度が劣るとしてあまり用いられなかったが、有限要素法は所要の精度を満たすものとして用いられるようになったばかりでなく、要素毎に異った物理的性質を与えても差支えないので、従来はかなり解析が困難であった部分的に材料の性質が異なる場合についても容易に解析し得るなど、極めて適用範囲の広いものになった。また、振動問題では計算精度を大巾に向上させることになった。

これを方法論的に見れば有限要素は

- i) 変分原理を用いて要素の面的なバネとしての特性を捕え
- ii) マトリックス演算を用いて、多元一次連立方程式に持込む

という流れを特徴としている。

以上は、弾性問題を例にとって有限要素法の特徴を捕えたが、浸透流問題など他の問題においても、物理的にも方法論的にも同じような特徴を持っている。

2. 行列（マトリックス）

前述したように、有限要素法においてはマトリックスを多用するので、マトリックスについて簡単に説明を加えよう。

2-1 マトリックスの定義

マトリックスは縦と横に格子状に列べられた数の集りをいう。即ち、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

は、1つのマトリックスである。この場合、縦には m 個、横には n 個列んでいるが、これを m 行 n 列のマトリックスと云う。また、このマトリックスを構成している数 a_{ij} を要素という。この要素は実数でも複素数でも差支えないし、時には小さなマトリックスのこともある。

以上から、マトリックスは行列式のように、一つの演算を意味しているのではない。したがって行の数と列の数と一致する必要もない。

(2)式の特種な形として、1行だけから成っているマトリックス

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \quad (3)$$

を行マトリックスと云い、1列だけから成っているマトリックス

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

を列マトリックスと云う。

マトリックスの行と列とを入れ換えたものを転置マトリックスと云い $(\)^T$ で表わす。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

となり、 m 行 n 列のマトリックスの転置マトリックスは n 行 m 列のマトリックスとなる。

2-2 マトリックスの四則演算

2-2-1 マトリックスの加減算

いま m 行 n 列の 2 つのマトリックス $[A]$, $[B]$ があったとする。

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

この 2 つのマトリックスの同じ位置にある要素がすべて等しいとき、すなわち

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n) \quad (6)$$

のとき

$$[A] = [B] \quad (7)$$

とする。

次に $a_{ij} \neq b_{ij}$ のとき

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \quad (8)$$

とし、この c_{ij} を要素とするマトリックスを

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

とすれば、

$$[A] \pm [B] = [C] \quad (10)$$

である。

ここで注意すべきことは、 $[A]$, $[B]$, $[C]$ とも m 行 n 列のマトリックスであることである。すなわち、マトリックスの加減算は、2 つのマトリックスの行数および列数が等しいと出来ず、加減算の結果出来るマトリックスの行数および列数も等しい。

2-2-2 マトリックスの掛け算

先ず簡単な掛け算から説明する。

$$\begin{aligned}
 b \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ba_{11} & ba_{12} & \cdots & ba_{1n} \\ ba_{21} & ba_{22} & \cdots & ba_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_{m1} & ba_{m2} & \cdots & ba_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} b \quad (11)
 \end{aligned}$$

次にマトリックスとマトリックスの積について述べる。

この場合に掛けられるマトリックスの列数と掛けるマトリックスの行数とが一致していなければならない。すなわち、 m 行 n 列のマトリックスと n 行 p 列のマトリックスの掛け算は可能である。

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \\
 \text{ただし,} & \\
 c_{ij} &= a_{ij} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これがマトリックスの掛け算である。

次に、行列と列数が等しいマトリックス（正方マトリックスと云う）で、対角線要素のみが全部 1 で他は 0 のマトリックスを考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = [E] \quad (13)$$

これと任意のマトリックス $[A]$ との積をとると (12) 式から

$$\begin{aligned}
 [A][E] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [A] \quad (14)
 \end{aligned}$$

となり、 $[E]$ を掛けてもマトリックスは変化しない。すなわち $[E]$ は普通の掛算の1に相等する。 $[E]$ を単位マトリックスと云う。

2-2-3 マトリックスの割算(逆マトリックス)

マトリックスの割算は掛算の逆演算である。したがって、あるマトリックス $[A]$ に掛けることにより、単位マトリックスになるマトリックスを逆マトリックスと呼び、 $[A]^{-1}$ と書く。すなわち、

$$[A][A]^{-1} = [E] \quad (15)$$

これから

$$[A][B] = [C]$$

のとき

$$\begin{aligned}
 [A]^{-1}([A][B]) &= [A]^{-1}[A][B] = [E][B] = [B] \\
 &= [A]^{-1}[C]
 \end{aligned}$$

$$\therefore [B] = [A]^{-1}[C]$$

という演算も可能となる。

いま、逆マトリックス $[A]^{-1}$ の要素を x_{ij} とすると、(15)式から

$$[A][X] = [E]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

と書き表わされるから、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} + \dots + a_{1n} x_{n1} = 1 \\ a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} + \dots + a_{2n} x_{n1} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} x_{11} + a_{m2} x_{21} + \dots + a_{mn} x_{n1} = 0 \\ a_{11} x_{12} + a_{12} x_{22} + \dots + a_{1n} x_{n2} = 0 \\ a_{21} x_{12} + a_{22} x_{22} + \dots + a_{2n} x_{n2} = 1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} x_{12} + a_{m2} x_{22} + \dots + a_{mn} x_{n2} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_{1m} + a_{12} x_{2m} + \dots + a_{1n} x_{nm} = 0 \\ a_{21} x_{1m} + a_{22} x_{2m} + \dots + a_{2n} x_{nm} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} x_{1m} + a_{m2} x_{2m} + \dots + a_{mn} x_{nm} = 1 \end{array} \right.$$

という n 元一次連立方程式を m 組解くことになる。この場合に各組の連立方程式は、未知数が n 個あるのに対して、方程式の数は m 個ある。したがって、これらの連立方程式が解を有するためには、

$$\left. \begin{array}{l} n = m \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] \neq 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

でなければならない。

これから、マトリックスの割算、云いかえれば逆マトリックスを求めることは、正方マトリックスで、デターミナント（行列式）が 0 でないときのみ可能で逆マトリックスを求めるということは、 n 組の n 元一次連立方程式を解くことと一致する。

次に、マトリックス $[A]$ 、 $[B]$ を n 行 n 列のマトリックスとすると、

$$[A]^{-1} [A] = [E]$$

$$[A]^{-1} ([A][B]) = [A]^{-1} [A] [B] = [E] [B] = [B]$$

$$\therefore [B]^{-1} [A]^{-1} ([A][B]) = [B]^{-1} [B] = [E]$$

$$([A][B])^{-1} ([A][B]) = [E]$$

これから,

$$\left. \begin{aligned} (\{A\}\{B\})^{-1} &= \{B\}^{-1}\{A\}^{-1} \\ \text{同様に} \\ (\{A\}\{B\}\{C\}\{D\})^{-1} &= \{D\}^{-1}\{C\}^{-1}\{B\}^{-1}\{A\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

これと類似した性質は転置マトリックスにもある。すなわち、前述したように転置マトリックスは行と列を入れ換えたものであるから、掛算の順も逆転し、

$$\left. \begin{aligned} (\{A\}\{B\})^T &= \{B\}^T\{A\}^T \\ (\{A\}\{B\}\{C\}\{D\})^T &= \{D\}^T\{C\}^T\{B\}^T\{A\}^T \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。この関係については、具体的な例で試みればより理解し易いと考えられる。

2-3 特殊なマトリックス

正方マトリックスの中で特殊なものは、連立方程式を扱う上で有利なので、ここに記述することにする。

(1) 対称マトリックス

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \{A\}^T = \{A\}$$

(2) 逆対称マトリックス

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \{A\}^T = -\{A\}$$

(3) 下三角マトリックス

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(4) 上三角マトリックス

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(5) 対角マトリックス

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(6) 単位マトリックス

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 直交マトリックス

いまマトリックス $[A]$ が

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

があって,

$$[A]^T = [A]^{-1} \quad \text{あるいは} \quad [A][A]^T = [E]$$

のとき $[A]$ は直交マトリックスであるという。

ex1 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [A]$ は直交マトリックスである。

(解) $[A]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore [A][A]^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [E] \end{aligned}$$

ex2. 任意の列マトリックス

$$\{V\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

があって $\{V\}^T \{V\} = 1$ のときは,

$(E) - 2\{V\}\{V\}^T$ は直交マトリックスである。

(解) $\{V\}^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

$$\therefore \{V\}^T \{V\} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$$

$$\{V\}\{V\}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots & a_1 a_n \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & a_2 a_n & a_3 a_n & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (E) - 2\{V\}\{V\}^T = \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1 a_2 & \dots & -2a_1 a_n \\ -2a_1 a_2 & 1-2a_2^2 & \dots & -2a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1 a_n & -2a_2 a_n & \dots & 1-2a_n^2 \end{pmatrix} = (B)$$

$$(B)^T = (B)$$

$$\therefore (B)(B)^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1 a_2 & \dots & -2a_1 a_n \\ -2a_1 a_2 & 1-2a_2^2 & \dots & -2a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1 a_n & -2a_2 a_n & \dots & 1-2a_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1 a_2 & \dots & -2a_1 a_n \\ -2a_1 a_2 & 1-2a_2^2 & \dots & -2a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1 a_n & -2a_2 a_n & \dots & 1-2a_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = 4a_1^2 a_i a_j + 4a_2^2 a_i a_j + \dots + 4a_{i-1}^2 a_i a_j - 2a_i a_j (1-2a_i^2) \\ + 4a_{i+1}^2 a_i a_j + \dots + 4a_{j-1}^2 a_i a_j - 2a_i a_j (1-2a_j^2) + 4a_{j+1}^2 a_i a_j \\ + \dots + 4a_n^2 a_i a_j$$

$$= 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) a_i a_j - 2a_i a_j - 2a_i a_j = 0$$

$$c_{ii} = 4a_1^2 a_i^2 + 4a_2^2 a_i^2 + \dots + 4a_{i-1}^2 a_i^2 + (1-2a_i^2)^2 + 4a_{i+1}^2 a_i^2 \\ + \dots + 4a_n^2 a_i^2$$

$$= 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) a_i^2 - 4a_i^4 + (1-2a_i^2)^2$$

$$= 4a_i^2 - 4a_i^4 + 1 - 4a_i^2 + 4a_i^4 = 1$$

$$\therefore (B)(B)^T = (E)$$

このような $\{V\}$ の例としては

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

などがある。

3. 連続体の力学の基礎理論

3-1 応 力

3-1-1 応力の定義

連続体の力学について述べるに先立って、連続体の内力の定義について述べる。

今、 $x = \text{const}$ の面に単位面積当り x 方向に働く力を σ_x

"	"	y	"	τ_{xy}
"	"	z	"	τ_{xz}
y = const	"	x	"	τ_{yx}
"	"	y	"	σ_y
"	"	z	"	τ_{yz}
z = const	"	x	"	τ_{zx}
"	"	y	"	τ_{zy}
"	"	z	"	σ_z

とする。いま、辺が x, y, z 軸に平行で辺長が dx, dy, dz なる長方形を考える。(図-3(a))

$$DA = CB = GF = HE = dx$$

$$AB = DC = EF = HG = dy$$

$$AE = BF = CG = DH = dz$$

□ABCDでA点の周りの廻転をとると、

BCには x 方向に $\tau_{yx} dx$

" y 方向に $\sigma_y dx$

DCには x 方向に $-\sigma_x dy$

" y 方向に $-\tau_{xy} dy$

ABには x 方向に $\sigma_x dy$

" y 方向に $\tau_{xy} dx$

DAには x 方向に $-\tau_{yx} dy$

" y 方向に $-\sigma_y dx$

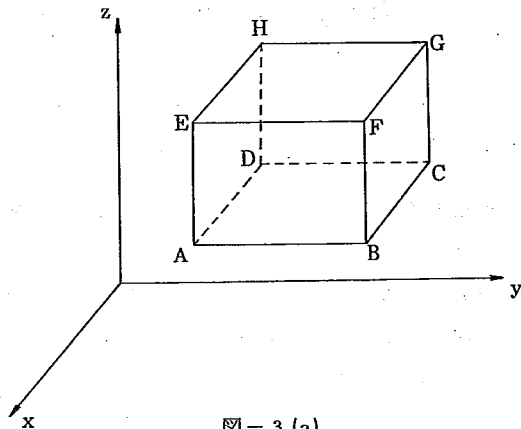


図-3(a)

が作用するから、A点の周りの廻転は0でなければならないから、

$$\tau_{yx} dx dy + \sigma_y dx \cdot \frac{1}{2} dx - \tau_{xy} dy dx - \sigma_x dy \cdot \frac{1}{2} dy + \sigma_x dy \cdot \frac{1}{2} dy - \sigma_y dx \cdot \frac{1}{2} dx = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \text{同様に } \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{array} \right\} \quad (19)$$

すなわち、これら内力を応力と名付けると、応力としては $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ の6個を考えればよく、このうち $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を直応力、 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ をせん断応力と名付ける。

図-3(a)の yz 平面を図-3(b)に示す。

(x 方向の厚みは dx)

今、 dy, dz 要素で応力が一定でなく、容積分 (X, Z) が働いている場合を考える。

すなわち

A E において τ_{yz} なる剪断応力は、 dy

離れた F B では $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$ という具合である。

A 点の周りのモーメントの均合をとると、

$$\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dy \right) \frac{dy}{2} \cdot dx - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dz \cdot \frac{dz}{2} dx + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dz \cdot dy \cdot dx - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dy \cdot dz \cdot dx + Z dy \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} dx - Y dy \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} dx = 0$$

両辺を $dx dy dz$ で除せば

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz + \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) + \frac{Z}{2} dy - \frac{Y}{2} dz = 0$$

$dy, dz \rightarrow 0$ に近づければ、結局

$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0$ が得られ (19) 式に一致する。

なお、剪断応力の方向は次のように定義する。

直応力について引張力を正とすれば、図-3(a)における面 B C F G では、引張力は y 軸の正の方向と一致するが逆に面 A D H E は引張力は y 軸の負の方向に向くので、前者の面を正の面、後者を負の面とする。そこで、剪断応力が正の面にあるときは、剪断応力の向きが座標系の正の方向に一致している場合を剪断応力の正の方向とする。逆に、負の面では剪断応力が座標系の負の方向に一致するものを正とする。

このように定義すると、図-3(c)におけるように、 yz の第一象限 ($y > 0, z > 0$) にある矩形 A B F E については、正の傾きをもつ対角線 A F が A F' のように伸びようとする剪断応力が正と定義されるに等しい。

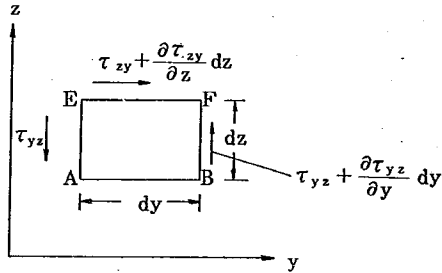


図-3(b)

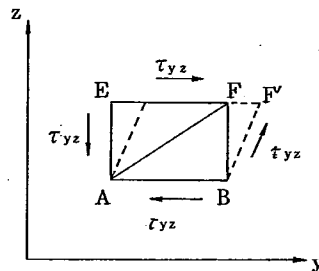


図-3(c)

3-1-2 応力の変換則

図-4 に示すように、 x, y, z 座標の他に直交直線座標 α, β, r をとったとする。この各々の方向余弦を

	x	y	z
α	$\cos(x, \alpha)$	$\cos(y, \alpha)$	$\cos(z, \alpha)$
β	$\cos(x, \beta)$	$\cos(y, \beta)$	$\cos(z, \beta)$
r	$\cos(x, r)$	$\cos(y, r)$	$\cos(z, r)$

とする。

いま α 軸に直交する平面を ABC とし、 x 軸、 y 軸、 z 軸との交点をそれぞれ A, B, C とする。

$\triangle ABC$ の面積を S

$\triangle OBC$ " S_x

$\triangle OAC$ " S_y

$\triangle OAB$ " S_z

とする。しかるとき、立体幾何により、

$$S_x = S \cos(x, \alpha)$$

$$S_y = S \cos(y, \alpha)$$

$$S_z = S \cos(z, \alpha)$$

いま、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ が存在していて、面 ABC の単位面積当りに、 x, y, z 方向に働く力を、それぞれ p_{ax}, p_{ay}, p_{az} とする。

この p_{ax}, p_{ay}, p_{az} は、 α と x, y, z とが一致、または直交してないので、応力とは異なり、surface traction と云う。

さて、三角錐 $OABC$ の平衡について考察すると、

$\triangle OAB$ には x 方向に τ_{zx} が働き

$\triangle OBC$ " σ_x "

$\triangle OAC$ " τ_{xy} が働くから

$$\sigma_x \cdot S_x + \tau_{xy} \cdot S_y + \tau_{zx} \cdot S_z = p_{ax} \cdot S$$

$$\therefore p_{ax} = \sigma_x \cos(x, \alpha) + \tau_{xy} \cos(y, \alpha) + \tau_{zx} \cos(z, \alpha)$$

$$\text{同様に } p_{ay} = \tau_{xy} \cos(x, \alpha) + \sigma_y \cos(y, \alpha) + \tau_{yz} \cos(z, \alpha)$$

$$p_{az} = \tau_{zx} \cos(x, \alpha) + \tau_{yz} \cos(y, \alpha) + \sigma_z \cos(z, \alpha)$$

(20)

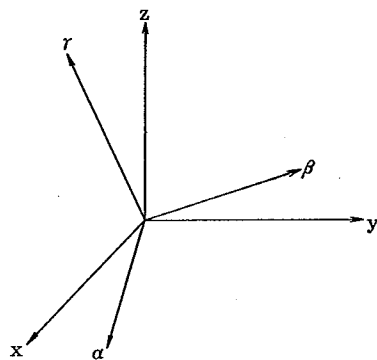


図-4

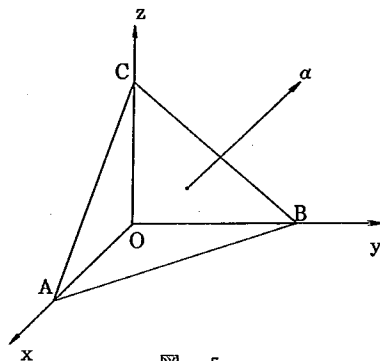


図-5

これをマトリックスで表示すれば,

$$\begin{aligned}
 [p] &= \begin{bmatrix} p_{ax} & p_{ay} & p_{az} \\ p_{\beta x} & p_{\beta y} & p_{\beta z} \\ p_{rx} & p_{ry} & p_{rz} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (21)
 \end{aligned}$$

一方, $\triangle ABC$ には応力 σ_a , $\tau_{a\beta}$, τ_{ra} が存在し, surface traction p_{ax} , p_{ay} , p_{az} と σ_a , $\tau_{a\beta}$, τ_{ra} とは

$$\begin{array}{llll}
 & p_{ax} & p_{ay} & p_{az} \\
 \sigma_a & \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\
 \tau_{a\beta} & \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\
 \tau_{ra} & \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r)
 \end{array}$$

であるから,

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_a &= p_{ax} \cos(x, \alpha) + p_{ay} \cos(y, \alpha) + p_{az} \cos(z, \alpha) \\
 \tau_{a\beta} &= p_{ax} \cos(x, \beta) + p_{ay} \cos(y, \beta) + p_{az} \cos(z, \beta) \\
 \tau_{ra} &= p_{ax} \cos(x, r) + p_{ay} \cos(y, r) + p_{az} \cos(z, r)
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。これをマトリックスで表わせば,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{a\beta} & \tau_{ra} \\ \tau_{a\beta} & \sigma_\beta & \tau_{\beta r} \\ \tau_{ra} & \tau_{\beta r} & \sigma_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{bmatrix} [p]^T \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

となる。いま

$$\begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, \gamma) & \cos(y, \gamma) & \cos(z, \gamma) \end{bmatrix} = [L]$$

とおけば

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} & \tau_{\gamma\alpha} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta & \tau_{\beta\alpha} \\ \tau_{\gamma\alpha} & \tau_{\beta\gamma} & \sigma_\gamma \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} [L]^T$$

(23)

