

土木研究所資料

第 1087 号

ダム工学における有限要素法 (2)

— 3 次元有限要素法 —

昭和 51 年 3 月

建設省土木研究所
ダム部 ダム構造研究室

ダム工学における有限要素法(2)

— 3次元有限要素法 —

ダム構造研究室 主任研究員 水 野 光 章

関東地方建設局 永 山 功

目 次

はじめに	1
1. 3次元解析の必要性	3
2. 3次元有限要素法の概要	11
2.1 ASKAの概要	11
2.2 要素と自由度	11
3. 3次元有限要素法(ASKA)の精度	17
3.1 使用する要素による解析の精度と計算コスト	17
3.2 多自由度要素による解析の精度の検討	31
3.3 解析の精度とは	51
3.4 所要の精度を有し、経済的に解析を行なうために必要な要素・要素 分割・境界条件に対する考察	52
4. 3次元有限要素法(ASKA)を使用する場合の注意	56
5. まとめと今後の研究の展望	58
参考 1. 薄層を含む要素分割に伴い応力値に生ずる誤差	61
2. 片持梁のせん断応力に対する追加検討	63
附録 1. ASKA入力データ作成例	64
2. トポロジカル記述法	69
3. 分布荷重(面荷重, 体積荷重)の入力法	72

は　　じ　　め　　に

最近の我が国の経済の発展は著しい人口、財産の都市集中化をもたらしているが、このため従前に増して水資源開発、洪水から命、財産を守る意味からダムによる河水の統制が必要となってきた。

一方ダムを築造するうえでも良好なサイトは既に開発が進み比較的地質の悪いサイトにもダムを築造せざるを得ない現況にある。このような場合には、ダムを支持する基礎岩盤の安全性が大きくダムの安全性を支配することになる。基礎岩盤の安全性を正しく判断するためには、次の2点が必要となる。

① 基礎岩盤の応力と破壊の関係を正しく把握する。(岩盤強度の把握)

② 基礎岩盤中に発生する応力を正しく推定する。

①に関しては、いわゆる岩盤試験で基礎岩盤の破壊機構を求めその機構を定式化(岩盤力学)しようとする努力がなされている。

一方基礎岩盤中に発生する応力の算出について見た場合、岩盤を弾性体として取り扱ったとしても厳密な解析で求める方法は、比較的簡単な境界条件を有する問題にしか適用できず、また近似的な解法である数値解析にしても、計算量が膨大になるため電子計算機の発達する以前においては実際問題に適用するのが不可能であったため、応力解析は専ら、光弾性実験、あるいは模型実験によっていた。

しかるに、最近の電子計算機の発達と有限要素法の手法の開発に伴ない比較的容易に任意のモデル内の応力を算出できるようになってきた。

この有限要素法についてみると弾性論に基づく二次元解析ではかなりの実績があり解析すべきモデルに対して所要の精度を得るためのモデル化の程度(境界条件、要素分割等)は経験的に確立されつつあるがダム工学で取り扱う問題はその性質上3次元応力解析を必要とする場合がしばしばあるのに対して、3次元解析に対するモデル化の程度、あるいは精度といったものに不明な点が多い。

3次元有限要素法では実際には計算機の容量、費用の点で大きな制約があり、現在まで行なわれた計算も数少ない。

筆者は川治ダムの基礎の安定解析を行なうに際して、市販の変位法による有限要素法のプログラムASKAを用いたが、その予備的な検討として、いくつかの解析モデルについてモデル化の程度と精度の関係等について調べた。その結果、3次元有限要素法を構造解析に適用する場合にいくつかの注意すべき点があることを明らかにすることができた。それらは次のようなものである。

① 所要の精度を得て最も経済的に計算コストを上げるためには、要素内に高次の変位、応力分布を仮定し得る多節点要素を用いるのが有利である。

② 解析された変位、応力の精度は構造系のこれらの分布形の複雑さに応じて異なる。従って

解析者が着目する変位，応力によって所要の精度を得るための要素選択，要素分割等は異なるものである。解析者は着目する変位，応力に応じて要素分割等を決めるべきである。（例えば片持梁の直応力とせん断応力）