となる。これを式で表わせば

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2(x, \alpha) + \sigma_y \cos^2(y, \alpha) + \sigma_z \cos^2(z, \alpha) \\ &\quad + 2\tau_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + 2\tau_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\ &\quad + 2\tau_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_x \cos^2(x, \beta) + \sigma_y \cos^2(y, \beta) + \sigma_z \cos^2(z, \beta) \\ &\quad + 2\tau_{yz} \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) + 2\tau_{zx} \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) \\ &\quad + 2\tau_{xy} \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \sigma_x \cos^2(x, \gamma) + \sigma_y \cos^2(y, \gamma) + \sigma_z \cos^2(z, \gamma) \\ &\quad + 2\tau_{yz} \cos(y, \gamma) \cos(z, \gamma) + 2\tau_{zx} \cos(z, \gamma) \cos(x, \gamma) \\ &\quad + 2\tau_{xy} \cos(x, \gamma) \cos(y, \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\gamma} &= \sigma_x \cos(x, \beta) \cos(x, \gamma) + \sigma_y \cos(y, \beta) \cos(y, \gamma) \\ &\quad + \sigma_z \cos(z, \beta) \cos(z, \gamma) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \beta) \cos(z, \gamma) + \cos(y, \gamma) \cos(z, \beta) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \beta) \cos(x, \gamma) + \cos(z, \gamma) \cos(x, \beta) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \beta) \cos(y, \gamma) + \cos(x, \gamma) \cos(y, \beta) \} \end{aligned}$$

(24)

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma\alpha} &= \sigma_x \cos(x, \gamma) \cos(x, \alpha) + \sigma_y \cos(y, \gamma) \cos(y, \alpha) \\ &\quad + \sigma_z \cos(z, \gamma) \cos(z, \alpha) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \gamma) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \alpha) \cos(z, \gamma) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \gamma) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \alpha) \cos(x, \gamma) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \gamma) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \alpha) \cos(y, \gamma) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + \sigma_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) \\ &\quad + \sigma_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\ &\quad + \tau_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\ &\quad + \tau_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\ &\quad + \tau_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \} \end{aligned}$$

となる。

3-1-3 応力の不変量

(24) 式において, α , β , γ が3つの主応力と一致していたとする。しかるとき,

$$\tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\alpha} = \tau_{\alpha\beta} = 0$$

(22) 式から

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha} \cos(\alpha, x) + \tau_{\alpha\beta} \cos(\beta, x) + \tau_{\alpha\gamma} \cos(\gamma, x) \\ &= p_{\alpha x} \{ \cos^2(\alpha, x) + \cos^2(\beta, x) + \cos^2(\gamma, x) \} \\ &+ p_{\alpha y} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) + \cos(x, \gamma) \cos(y, \gamma) \} \\ &+ p_{\alpha z} \{ \cos(x, \alpha) \cos(z, \alpha) + \cos(x, \beta) \cos(z, \beta) + \cos(x, \gamma) \cos(z, \gamma) \} \\ &= p_{\alpha x} + p_{\alpha y} \cos(x, y) + p_{\alpha z} \cos(x, z) \\ &x, y, z \text{ はそれぞれ直交しているから} \end{aligned}$$

$$\cos(x, y) = \cos(x, z) = 0$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\gamma} = 0$$

であるから

$$\sigma_{\alpha} \cos(\alpha, x) = p_{\alpha x} = \sigma_x \cos(\alpha, x) + \tau_{xy} \cos(\alpha, y) + \tau_{xz} \cos(\alpha, z)$$

同様に

$$\sigma_{\alpha} \cos(y, \alpha) = p_{\alpha y} = \tau_{xy} \cos(\alpha, x) + \sigma_y \cos(\alpha, y) + \tau_{yz} \cos(\alpha, z)$$

$$\sigma_{\alpha} \cos(z, \alpha) = p_{\alpha z} = \tau_{zx} \cos(x, \alpha) + \tau_{yz} \cos(y, \alpha) + \sigma_z \cos(z, \alpha)$$

これから

$$(\sigma_x - \sigma_{\alpha}) \cos(x, \alpha) + \tau_{xy} \cos(y, \alpha) + \tau_{xz} \cos(z, \alpha) = 0$$

$$\tau_{xy} \cos(x, \alpha) + (\sigma_y - \sigma_{\alpha}) \cos(y, \alpha) + \tau_{yz} \cos(z, \alpha) = 0$$

$$\tau_{zx} \cos(x, \alpha) + \tau_{yz} \cos(y, \alpha) + (\sigma_z - \sigma_{\alpha}) \cos(z, \alpha) = 0$$

主応力 σ_{α} が存在するためには, $\cos(x, \alpha)$, $\cos(y, \alpha)$, $\cos(z, \alpha)$ が0以外の値を有しなければならない。

(何となれば

$$\cos^2(x, \alpha) + \cos^2(y, \alpha) + \cos^2(z, \alpha) = 1$$

でなければならないから。)

このためには, $\cos(x, \alpha)$, $\cos(y, \alpha)$, $\cos(z, \alpha)$ の3つの方程式の係数でもって形式される行列式は, 0とならなければならない。

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{\alpha} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\alpha} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\alpha} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

この行列式は σ_{α} の3次方程式となっているが, この3次方程式の3つの根が3つの主応力となる。即ち,

$$\begin{aligned}
& (\sigma_x - \sigma_a)(\sigma_y - \sigma_a)(\sigma_z - \sigma_a) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x - \sigma_a)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_a)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_a)\tau_{xy}^2 = 0 \\
& \sigma_a^3 - \sigma_a^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_a(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2) - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 \\
& + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = 0
\end{aligned}$$

この主応力の値は座標軸を廻転しても変わらないから、この方程式の σ_a^2 、 σ_a の係数および常数項は変化しない筈である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= -\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_y + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

は座標軸の取り方にかかわらず一定値を示す。

また、塑性理論では応力の代りに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

を用い $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ を偏差応力と名付ける。

いま、(27) 式の $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ に置き換えたものを、 J_1', J_2', J_3' とすると

$$\begin{aligned} J_1' &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0 \\ J_2' &= -\sigma'_y\sigma'_z - \sigma'_z\sigma'_x - \sigma'_x\sigma'_y + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_z - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -3\sigma^2 + 2\sigma(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_y + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\ &= -\frac{1}{3}J_1^2 + \frac{2}{3}J_1^2 + J_2 \\ &= J_2 + \frac{1}{3}J_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3' &= \sigma'_x\sigma'_y\sigma'_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma'_x\tau_{yz}^2 - \sigma'_y\tau_{zx}^2 - \sigma'_z\tau_{xy}^2 \\ &= (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \\ &\quad - (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\sigma + (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)\sigma \\ &\quad + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 - \sigma^3 \\ &= J_3 + \frac{1}{3}J_2J_1 + \frac{1}{9}J_1^3 - \frac{1}{27}J_1^3 \\ &= J_3 + \frac{1}{3}J_2J_1 + \frac{2}{27}J_1^3 \end{aligned}$$

となり、 J_1', J_2', J_3' も J_1, J_2, J_3 のみにより表わされるから、不変量になる。

$$(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^2 = 0$$

$$\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z + 2\sigma'_x\sigma'_y + 2\sigma'_y\sigma'_z + 2\sigma'_z\sigma'_x = 0$$

$$\therefore -\sigma'_y\sigma'_z - \sigma'_z\sigma'_x - \sigma'_x\sigma'_y = \frac{1}{2}(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z)$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^3 = 0 \\
& \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z + 3(\sigma'^2_x \sigma'_y + \sigma'_x \sigma'^2_y + \sigma'^2_y \sigma'_z + \sigma'_y \sigma'^2_z + \sigma'^2_z \sigma'_x + \sigma'_z \sigma'^2_x) \\
& + 6\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z = 0 \\
& \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z + 3\sigma'_x (\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) \\
& + 3\sigma'_y (\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) + 3\sigma'_z (\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) \\
& - 3\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z = 0 \\
& \sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z + 3(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)(\sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x + \sigma'_x \sigma'_y) \\
& - 3\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z = 0 \\
& \therefore \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z = \frac{1}{3}(\sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z)
\end{aligned}$$

これから,

$$\left. \begin{aligned}
J_1' &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \\
J_2' &= \frac{1}{2}(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \\
J_3' &= \frac{1}{3}(\sigma'^3_x + \sigma'^3_y + \sigma'^3_z) + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} \\
&\quad - \sigma'_x \tau_{yz}^2 - \sigma'_y \tau_{zx}^2 - \sigma'_z \tau_{xy}^2
\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(26), (28) 式にて示される不変量は等方性体の弾性理論, 塑性理論を論ずるに当って極めて重要であって, 等方性体のひずみエネルギー降伏条件などは座標軸を回転することにより変化することはあり得ないので, これらの不変量により表現されなければならない。

なお, これらの不変量を求めるに当って, 極めて抽象的な方法を用いたが (24) 式より具体的に誘導する方法もある。たとえば J_1 について述べると

$$\begin{aligned}
& \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma \\
&= \sigma_x \{ \cos^2(x, \alpha) + \cos^2(x, \beta) + \cos^2(x, \gamma) \} \\
&+ \sigma_y \{ \cos^2(y, \alpha) + \cos^2(y, \beta) + \cos^2(y, \gamma) \} \\
&+ \sigma_z \{ \cos^2(z, \alpha) + \cos^2(z, \beta) + \cos^2(z, \gamma) \} \\
&+ 2\tau_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) + \cos(y, \gamma) \cos(z, \gamma) \} \\
&+ 2\tau_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) + \cos(z, \gamma) \cos(x, \gamma) \} \\
&+ 2\tau_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) + \cos(x, \gamma) \cos(y, \gamma) \} \\
&= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + 2\tau_{yz} \cos(y, z) + 2\tau_{zx} \cos(z, x) + 2\tau_{xy} \cos(x, y) \\
&= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z
\end{aligned}$$

すなわち直交する3つの直応力の和は一定となり, J_1 は不変量であることがわかる。同様に J_2 , J_3 についても (24) 式から不変量であることは示し得るが, 誘導が複雑になるので, ここでは省略することにする。

なおこの方法では与えられた不変量が座標軸のとり方に無関係に一定であることは示し得るがどのような形のものが不変量になるか, また独立な不変量は何個あるかについては知ることはできない。

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を3つの主応力とすると

$$\sigma_1^4 + \sigma_2^4 + \sigma_3^4, \sigma_1^5 + \sigma_2^5 + \sigma_3^5, \dots\dots\dots$$

なども不変量であるが、これらはいずれも J_1, J_2, J_3 により表わされる。したがって独立な不変量も3個しかない。

3-2 ひずみ

3-2-1 ひずみの定義

連続体に力が作用して、その内部に応力が生ずると、ひずみが発生する。変形前の線素の長さを ℓ 。変形後の線素の長さを ℓ' とすると、工学的にはひずみは

$$\epsilon = \frac{\ell' - \ell_0}{\ell_0} \quad (29)$$

として定義される。

これに対し、塑性理論など変位が比較的大きい問題を扱う場合には、各応力状態におけるひずみの増分は、そのときの線素と伸びの比として定義される。すなわち

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= d\ell / \ell \\ \epsilon &= \log(\ell / \ell_0) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

これを対数ひずみという。

このようにひずみが定義されるのは、塑性理論においては塑性変形により応力の再配分が生じ、その再配分により塑性変形の生ずる割合は変わってくると考える。言い換えれば、塑性変形は応力の履歴に異ってきて、最終的な応力とひずみの間には、1対1の対応関係はなく、塑性ひずみは微小な塑性ひずみ増分の集りと考え各段階における応力と塑性ひずみ増分の関係を定義している。

このために、このような形で登場するひずみは、初めの長さに対する伸びの比率という形ではなく、各応力段階における線素の長さ ℓ と伸びの比率という形である。

しかし、工学的ひずみが充分小さく2次以上の項が無視し得るときは、

$$\log\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right) = \log\left(1 + \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right) = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right)^3 - \dots\dots\dots$$

であるから、対数ひずみと工学的ひずみとは差は生じないが、2次以上の項が無視し得なくなると差は生じて来る。

3-2-2 微小ひずみと適合条件

まず、場所による変位の差は小さく、変位 u, v, w の x, y, z についての微係数は充分小さく、2次以上の項は無視し得る場合について述べる。

変形前に x 軸に平行で、長さ dx なる線素 AB があったとする。変形後 A は x 方向に u だけ変位し、 B は $u + du$ だけ変位したとする。

しかるとき

$$\ell_0 = dx$$

$$\ell = u + du + dx - u = du + dx$$

故にこの線素のうけるひずみは、

$$\epsilon_x = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{du}{dx}$$

となる。今 u は x 座標によってのみ変化するとしたが、 y, z 座標の値によっても変化するの
が一般であるから、上式の微分式は偏微分式に書き改められ、

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同様に y 方向の線素、 z 方向の線素のうけるひずみは、

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

となる。

次に $A(x, y, z), B(x+dx, y, z)$
 $C(x, y+dy, z)$ なる 3 つの点があり、
 A 点は u, v, w , B 点は

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$C \text{ 点は } u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy, w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

だけ変位したとする。

しかるとき AB は変位後 $\frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$ だけ x 軸に対し反時計回りに回転し、

$$AC \text{ は変形後 } \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

だけ時計回りに回転する。このため変位前に直角であった $\angle CAB$ は変形後 $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ だけ
減少する。この角変化を

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

とする。同様に

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

となる。これらをまとめて、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

このうち、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ を直ひずみ、 $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ をせん断ひずみという。ここで注意すべきこ

とは (31) 式に示すようにひずみ成分は 6 個あるが、これらはいずれも 3 つの変位成分 u, v, w で表わされていることである。このことは、これら 6 個のひずみ成分は物理的には独立なものであるが、数学的には独立なものではなく、(6-3) 個の独立な関係式が成立しなければならないことを示している。

すなわち (31) 式から

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

なる関係式が成立するから、同類のものをまとめて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

また、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right\} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$$

なる関係が成立するから同類のものをまとめて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right\} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right\} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right\} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(32) 式、(33) 式を適合条件式とよぶ。

3-2-3 ひずみの変換式

x, y, z 座標の他に直交直線座標 α, β, r をとり, x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w とし, α, β, r 方向の変位を u_α, u_β, u_r とする。

$$\alpha = x \cos(x, \alpha) + y \cos(y, \alpha) + z \cos(z, \alpha)$$

$$\beta = x \cos(x, \beta) + y \cos(y, \beta) + z \cos(z, \beta)$$

$$r = x \cos(x, r) + y \cos(y, r) + z \cos(z, r)$$

$$u_\alpha = u \cos(x, \alpha) + v \cos(y, \alpha) + w \cos(z, \alpha)$$

$$u_\beta = u \cos(x, \beta) + v \cos(y, \beta) + w \cos(z, \beta)$$

$$u_r = u \cos(x, r) + v \cos(y, r) + w \cos(z, r)$$

これをマトリックスにて示せば

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_r \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [L] \{u\}$$

$$[Du_\alpha] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} & \frac{\partial u_\beta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_r}{\partial \beta} & \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} & \frac{\partial w}{\partial \beta} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}^*$$

$$[L]^T = \begin{Bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(x, \beta) & \cos(x, r) \\ \cos(y, \alpha) & \cos(y, \beta) & \cos(y, r) \\ \cos(z, \alpha) & \cos(z, \beta) & \cos(z, r) \end{Bmatrix}$$

であるから

$$(\text{註})^* \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u_\alpha\} = [L] \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u\}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \{u_\alpha\} = [L] \frac{\partial}{\partial \beta} \{u\}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \{u_\alpha\} = [L] \frac{\partial}{\partial r} \{u\}$$

$$\begin{aligned} \text{故に} \quad [Du_\alpha] &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u_\alpha\} & \frac{\partial}{\partial \beta} \{u_\alpha\} & \frac{\partial}{\partial r} \{u_\alpha\} \end{Bmatrix} \\ &= [L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u\} & \frac{\partial}{\partial \beta} \{u\} & \frac{\partial}{\partial r} \{u\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$[L]^T [L]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(x, \beta) & \cos(x, r) \\ \cos(y, \alpha) & \cos(y, \beta) & \cos(y, r) \\ \cos(z, \alpha) & \cos(z, \beta) & \cos(z, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(y, \alpha) & \cos(z, \alpha) \\ \cos(x, \beta) & \cos(y, \beta) & \cos(z, \beta) \\ \cos(x, r) & \cos(y, r) & \cos(z, r) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cos(x, y) & \cos(x, z) \\ \cos(x, y) & 1 & \cos(y, z) \\ \cos(x, z) & \cos(y, z) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [E]$$

となるから $[L]$ は直交マトリックスであり

$$[L]^{-1} = [L]^T \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。

さて

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(z, \alpha)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{u\} = \frac{\partial}{\partial x} \{u\} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} \{u\} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \{u\} \cos(z, \alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) \\ \cos(y, \alpha) \\ \cos(z, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \{u\} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \{u\} \quad \frac{\partial}{\partial r} \{u\} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x, \alpha) & \cos(x, \beta) & \cos(x, r) \\ \cos(y, \alpha) & \cos(y, \beta) & \cos(y, r) \\ \cos(z, \alpha) & \cos(z, \beta) & \cos(z, r) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [L]^T = [Du_x] [L]^T$$

$$\therefore (Du_\alpha) = (L)(Du_x)(L)^T$$

さて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2\varepsilon_\alpha & \gamma_{\alpha\beta} & \gamma_{\alpha r} \\ \gamma_{\alpha\beta} & 2\varepsilon_\beta & \gamma_{\beta r} \\ \gamma_{r\alpha} & \gamma_{\beta r} & 2\varepsilon_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} & 2\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} & \frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} & 2\frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} & \frac{\partial u_\beta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_r}{\partial \beta} & \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} & \frac{\partial u_r}{\partial \beta} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} & \frac{\partial u_\beta}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (Du_\alpha) + (Du_\alpha)^T \\ &= (L)(Du_x)(L)^T + ((L)(Du_x)(L)^T)^T \\ &= (L)(Du_x)(L)^T + (L)(Du_x)^T(L)^T \\ &= (L)((Du_x) + (Du_x)^T)(L)^T \end{aligned}$$

さて、同様に

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & 2\varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & 2\varepsilon_z \end{pmatrix} = (Du_x) + (Du_x)^T$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_\alpha & \gamma_{\alpha\beta} & \gamma_{r\alpha} \\ \gamma_{\alpha\beta} & 2\varepsilon_\beta & \gamma_{\beta r} \\ \gamma_{r\alpha} & \gamma_{\beta r} & 2\varepsilon_r \end{pmatrix} = (L) \begin{pmatrix} 2\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & 2\varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & 2\varepsilon_z \end{pmatrix} (L)^T \quad (35)$$

すなわち、(23)式と比較すると

$\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \dots, \tau_{\alpha\beta}$ を $2\varepsilon_\alpha, 2\varepsilon_\beta, \dots, \gamma_{\alpha\beta}$ に, $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ を $2\varepsilon_x, 2\varepsilon_y,$

$\dots, \gamma_{xy}$ に置き換えれば、全く同型の変換式が得られる。

これを式で示せば

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_x \cos^2(x, \alpha) + \varepsilon_y \cos^2(y, \alpha) + \varepsilon_z \cos^2(z, \alpha) \\ &\quad + \gamma_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \gamma_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\ &\quad + \gamma_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\beta &= \varepsilon_x \cos^2(x, \beta) + \varepsilon_y \cos^2(y, \beta) + \varepsilon_z \cos^2(z, \beta) \\
&\quad + \gamma_{yz} \cos(y, \beta) \cos(z, \beta) + \gamma_{zx} \cos(z, \beta) \cos(x, \beta) \\
&\quad + \gamma_{xy} \cos(x, \beta) \cos(y, \beta) \\
\varepsilon_r &= \varepsilon_x \cos^2(x, r) + \varepsilon_y \cos^2(y, r) + \varepsilon_z \cos^2(z, r) \\
&\quad + \gamma_{yz} \cos(y, r) \cos(z, r) + \gamma_{zx} \cos(z, r) \cos(x, r) \\
&\quad + \gamma_{xy} \cos(x, r) \cos(y, r) \\
\gamma_{\beta r} &= 2\varepsilon_x \cos(x, \beta) \cos(x, r) + 2\varepsilon_y \cos(y, \beta) \cos(y, r) \\
&\quad + 2\varepsilon_z \cos(z, \beta) \cos(z, r) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, \beta) \cos(z, r) + \cos(y, r) \cos(z, \beta) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, \beta) \cos(x, r) + \cos(z, r) \cos(x, \beta) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, \beta) \cos(y, r) + \cos(x, r) \cos(y, \beta) \} \\
\gamma_{r\alpha} &= 2\varepsilon_x \cos(x, r) \cos(x, \alpha) + 2\varepsilon_y \cos(y, r) \cos(y, \alpha) \\
&\quad + 2\varepsilon_z \cos(z, r) \cos(z, \alpha) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, r) \cos(z, \alpha) + \cos(y, \alpha) \cos(z, r) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, r) \cos(x, \alpha) + \cos(z, \alpha) \cos(x, r) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, r) \cos(y, \alpha) + \cos(x, \alpha) \cos(y, r) \} \\
r \quad \gamma_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon_x \cos(x, \alpha) \cos(x, \beta) + 2\varepsilon_y \cos(y, \alpha) \cos(y, \beta) \\
&\quad + 2\varepsilon_z \cos(z, \alpha) \cos(z, \beta) \\
&\quad + \gamma_{yz} \{ \cos(y, \alpha) \cos(z, \beta) + \cos(y, \beta) \cos(z, \alpha) \} \\
&\quad + \gamma_{zx} \{ \cos(z, \alpha) \cos(x, \beta) + \cos(z, \beta) \cos(x, \alpha) \} \\
&\quad + \gamma_{xy} \{ \cos(x, \alpha) \cos(y, \beta) + \cos(x, \beta) \cos(y, \alpha) \}
\end{aligned} \tag{36}$$

以上ひずみの変換式をマトリックス演算により誘導した。この誘導は、マトリックス演算になれない人にとっては抽象的で理解し難いものであったと考えられる。しかし、有限要素法に慣れるためには、マトリックス演算になれる必要があり、敢て試みた。(36) 式は、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\
&= \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \cos(x, \alpha) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \cos(y, \alpha) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \cos(z, \alpha) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \{ u \cos(x, \alpha) + v \cos(y, \alpha) + w \cos(z, \alpha) \} \cos(x, \alpha) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \{ u \cos(x, \alpha) + v \cos(y, \alpha) + w \cos(z, \alpha) \} \cos(y, \alpha) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \{ u \cos(x, \alpha) + v \cos(y, \alpha) + w \cos(z, \alpha) \} \cos(z, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, \alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, \alpha) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, \alpha) \\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(y, \alpha) \cos(x, \alpha) \\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) \\
&= \varepsilon_x \cos^2(x, \alpha) + \varepsilon_y \cos^2(y, \alpha) + \varepsilon_z \cos^2(z, \alpha) \\
&\quad + \gamma_{yz} \cos(y, \alpha) \cos(z, \alpha) + \gamma_{zx} \cos(z, \alpha) \cos(x, \alpha) \\
&\quad + \gamma_{xy} \cos(x, \alpha) \cos(y, \alpha)
\end{aligned}$$

として誘導する方法もある。この方法の方が理解し易いと考えられる。

3-2-4 ひずみの不変量

応力の場合と同様に ε_α , ε_β , ε_γ を主ひずみとすると、これに対する方程式として (25) 式と同様に、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_\alpha & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_\alpha & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad (37)$$

が成立し、これから

$$\left. \begin{aligned} &\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ &-\varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 \\ &\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

はひずみの不変量となる。

3-2-5 有限ひずみ

前項まではひずみは充分小さく、2次以上の項は無視し得るとしたが、この仮定が設けられないときについて述べる。

変形前に (x, y, z) にあった点が、変形後に $(x+u, y+v, z+w)$ に移動したとする。また変形前に (x, y, z) にあった線素 ds が変形後に ds_1 になったとする。いま変形前のこの線素の方向余弦を ℓ, m, n とし、変形後の方向余弦を ℓ_1, m_1, n_1 とすると、

$$\begin{aligned} \ell &= dx/ds, & m &= dy/ds, & n &= dz/ds \\ \ell_1 &= \frac{d(x+u)}{ds_1}, & m_1 &= \frac{d(y+v)}{ds_1}, & n_1 &= \frac{d(z+w)}{ds_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \frac{d(x+u)}{ds} \frac{ds}{ds_1} \\
&= \frac{ds}{ds_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x+u) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} (x+u) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} (x+u) \frac{dz}{ds} \right\} \\
&= \frac{ds}{ds_1} \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right\}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{ds}{ds_1} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \ell + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right\} \\
n_1 &= \frac{ds}{ds_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \ell + \frac{\partial w}{\partial y} m + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + 1\right) n \right\}
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\
&= \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \left[\left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \ell^2 \right. \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} m^2 \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} n^2 \\
&\quad + 2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \ell m \\
&\quad + 2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial y} \right\} m n \\
&\quad \left. + 2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} n \ell \right]
\end{aligned}$$

いま

$$\left. \begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} \\
\epsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\
\epsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\
\epsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (39)$$

とおくと,

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = (1+2\epsilon_{xx})\ell^2 + (1+2\epsilon_{yy})m^2 + (1+2\epsilon_{zz})n^2 + 2mn\epsilon_{yz} + 2n\ell\epsilon_{zx} + 2\ell m\epsilon_{xy} \quad (40)$$

いま, 直ひずみを, 工学的ひずみの定義にしたがって, $ds_1/ds-1$ と定義すると, $\ell=1$, $m=0$, $n=0$ のときの (40) 式から求められる。

したがって,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \sqrt{1+2\epsilon_{xx}} - 1 \\ \epsilon_y &= \sqrt{1+2\epsilon_{yy}} - 1 \\ \epsilon_z &= \sqrt{1+2\epsilon_{zz}} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

次にせん断ひずみについて考察する。図-6において,

$$\overline{A'B'} = \sqrt{1+2\epsilon_{xx}} dx \quad \overline{A'C'} = \sqrt{1+2\epsilon_{yy}} dy$$

いま

$$\angle C'A'B' = \varphi_{xy}$$

とすると, 余弦定理から

$$\begin{aligned} \overline{B'C'}^2 &= \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C'}^2 - 2\overline{A'B'}\overline{A'C'}\cos\varphi_{xy} \\ &= (1+2\epsilon_{xx})(dx)^2 + (1+2\epsilon_{yy})(dy)^2 - 2\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})}\cos\varphi_{xy}dxdy \end{aligned}$$

一方 (39) 式において

$$\overline{BC} = ds, \quad \ell = -dx/ds, \quad m = dy/ds, \quad n = 0$$

とすると,

$$\overline{B'C'}^2 = (1+2\epsilon_{xx})(dx)^2 + (1+2\epsilon_{yy})(dy)^2 - 2\epsilon_{xy}dxdy$$

$$\therefore \cos\varphi_{xy} = \frac{\epsilon_{xy}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})}}$$

これをせん断ひずみと定義すると,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\epsilon_{yz}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{yy})(1+2\epsilon_{zz})}} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\epsilon_{zx}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{zz})(1+2\epsilon_{xx})}} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\epsilon_{xy}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy})}} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

となる。

ここで (41) 式, (42) 式に定義されたひずみは変位, u, v, w の x, y, z に関する

る微係数が充分小さく、2 次以上の項を無視し得るときは、これらのひずみは (31) 式で定義されたひずみと一致する。

3-3 連続体の運動方程式

3-3-1 微小体の平衡

連続体の一部に辺長が dx , dy , dz なる微小体を取り出し、これにより応力の平衡関係を求める。

- ABFE には x 方向に $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$
- DCGH には x 方向に $-\sigma_x$
- DAEH には x 方向に $-\tau_{xy}$
- CBFH には x 方向に $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$
- ABCD には x 方向に $-\tau_{zx}$
- EFGH には x 方向に $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$

が作用する。

この他に単位容積当り ρX なる容積力が働くとするとき x 方向に平衡関係が成立するためには、

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_x dy dz + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dz dx - \tau_{xy} dz dx \\ & + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho X dx dy dz = 0 \\ \therefore & (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X) dx dy dz = 0 \\ \therefore & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0 \end{aligned}$$

同様に y 方向, z 方向にも平衡状態にあるとすれば、応力の平衡条件式として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

が得られる。この方程式は弾性体、塑性体、粘弾性体を問わず、平衡状態にある連続体内にある応力に対し、常に成立する。

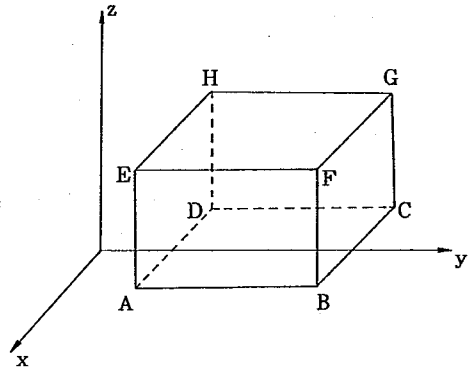


図 - 7

3-3-2 Greenの積分定理

前項において、連続体内の応力の平衡を微小体の平衡から求めた。

この方法の他に、surface traction の表面積分にGreen の定理を適用することによって求める方法がある。

後者の方法は連続体の仮想仕事の原理、最小仕事の原理を誘導するに当って極めて有効であるので、Greenの積分定理について説明する。

図-8に示すように、閉じた閉曲面Sの上でxの値は異なるが、y, zの値は同一である点A, Bをとる。A, B点での曲面Sの法線をそれぞれ n_A , n_B とし、A, B点を中心とし、yz平面への投影が、辺長がdy, dzの矩形となる面素をそれぞれCDEF, GHIJとする。

いま、曲面Sおよびこれに囲まれる部分で、その座標により異なる値をとる関数Pがあったとする。

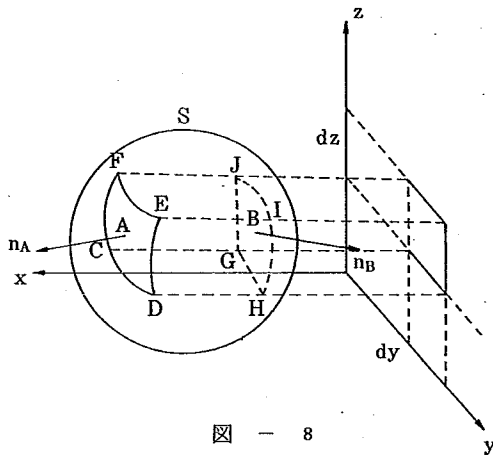


図 - 8

$$\begin{aligned} ds_{CDEF} \cos(x, n_A) &= dydz, \quad ds_{GHIJ} \cos(x, n_B) = -dydz \\ \therefore P_A \cos(x, n_A) ds_{CDEF} + P_B \cos(x, n_B) ds_{GHIJ} \\ &= (P_A - P_B) dydz = \left\{ \int_B^A \frac{\partial P}{\partial x} dx \right\} dydz \\ \therefore \iint_S P \cos(x, n) ds &= \iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \end{aligned}$$

これを一般的に書き表わせば

$$\begin{aligned} \iint_S [P \cos(x, n) + Q \cos(y, n) + R \cos(z, n)] ds \\ = \iiint \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (44)$$

これをGreenの積分定理という。

3-3-3 Greenの積分定理による運動方程式の誘導

いま連続体内に任意の閉曲面Sをとる。この曲面の法線を n とし、曲面上のsurface tractionを p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} とする。このとき、この閉曲面Sに囲まれた部分の運動方程式は、

$$\iint_S p_{nx} ds + \iiint \rho X dx dy dz = \iiint \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy dz$$

$$\iint_S p_{ny} ds + \iiint \rho Y dx dy dz = \iiint \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dy dz$$

$$\iint_S p_{nz} ds + \iiint \rho Z dx dy dz = \iiint \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy dz$$

にて表わされる。さて surface traction p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} は (20) 式にて与えられるから Green の定理により変形すると,

$$\begin{aligned} \iint_S p_{nx} ds &= \iint_S [\sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{zx} \cos(z, n)] ds \\ &= \iiint \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz \end{aligned}$$

となるから,

$$\iiint \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx dy dz = 0$$

$$\iiint \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] dx dy dz = 0$$

$$\iiint \left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dx dy dz = 0$$

が得られる。この式は連続体内にとった任意の閉曲面内に対して成立しなければならないから,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

が得られ、これが連続体の運動方程式である。

3-3-4 連続体の平衡方程式、運動方程式の解析上の問題点

連続体の平衡方程式および運動方程式が、それぞれ (43) 式 (45) 式で示されることを述べた。これらの方程式は、前にも述べたように、弾性体、塑性体、粘弾性体、流体を問わず、連続体内において成り立つ式である。

したがって (43) 式を解けば、平衡状態にある連続体内の応力分布を求めることができるし、(45) 式を解けば連続体内の運動状態と応力分布を求めることができる。

さて (43) 式、(45) 式を詳細に観察してみると、(43) 式は方程式の数が 3 個であるのに対し、未知関数は σ_x , σ_y , ..., τ_{xy} の 6 個であり、(45) 式は方程式が 3 個であるのに対し、未知関数は σ_x , σ_y , ..., τ_{xy} ; u , v , w の 9 個である。これから (43) 式は方程式の数よりも未知関数の数は 3 個多くっており、(45) 式は方程式の数よりも未知関数の数は 6 個多くになっている。

微分方程式の場合でも、多元連立方程式の場合と同様に方程式の数と未知数の数とは一

致していない限り解き得ない。

したがって、(43)式、(45)式は、解きうる形になっていないといえることができる。

これらの方程式を解きうるようにするには、(43)式においては6個の未知関数の相互関係を関係づける別の3個の条件式を与えるか、あるいは6個の未知関数を3個の未知関数で表現するような別の条件を与える必要があり、(45)式においては、9個の未知関数の相互関係を関係づける別の6個の条件式を与えるか、9個の未知関数を3個の未知関数で表現するような別の条件を与える必要がある。

ここで注目すべきことは、3-2-2の(31)式および(32)、(33)式に示したように、6個のひずみ成分は3個の変位成分により表わすことができ、また、6個のひずみ成分の相互関係を関係づける3組の独立した条件式が存在することである。

今までのところ、6個の応力成分と6個のひずみ成分との関係は何ら与えていない。したがって(31)、(32)、(33)式は(43)式、(45)式に対し別の条件式を与えたり、あるいは未知関数の数を減少させる働きをしていないで、全く別個のものとなっている。しかし、応力成分とひずみ成分の間に何らかの関係を与えれば、(43)式、あるいは(45)式を(31)、(32)、(33)式と組合せるようにすることが可能となる。すなわち、(43)式の場合には、応力 σ_x 、 σ_y 、…… τ_{xy} を u 、 v 、 w で表わし、3個の未知関数に対する3個の方程式という形にすることも可能であるし、また(32)、(33)式を応力の制約条件という形に直して、6個の未知数に対する6個の方程式という形にすることも可能である。また、(45)式の場合には、応力 σ_x 、 σ_y 、…… τ_{xy} を u 、 v 、 w で表わし、3個の未知関数に対する3個の方程式の形にすることができる。

以上から、(43)式(45)式は、そのままでは、解き得ない形をしているが、応力とひずみの関係を与えれば、(31)(32)(33)式の、いずれかと組合せることにより、解きうる形に直すことができる。

この応力とひずみの関係の与え方によって別個の力学体系が成立することになり、

- 1) 応力とひずみとが最も簡単に比例関係にあるとすれば、弾性理論が成立し、
- 2) 応力に降伏条件という制約条件が存在し、この制約条件を満足しながらしか応力の変化は生じないとして、応力増分とひずみ増分の関係を与えたのが塑性理論であり、
- 3) 偏差直応力 σ'_x 、 σ'_y 、 σ'_z は存在せず

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma = 0 \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma = 0 \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma = 0$$

で速度勾配に比例するせん断応力が存在するとすれば、粘性流体力学が成立する。これらの詳細な誘導については、各々の場所で説明する。

4. 変 分 原 理

4-1 質点の力学における仮想仕事の原理

質点が平衡状態にあるとき、この質点に作用する力を X , Y , Z とすると、

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad (46)$$

となる。さて、この質点に任意の仮想変位 δx , δy , δz を与えたとしても、(46) 式から当然

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad (47)$$

が成立する。これを仮想仕事の原理という。

いま X , Y , Z を x , y , z 方向の成分とする力のベクトルを $\mathbf{F}$ とし、 δx , δy , δz を x , y , z 方向の成分とする微小変位のベクトルを $\delta \mathbf{N}$ とすると (47) 式は、

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{N} = 0 \quad (48)$$

と表わされる。これは、 $\mathbf{F}$ が微小変位 $\delta \mathbf{N}$ により行う仕事であるから (46), (47) 式で表わされる。仮想仕事の原理は「質点が平衡にあるときは、これに任意の微小な仮想の変位を与えたときになされる仕事は 0 である」と表現される。

さて、(47) 式が任意の仮想変位に対して成り立つとすると、

$$\delta x \neq 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

のときも成立しなければならないから

$$X = 0$$

となる。同様に、

$$Y = 0, \quad Z = 0$$

とならなければならない。すなわち、(47) 式が任意の仮想変位に対して成立するときは (47) 式と (46) 式とは全く同等のものとなる。

このように、質点になんら制約がなく空間を自由に動き得るときは、(46) 式の平衡方程式と (47) 式または (48) 式の仮想仕事の原理とはまったく同一のものとなり、(46) 式を解くことと、(47) 式を解くこととの間には相違はないことになる。しかし、仮想変位になんらかの制約が加えられるときは、両者の間に相違が生じてくる。すなわち、質点に拘束があって、 $\mathbf{F}$ の中に未知の拘束力 $\mathbf{R}$ が働くときは、滑らかな拘束では拘束力は、質点が拘束された面または線に垂直に働くからこの拘束力 $\mathbf{R}$ と、面または線に沿った任意の仮想の変位 $\delta \mathbf{N}$ とは直交するから、力に垂直な変位を与えても、仕事は 0 であるので、

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{N} = 0$$

$$\therefore (\mathbf{F} - \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{N} = 0$$

となる。いま $\mathbf{R}$ の x , y , z 方向の成分を X' , Y' , Z' とすると、

$$(X - X')\delta x + (Y - Y')\delta y + (Z - Z')\delta z = 0$$

となり、質点に作用する力から拘束力を除いた外力に対しても (47) 式は成立することになり、

(47) 式の X, Y, Z を外力の x, y, z 方向成分と解釈すると、この X, Y, Z については、最早 (46) 式は成立せず、

$$X \neq 0, \quad Y \neq 0, \quad Z \neq 0$$

となっているので、(46) 式の平衡方程式と (47) 式の仮想仕事の原理とは異った意味を持つようになる。

1 例として、曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上になめらかに拘束された場合について述べる。この質点は、この曲面上に摩擦力なしに拘束されているとする。このとき拘束力はこの曲面 $f(x, y, z) = 0$ に垂直である。いま、この質点に作用する拘束力を含まない外力の x, y, z 方向成分を X, Y, Z とすると、

$$X \neq 0, \quad Y \neq 0, \quad Z \neq 0$$

であるが、この質点に許し得る仮想変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ は曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上になければならない。したがって、前述したように (47) 式が成立しなければならないから

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

一方、仮想変位を与えた後も、この質点は曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上になければならないから、

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

が成立しなければならない。これを Taylor 展開すると

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots \right\} + \dots = 0$$

となり $\delta x, \delta y, \delta z$ は充分小さく 2 次以上の項は無視し得るとすると、

$$f(x, y, z) = 0$$

であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (49)$$

が得られる。これは $\delta x, \delta y, \delta z$ に対する制約条件である。

(47), (49) 式から、

$$\left(X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda \right) \delta x + \left(Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda \right) \delta y + \left(Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda \right) \delta z = 0 \quad (50)$$

が得られる。いま

$$Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda = 0$$

となるように λ を定めると、

$$\left(X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda \right) \delta x + \left(Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda \right) \delta y = 0 \quad (51)$$

となる。ここに、仮想変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ は、(49) 式を満足する範囲において、自由に選べるから

$$\delta x = 0, \quad \delta z = -\left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta y \quad (52)$$

なる変位は (49) 式の制約条件を満足した仮想変位である。このような仮想変位に対しても、

(51) 式は成立しなければならないから、

$$\left(Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda\right) \delta y = 0$$

となる。これから δy は (52) 式を満足する範囲において自由に選べるから任意の δy に対して、上式が成立するためには

$$Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda = 0$$

が成立しなければならない。

同様に、 $\delta x \neq 0, \delta y = 0, \delta z = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta x$ なる仮想変位は制約条件 (50) 式を満足するから

$$X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda = 0$$

も成立しなければならない。以上から、

$$X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda = 0, \quad Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda = 0, \quad Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda = 0 \quad (53)$$

を同時に満足するような λ が存在することになる。この λ を Lagrange の不足乗数という。

(53) 式の第 2 項は拘束力を示し、拘束力の x, y, z 方向成分は、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ に比例していることを示している。これは、拘束力が曲面 $f(x, y, z) = 0$ の法線方向余弦に比例していることを示しており、これから拘束力は拘束曲面に垂直に作用していることを示しているといえる。

次に曲線上に拘束されている場合について述べよう。一般に、曲線は二つの曲面の交線として表わされるから、曲線の方程式は 2 つの曲面の方程式

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

を同時に満足するものとして与えられる。したがって質点が曲線上に拘束されているときに質点に許し得る仮想変位に対する制約条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となる。質点に作用する拘束力をのぞいた外力を、 X, Y, Z とすると、

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

が成立しなければならないから、上式と (54) 式とから、

$$\left(X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial g}{\partial x} \mu\right) \delta x + \left(Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda + \frac{\partial g}{\partial y} \mu\right) \delta y + \left(Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda + \frac{\partial g}{\partial z} \mu\right) \delta z = 0 \quad (55)$$

が成立する。さて、

$$Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda + \frac{\partial g}{\partial y} \mu = 0, \quad Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda + \frac{\partial g}{\partial z} \mu = 0 \quad (56)$$

を満足するように λ, μ を定めたとする。そのとき (55) 式から

$$\left(X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial g}{\partial x} \mu\right) \delta x = 0 \quad (57)$$