- ③ 無限境界を有限境界に近似する境界条件の不備は注意深い考慮をする限り工学の問題であれば，ほとんど問題とならない。

更に本報告で次の点を指摘した。

- ④ 理論解と対比された（あるいは精度を示した）解析結果であれば，それを参照することによって同種の解析を行なう場合に，所要の精度を得るための要素分割等を決めることができる。それは重ね合わせると相似則によって可能である。

- ⑤ 近似解法の誤差は単なる精度で論ずべきものではない。工学の分野ではしばしば絶対値そのものが問題になるものであり，この意味では有限要素法は優れた解析法となり得る。

これらの結果は，類似の解析を行なう際の参考になると思い報告するものである。

なお，この報告をまとめるにあたってはC. R. O社の松本 勝氏，渡辺隆之氏に多くの教示を戴いた。ここに深く感謝するものである。

1. 3次元解析の必要性

電子計算機が登場する以前には、数値解析は理論解析に比して多大の労力と時間を要するものであった。したがって、できるだけ解析を理論的に進め数値解析による部分を少なくするという努力が払われたが理論的に進めるためには、必然的に制約条件が多くなり、解析に対する適用範囲が狭くなるという欠点を有していた。そのために実際の問題では、理論解あるいは、数値解析により解決されることは比較的少なく、多くは光弾性実験あるいは、模型実験により解決されてきた。

しかしながら、光弾性実験、模型実験においても多大な労力と時間を要するとともに結果の精度は、模型製作の精度（寸法形状、弾性係数、均一性等）計測の精度に左右されるので必ずしも充分なる精度で結果が得られるものではなかった。このために労力、時間の節約が可能でしかも充分なる精度を有する応力解析法の開発が待たれたのである。

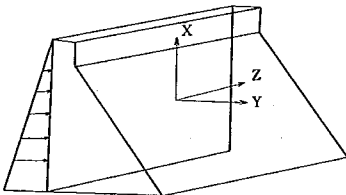
最近のめざましい電子計算機の進歩と有限要素法の手法の開発により複雑な形状を有する構造物や弾性論に基づく応力解析が可能になり、各種構造物の線型な静的解析あるいは、動的応答解析、さらに最近では非線形解析、場の問題等にも有限要素法は用いられるようになった。

ダム工学に限らず構造物の応力解析を行なう場合には、二次元的なモデル化が可能であるかないかでその後の応力解析に要する費用、時間に大きな差を生じる。以前には、2次元化ができない場合には前述した理由で応力解析が不可能な場合が多かった。

有限要素法によれば、3次元、応力解析は理論的に可能ではあるが、実際には、後述するように複雑な形状を有するモデルでは、解析に要する手間および費用が、ばく大なものになるから、実用上、2次元応力場に近似できる解析モデルに関しては、2次元解析でまに合わせることも工学的に充分意味のあることである。

それでは、ダム工学においてはどのような問題が2次元解析が可能でまたどのような問題が3次元解析を行なうべきであろうか。ダム工学で2次元解析（平面ひずみ場による解析）を適用して実用に供し得ると考えられるモデルとしては次のものが挙げられよう。