が成立しなければならない。さて、仮想変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ は (55) 式を満足する範囲内において、任意にとり得るが、3 箇の仮想変位成分に対し、(54) 式に示される制約条件は 2 箇であるので、仮想変位は自由度を有し、

$$\delta y = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}} \delta x$$

$$\delta z = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}} \delta x$$

なる関係式が成立している範囲内において、 δx は任意にとり得るから、このような δx に対し (57) 式が常に成立し得るためには、

$$X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial g}{\partial x} \mu = 0$$

が成立しなければならない。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} X + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial g}{\partial x} \mu &= 0 \\ Y + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda + \frac{\partial g}{\partial y} \mu &= 0 \\ Z + \frac{\partial f}{\partial z} \lambda + \frac{\partial g}{\partial z} \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

が同時に成立するような λ, μ が存在することになる。

以上、変分変数 $\delta x, \delta y, \delta z$ が 3 つ存在するとき、制約条件が 1 個または 2 個存在する場合に Lagrange の不定乗数法の適用方法について述べてきた。次に制約条件が 3 個ある場合について考察してみる。

すなわち、制約条件が

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

として与えられていたとする。これを同時に満足するものとしては、一般には三つの曲線の交わる点となり、質点が点に拘束されているときは、仮想変位を与えることができないので、仮想仕事の原理を適用することはできないことになる。

これを数学的に表現すれば、仮想変位 δx , δy , δz に対する制約条件は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \delta y + \frac{\partial h}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

として与えられる。このことは、

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad (60)$$

でないかぎり、仮想変位、 δx , δy , δz は 0 でなければならないことになる。また (60) 式が成立するときは 3 つの曲面のうち 2 つが質点付近で接しているが、3 つの曲面により作られる 3 つの曲線が質点付近で接していて、仮想変位を微小にとるときは、曲線上に拘束され、拘束条件が 2 つしかないときと同じ場合である。したがって、「変分原理を適用する場合に拘束条件の数は変分変数の数より少なくなければならない」ことになる。

4-2 質点系の力学における仮想仕事の原理

n 個の質点の座標を $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ とする。平衡方程式は、

$$X_i = 0, Y_i = 0, Z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (61)$$

質点の力学の場合と同様に、仮想仕事の原理は

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \quad (62)$$

として表わされる。

次に、拘束条件が存在する場合について考察しよう。質点系の場合に、拘束として物理的には質点が曲面または曲線の上にあるとか、2 個の質点を質量のない棒で結びつけるとか、種々な拘束が考えられ、このような拘束条件を物理的に実現するためには、拘束力を加えればよいことは、容易に推論されるが複雑な質点系に対して、この力がいかに定まるかを、一般に論ずることは困難である。そこで、質点の力学の場合から類推して「各質点の拘束条件を破らない任意の微小変位に対して拘束力のなす仕事は 0 である」と仮定する。これをなめらかな拘束に対する仮定とする。

この仮定について、個々の実例について成り立つことを示すことは容易であるが一般論的に示すことは極めて困難であるので、ここでは仮定として先に進めることにする。

しかるときは、 X_i, Y_i, Z_i を質点 i に働く拘束力を除いた外力の x, y, z 方向成分とすれば、

$$X_i \neq 0, \quad Y_i \neq 0, \quad Z_i \neq 0$$

となるが、(62) 式はそのまま成立することになる。

さて、拘束条件は

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h < 3n) \quad (63)$$

にて示されるとすると、仮想の微小変位に対する条件は

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h) \quad (64)$$

(62) 式と (64) 式とから

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(X_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu \right) \delta x_i + \left(Y_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu \right) \delta y_i + \left(Z_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu \right) \delta z_i \right] = 0$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} X_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu &= 0 \\ Y_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu &= 0 \\ Z_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

この第 2 項は各質点に対する拘束力を示している。

4-3 質点系の運動と Hamilton の原理

質点系の平衡方程式は (65) 式で表わされることは前節で示した。これから質点系の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + \sum_{\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

にて表わされる。なお、拘束条件は

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h < 3n) \quad (63)$$

にて与えられるものとする。

いま真の解 x_i, y_i, z_i は (66) 式と (63) 式を満足し, $x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i$ は (63) 式は満足し, (66) 式は満足していない解であるとする。

しかるとき

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h < 3n)$$

が成立する。さて (66) 式を変形して

$$X_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0$$

$$Y_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0$$

$$Z_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0$$

とすれば, D' Alembert の原理から, 静力学における平衡方程式と同等のものとなる。

そこで, $t = t_0$ および t_1 で

$$\delta x_i = 0, \quad \delta y_i = 0, \quad \delta z_i = 0$$

として, 質点系の力学における仮想仕事の原理と同様に,

(平衡方程式) $\times$ (仮想変位)

の形で仮想仕事を作り, $t = t_0$ から t_1 までの間になされる仮想仕事を集計すると

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_i \left\{ \left(X_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i \right. \right. \\ \left. \left. + \left(Y_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i \right. \right. \\ \left. \left. + \left(Z_i + \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

が成立し, これが静力学における仮想仕事の原理に対応するものになる。さて,

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \lambda_\nu \delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \lambda_\nu \delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \lambda_\nu \delta z_i \right) \\ = \sum_\nu \lambda_\nu \sum_i \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \delta z_i \right) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i dt \\ = \left| m_i \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dt} (\delta x_i) dt \\ = \left| m_i \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta \left\{ \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right\} dt \end{aligned}$$

であるが, $t = t_0, t_1$ で $\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0$ としたので

$$\int_{t_0}^{t_1} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \delta \left\{ \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right\} dt$$

となるから (67) 式は

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i + \frac{1}{2} m_i \delta \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\} \right] dt = 0 \quad (68)$$

と書き改められる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) &= \delta W \\ \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\} \right] &= T \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

とおくと、 δW は外力のなす仮想仕事であり、 T は運動のエネルギーである。このような表示を用いれば、(68) 式は

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt = 0 \quad (70)$$

と表わされる。これが Hamilton の原理である。

この Hamilton の原理をもう一度見直すと、運動方程式 (66) 式には、 x_i, y_i, z_i なる $3n$ 個の未知関数の外に、 λ_ν なる h 個の未知乗数が含まれているのに反し、方程式の数は $3n$ 個与えられているのみである。したがって、運動方程式 (66) 式のみでは解を得ることができない。これに対し、拘束条件として (63) 式を h 個与えることにより、未知数の数と方程式の数とが一致して解を求められるようになる。このとき、Hamilton の原理は (66), (63) 式を満足する真の解に対し、微小量異り、(63) 式を満足し、(66) 式を満足しない解を与え、真の解の持つ特性を明らかにしたものを見なすことができる。

4-4 連続体における仮想仕事の原理

連続体においては、平衡条件式として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

の形で表わされ、ひずみと変位との関係として、

$$\left.
\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
\right\} \quad (31)$$

の形で示されることは前章に述べた。

さて、(43)式は質点の力学の平衡方程式(46)と全く同等なものであるから、これにそれぞれの方向の仮想変位を乗じ、加え合せ仮想仕事を求めれば(47)式に対応するものとして、

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X \right) \delta u \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y \right) \delta v \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \right) \delta w \right] dx dy dz = 0
\end{aligned}$$

が得られる。これを變形して

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) \right. \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) \\
& \quad + \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) - \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) - \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) \\
& \quad - \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) - \tau_{xy} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \right\} - \tau_{yz} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \right\} \\
& \quad \left. - \tau_{zx} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right\} \right] dx dy dz = 0
\end{aligned}$$

これにGreenの積分定理を適用すると、

$$\begin{aligned}
& \iint [(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) \cos(x, n) \\
& \quad + (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) \cos(y, n) \\
& \quad + (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) \cos(z, n)] ds \\
& \quad + \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \\
& \quad - \iiint [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \\
& \quad + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint \{ \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{zx} \cos(z, n) \} \delta u \\
& + \{ \tau_{xy} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n) \} \delta v \\
& + \{ \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{yx} \cos(y, n) + \sigma_x \cos(z, n) \} \delta w \} ds \\
& + \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \\
& - \iiint [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz = 0 \\
& \iint [p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w] ds + \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \\
& - \iiint [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz = 0 \quad (71)
\end{aligned}$$

いま,

$$\begin{aligned}
\delta_e W &= \iint (p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w) ds \\
&+ \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \\
\delta_e U &= \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz
\end{aligned}$$

とおくと、 $\delta_e W$ は仮想変位により外力のなす仕事であり、 $\delta_e U$ は仮想変位により、連続体内に蓄積されるひずみエネルギーの変化であり、(71)式は、

$$\delta_e W = \delta_e U \quad (72)$$

となる。すなわち、「仮想変位により、外力のなす事は、仮想変位により連続体内に蓄積されるひずみエネルギーの変化に等しい」と言われ、Hamiltonの原理とともに熱力学第1法則の1形態とみることが出来る。

この連続体の仮想仕事の原理をもう一度見直すと、(43)式の平衡方程式は、3個の方程式の中に6個の未知数 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ が含まれている。このために3個の制約条件が必要となる。一方、(43)式は6個のひずみ成分が3個の変位成分により表わし得ることを示しているの、3個の制約条件を与えることができる。すなわち、質点系の力学における仮想仕事の原理と対比するならば、(43)式は(61)式に相当し、(31)式は(63)式に相当するものと考えることができる。

とすれば、

$$\begin{aligned}
\delta \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), & \delta \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta v), & \delta \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \\
\delta \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v), & \delta \gamma_{zx} &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \\
\delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u)
\end{aligned}$$

は、(64)式に相当した、仮想ひずみ成分に対する制約条件と見なすことができる。

これを見方を変えて表現すれば真の解 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}; u, v, w$ は平衡方程式(43)式と制約条件(31)式を満足し、これに微少量異った解 $\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \dots, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}; u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$ は制約条件(31)式を満足し、平衡条件式(43)式を満足しない解と考

え、真の解の持つ特性を明らかにしたものであるということができる。

以上、質点の力学、質点系の力学の仮想仕事の原理、Hamilton の原理、連続体の力学における仮想仕事の原理について述べて来た。

これらに共通している方法論的な特徴は、

- 1) 平衡方程式、または運動方程式と制約条件式を満足する真の解に対し、微小量異った解を考え、これが制約条件式を満足し、平衡方程式または運動方程式を満足しない解と考え、
- 2) この際仮想の解と真の解との差として生ずる仮想変位と力の積により仮想の仕事を求める
と、
- 3) 仮想仕事は真の解付近で停留値をとることを示す
という手順に示される。

これに対し、

- a) 仮想の解を、平衡方程式または運動方程式を満足し、制約条件を満足しない解として取扱う変分原理はないか
- b) 変分変数として仮想変位以外に仮想の力、あるいは仮想の応力をとることが考えられないか

などが疑問点として生じて来る。

これらの疑問点に対して、数学的にも物理的にもこれらの方法は可能であると答えることができる。また、この代表的な例が、次に述べる連続体における最小仕事の原理である。

4-5 連続体における最小仕事の原理

いま、 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}; \epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy}; u, v, w$ は平衡方程式および制約条件としての適合条件式を満足する真の解とし、

$$\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \dots, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$$

$$\epsilon_x + \delta\epsilon_x, \epsilon_y + \delta\epsilon_y, \dots, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy}$$

$$u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$$

は、平衡方程式を満足し、適合条件式を満足しない解であるとする。しかるとき平衡方程式から

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \delta\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx}) + \rho X = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \delta\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz}) + \rho Y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z + \delta\sigma_z) + \rho Z = 0$$

これと (43) 式の平衡方程式と差引くと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{zx}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

が成立する。これを仮想応力に対する平衡方程式として,

$$(\text{仮想仕事}) = (\text{仮想の力}) \times (\text{変位})$$

の形で仮想仕事を作ると,

$$\begin{aligned} \iiint & \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{zx}) \right\} u \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz}) \right\} v \\ & \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_z) \right\} w \right] dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

が成立することになる。これを変形すると

$$\begin{aligned} \iiint & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \delta \sigma_x \cdot u + \delta \tau_{xy} \cdot v + \delta \tau_{zx} \cdot w \right\} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \delta \tau_{xy} \cdot u + \delta \sigma_y \cdot v + \delta \tau_{yz} \cdot w \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \delta \tau_{zx} \cdot u + \delta \tau_{yz} \cdot v + \delta \sigma_z \cdot w \right\} \\ & - \delta \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \delta \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - \delta \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} - \delta \tau_{yx} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & \left. - \delta \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \delta \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

これに Green の積分定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \iint & \left[\left\{ \delta \sigma_x u + \delta \tau_{xy} \cdot v + \delta \tau_{zx} \cdot w \right\} \cos(x, n) \right. \\ & + \left\{ \delta \tau_{xy} \cdot u + \delta \sigma_y \cdot v + \delta \tau_{yz} \cdot w \right\} \cos(y, n) \\ & + \left\{ \delta \tau_{zx} \cdot u + \delta \tau_{yz} \cdot v + \delta \sigma_z \cdot w \right\} \cos(z, n) \left. \right] ds \\ & - \iiint \left[\delta \sigma_x \cdot \varepsilon_x + \delta \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \delta \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \delta \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx} + \delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \right] dx dy dz = 0 \\ \iint & \left[\left\{ \delta \sigma_x \cos(x, n) + \delta \tau_{xy} \cos(y, n) + \delta \tau_{zx} \cos(z, n) \right\} u \right. \\ & + \left\{ \delta \tau_{xy} \cos(x, n) + \delta \sigma_y \cos(y, n) + \delta \tau_{yz} \cos(z, n) \right\} v \\ & + \left\{ \delta \tau_{zx} \cos(x, n) + \delta \tau_{yz} \cos(y, n) + \delta \sigma_z \cos(z, n) \right\} w \left. \right] ds \\ & - \iiint \left[\delta \sigma_x \cdot \varepsilon_x + \delta \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \delta \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \delta \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx} + \delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \right] dx dy dz = 0 \\ \iint & \left[\delta p_{nx} \cdot u + \delta p_{ny} \cdot v + \delta p_{nz} \cdot w \right] ds \\ & - \iiint \left[\delta \sigma_x \cdot \varepsilon_x + \delta \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \delta \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \delta \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx} + \delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \right] dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる。いま、

$$\delta_o W = \iint_S [\delta p_{nx} \cdot n + \delta p_{ny} \cdot v + \delta p_{nz} \cdot w] ds$$

$$\delta_o U = \iiint_V [\delta \sigma_x \cdot \epsilon_x + \delta \sigma_y \cdot \epsilon_y + \delta \sigma_z \cdot \epsilon_z + \delta \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx} + \delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}] dx dy dz$$

とおくと、 $\delta_o W$ は仮想の外力のなす仕事であり、 $\delta_o U$ は仮想の応力により連続体内に、蓄積されるひずみエネルギーの変化であり、(75)式は、

$$\delta_o W = \delta_o U \quad (76)$$

となる。

ここに、境界条件が応力で与えられているときは

$$\delta p_{nx} = \delta p_{ny} = \delta p_{nz} = 0$$

あるいは、境界面で固定されているときは境界上で

$$u = v = w = 0$$

となり、このような場合には

$$\delta_o W = 0$$

となるから

$$\delta_o U = 0 \quad (77)$$

すなわち、「仮想の外力によりなす仕事は、仮想の応力により連続体に蓄積されるひずみエネルギーの変化に等しい。また、境界条件が応力で与えられているか、変位固定で与えられるときは、仮想の応力により、連続体に蓄積されるひずみエネルギーは、0となり、連続体内のひずみエネルギーは、真の解において停留値をとる」となる。これを最小仕事の原理という。

4-6 変分原理に対する考察

以上、質点および質点系における静力学、動力学での変分原理、連続体の静力学における変分原理について述べて来た。これらを通観して、力学に用いられる変分原理について、包括的な考察を加える。

一般に力学に用いられる変分原理は仮想の変位または応力を与え、これと外力または変位との積により仮想の仕事を作り真の解が仮想の変分量に対して持つ特性を仕事の形で表わしたもので、仮想の仕事が0となることすなわち、エネルギーが真の解において、停留値をとることを示したもののいい得る。

しかし、一般に、平衡方程式または運動方程式に含まれた未知数の数が方程式の数と一致するときは、変分原理を適用して得られる式は、平衡方程式または運動方程式と何ら異ならないが、未知数の数が方程式の数より多いときは、異った意味を持って来る。このような場合には平衡方程式または運動方程式の他に拘束条件式が必要になって来て、これらの方程式の数は未知数の数と一致しなければならない。

このような場合に、一般に解の唯一性は成り立ち、平衡方程式または運動方程式と拘束条件

式を同時に満足する唯一の真の解が存在することになる。この真の解に、微小量異った解を考えた場合に当然、解の唯一性から、この解は平衡方程式または運動方程式と拘束条件式とを同時に満足することはできない。

そこでいずれか一方を満足し、他方を満足しない解を考え、仮想の仕事を作り真の解が変分量に対して持つ特性を表現したものが、力学に用いる変分原理と言ひ得る。

変分原理をこのように見なすと、次のような分類が可能となる。

- 1) 拘束条件式を満足し、運動方程式を満足しない変分を与え、真の解の特性をとらえる方法
- 2) 運動方程式を満足し、拘束条件式を満足しない変分を与え、真の解の特性をとらえる方法

前者に属するものとしては、質点、質点系および連続体の仮想仕事の原理、Hamilton の原理があげられ、後者に属するものとしては、最小仕事の原理があげられる。

いずれの方法も、数学的にも物理的にも可能であり、後述する有限要素法でいずれを用いるかについては、厳密には、いずれも可能であるが、いずれか一方が簡単に静定化が可能となることが多く、問題によって異なる。例えば、弾性問題においては前者が簡単であり、浸透流問題、熱伝導問題においては後者のほうが簡単である。

したがって、新しい問題を解くに当たっては、両者を誘導し、いずれが簡単か見極める必要がある。

4-7 応用例 —— 熱伝導問題に対する変分原理 ——

熱伝導問題は温度勾配に比例して熱の流れが生じ、蓄積される熱に比例して温度が上昇するという仮定から出発する。

すなわち、温度を θ とし、 u, v, w を x, y, z 方向の熱流速とし、 k_x, k_y, k_z を x, y, z 方向の熱伝導係数とすると、

$$\left. \begin{aligned} u &= -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v &= -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w &= -k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

として表わされ、 ρ を密度、 c を比熱とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (79)$$

が与えられる。この方程式は浸潤面がない場合の Darcy の法則に従う浸透流の方程式と同型である。浸潤面を有する場合、および Darcy の法則に従わない浸透流については、多少複雑になるので、ここでは、熱伝導問題および浸潤面がない場合の Darcy の法則に従う浸透流問題として取扱うことにしよう。

この場合 (78) 式は運動方程式に相当し、(79) 式は拘束条件式に相当する。未知関数として、

u, v, w, θ があり、これらを結びつける関係は(78)式の方がより簡単な形で与えている。

したがって、 $u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w, \theta + \delta \theta$ は(78)式を満足し、(79)式は満足していないとする。しかるとき、

$$\frac{1}{k_x} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \theta) = 0$$

$$\frac{1}{k_y} \delta v + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \theta) = 0$$

$$\frac{1}{k_z} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \theta) = 0$$

は運動方程式の変分により得られた式であるから、仮想の力に比例すると考えると、仮想仕事は、 $t = t_0, t_1$ において $\delta \theta = \delta u = \delta v = \delta w = 0$ とすると、

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\left\{ \frac{1}{k_x} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \theta) \right\} u + \left\{ \frac{1}{k_y} \delta v + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \theta) \right\} v + \left\{ \frac{1}{k_z} \delta w + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \theta) \right\} w \right] dx dy dz = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\frac{1}{k_x} u \delta u + \frac{1}{k_y} v \delta v + \frac{1}{k_z} w \delta w + \frac{\partial}{\partial x} (u \delta \theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v \delta \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (w \delta \theta) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta \theta \right] dx dy dz = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \iiint \left[\frac{1}{k_x} u \delta u + \frac{1}{k_y} v \delta v + \frac{1}{k_z} w \delta w \right] dx dy dz \right. \\ \left. + \iint [u \cos(x, n) + v \cos(y, n) + w \cos(z, n)] \delta \theta ds \right. \\ \left. + \iiint \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta dx dy dz \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[\frac{1}{k_x} u \delta u + \frac{1}{k_y} v \delta v + \frac{1}{k_z} w \delta w \right] dx dy dz \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint [u \cos(x, n) + v \cos(y, n) + w \cos(z, n)] \delta \theta ds \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

が得られる。これが熱伝導問題に対する変分方程式である。

5. 弾 性 理 論

連続体における平衡方程式および運動方程式は(43)式および(45)式にて表わされ、これらの方程式はいずれもその中に含まれる未知関数の数は方程式の数よりも多くなっているために、それ自体としては解き得ない形になっているが、(31)式において6個のひずみ成分が3個の変位成分により表わすことが可能であることが示されているので、応力とひずみの間に何らかの関係を与えることにより、(43)式および(45)式を3個の変位成分のみを未知関数とする方程式に直すか、(43)式の他に、(31)式から導かれる3個の独立な制約条件式を与えることにより、未知関数の数と方程式の数とを一致させることが可能となることを既に3章で述べた。

この応力とひずみの関係の与え方により異った力学体系が組立てられることになるが、これらのうち最も簡単なものが、応力とひずみが比例関係にあるとするHookeの法則に基いて組立てられる弾性理論であると云うことが出来る。

5-1 等方性弾性体における応力とひずみの関係

前述したように、弾性体においては応力とひずみとは比例関係にあり、等方性体の弾性常数としては弾性係数E, Poisson比 ν , せん断弾性係数Gとが用いられ、後で説明するように

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

なる関係がある。さて、

$$\sigma_x \text{ のみが作用したとき } \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y \text{ のみが作用したとき } \quad \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad , \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \text{ のみが作用したとき } \quad \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad , \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\tau_{yz} \text{ のみが作用したとき } \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

$$\tau_{zx} \text{ のみが作用したとき } \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$$

$$\tau_{xy} \text{ のみが作用したとき } \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

となる。以上から

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\
&= \frac{1}{E} (\sigma_x (1 + \nu) - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) \\
&= \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) \\
\therefore 2G \varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)
\end{aligned}$$

となり、ひずみを応力で表わせば

$$\left. \begin{aligned}
2G \varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
2G \varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
2G \varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
G \gamma_{yz} &= \tau_{yz}, \quad G \gamma_{zx} = \tau_{zx}, \quad G \gamma_{xy} = \tau_{xy}
\end{aligned} \right\} \quad (81)$$

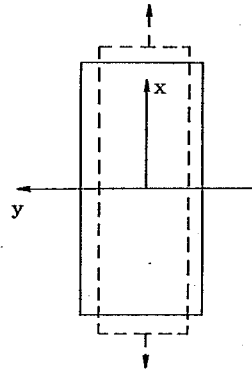


図-9

となる。これから

$$\begin{aligned}
2G (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \frac{3\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
&= \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)
\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 2G \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
&= 2G \varepsilon_x + 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
&= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right)
\end{aligned}$$

以下 σ_y, σ_z についても同様に表わされるので、

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \\
\sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \\
\sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \\
\tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}
\end{aligned} \right\} \quad (82)$$

が成立する。

5-2 一般化された Hooke の法則 — 異方性弾性体における応力とひずみの関係 —

前節において、弾性理論を理解し易くするために等方性体における Hooke の法則から出発して、ひずみと応力の関係および応力とひずみの関係について述べた。本節では数学的な基礎をより明確にするために一般化された Hooke の法則から出発して、異方性体における弾性常数、等方性体における弾性常数について論じる。

応力とひずみとは比例するという Hooke の法則を最も一般的な形で表わすと、6 個の応力成分は 6 個のひずみ成分に比例することになる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (83)$$

として表わされる。

さて、仮想仕事の原理において、((72) 式参照)

$$\delta_\epsilon W = \delta_\epsilon U$$

$$\delta_\epsilon U = \iiint \delta_\epsilon V \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) \, dx \, dy \, dz$$

$$\delta_\epsilon V = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}$$

なる関係が成立し、これが熱力学第 1 法則の 1 形態であることを示した。このような関数 V が存在するためには、 $\delta_\epsilon V$ は完全微分形でなければならない、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial V}{\partial \epsilon_z} \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

が成立していなければならない。^{*}

*〔註〕 (84) 式の証明は少々複雑であるので、ここに註として説明を加えることにする。いま

(72) 式で示す仮想仕事の原理が成立し、ひずみエネルギー関数 V が存在したとする。

$$\delta_\epsilon W = \delta_\epsilon U = \iiint \delta_\epsilon V \, dx \, dy \, dz \quad (a)$$

しかるとき、 $\delta_\epsilon V$ はひずみエネルギー関数 V のひずみによる変分であるから

$$\delta_\epsilon V = \frac{\partial V}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial V}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \frac{\partial V}{\partial \epsilon_z} \delta \epsilon_z + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \quad (b)$$

さて $\delta_\varepsilon W$ は外力のなした仕事のひずみによる変分であるから

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon W = & \iint (p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w) ds \\ & + \iiint p (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz \end{aligned} \quad (c)$$

さて, (b) 式より

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon V = & \iiint \delta_\varepsilon V dx dy dz \\ = & \iiint \left[\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right] \\ & dx dy dz \\ = & \iiint \left[\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right. \\ & + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \right\} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right\} \\ & + \left. \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right\} \right] dx dy dz \\ = & \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \delta u + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \delta v + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \delta w \right\} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \delta u + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \delta v + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \delta w \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \delta u + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \delta v + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \delta w \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) \right\} \delta u \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) \right\} \delta v \\ & - \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \right) \right\} \delta w \right] dx dy dz \\ = & \iint \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \cos(z, n) \right\} \delta u \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \cos(z, n) \right\} \delta v \\ & + \left\{ \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \cos(z, n) \right\} \delta w \right] ds \\ & - \iiint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) \right\} \delta u \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) \right\} \delta v \\ & + \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \right) \right\} \delta w \right] dx dy dz \end{aligned}$$

上式および(a), (c) 式より

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \rho X = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \rho Y = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \right) + \rho Z = 0 \\
& \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \cos(z, n) = p_{nx} \\
& \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \cos(z, n) = p_{ny} \\
& \frac{\partial V}{\partial \gamma_{zx}} \cos(x, n) + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{yz}} \cos(y, n) + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z} \cos(z, n) = p_{nz}
\end{aligned} \right\} \quad (d)$$

が成立しなければならない。(d)式と(43)式および(20)式と比較すれば明らかに(84)式が成立していなければならない。

この証明は余りにも数学的過ぎて、かえって理解し難いかもしれない。しかし(84)式はこのような数学的基礎の上に成立していることを示しておく。なおA.E.H. Loveは熱力学第二法則から出発して、運動のエネルギーを考慮して断熱変化と等温変化の場合について(84)式の証明を行っている。興味ある方は、A.E.H. Love "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" pp. 92~96 および pp 166~167 を参照されたい。

さて(83)式にもとずいてひずみエネルギー関数Vを作ると、

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[C_{11} \varepsilon_x^2 + C_{22} \varepsilon_y^2 + C_{33} \varepsilon_z^2 + C_{44} \gamma_{yz}^2 + C_{55} \gamma_{zx}^2 + C_{66} \gamma_{xy}^2 \right. \\
&\quad + (C_{12} + C_{21}) \varepsilon_x \varepsilon_y + (C_{23} + C_{32}) \varepsilon_y \varepsilon_z + (C_{13} + C_{31}) \varepsilon_x \varepsilon_z \\
&\quad + (C_{14} + C_{41}) \varepsilon_x \gamma_{yz} + (C_{15} + C_{51}) \varepsilon_x \gamma_{zx} + (C_{16} + C_{61}) \varepsilon_x \gamma_{xy} \\
&\quad + (C_{24} + C_{42}) \varepsilon_y \gamma_{yz} + (C_{25} + C_{52}) \varepsilon_y \gamma_{zx} + (C_{26} + C_{62}) \varepsilon_y \gamma_{xy} \\
&\quad + (C_{34} + C_{43}) \varepsilon_z \gamma_{yz} + (C_{35} + C_{53}) \varepsilon_z \gamma_{zx} + (C_{36} + C_{63}) \varepsilon_z \gamma_{xy} \\
&\quad \left. + (C_{45} + C_{54}) \gamma_{yz} \gamma_{zx} + (C_{46} + C_{64}) \gamma_{yz} \gamma_{xy} + (C_{56} + C_{65}) \gamma_{zx} \gamma_{xy} \right] \quad (85)
\end{aligned}$$

(85)式を(84)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11} \varepsilon_x + \frac{1}{2} (C_{12} + C_{21}) \varepsilon_y + \frac{1}{2} (C_{13} + C_{31}) \varepsilon_z + \frac{1}{2} (C_{14} + C_{41}) \gamma_{yz} \\
&\quad + \frac{1}{2} (C_{15} + C_{51}) \gamma_{zx} + \frac{1}{2} (C_{16} + C_{61}) \gamma_{xy}
\end{aligned}$$

となり、これが(83)式と一致するためには

$$C_{rs} = C_{sr}$$

とならなければならない。すなわち異方性体における応力とひずみの関係は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

となり、ひずみエネルギー関数は

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \{ & C_{11} \epsilon_x^2 + C_{22} \epsilon_y^2 + C_{33} \epsilon_z^2 + C_{44} \gamma_{yz}^2 + C_{55} \gamma_{zx}^2 + C_{66} \gamma_{xy}^2 \\ & + 2 C_{12} \epsilon_x \epsilon_y + 2 C_{23} \epsilon_y \epsilon_z + 2 C_{13} \epsilon_x \epsilon_z + 2 C_{14} \epsilon_x \gamma_{yz} + 2 C_{15} \epsilon_x \gamma_{zx} \\ & + 2 C_{16} \epsilon_x \gamma_{xy} + 2 C_{24} \epsilon_y \gamma_{yz} + 2 C_{25} \epsilon_y \gamma_{zx} + 2 C_{26} \epsilon_y \gamma_{xy} \\ & + 2 C_{34} \epsilon_z \gamma_{yz} + 2 C_{35} \epsilon_z \gamma_{zx} + 2 C_{36} \epsilon_z \gamma_{xy} + 2 C_{45} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \\ & + 2 C_{46} \gamma_{yz} \gamma_{xy} + 2 C_{56} \gamma_{zx} \gamma_{xy} \} \end{aligned} \quad (87)$$

となる。

すなわち、一般の異方性体においては弾性常数は $(6 \times 6 - 6) \times 1/2 + 6 = 21$ 個存在する。

次に直交異方性体について説明しよう。

いま、弾性体に対称性があるとすると、弾性常数の数は減少して来る。たとえば z 軸が対称軸であるとする、座標軸 z 軸の周りに 180° 廻転しても、弾性常数は変化しない筈である。廻転後の座標を x', y', z' とし、 x', y', z' 方向の変位を u', v', w' とすると、

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \quad u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w$$

$$\therefore \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} = -\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\therefore \epsilon'_x = \epsilon_x, \quad \epsilon'_y = \epsilon_y, \quad \epsilon'_z = \epsilon_z$$

$$\gamma'_{yz} = -\gamma_{yz}, \quad \gamma'_{zx} = -\gamma_{zx}, \quad \gamma'_{xy} = \gamma_{xy}$$

となる。

このような座標変換を行ってもひずみエネルギーの値は変らない。前述したように弾性常数の値も変らないとするならば、この座標変換により符号が逆になる γ_{yz}, γ_{zx} を (87) 式の中で一次の形で含む項の係数に相当する弾性常数は 0 とならなければならない。すなわち

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

直交異方性弾性体とは、その弾性的性質に対称軸が3箇あり、その3箇の対称軸が互いに直交している場合をいう。いま x , y , z 軸が弾性的性質の対称軸と一致しているとすると、座標軸を x 軸, y 軸, z 軸の周りに 180° 廻転してもその弾性常数は変らない。さきに z 軸が弾性的性質の対称軸である場合について述べたが、直交異方性体の場合には前と同様にして

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$$

が加わることになる。すなわち、直交異方性体の場合の応力とひずみの関係は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (88)$$

となり、弾性常数は9箇存在することになる。

なおひずみエネルギーは

$$V = \frac{1}{2} [C_{11} \varepsilon_x^2 + C_{22} \varepsilon_y^2 + C_{33} \varepsilon_z^2 + 2 C_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2 C_{23} \varepsilon_y \varepsilon_z + 2 C_{13} \varepsilon_x \varepsilon_z + C_{44} \gamma_{yz}^2 + C_{55} \gamma_{zx}^2 + C_{66} \gamma_{xy}^2] \quad (89)$$

となる。

最後に等方性体について述べよう。

等方性体の場合には座標軸の取り方如何に拘ず、弾性常数の値は変化しない筈である。このことはひずみエネルギーは不変量で表わされなければならないことを示している。(87)式および(89)式からひずみエネルギー関数はひずみの二次式で表わされるから

$$V = \frac{1}{2} [A (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + B \{ -(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) + \frac{1}{4} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \}]$$

の形で表わされなければならないことになり、これから

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = A$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{4} B$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{13} = A - \frac{1}{2} B$$

となる。いま、

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{13} = \lambda$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$$

とおくと、

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2\mu \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2\mu \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2\mu \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

となる。

これら λ , μ を Lamé の常数と云い上式と (82) 式と比較すると、

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (90)$$

となる。

このように等方性弾性体における弾性常数は独立なものは 2 個しか存在せず、また弾性常数としては弾性係数 E 、Poisson 比 ν の他にせん断弾性係数 G 、体積弾性係数 K 、Lamé の常数 λ , μ などが用いられているが、いずれも他の 2 箇の弾性常数により表現されなければならないことになる。これらの各種弾性常数を各系統に従って表示すれば表-1 の如くである。

表-1 弾性常数の相互関係

弾性常数 \ 系 統	(E, ν)	(G, m)	(E, G)	(G, K)	(λ , μ)
E	E	$\frac{2(m+1)}{m} G$	E	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \mu$
G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G	G	G	μ
K	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2(m+1)}{3(m-2)} G$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$	K	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$
ν	ν	$\frac{1}{m}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	$\frac{\lambda}{3(\lambda+\mu)}$
λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2G}{m-2}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$K - \frac{2}{3} G$	λ

5-3 等方性体における弾性方程式

連続体における平衡方程式は(43)式にて示されるが、(43)式は3箇の方程式の中に未知関数が6箇含まれるので、そのもの自体としては解き得る形になっていないが、(31)式においても6箇のひずみ成分が3箇の変位成分により表わされているので、何らかの形で応力とひずみの関係が与えられれば解き得る形になることは既に述べた。

そこで、最も簡単な等方性弾性体の場合について平衡方程式(43)に応力とひずみの関係を代入し、弾性方程式を誘導してみよう。

応力とひずみの関係は(82)式にて表わされ

$$\sigma_x = 2G \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_y = 2G \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_z = 2G \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

であるから、これを平衡方程式に代入すると、

$$G \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho X = 0$$

$$G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho X = 0$$

$$\therefore G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho X = 0$$

となり、同様にx y z 方向の平衡方程式からも同様の式が成立するから、これらをまとめて、

$$\left. \begin{aligned} G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho X &= 0 \\ G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho Y &= 0 \\ G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

が得られる。これが変位を未知関数とした弾性方程式である。この他に応力を未知関数とし6

筒の方程式から成る Beltrami の方程式もあるが、こゝでは省略する。

(91)式は3筒の方程式に3筒の未知関数が含まれているので解き得る形になっている。この(91)式から出発して、等方均質な弾性体の変位、ひずみ応力の持つ数学的特性について述べてみよう。

(91)式の第1式を x で偏微分し、第2式を y で偏微分し、第3式を z で偏微分し、各々を加え合せると、

$$\begin{aligned} G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0 \\ 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0 \quad (92) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。

いま、

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (93)$$

すなわち、容積力に potential が存在し、

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (94)$$

この potential が調和関数のとき、すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega = \nabla^2 \Omega = 0 \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \nabla^2 (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = 0 \quad (96) \end{aligned}$$

が得られる。すなわち直交する直ひずみの和は調和関数となる。

さて、(91)式の各式に $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ の演算子をかけることにより、

$$\begin{aligned} G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ + \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) X = 0 \end{aligned}$$

となり、第2項は(96)式から0となり、(94)式と(95)式が成立する場合は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) X = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Omega = 0$$

となり、第3項も0となり

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 u = 0$$

となる。これと同様の関係は v , w についても成立するから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 (u, v, w) = 0 \quad (97)$$

これから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}) = 0 \quad (98)$$

となり、変位、ひずみはいずれも陪調和関数となる。

また、

$$\bar{\sigma}_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

なる関係があるから、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0 \quad (99)$$

が成立し、直交する3箇の直応力の和は調和関数となる。

また、各応力成分は Hooke の法則により、ひずみ成分に比例するから、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = 0 \quad (100)$$

となり、各応力成分はいずれも陪調和関数となる。

したがって、等方性均質な弾性体の問題を解くことは、容積力に potential が存在し、その potential が調和関数である限り（重力の場合、万有引力の場合では一般にこの関係は成立している）、境界条件を満足する陪調和関数を解く問題となる。

5-4 弾性問題における従来の解析方法

電子計算機がない時代においては、数値解析は理論解析に比して多大の労力と時間を要するものであった。したがって、できるだけ理論的に進め、数値解析による部分を少なくするという配慮が払われた。

以下電子計算機が登場する以前に用いられる主要な解析方法について簡単にふれることにする。

(1) 理論解

前節に述べたように弾性問題においては変位、応力は陪調和関数で表わされるので、弾性問題を解くことは境界条件を満足する陪調和関数を解く問題となる。

一般に ψ を陪調和関数とし、 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ を調和関数とすると、

$$\psi = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 + R^2\phi_4 \quad (R^2 = x^2 + y^2 + z^2) \quad (101)$$

にて表わされる。この関係を用いて調和関数を求める問題に還元することは出来る。調和関数を求めることは陪調和関数を求めることより、数学的にはかなり容易であるが、調和関数を解くこと自体が座標面と境界面とが一致し、境界条件が比較的簡単な場合に限定されているので、今迄にもかなりの理論解は試みられて来たが、極く特殊な問題に限られていた。

(2) 直接陪調和関数の数値解析を行う方法

前述したように理論解は極く特殊な問題に限られているので、いくつかの数値解析法が試みられた。そのうちの直接陪調和関数を数値解析する方法は、原理的には当然最初に考えられる方法であるが、二重反復計算になるため、計算労力が著しく、実際に行われた例は少ない。

(3) 平板問題との相似性を利用する方法

平板の面外曲げ問題においては、面外変位 w に対して、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 w = \frac{p}{D} \quad (102)$$

なる方程式が成立している。したがって面外荷重が0で境界においてのみ曲げ荷重が作用するときは、面外変位は陪調和関数となり、Airyの応力関数と相似関係にあることになる。この関係を利用して、平板を格子構造として数値計算を行えば解析可能である。この場合には二重反復計算にはならないので、直接陪調和関数を数値計算するよりは簡単化されるが、かなり複雑な計算である。

この方法の具体例としては、Boulder Damの二次元断面の解析があげられる。

なお、Boulder Damの二次元断面の解析に当っては、この相似関係を用いた模型実験も試みられたが、実験労力に比して精度が思わしくないので、その後は行われていない。

(4) 光弾性実験

光弾性実験では主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_2)$ と主応力の方向が求められる。一方(99)式から、主応力 σ_1 と $(\sigma_1 + \sigma_2)$ は調和関数であるから、調和関数の数値計算を行うことにより解析可能となる。

調和関数の数値計算は反復計算になるが、比較的簡単なので、電子計算機が利用される以前から、かなり行われていた。

(5) 模型実験

以上述べて来た方法はいずれも等方均質体において成り立つ方法である。そのうち光弾性

実験は部分的に材料の性質が異なる場合についても適用可能であり、いくつか行われて来たが、主応力和を求める計算が極めて複雑になるので、表面応力を求める問題以外にはかなり複雑な数値計算が必要となった。

一方、実際の問題は境界面の形が複雑であったり、部分的に材料の性質が異ったりして、今迄に述べて来た方法では解析し得ない場合が多いので、多くの問題は模型実験により解析されて来た。

しかし、この方法はかなりの時間と労力を要することと、弾性問題では問題ないが、非弾性問題などにおいては、模型材料の性質に制約があって取扱えない問題がある。このため次章に述べる有限要素法の登場とともに、有限要素法による解析へとかなり部分が移行していった。

5-5 弾性問題における有限要素法の位置付け

前節にも述べたように、電子計算機が登場する以前には数値解析は多大の時間と労力を要するので、できるだけ理論的に取扱を進め、数値計算による部分を少なくするという配慮が払われていた。しかし前節に述べた各種解析方法を通観するに、理論的に取扱を進めるに従って、理論的な制約が多くなって、適用範囲が狭くなるという欠点を有するようになることがわかる。このために実際の問題では、理論解あるいは数値解析により解決されることは比較的少く、多くは光弾性実験あるいは模型実験により解決されて来た。

電子計算機の利用とともに数値解析は容易となり、電子計算機により適合した数値計算法もいくつか開発されて来た。しかし、前述したような事情から、より理論的な制約が少く、適用範囲が広く、実際問題をより広く取扱い得る方法への指向が実際面からなされた。