- ① 基盤を含めた重力ダムの応力解析
- ② 基盤を含めたフィルダムの応力解析



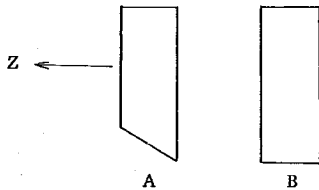
- ③ 重力ダムの堤軸方向監査廊廻りの応力集中

- ④ その他ある方向に対して構造物の形状、荷重状態が一定に保たれるモデル

例えば重力ダムの応力解析では河床部でZ方向に形状と荷重とがある程度は一定に保たれるモデルとなる。この場合Z方向に沿って

応力、変位とも変化しない平面歪場となる。したがって、典型的な2次元応力解析が可能なモデルとなる。

次に左右岸アバットメント上に載る重力ダムでは、明らかにZ方向に応力変位ともに変化しないとは言いがたい。すなわち下図のAのモデルでは、Z方向に形状荷重状態が一定ではないので2次元化は不可能である。しかしながら、AモデルをBモデルとして解析することは工学的に安全側であることは理解できる。このように工学においては、しばしば単純化、省略を行なって解析が容易なモデルを作成することがある。しかし、そのモデルは、真のモデルに対して安全側であることが必要である。



一方、この安全側であることは、ある場合には過度の余裕を与える結果となる。このような場合には、結果として経済的損失をもたらすことになるので安全側のモデル化であっても、それが真実と大きくかけ離れたものであれば妥当ではない。従ってこの種の2次元問題へのモデル化は実際と比較的によく合致すると予想され、しかも安全側となることが必要となる。この意味で前述の左右岸アバットメント上に直立する重力ダムのブロックの解析が2次元化したモデルで行ない得ることは妥当であると言えよう。

次にダム工学で取り扱う3次元問題にどのようなものがあるか述べる。

- ① 重力ダムの3次元設計
- ② フィルダムの "
- ③ アーチダムの設計
- ④ アーチダムの基礎岩盤の安定解析
- ⑤ 局所的な応力集中の解析

①、②はダムの軸方向にもジョイントグラウティング等を施してダムの一体化を計れば前述のZ方向にも力が伝達されることになり、2次元化は不可能である。かつて③に関しては、円筒理論に基づきアーチダムを薄片のアーチの組み合わせと解く方法が用いられたことがあり、これは2次元化した応力解析とみることができる。しかし、実際のアーチダムは上下方向にも剛に連結されておりこの解析では大きな誤差を生じることになる。

④のアーチダムの基礎岩盤の安定解析では、2次元解析が常用されており、応力解析に限定すれば、3次元解析はごくまれに行なわれたに過ぎない。そして、アーチダムの基礎を2次元化して解くことは安全側にすぎるきらいがある。これは適当な応力解析法がなかったことに由来すると考えられるので数値解析の発達した現在では、当然3次元解析に移行すべきものと考えられる。

⑤の局所的な応力集中の解析には、主に光弾性実験が用いられてきたが、膨大な手間と費用を要した。数値解析が容易になれば、この種の問題の取り扱いが容易になる。

次にダム構造研究室で取り扱った有限要素法による3次元応力解析について簡単に述べよう。

(1) 真名川アーチダムの例

真名川ダムは九頭竜川の治水計画の一環として真名川上流に建設中のアーチダムでその高さは125.5mである。真名川ダムサイトの右岸には、ゆるやかに川側に傾斜を持った断層が数本あり中でもゆるやかな川落ち断層 F-7 と逆に山落ち断層 F-4 で囲まれた岩塊がダムからのスラストを受けた場合に安定であるかといふことが大いに懸念された。(図-1-1 参照)

そこで有限要素法により岩盤内の応力を算出し断層の応力 — 破壊条件より安定の度合を判断することとして解析が行なわれた。電子計算機で解析を行なう場合、計算機の容量、費用の点から無限に多い細かい要素分けを行なって解析することは不可能である。

従って計算機の容量を満足し、かつ経済的な計算のテクニックが要求される。そこで、真名川ダムでは、次のような方法をとっている。

ダム基礎という無限に続くものをできるだけその条件を満たすように広く取ろうとすれば要素分割が粗くなり精度が落ちると考えられる。この場合1,000点程度の節点とすれば平均40m程度の要素分割となる。一方半無限の基礎をダムサイト近傍に限定して行なえば計算そのものの精度はあがるが基礎の半無限の条件から大きく離れ、真の解とはならない。そこで、計算を2回に分けることにより、精度をあげることを試みた。