有限要素法は第1章にも述べたように、弾性体をいくつかの要素に分割し、各要素を面的なパネ（三次元問題では立体的なパネ）として取扱っているので、変位、応力の連続的な変化は前提とされないので精度は少々劣るが、平衡方程式、適合条件式、Hookeの法則から出発しており、(96)~(100)式を用いていないので、理論的な制約は少く、部分的に弾性的性質が異っていても、単一要素内で異っていなければさしつかえなく、適用範囲も極めて広いものである。

これを弾性理論の体系と関連させて従来の解析方法と対比して位置付けると、図-10の如くである。

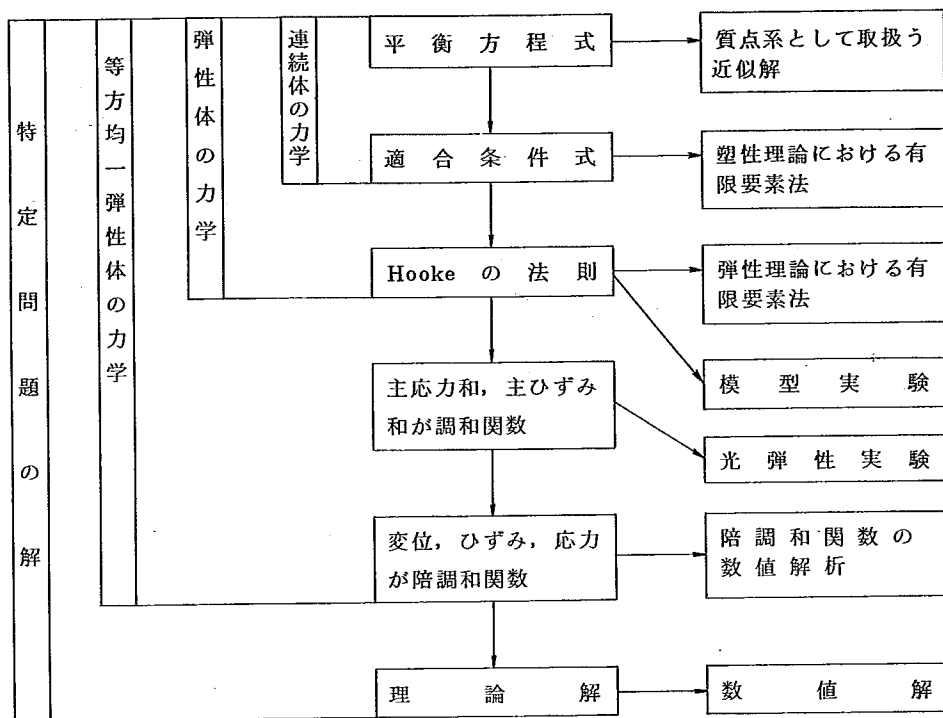


図-10 弾性体の解析方法の位置づけ

この図において、理論解の数値計算結果は、その理論解固有のものであって、他の問題には適用出来ないし、陪調和関数、調和関数の数値解析は一樣な性質を持つ弾性体にも適用し得る方法である。したがって、図-10で下の方に示されている数値解析ほど理論的制約が多く、適用範囲が狭く、上の方に示されている方法ほど理論的制約が少く、適用範囲が広い。したがって出来るだけ早く理論から離れた方が適用範囲が広いと云い得る。

電子計算機が登場して以来、幾多の新しい数値解析方法が開発されて来たが、その方向は第1章に述べたように電子計算機の特徴に適合した解析方法の開発ということだけではなく、実用面からは適用範囲のより広いものへという方向も追求されていた。云い換えれば、電子計算機の特徴を最大限に利用し、実用的な精度を満足しつつ、出来るだけ早く理論から離れ、適用範囲が広い解析方法が追求されて来たといえる。有限要素法は現在までに開発された解析方法の中で最もこのような条件に適合した方法であるといえる。

5-6 二次元応力状態

弾性問題を解くに当って、現実の問題はほとんど三次元応力状態にある。しかし、三次元問題を解くことは二次元問題を解くのに比してかなり複雑であるので、近似化して、二次元問題として取扱うことが多い。弾性問題の二次元応力状態としては平面歪の状態と平面応力の状態とあり、この両者の関係は極めて興味深いので、こゝで説明を加えることにする。

勿論、二次的な取扱は弾性問題個有の問題ではない。塑性理論においても流体力学においても広く用いられており、むしろ連続体の力学全般に広く用いられる方法である。しかし、二次元応力状態に平面歪の状態と平面応力状態と二種類あるのは弾性問題個有であって、塑性理論、流体力学など他の連続体の力学で取扱われる二次元問題は平面歪の状態のみである。

前述したように二次元応力状態としては二種類あって、

i) 平面歪の状態

これは z 方向に、応力、変位とも変化しないものが続く場合、 z 軸に垂直な断面で取り出したものである。

このような状態においては

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad w = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \sigma_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

ii) 平面応力の状態

これは板状のものに面内荷重が作用しているときに生ずる応力状態で、二次元光弾性実験や、二次元弾性模型実験で生ずる応力状態はこれに相当する。

このような状態においては

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (104)$$

が成立している。

なお、その他拡張した二次元応力状態としては

iii) 軸対称問題

がある。これは変位、応力が全く軸対称の場合に生ずるもので、円筒座標系において

$$\left. \begin{aligned} v_\theta = 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

が成立している。

これらの状態についてさらに詳しく説明を加えよう。

5-6-1 平面ひずみの状態

平面ひずみの状態においては(103)式が成立しているが、厳密には

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad w = 0$$

のみが成立していれば、他は自動的に成立する。すなわち、

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

となるから

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0$$

となる。このように平面ひずみの状態においては、応力、ひずみ、変位とも完全に z とは無関係であるから、完全な意味での二次元応力状態である。

次にこの状態における応力とひずみの関係について述べよう。

(81)式の応力とひずみの関係において

$$\epsilon_z = 0$$

であるから、

$$\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$\therefore \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

これを、 ϵ_x 、 ϵ_y の式に代入すると、

$$\begin{aligned} 2G\epsilon_x &= \sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} \{ (\sigma_x + \sigma_y) + \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \\ &= \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} 2G\epsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ 2G\epsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ G\gamma_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

これから

$$\begin{aligned} 2G(\epsilon_x + \epsilon_y) &= (\sigma_x + \sigma_y)(1 - 2\nu) \\ \sigma_x + \sigma_y &= \frac{2G}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \sigma_x &= 2G\epsilon_x + 2G\frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \sigma_x &= 2G\left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \sigma_y &= 2G\left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \sigma_y &= 2G\left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \right\} \quad (107)$$

あるいは、 $\nu = \frac{1}{m}$ としてポアソン数で表わすと、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left[\epsilon_x + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \sigma_y &= 2G\left[\epsilon_y + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left[\epsilon_x + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \\ \sigma_y &= 2G\left[\epsilon_y + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \right\} \quad (108)$$

となる。

この場合の平衡方程式は各応力成分は z と無関係であるから、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

となる。また

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y)$$

であり、(99)式から

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (1 + \nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

一方 σ_x, σ_y は z には無関係であるから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (110)$$

が成立する。さて、容積力 X, Y が 0 のときは (109) 式より

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (111)$$

なる関数 x が存在し、

$$\sigma_x + \sigma_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F$$

となり (110) 式より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 F = 0 \quad (112)$$

となる。この関数 F を Airy の応力関数という。

(106) 式から

$$\begin{aligned} 2G \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F \\ &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F \\ 2G \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F \\ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

となる。いま

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F, \quad \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

なる関係を満足する関係 S, T を撰べば、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + (1-\nu)S = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m-1}{m}S \\ 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + (1-\nu)T = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m-1}{m}T \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

として変位が求められる。

5-6-2 平面応力状態

平面応力状態においては前述したように

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

が前提とされる。このため

$$2G\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y)$$

となり、 ε_z は 0 とならない。このために w は z 方向に変化することになり、 u, v も z とは

無関係にならず、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ も z とは無関係にならなくなる。これを数学的に証明することは複雑になるので、こゝでは省略し、興味ある方は倉西“弾性学” pp.86~87を参照されたい。

このため、平面応力状態は厳密な意味では二次元応力状態になっていない。(109)式も(110)式も厳密には成立していない。

しかし、板の厚さが充分薄く、板の厚さ方向に変位、応力を平均した場合には二次元化されたものとなる。これを一般化した平面応力状態という。すなわち板の厚さを $2h$ とすると、変位、応力は

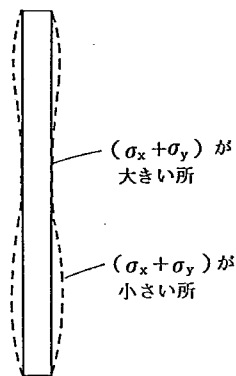


図-11

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u \, dz & \bar{v} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v \, dz \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x \, dz & \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y \, dz \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{xy} \, dz \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

と定義される。

この平面応力状態は二次元弾性実験によく用いられるので、検討を加えると、光弾性実験は偏光が模型を通過する際に生ずる主応力差に比例した位相のずれを測定しているので、一般化した平面応力状態を測定しているが、二次元弾性模型実験に表面応力を測定しているので、一般化した平面応力状態をも測定していないので、完全な意味での二次元とはなっていない。

さて(114)式のように変位、応力を定義すると平衡方程式は(43)式の形で示されるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \end{aligned}$$

これを $\int_{-h}^h dz$ で定積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^h \sigma_x \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^h \tau_{xy} \, dz + \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \, dz + \rho \int_{-h}^h X \, dz &= 0 \\ \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \, dz = [\tau_{zx}]_{-h}^h = [\tau_{xz}]_{z=h} - [\tau_{xz}]_{z=-h} &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \rho \bar{X} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \rho \bar{Y} = 0$$

が成立し、(109)式と同形の平衡方程式が成立する。

また、 $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$ も z について定積分されているので、 z には無関係な関数となっている。このため、

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}) = 0$$

となる。これから

$$\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y \quad (\because \bar{\sigma}_z = 0)$$

であるから

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) dz = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0$$

となり(110)式と同形の式が成立し、一般化された平面応力状態では、完全な二次元問題となる。

これから平面ひずみの状態と同様に、二次元の陪調和関数のAiryの応力関数が存在することになる。

次にこの場合の応力とひずみの関係について述べよう。

(81)式において

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0$$

とおくと、

$$2G\bar{\epsilon}_x = \bar{\sigma}_x - \frac{\nu}{1+\nu}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)$$

$$2G\bar{\epsilon}_y = \bar{\sigma}_y - \frac{\nu}{1+\nu}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)$$

$$2G\bar{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1+\nu}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)$$

$$G\bar{\gamma}_{xy} = \bar{\tau}_{xy}, \quad G\bar{\gamma}_{yz} = G\bar{\gamma}_{zx} = 0$$

(115)

これから

$$\begin{aligned}
 2G(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y) &= \frac{1-\nu}{1+\nu}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \\
 \bar{\sigma}_x &= 2G\frac{\nu}{\epsilon_x} + \frac{\nu}{1-\nu} 2G(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y) = 2G\left[\bar{\epsilon}_x + \frac{\nu}{1-\nu}(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y)\right] \\
 \therefore \bar{\sigma}_x &= 2G\left[\bar{\epsilon}_x + \frac{\nu}{1-\nu}(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y)\right] \\
 \bar{\sigma}_y &= 2G\left[\bar{\epsilon}_y + \frac{\nu}{1-\nu}(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y)\right] \\
 \bar{\tau}_{xy} &= G\bar{\gamma}_{xy}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{aligned}} \right\} (116)$$

あるいは

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x &= 2G\left[\bar{\epsilon}_x + \frac{1}{m-1}(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y)\right] \\
 \bar{\sigma}_y &= 2G\left[\bar{\epsilon}_y + \frac{1}{m-1}(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y)\right] \\
 \bar{\tau}_{xy} &= G\bar{\gamma}_{xy}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{aligned}} \right\} (117)$$

となる。また、一般化された平面応力の状態では平衡方程式は(109)式と同形になり、(110)式と同形の式が存在するので、(111)、(112)式と同形の式を満足する Airy の応力関数が存在することになる。これから

$$\begin{aligned}
 2G\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\
 2G\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\
 G\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
 2G\bar{u} &= -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu}S = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m}{m+1}S \\
 2G\bar{v} &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu}T = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m}{m+1}T
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 2G\bar{u} \\ 2G\bar{v} \end{aligned}} \right\} (118)$$

(108)式と(117)式、(113)式と(118)式とを比較すれば明らかなように応力とひずみの関係および変位は丁度平面ひずみの状態において m を $m+1$ に変えれば一般化された平面応力状態における応力とひずみの関係および変位が得られることになる。

5-6-3 平面ひずみの状態と一般化された平面応力状態との相違

ダムなどで、二次元的な取扱はよく行われている。しかし、厳密な意味では平面ひずみの

状態も平面応力状態も成立していない。一般には、二次元断面に垂直な方向には同じ様な状態が続くと仮定して二次元化が行われているか、あるいはそのように見做しても大差ないと前提で二次元化が行われている。このことは平面ひずみの状態を目指しての二次元化が行われているといい得る。

一方、二次元実験は前述したように一般化された平面応力状態で行われる。前項に述べたように応力とひずみの関係、変位は平面ひずみの状態と一般化された平面応力状態とは異っている。そこで平面ひずみの状態と一般化された平面応力状態とはどのような相違が生ずるかということが問題となる。

境界条件が応力で与えられるときは

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(n, y)$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(n, y)$$

さて、境界に沿っての線素を ds とすると

$$\cos(n, x) = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \cos(y, n) = -\frac{\partial x}{\partial s}$$

であるから

$$p_{nx} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad p_{ny} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (119)$$

となる。したがって(119)式で与えられる境界条件を満足し、(110)式を満足する F を求める問題となり、一般的には応力は m に無関係となる。平面ひずみの状態と平面応力状態とはポアソン数 m が 1 だけ異ったものに相当するから、 m に無関係に F が決められるということになる。しかし、変位は(113)式および(118)式により求められるから両者では当然差が生ずることになる。

しかし特殊な場合には応力分布でも相違が生ずることがある。これについて簡単に述べる。

円筒座標では

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

であるから、(110)式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 F = 0$$

となり、これを満足する Airy 関数は、

$$\begin{aligned}
F = & A_0 r^2 + B_0 \log r + D_0 r^2 \log r + K_0 r^2 \theta + H_0 \theta \\
& + A_1 r^3 \cos \theta + B_1 \frac{1}{r} \cos \theta + C_1 r \theta \sin \theta + D_1 r \log r \cos \theta + E_1 r \cos \theta \\
& + A'_1 r^3 \sin \theta + B'_1 \frac{1}{r} \sin \theta + C'_1 r \theta \cos \theta + D'_1 r \log r \sin \theta + E'_1 r \sin \theta \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{n+2} + C_n r^{-n} + D_n r^{-n+2}) \cos n\theta \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n r^n + B'_n r^{n+2} + C'_n r^{-n} + D'_n r^{-n+2}) \sin n\theta
\end{aligned}$$

という形で表わされる。

このうち、 $K_0 r^2 \theta$, $H_0 \theta$, $C_1 r \theta \sin \theta$, $C'_1 r \theta \cos \theta$ 以外の項は θ に θ を代入しても $2\pi + \theta$ を代入してもその値は変らない。したがって応力関数は多価性を持たず、応力関数は変位とは無関係に一義的に決められることになる。これが先に一般的にとして述べた場合に相当する。

一方、応力関数の中に $K_0 r^2 \theta$, $H_0 \theta$, $C_1 r \theta \sin \theta$, $C'_1 r \theta \cos \theta$ が含まれている場合には、応力関数は多価性を有することになり、変位、応力にも多価性が生ずる可能性がある。そこでこれらの項から成る応力関数に対応する応力、変位を求めてみる。

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 2K_0 \theta + 2C_1 \frac{1}{r} \cos \theta - 2C'_1 \frac{1}{r} \sin \theta \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2K_0 \theta \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = -K_0 + H_0 \frac{1}{r^2} \\
2Gu_r &= K_0 \left\{ -2r\theta + 4 \frac{m-1}{m} r\theta \right\} + C_1 \left[-\theta \sin \theta + 2 \frac{m-1}{m} \{ (\log r - 1) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + \theta \sin \theta \} \right] + C'_1 \left[-\theta \cos \theta - 2 \frac{m-1}{m} \{ (\log r - 1) \sin \theta - \theta \cos \theta \} \right] \\
2Gu_\theta &= K_0 \left\{ -r - 4 \frac{m-1}{m} r \log r \right\} + H_0 \left(-\frac{1}{r} \right) + C_1 \left[-(\sin \theta + \theta \cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{m-1}{m} \{ (1 - \log r) \sin \theta + \theta \cos \theta \} \right] + C'_1 \left[-\cos \theta + \theta \sin \theta \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{m-1}{m} \{ (1 - \log r) \cos \theta - \theta \sin \theta \} \right]
\end{aligned} \right\} (120)$$

となり、 H_0 は応力、変位とも多価性を有しないが、 C_1 , C'_1 は変位のみに、 K_0 は応力、変位に多価性を有することになる。

この他に応力関数には多価性はないが、変位に多価性を有するものがある。それは

$$F = D_0 r^2 \log r + D_1 r \log r \cos \theta + D'_1 r \log r \sin \theta$$

である。これに対応する応力は

$$\sigma_r = D_0 (2 \log r + 1) + D_1 \frac{1}{r} \cos \theta + D_1' \frac{1}{r} \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = D_0 (2 \log r + 3) + D_1 \frac{1}{r} \cos \theta + D_1' \frac{1}{r} \sin \theta$$

$$\tau_{r\theta} = D_1 \frac{1}{r} \sin \theta - D_1' \frac{1}{r} \cos \theta$$

であるが、変位は

$$2 G u_r = D_0 \left[\left(1 - \frac{2}{m}\right) 2 r \log r - r \right] + D_1 \left[-(1 + \log r) \cos \theta + 2 \frac{m-1}{m} \{ (\log r - 1) \cos \theta \right. \\ \left. + \theta \sin \theta \} \right] + D_1' \left[-(1 + \log r) \sin \theta + 2 \left(\frac{m-1}{m} \right) \{ -(1 - \log r) \sin \theta - \theta \cos \theta \} \right]$$

$$2 G u_\theta = D_0 \left(1 - \frac{1}{m}\right) 4 r \theta + D_1 \left[\log r \sin \theta + 2 \frac{m-1}{m} \{ (1 - \log r) \sin \theta + \theta \cos \theta \} \right] \\ + D_1' \left[-\log r \cos \theta + 2 \frac{m-1}{m} \{ -(1 - \log r) \cos \theta + \theta \sin \theta \} \right]$$

となり、多価性を有する。

以上をまとめると、(120)式にて表わされる応力関数のうち

i) 応力、変位とも多価性を有しないものは

$$A_0, B_0, H_0, A_1, B_1, A_1', B_1', A_n, B_n, C_n, D_n$$

$$A_n', B_n', C_n', D_n'$$

を係数とする項で、これらの項のみから応力関数になるときは応力、変位とも多価性を有せず、境界条件が応力で与えられたときは、平面ひずみの状態と一般化した平面応力状態と応力分布は全く相違が現れないことになる。

ii) 応力、変位とも多価性を有するものは

$$K_0$$

を係数とする項で、この項を応力関数の中を含むときは、応力、変位とも多価性を有することになる。応力に多価性があるときには、弾性体が原点の周りに $\theta = 0 \sim 2\pi$ まで全領域にあると、解の唯一性が成り立たなくなるか、応力的に不連続性が生ずる面が現れることになる。このようなことはあり得ないので、この項が応力関数の中に現れるのは楔の頂点に座標原点をおいたときなどに限られ、原点の周りに $\theta = \alpha \rightarrow \beta$ ($\beta < \alpha + 2\pi$) の範囲内に弾性体が存在する場合しかない。

iii) 変位のみが多価性を有するものは

$$D_0, C_1, C_1', D_1, D_1'$$

を係数とする項で、この項を応力関数の中を含むときは、応力には多価性が生じないが、変位には多価性が生ずることになる。

その代表的な例は図-12に示す円環の端未荷重による曲げの問題である。この場合に

は応力関数の中に D_1 を係数とする項が含まれている。このために変位に多価性が出て DC と $D'C'$ とで喰違い (Dislocation) が生ずる。

図-12 の場合には DC で円環は切れているので、Dislocation が生じて問題ないが、切れていないときで、この種の項を含んだ応力関数を用いなければならないときは、この dislocation を消すために、別の多価性をもった項 (図-12 の場合でいえば、 D_0 、 C_1 、 C'_1 、 D'_1 を係数とする項) を加えなければならなくなる。これは不静定構造物において、支点での変形が応力に影響を与えるのと同様に、Dislocation の量すなわち、変形量に対応した応力が発生することになる。

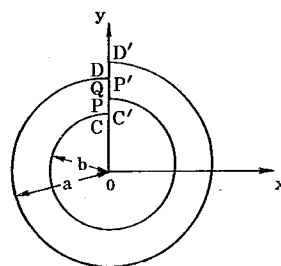


図-12

このような場合には、境界条件が応力で与えられていても応力分布は変形量により変わって来るため、平面ひずみの状態と一般化された平面応力状態と応力分布に相違が生ずることになる。