すなわち、図-1-2に示すように、まず、Aのモデルにおいて変位、応力を解析し、その後Bの部分だけを取り出して、さらに細かく要素分割し、断層も入れた解析を行なった。この場合、

モデルBの取り出し方はAモデルの解析結果から外力による影響が比較的大きいと思われる部分を抜きとり、Bの境界には、Aで得られた変位を入力することにより、半無限の条件をできるだけ加味しようとしたものである。この場合境界でAモデルの解析より得られた変位を入力することは逆にBモデルの解析の精度がAモデルに拘束されることになるが境界を固定等の条件を入れて有限化するより少なくとも精度は上がると思われるためである。

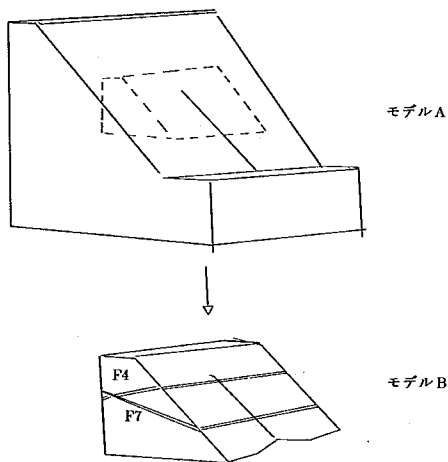