では、この種の項が応力関数に現れるのはどのような場合か。結論を述べると、二次元断面内に二箇以上の孔を有する場合と、一箇以上の孔があつて、その孔に外力が作用する場合である。

この種の問題は多重結合の問題と云われ、また多価性の問題は Dislocation の問題と云われ有名である。

以上は理論的に云えることであつて、実際には多重結合の問題でも、平面ひずみの状態と一般化された平面応力状態との差はポアソン数で 4 と 5 の差でポアソン比で云えば 0.25 と 0.2 の差にすぎず、その差はそれ程著しいものではない。

また、境界条件が変位で与えられるときは当然応力分布に相違は生じて来る。

6. 有限要素法の弾性問題への適用(1)

有限要素法を弾性問題に適用する方法として Clough の応力をパターンにとる方法と Zienkiewicz の変位をパターンにとる方法とある。両者は三節点法の場合には、最終的には同じになるが、多節点法の場合には多少の相違が生じて来る、現在では変位をパターンにとる方法では、体系化されているが、多節点法の場合には応力をパターンにとる方法も興味ある示唆を与えてくれる。

また、一般には三節点法が多く用いられているが最近精度も向上することから、多節点法特に isoparametric element method が注目されている。

そこで、ここでは先ず最も理解し易い変位をパターンとした三節点法について詳しく説明し、次いで応力をパターンとした三節点法について簡単にふれ、多節点法について論ずることとする。

6-1 等方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックス

いま、等方性弾性体を図-13 に示すようにいくつかの三角形要素に分割し、その1つを三角形要素 $i j k$ であったとする。なお、各三角形要素は単一の要素内では均一な弾性的性質を持つものとするが、他の要素とは異った弾性的性質は持ってもさしつかえないとする。

三角形要素 $i j k$ は各頂点に節点 i, j, k を持ち、それぞれの座標を (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) とする。

また、この要素内の変位分布を

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

と仮定する。

これをマトリックスで表わすと

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \{u\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \{\alpha\}$$

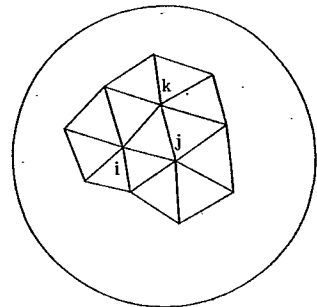


図-13

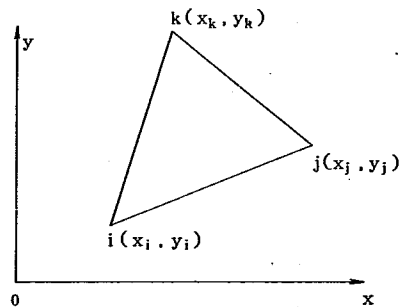


図-14

と書き表わされる。これから、 i, j, k 点の変位は

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (122)$$

$$= [A] \{ \alpha \}$$

と書き表わされる。ここで $[A]$ は 6 行 6 列の正方マトリックスであるから、逆マトリックスを求めることが出来る。これから要素内の変位分布を仮定する際に導入された未定常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ は節点変位 $u_i, v_i, u_j, \dots, v_k$ により表わすことが出来るすなわち

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ U \}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_i - y_k, & b_j &= y_k - y_i, & b_k &= y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j, & c_j &= x_i - x_k, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = a_i + a_j + a_k$$

となる。

これから

$$\{u\} = [B] [A]^{-1} \{U\}$$

となる。これからひずみを求めると、(121) 式から

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5$$

であるから、

$$\{ \epsilon \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{ \alpha \}$$

$$= [C] \{a\} = [C] [A]^{-1} \{U\} \quad (124)$$

また、平面ひずみの状態では、

$$\begin{aligned} \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= [D] \{\epsilon\} \\ &= [D] [C] [A]^{-1} \{U\} \end{aligned} \quad (125)$$

となる。(124)式(125)式に示すひずみ、応力は、要素内の変位分布を(121)式の形で仮定したときのひずみ、応力分布を節点変位で示したものである。三節点法では要素内の変位分布を x, y の一次式で仮定しているので、要素内のひずみ分布、応力分布は一様分布となっている。

この応力と静的に平衡を保つ節点力を $S_{xi}, S_{yi}, S_{xj}, S_{yj}, S_{xk}, S_{yk}$ とし、これらの節点力で構成される列マトリックスを $\{S\}$ とし、この $\{S\}$ を変分原理を用いて求めてみる。

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{xi} \\ S_{yi} \\ S_{xj} \\ S_{yj} \\ S_{xk} \\ S_{yk} \end{Bmatrix}$$

さて、仮定した変位分布に対応したひずみ分布を求める過程において、すでに変位とひずみの関係を用いており、ここで求める $\{S\}$ は応力分布に静的に平衡を保つ節点力であるから、ここで用いる変分原理は適合条件式を満足し、平衡条件式を満足しない変分を用い、平衡条件式を満足する真の解の特性を明らかにする仮想仕事の原理である。

いま、仮想の節点変位を $\{\bar{U}\}$ とし、これに対応した仮想のひずみを $\{\bar{\epsilon}\}$ とすると、仮想仕事の原理は $\delta_e W = \delta_e U$ より

$$\{\bar{U}\}^T \{S\} = \iint \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dx dy$$

と表わされる。これに(124)(125)式を代入すると

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\}^T \{S\} &= \iint \{\bar{U}\}^T ([A]^{-1})^T [C]^T [D]^T [C] [A]^{-1} \{U\} dx dy \\ [A]^{-1}, [C], [D], \{U\} &\text{には } x, y \text{ は含まれていない, そして} \end{aligned}$$

$$\iint dx dy = \Delta$$

であるから

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\}^T \{S\} &= \Delta \{\bar{U}\}^T ([A]^{-1})^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} \{U\} \\ \therefore \{S\} &= \Delta ([A]^{-1})^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} \{U\} \end{aligned}$$

いま

$$\{S\} = [K] \{U\} \quad (126)$$

とおくと、

$$[K] = \Delta ([A]^{-1})^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} \quad (127 a)$$

となる。

なお念のため $[K]$ の内容を求めておくと

$$\begin{aligned} [K] &= \Delta ([C] [A]^{-1})^T [D] [C] [A]^{-1} \\ [C] [A]^{-1} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \\ \therefore [K] &= \frac{E}{8\Delta(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1-\nu) & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{E}{8\Delta(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 2b_i(1-\nu) & 2b_i\nu & c_i(1-2\nu) \\ 2c_i\nu & 2c_i(1-\nu) & b_i(1-2\nu) \\ 2b_j(1-\nu) & 2b_j\nu & c_j(1-2\nu) \\ 2c_j\nu & 2c_j(1-\nu) & b_j(1-2\nu) \\ 2b_k(1-\nu) & 2b_k\nu & c_k(1-2\nu) \\ 2c_k\nu & 2c_k(1-\nu) & b_k(1-2\nu) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上から

$$[K] = \frac{E}{8\Delta(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{array}{l} b_i c_i \\ 2(1-\nu)c_i^2 + (1-2\nu)b_i^2 \\ 2b_j c_i \nu + b_i c_j(1-2\nu) \\ 2c_i c_j(1-\nu) + b_i b_j(1-2\nu) \\ 2b_k c_i \nu + b_i c_k(1-2\nu) \\ 2c_i c_k(1-\nu) + b_i b_k(1-2\nu) \\ 2b_i b_k(1-\nu) + c_i c_k(1-2\nu) \\ 2b_k c_i \nu + b_i c_k(1-2\nu) \\ 2b_j b_k(1-\nu) + c_j c_k(1-2\nu) \\ 2b_k c_j \nu + b_j c_k(1-2\nu) \\ 2b_k^2(1-\nu) + c_k^2(1-2\nu) \\ b_k c_k \end{array} \left[\begin{array}{l} 2b_i^2(1-\nu) + c_i^2(1-2\nu) \\ b_i c_i \\ 2b_i b_j(1-\nu) + c_i c_j(1-2\nu) \\ 2b_i c_j \nu + b_j c_i(1-2\nu) \\ 2b_i b_k(1-\nu) + c_k c_i(1-2\nu) \\ 2b_i c_k \nu + b_k c_i(1-2\nu) \\ 2b_j b_j(1-\nu) + c_j c_j(1-2\nu) \\ 2b_j c_j \nu + b_j c_j(1-2\nu) \\ 2b_j b_k(1-\nu) + c_j c_k(1-2\nu) \\ 2b_j c_k \nu + b_k c_j(1-2\nu) \\ 2b_i c_k \nu + b_k c_i(1-2\nu) \\ 2c_i c_k(1-\nu) + b_i b_k(1-2\nu) \\ 2b_j c_k \nu + b_k c_j(1-2\nu) \\ 2c_j c_k(1-\nu) + b_j b_k(1-2\nu) \\ b_k c_k \\ 2c_k^2(1-\nu) + b_k^2(1-2\nu) \end{array} \right] \begin{array}{l} 2b_i c_j \nu + b_j c_i(1-2\nu) \\ 2c_i c_j(1-\nu) + b_i b_j(1-2\nu) \\ b_j b_j \\ 2c_j^2(1-\nu) + (1-2\nu) \\ 2b_k c_j \nu + b_j c_k(1-2\nu) \\ 2c_j c_k(1-\nu) + b_j b_k(1-2\nu) \end{array} \quad (127 b)$$

となり対象マトリックスとなる。

ここで $a_i, b_i, c_i, \dots$ を $x_i, y_i, \dots$ で表わすと

$$[K] = \frac{E}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \{ x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) \} \\ \times \left[\begin{array}{l} 2(y_j - y_k)^2(1-\nu) + (1-2\nu)(x_j - x_k)^2 \\ - (x_j - x_k)(y_j - y_k) \\ 2(1-\nu)(y_j - y_k)(y_k - y_i) + (1-2\nu)(x_j - x_k)(x_k - x_i) \\ - 2\nu(x_k - x_i)(y_j - y_k) - (1-2\nu)(x_j - x_k)(y_k - y_i) \\ 2(1-\nu)(y_j - y_k)(y_i - y_j) + (1-2\nu)(x_j - x_k)(x_i - x_j) \\ - 2\nu(x_i - x_j)(y_j - y_k) - (1-2\nu)(x_j - x_k)(y_i - y_j) \\ - (x_j - x_k)(y_j - y_k) \\ 2(1-\nu)(x_j - x_k) + (1-2\nu)(y_j - y_k)^2 \\ - 2\nu(x_j - x_k)(y_k - y_i) - (1-2\nu)(x_k - x_i)(y_j - y_k) \\ 2(1-\nu)(x_j - x_k)(x_k - x_i) + (1-2\nu)(y_j - y_k)(y_k - y_i) \\ - 2\nu(x_j - x_k)(y_i - y_j) - (1-2\nu)(x_i - x_j)(y_j - y_k) \\ 2(1-\nu)(x_i - x_j)(x_j - x_k) + (1-2\nu)(y_i - y_j)(y_j - y_k) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
& 2(1-\nu)(y_j - y_k)(y_k - y_i) + (1-2\nu)(x_j - x_k)(x_k - x_i) \\
& - 2\nu(x_j - x_k)(y_k - y_i) - (1-2\nu)(x_k - x_i)(y_j - y_k) \\
& 2(1-\nu)(y_k - y_i)^2 + (1-2\nu)(x_k - x_i)^2 \\
& - (x_k - x_i)(y_k - y_i) \\
& 2(1-\nu)(y_k - y_i)(y_i - y_j) + (1-2\nu)(x_k - x_i)(x_i - x_j) \\
& - 2\nu(x_i - x_j)(y_k - y_i) - (1-2\nu)(x_k - x_i)(y_i - y_j) \\
& - 2\nu(x_k - x_i)(y_j - y_k) - (1-2\nu)(x_j - x_k)(y_k - y_i) \\
& 2(1-\nu)(x_j - x_k)(x_k - x_i) + (1-2\nu)(y_j - y_k)(y_k - y_i) \\
& - (x_k - x_i)(y_k - y_i) \\
& 2(1-\nu)(x_k - x_i)^2 + (1-2\nu)(y_k - y_i)^2 \\
& - 2\nu(x_k - x_i)(y_i - y_j) - (1-2\nu)(x_i - x_j)(y_k - y_i) \\
& 2(1-\nu)(x_k - x_i)(x_i - x_j) + (1-2\nu)(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& 2(1-\nu)(y_j - y_k)(y_i - y_j) + (1-2\nu)(x_j - x_k)(x_i - x_j) \\
& - 2\nu(x_j - x_k)(y_i - y_j) - (1-2\nu)(x_i - x_j)(y_j - y_k) \\
& 2(1-\nu)(y_k - y_i)(y_i - y_j) + (1-2\nu)(x_k - x_i)(x_i - x_j) \\
& - 2\nu(x_k - x_i)(y_i - y_j) - (1-2\nu)(x_i - x_j)(y_k - y_i) \\
& 2(1-\nu)(y_i - y_j)^2 + (1-2\nu)(x_i - x_j)^2 \\
& - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\
& - 2\nu(x_j - x_j)(y_j - y_k) - (1-2\nu)(x_j - x_k)(y_i - y_k) \\
& 2(1-\nu)(x_i - x_j)(x_j - x_k) + (1-2\nu)(y_j - y_k)(y_i - y_j) \\
& - 2\nu(x_i - x_j)(y_k - y_i) - (1-2\nu)(x_k - x_i)(y_i - y_j) \\
& 2(1-\nu)(x_k - x_i)(x_i - x_j) + (1-2\nu)(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\
& 2(1-\nu)(x_i - x_j)^2 + (1-2\nu)(y_i - y_j)^2
\end{aligned}$$

(127 c)

となる。

このマトリックスを剛性マトリックス (Stiffness Matrix) と云い、節点力と節点変位とを関係付けるマトリックスである。

6-2 節点力の物理的意味

前項において等方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックスを求めた。その際、節点力なる新しい概念が持ち込まれ、節点力は要素内に仮定された応力分布に静的に平衡を保ち節点に作用する力であるとして、変分原理を用いて求められた。

しかし、この誘導は抽象的であるので、この節点力がどのような物理的な意味を持つのか、また何故剛性マトリックスを求めるに際して変分原理を用いたかが疑問となる。

要素内に仮定した応力分布に静的に平衡を保つ節点力の、力学的意味を述べると、図-15に示すように、要素内に仮定した応力分布と同じ応力から構成される surface traction を辺 ij , jk , ki に作用させることによりこの要素を平衡状態に保たれる、この surface traction を分布荷重として、 ij , jk , ki を単純梁としたときの支点反力と各節点ごとに平衡を保つ力は要素内に仮定した応力分布に静的に平衡する力であると考えることが出来る。これが節点力で、このような考えに立って節点力を求めてみる。

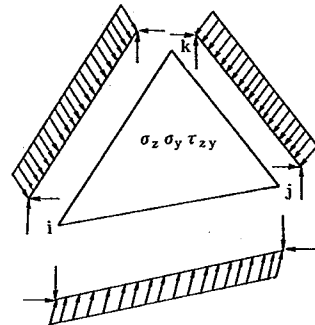


図-15

まず、辺 ij について検討する。辺 ij の方程式は

$$y = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} (x - x_i) + y_i$$

いま、辺 ij の element の外側に立てた法線を n とすると、

$$\cos(x, n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos(y, n) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

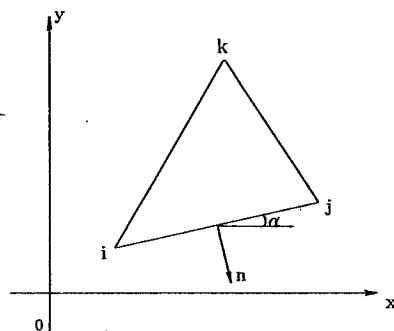


図-16

$$\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

$$\therefore \cos(x, n) = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}, \quad \cos(y, n) = \frac{-(x_j - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

いま、要素内に応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} が存在していて、これと平衡を保つために辺 ij に作用する surface traction p_{nx} , p_{ny} は、

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) = \frac{(y_j - y_i) \sigma_x - (x_j - x_i) \tau_{xy}}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) = \frac{(y_j - y_i) \tau_{xy} - (x_j - x_i) \sigma_y}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

いま、辺 ij を単純梁と考え、これらの surface traction が分布荷重として作用したときの ij 点の支点反力を S_{x1}^{ij} , S_{y1}^{ij} , S_{xj}^{ij} , S_{yj}^{ij} とする。x 方向の平衡から

$$S_{x1}^{ij} + S_{xj}^{ij} + \int p_{nx} d\ell = 0$$

y 方向の平衡から

$$S_{yi}^{ij} + S_{yj}^{ij} + \int p_{ny} d\ell = 0$$

j 点の周りの廻転に対する平衡から

$$S_{xi}^{ij} (y_j - y_i) - S_{yi}^{ij} (x_j - x_i) + \int p_{nx} (y_j - y) d\ell - \int p_{ny} (x_j - x) d\ell = 0$$

i 点の周りの廻転に対する平衡から

$$-S_{xj}^{ij} (y_j - y_i) + S_{yj}^{ij} (x_j - x_i) - \int p_{nx} (y - y_i) d\ell + \int p_{ny} (x - x_i) d\ell = 0$$

が成立する

ここで,

$$d\ell = \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{x_j - x_i} dx = \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{y_j - y_i} dy$$

であるから, σ_x , σ_y , τ_{xy} を一定値とすると

$$\begin{cases} S_{xi}^{ij} + S_{xj}^{ij} = -(y_j - y_i) \sigma_x + (x_j - x_i) \tau_{xy} \\ S_{yi}^{ij} + S_{yj}^{ij} = -(y_j - y_i) \tau_{xy} + (x_j - x_i) \sigma_y \\ S_{xi}^{ij} (y_j - y_i) - S_{yi}^{ij} (x_j - x_i) = -\frac{1}{2} [(y_j - y_i)^2 \sigma_x - 2(x_j - x_i)(y_j - y_i) \tau_{xy} + (x_j - x_i)^2 \sigma_y] \\ -S_{xj}^{ij} (y_j - y_i) + S_{yj}^{ij} (x_j - x_i) = \frac{1}{2} [(y_j - y_i)^2 \sigma_x - 2(x_j - x_i)(y_j - y_i) \tau_{xy} + (x_j - x_i)^2 \sigma_y] \end{cases}$$

が成立することになる。これから

$$\begin{cases} S_{xi}^{ij} = S_{xj}^{ij} = -\frac{1}{2} (y_j - y_i) \sigma_x + \frac{1}{2} (x_j - x_i) \tau_{xy} \\ S_{yi}^{ij} = S_{yj}^{ij} = -\frac{1}{2} (y_j - y_i) \tau_{xy} + \frac{1}{2} (x_j - x_i) \sigma_y \end{cases}$$

が得られる。同様に辺 jk , ki に対し, 同様な計算を行えば,

$$\begin{cases} S_{xj}^{jk} = S_{xk}^{jk} = -\frac{1}{2} (y_k - y_j) \sigma_x + \frac{1}{2} (x_k - x_j) \tau_{xy} \\ S_{yj}^{jk} = S_{yk}^{jk} = -\frac{1}{2} (y_k - y_j) \tau_{xy} + \frac{1}{2} (x_k - x_j) \sigma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{xi}^{ki} = S_{xi}^{ki} = -\frac{1}{2} (y_i - y_k) \sigma_x + \frac{1}{2} (x_i - x_k) \tau_{xy} \\ S_{yi}^{ki} = S_{yi}^{ki} = -\frac{1}{2} (y_i - y_k) \tau_{xy} + \frac{1}{2} (x_i - x_k) \sigma_y \end{cases}$$

が得られる。これら各辺の反力と各節点毎に平衡を保つ力が節点力であるとして,

$$\begin{aligned} S_{xi} &= -S_{xi}^{ij} - S_{xi}^{ki} = +\frac{1}{2} (y_j - y_k) \sigma_x - \frac{1}{2} (x_j - x_k) \tau_{xy} \\ S_{yi} &= -S_{yi}^{ij} - S_{yi}^{ki} = +\frac{1}{2} (y_j - y_k) \tau_{xy} - \frac{1}{2} (x_j - x_k) \sigma_y \\ S_{xj} &= -S_{xj}^{ij} - S_{xj}^{jk} = +\frac{1}{2} (y_k - y_i) \sigma_x - \frac{1}{2} (x_k - x_i) \tau_{xy} \\ S_{yj} &= -S_{yj}^{ij} - S_{yj}^{jk} = +\frac{1}{2} (y_k - y_i) \tau_{xy} - \frac{1}{2} (x_k - x_i) \sigma_y \\ S_{xk} &= -S_{xk}^{jk} - S_{xk}^{ki} = +\frac{1}{2} (y_i - y_j) \sigma_x - \frac{1}{2} (x_i - x_j) \tau_{xy} \\ S_{yk} &= -S_{yk}^{jk} - S_{yk}^{ki} = +\frac{1}{2} (y_i - y_j) \tau_{xy} - \frac{1}{2} (x_i - x_j) \sigma_y \end{aligned}$$