図-1-2 解析モデル

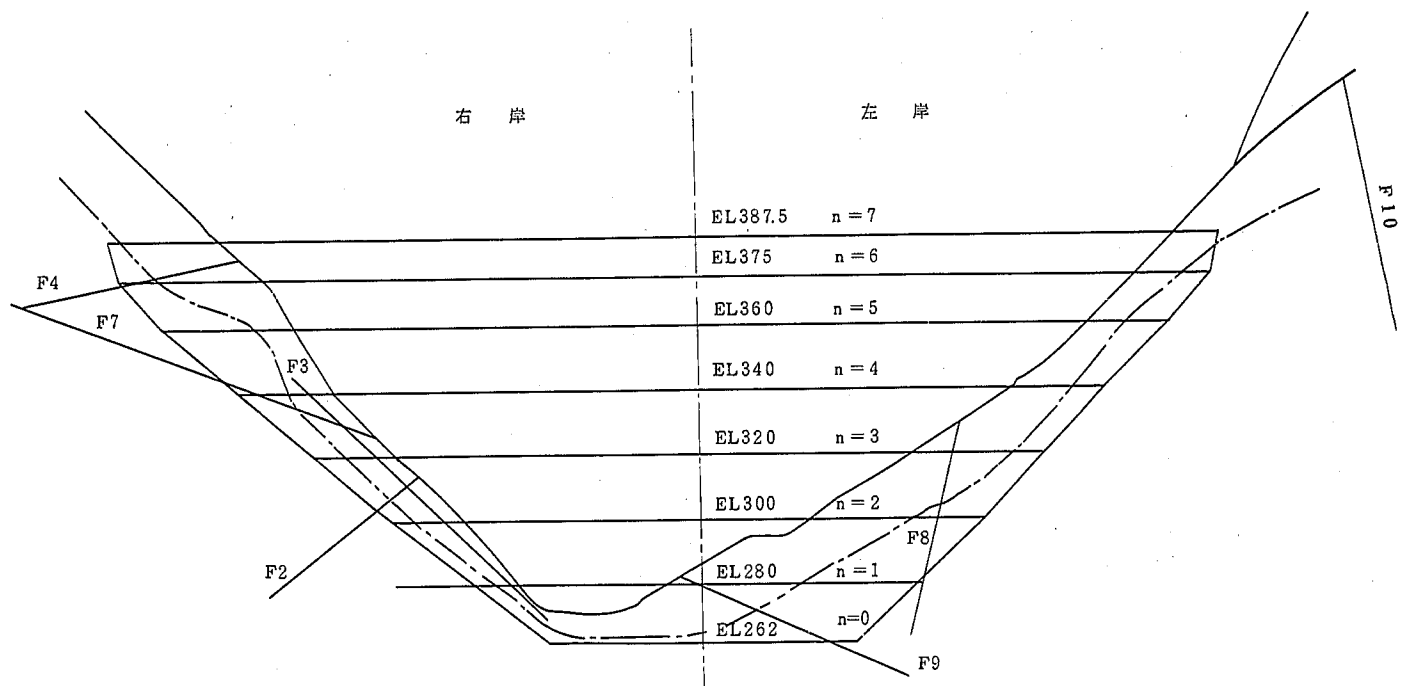


図-1-1 真名川ダム展開地質図 下流から上流を望む

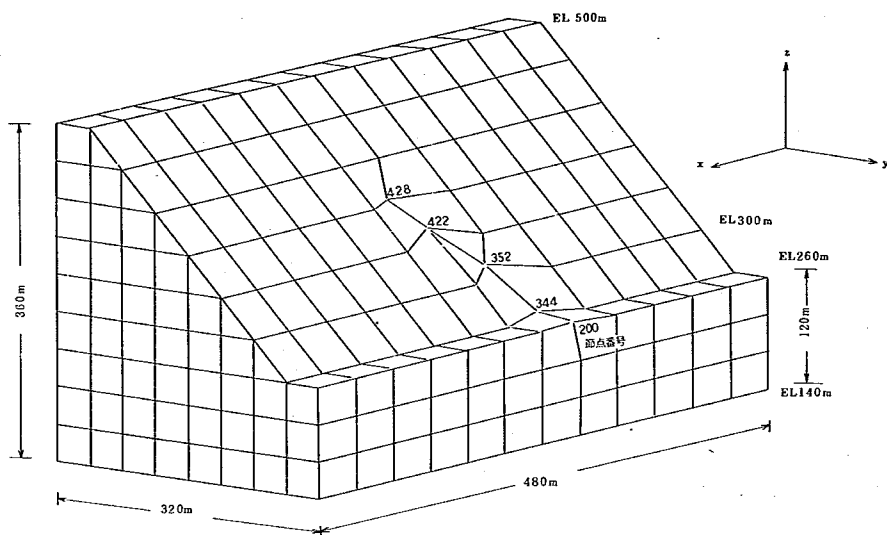


図-1-3 Aモデルの要素分割

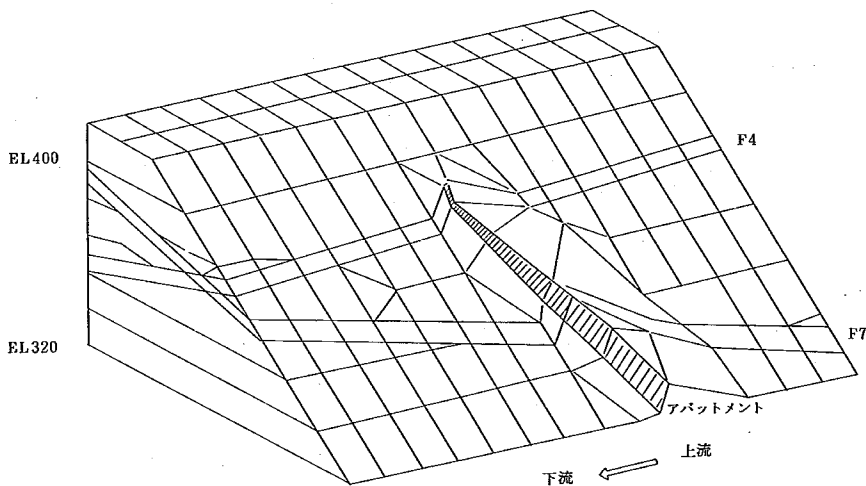


図-1-4 Bモデルの要素分割

この解析結果は、地山内の応力は地山の自重による応力（初期応力）が支配的であり、ダムスラスト（推力）による応力は3次元的な分散のためにこの応力が初期応力より過大になるのは、アバットメント付近に限定され、F-4とF-7断層に囲まれる問題の岩塊は充分安定であることが確認された。