が得られる。これをマトリックスで表わすと(123)式で用いた $a_i, b_i, c_i, \dots$ を用いて

書き改めると,

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{xi} \\ S_{yi} \\ S_{xj} \\ S_{yj} \\ S_{xk} \\ S_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (y_j - y_k) & 0 & -(x_j - x_k) \\ 0 & -(x_j - x_k) & (y_i - y_k) \\ (y_k - y_i) & 0 & -(x_k - x_i) \\ 0 & -(x_k - x_i) & (y_k - y_i) \\ (y_i - y_j) & 0 & -(x_i - x_j) \\ 0 & -(x_i - x_j) & (y_i - y_j) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \{\sigma\}$$

ここで (110 b) 式の誘導で現れた

$$[C] [A]^{-1} = \frac{1}{2 \Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

なる関係を用いれば

$$\{S\} = \Delta ([C] [A]^{-1})^T \{\sigma\}$$

これに (107) 式を代入すれば

$$\{S\} = \Delta ([C] [A]^{-1})^T [D] [C] [A]^{-1} \{U\}$$

が得られ (127 a) 式と全く同一となる。

以上の誘導から、節点力の持つ物理的な意味がより具体的な形で理解し得たと考えられるが、この誘導が (127 a) 式の誘導が極めて複雑であることから、剛性マトリックスの誘導に当って、一般に変分原理が用いられる理由も明らかになったと考えられる。

6-3 異方性弾性体における三角形要素の剛性マトリックス

前々項において等方性弾性体における剛性マトリックスを求めた。

本項においては異方性弾性体における剛性マトリックスを求めてみよう。これは異方性弾性体の剛性マトリックスは単に異方性弾性体の問題を解く場合に用いられるだけでなく、塑性問題を解くときなどにも用いられ、極めて利用範囲が広いからである。

さて前節において、一般化された Hooke の法則は (83) 式で示されることを示した。これを二次元の場合について示すと

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (128)$$

また、熱力学第一法則と第二法則が成立している限り、ひずみエネルギー関数が存在し、

$$\sigma_x = \frac{\partial V}{\partial \epsilon_x} \quad \sigma_y = \frac{\partial V}{\partial \epsilon_y} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial V}{\partial \gamma_{xy}}$$

なる関係があることも Love により証明されており、この場合には

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (129)$$

なる関係があることも前節に述べた。

しかし、参考のため(128)式から出発して、剛性マトリックスを求めてみよう。この場合には、

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

(127 a) 式より

$$\begin{aligned} [K] &= \Delta ([C] [A]^{-1})^T [D] [C] [A]^{-1} \\ &= \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} C_{33} (x_j - x_k)^2 - (c_{13} + c_{31}) (x_j - x_k) (y_j - y_k) + c_{11} (y_j - y_k)^2 \\ C_{23} (x_j - x_k)^2 - (c_{21} + c_{33}) (x_j - x_k) (y_j - y_k) + c_{31} (y_j - y_k)^2 \\ C_{33} (x_j - x_k) (x_k - x_i) - c_{31} (x_k - x_i) (y_j - y_k) - c_{13} (x_j - x_k) (y_k - y_i) + c_{11} (y_j - y_k) (y_k - y_i) \\ C_{23} (x_j - x_k) (x_k - x_i) - c_{21} (x_k - x_i) (y_j - y_k) - c_{33} (x_j - x_k) (y_k - y_i) + c_{31} (y_j - y_k) (y_k - y_i) \\ C_{33} (x_j - x_k) (x_i - x_j) - c_{13} (x_j - x_k) (y_i - y_j) - c_{31} (x_i - x_j) (y_j - y_k) + c_{11} (y_j - y_k) (y_i - y_j) \\ C_{23} (x_j - x_k) (x_i - x_j) - c_{33} (x_j - x_k) (y_i - y_j) - c_{21} (x_i - x_j) (y_j - y_k) + c_{31} (y_j - y_k) (y_i - y_j) \\ C_{32} (x_j - x_k)^2 - (c_{12} + c_{33}) (x_j - x_k) (y_j - y_k) + c_{11} (y_j - y_k)^2 \\ C_{22} (x_j - x_k)^2 - (c_{23} + c_{32}) (x_j - x_k) (y_j - y_k) + c_{33} (y_j - y_k)^2 \\ C_{32} (x_j - x_k) (x_k - x_i) - c_{12} (x_j - x_k) (y_k - y_i) - c_{33} (x_k - x_i) (y_j - y_k) + c_{13} (y_j - y_k) (y_k - y_i) \\ C_{22} (x_j - x_k) (x_k - x_i) - c_{32} (x_j - x_k) (y_k - y_i) - c_{23} (x_k - x_i) (y_j - y_k) + c_{33} (y_j - y_k) (y_k - y_i) \\ C_{32} (x_j - x_k) (x_i - x_j) - c_{12} (x_j - x_k) (y_j - y_i) - c_{33} (x_i - x_j) (y_j - y_k) + c_{13} (y_j - y_k) (y_i - y_j) \\ C_{22} (x_j - x_k) (x_i - x_j) - c_{32} (x_j - x_k) (y_i - y_j) - c_{23} (x_i - x_j) (y_j - y_k) + c_{33} (y_j - y_k) (y_i - y_j) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{33} (x_j - x_k)(x_k - x_i) - c_{31} (x_j - x_k)(y_k - y_i) - c_{13} (x_k - x_i)(y_j - y_k) + c_{11} (y_j - y_k)(y_k - y_i) \\
& C_{23} (x_j - x_k)(x_k - x_i) - c_{21} (x_j - x_k)(y_k - y_i) - c_{33} (x_k - x_i)(y_j - y_k) + c_{31} (y_j - y_k)(y_k - y_i) \\
& C_{33} (x_k - x_i)^2 - (c_{13} + c_{31})(x_k - x_i)(y_k - y_i) + c_{11}(y_k - y_i)^2 \\
& C_{23} (x_k - x_i)^2 - (c_{21} + c_{33})(x_k - x_i)(y_k - y_i) + c_{31}(y_k - y_i)^2 \\
& C_{33} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{13} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{31} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{11}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{23} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{33} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{21} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{31}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
\\
& C_{32} (x_j - x_k)(x_k - x_i) - c_{33} (x_j - x_k)(y_k - y_i) - c_{12} (x_k - x_i)(y_j - y_k) + c_{13} (y_j - y_k)(y_k - y_i) \\
& C_{22} (x_j - x_k)(x_k - x_i) - c_{23} (x_j - x_k)(y_k - y_i) - c_{32} (x_k - x_i)(y_j - y_k) + c_{33} (y_j - y_k)(y_k - y_i) \\
& C_{32} (x_k - x_i)^2 - (c_{12} + c_{33})(x_k - x_i)(y_k - y_i) + c_{13}(y_k - y_i)^2 \\
& C_{22} (x_k - x_i)^2 - (c_{23} + c_{32})(x_k - x_i)(y_k - y_i) + c_{33}(y_k - y_i)^2 \\
& C_{32} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{12} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{33} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{13}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{22} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{32} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{23} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{33}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
\\
& C_{33} (x_j - x_k)(x_i - x_j) - c_{31} (x_j - x_k)(y_i - y_j) - c_{13} (x_i - x_j)(y_j - y_k) + c_{11}(y_j - y_k)(y_i - y_j) \\
& C_{23} (x_j - x_k)(x_i - x_j) - c_{21} (x_j - x_k)(y_i - y_j) - c_{33} (x_i - x_j)(y_j - y_k) + c_{31} (y_j - y_k)(y_i - y_j) \\
& C_{33} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{31} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{13} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{11}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{23} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{21} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{33} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{31}(y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{33} (x_i - x_j)^2 - (c_{13} + c_{31})(x_i - x_j)(y_i - y_j) + c_{11}(y_i - y_j)^2 \\
& C_{23} (x_i - x_j)^2 - (c_{21} + c_{33})(x_i - x_j)(y_i - y_j) + c_{31}(y_i - y_j)^2 \\
\\
& C_{32} (x_j - x_k)(x_i - x_j) - c_{33} (x_j - x_k)(y_i - y_j) - c_{12} (x_i - x_j)(y_j - y_k) + c_{13} (y_j - y_k)(y_i - y_j) \\
& C_{22} (x_j - x_k)(x_i - x_j) - c_{23} (x_j - x_k)(y_i - y_j) - c_{32} (x_i - x_j)(y_j - y_k) + c_{33} (y_j - y_k)(y_i - y_j) \\
& C_{32} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{33} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{12} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{13} (y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{22} (x_k - x_i)(x_i - x_j) - c_{23} (x_k - x_i)(y_i - y_j) - c_{32} (x_i - x_j)(y_k - y_i) + c_{33} (y_k - y_i)(y_i - y_j) \\
& C_{32} (x_i - x_j)^2 - (c_{33} + c_{12})(x_i - x_j)(y_i - y_j) + c_{13}(y_i - y_j)^2 \\
& C_{22} (x_i - x_j)^2 - (c_{32} + c_{23})(x_i - x_j)(y_i - y_j) + c_{33}(y_i - y_j)^2
\end{aligned} \tag{130}$$

が得られ、この場合には非対称マトリックスになる、ここで (129) 式に示す $c_{ij} = c_{ji}$ なる関係を導入すると (130) 式は対称マトリックスになる。

すなわち、熱力学第一法則と第二法則が成立している限り、弾性体における剛性マトリックスは対称マトリックスとなる。このことは塑性体においても応分増分と塑性ひずみ増分との間には一次的な関係があるので、同様のことが云える。

従って一般にエネルギー損失がない限り、剛性マトリックスは対称マトリックスとなる。

6-4 要素の自由度

6-1において剛性マトリックスを誘導するに当って6ヶの未知常数を含んだ変位分布を仮定した。これは任意に未知常数の数を決めたのではなく、要素内に変位分布を仮定する場合に、変位に含まれる未知常数の数ははっきりとした制約が存在する。すなわち、剛性マトリックスは節点力を節点変位で表わすときに現わすマトリックスである。このことは要素内の変位ひずみ、応力は節点変位により表わさねばならぬ。(123)式で節点変位 $\{U\}$ は

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}$$

として表わされ、これから未知常数 $\{\alpha\}$ は

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{U\}$$

として表わされているが、このように未知常数が節点変位により表わし得るためには $[A]$ が6行6列のマトリックスであるために逆マトリックスをとることが可能となったのであり、これから未知常数の数は要素の持つ節点変位の数と一致しなければならない。

この要素の持つ節点変位の数云い換えれば、変位分布を仮定する場合に許し得る未知常数の数を要素の持つ自由度と云う。

三角形要素の場合には、節点の数は3個で各々の節点が x, y 方向に節点変位を有するから、要素の持つ節点変位の数は $3 \times 2 = 6$ 個である。

すなわち、自由度は6となる。これから変位分布に許される未知常数の数は6個となり、(121)式の形の変位分布が仮定され、仮定される要素内の応力分布は等分布となる。

四角形要素の場合には、自由度は $4 \times 2 = 8$ となり、変位分布に許される未知常数の数は8個となり

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 y^2 \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x^2 \end{cases}$$

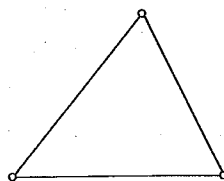
$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \\ v = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y \end{cases}$$

.....

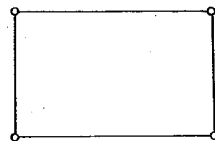
など種々な形で仮定することが出来る。

また、応力分布は一次分布で仮定されることになるが、完全な形では一次応力分布が仮定されるわけではない。

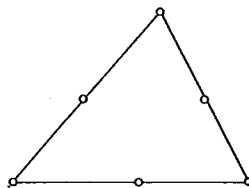
中点三角形の場合(図-17(C))には自由度は



(a) 三角形要素



(b) 四角形要素



(c) 中点三角形要素

図-17

$6 \times 2 = 12$ であるから、

変位分布は

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \end{cases}$$

の形で仮定され、完全な二次変位分布まで仮定することが出来、応力分布としては完全な一次応力分布まで仮定し得る。

このように完全な二次変位分布まで仮定し得る要素を完全二次要素といふ、四角形要素のように一部の二次変位分布まで仮定し得る要素を不完全二次要素という。すなわち

三角形要素（三節点要素）	完全一次要素
四角形要素（四節点要素）	不完全二次要素
中点三角形要素（六節点要素）	完全二次要素

となる。

以上のように一つの要素内に節点を多く設けると $[A]^{-1}$ の計算は複雑となり $[K]$ の誘導は複雑となるが、要素内により複雑な変位分布、応力分布が仮定し得るので、計算精度は大巾に向上する。

なお三次元問題にふれると、

四面体要素 $i j k l$ は節点数は 4 個で、各節点は $x y z$ 方向への節点変位を持つから、自由度は $4 \times 3 = 12$ で、仮定される変位分布は

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases}$$

となる。また図-18 (b) に示す要素は節点数は

20 であるから、自由度は $20 \times 3 = 60$ となり、

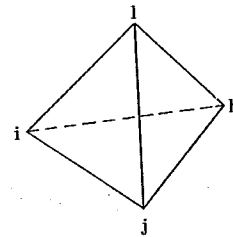
仮定される変位分布は

$$\begin{aligned} u = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 \\ & + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz \\ & + \alpha_{10} xz + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} y^3 + \alpha_{13} z^3 \\ & + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} x y^2 + \alpha_{16} y^2 z + \alpha_{17} y z^2 \\ & + \alpha_{18} z^2 x + \alpha_{19} z x^2 + \alpha_{20} x y z \end{aligned}$$

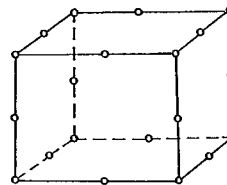
.....

となり完全三次となる。

なお、これら多節点法については 6-3 節にて詳しく述べることにする。



(a) 四面体要素



(b)

図-18

6-5 集積マトリックスと解法

さて、図-19 に示すように、弾性体を三角形要素に分割したとする。

そして、各要素の剛性マトリックスが求められたとする。

いま、図-19 に示すように1つの節点 i の囲りに

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ なる要素が付いていたとする。

α なる要素の節点は i, j, k

β " i, k, l

γ " i, l, m

.....

であったとする。

また、 α なる要素の剛性マトリックスは

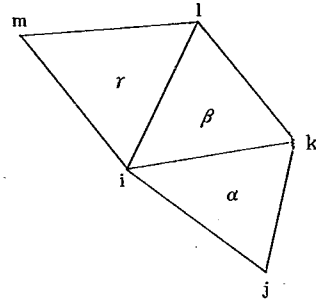


図-19

$$[\alpha K] = \begin{bmatrix} \alpha K_{ii}^{xu} & \alpha K_{ii}^{xv} & \alpha K_{ij}^{xu} & \alpha K_{ij}^{xv} & \alpha K_{ik}^{xu} & \alpha K_{ik}^{xv} \\ \alpha K_{ii}^{yu} & \alpha K_{ii}^{yv} & \alpha K_{ij}^{yu} & \alpha K_{ij}^{yv} & \alpha K_{ik}^{yu} & \alpha K_{ik}^{yv} \\ \alpha K_{ji}^{xu} & \alpha K_{ji}^{xv} & \alpha K_{jj}^{xu} & \alpha K_{jj}^{xv} & \alpha K_{jk}^{xu} & \alpha K_{jk}^{xv} \\ \alpha K_{ji}^{yu} & \alpha K_{ji}^{yv} & \alpha K_{jj}^{yu} & \alpha K_{jj}^{yv} & \alpha K_{jk}^{yu} & \alpha K_{jk}^{yv} \\ \alpha K_{ki}^{xu} & \alpha K_{ki}^{xv} & \alpha K_{kj}^{xu} & \alpha K_{kj}^{xv} & \alpha K_{kk}^{xu} & \alpha K_{kk}^{xv} \\ \alpha K_{ki}^{yu} & \alpha K_{ki}^{yv} & \alpha K_{kj}^{yu} & \alpha K_{kj}^{yv} & \alpha K_{kk}^{yu} & \alpha K_{kk}^{yv} \end{bmatrix}$$

にて表わされたとする。しかるとき、 α なる要素の i 点の節点力 αS_{xi} は

$$\alpha S_{xi} = \alpha K_{ii}^{xu} U_i + \alpha K_{ii}^{xv} V_i + \alpha K_{ij}^{xu} U_j + \alpha K_{ij}^{xv} V_j + \alpha K_{ik}^{xu} U_k + \alpha K_{ik}^{xv} V_k$$

にて表わされる。同様に

$$\beta S_{xi} = \beta K_{ii}^{xu} U_i + \beta K_{ii}^{xv} V_i + \beta K_{ik}^{xu} U_k + \beta K_{ik}^{xv} V_k + \beta K_{il}^{xu} U_l + \beta K_{il}^{xv} V_l$$

$$\gamma S_{xi} = \gamma K_{ii}^{xu} U_i + \gamma K_{ii}^{xv} V_i + \gamma K_{il}^{xu} U_l + \gamma K_{il}^{xv} V_l + \gamma K_{im}^{xu} U_m + \gamma K_{im}^{xv} V_m$$

.....

これらの節点 i に作用する x 方向の節点力の合力は、この節点に作用する外力の x 方向の成分 R_{xi} に等しいから

$$\begin{aligned} R_{xi} &= \alpha S_{xi} + \beta S_{xi} + \gamma S_{xi} + \dots \\ &= (\alpha K_{ii}^{xu} + \beta K_{ii}^{xu} + \gamma K_{ii}^{xu} + \dots) U_i + (\alpha K_{ii}^{xv} + \beta K_{ii}^{xv} + \gamma K_{ii}^{xv} + \dots) V_i + (\alpha K_{ij}^{xu} + \dots) U_j \\ &\quad + (\alpha K_{ij}^{xv} + \dots) V_j \\ &\quad + (\alpha K_{ik}^{xu} + \beta K_{ik}^{xu}) U_k + (\alpha K_{ik}^{xv} + \beta K_{ik}^{xv}) V_k \\ &\quad + (\beta K_{il}^{xu} + \gamma K_{il}^{xu}) U_l + (\beta K_{il}^{xv} + \gamma K_{il}^{xv}) V_l \\ &\quad + (\gamma K_{im}^{xu} + \dots) U_m + (\gamma K_{im}^{xv} + \dots) V_m \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

となる。このような平衡関係を R_{yi} に対しても、また他の各節点に対しても立て、これを節点

番号順に配列すると

$$\{ R \} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ \vdots \\ R_{xn} \\ R_{yn} \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \vdots \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix} = [F] \{ U \} \quad (131)$$

にて表わされる $[F]$ なるマトリックスを作ることが出来る。この $[F]$ は節点数が n 個のときは $2n$ 行 $2n$ 列の正方マトリックスになる。

この $[F]$ を集積マトリックスという。このマトリックスは極めて大きなマトリックスになるが、前々項に述べたように特殊な場合（エネルギーロスのある場合）を除いて、対称マトリックスになる上に、すべてが数値を持つわけではなく、大半は 0 となる。すなわち上の誘導からも明らかなように節点 P が節点 i に要素で直接つながっていないときは、節点変位 U_p, V_p は節点力 S_{xi}, S_{yi} とは無関係となる。したがって

$$F_{ip}^{xy} = F_{ip}^{yx} = F_{ip}^{xy} = F_{ip}^{yx} = 0$$

となる。云いかえれば $[F]$ の要素で直接つながっていない節点同志の節点変位と節点力とを関係づける要素はすべて 0 である。

したがって各行、各列とも、その節点に直接つながる節点の数の 2 倍だけしか数値を持たず以外はすべて 0 である。しかも前述したように対称マトリックスであるから、記憶すべき数値の数は対角線要素 (F_{ii}) の片側に i 点に直接連結されている節点の数しかないことになる。勿論、節点番号のふり方により、必ずしも対角線要素の周りに集まっているとは限らないが、数値を持つ要素の数は少いのが、この集積マトリックスの特徴である。

さて、この $[F]$ は正方マトリックスであるから逆マトリックスをとることが出来る。これから、

$$\{ U \} = [F]^{-1} \{ R \} \quad (132)$$

となり、節点外力が既知であれば節点変位を求めることが出来る。

ここで $[F]$ の逆マトリックスの計算を行なわなければならないが、前述した $[F]$ の特性を利用することにより、元数が多いにも拘ず、種々な有利な計算法をとることが可能となる。この詳細については次節で述べることにする。

節点変位 $\{ U \}$ が求められれば (124) (125) 式により各要素のひずみ、応力を求めることが出来る。