この解析を従来の2次元化したモデル(2次元スライス上でのモデル)で行なえば、初期応力を考慮できないこと、応力の3次元的な分散を期待できないことから、かなりの断層処理を要する結果となったことは明らかである。真名川ダムの場合、4面体4節点要素、3角柱6節点要素、6面体8節点要素の組合せで解析しており、いわゆる中間節点を持つ、多自由度要素は用いていない。

(ii) 八戸重力ダムの解析例

八戸ダムは、江の川水系八戸川上流に建設中の重力ダムでその高さは72mである。このダムの場合、河床部に重力ダムの1ブロックが載るほど幅広い断層が上下流方向の走行を持ちほぼ鉛直な傾きを持って存在した。この断層上に載るブロックは、断層内に破壊面をもつすべりに対して著しく安全率は小さい。そこで、隣接ブロックをジョイントグラウチングをすることにより結び、問題のブロックにかかる荷重を分散させ断層内の応力を軽減する3次元設計を行なうことにし、その応力状態をみるために、3次元応力解析を行なったものである。

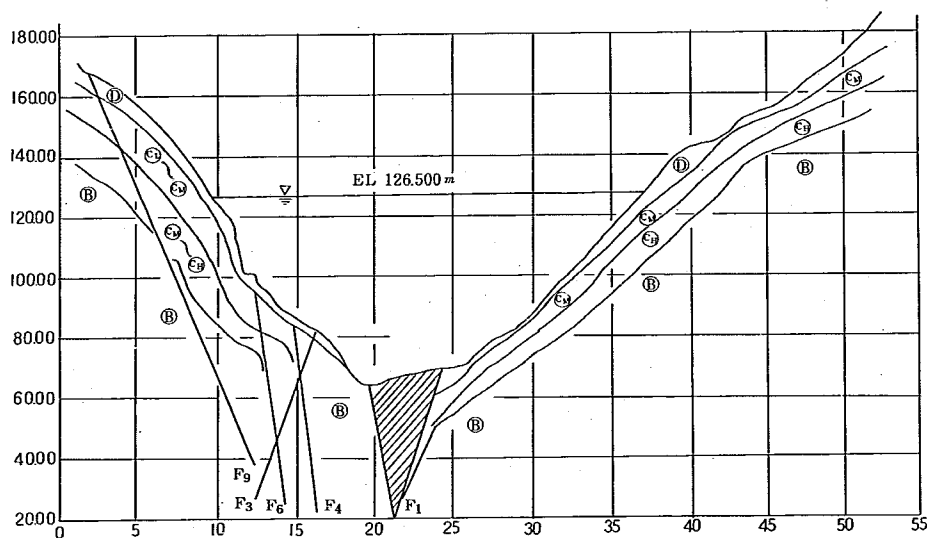
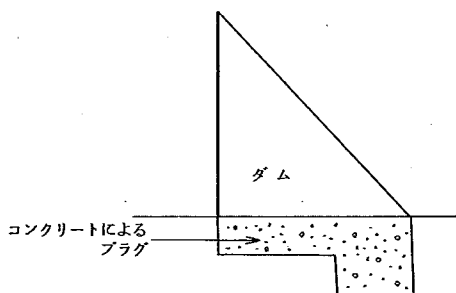


図-1-5 ダム軸地質断面図

解析は左右岸対称のモデルとし、ダムを含めた左岸側を解析の対称とした。要素分割は図-1-7に示す通りである。解析の精度が必要となる断層部及び断層上のブロック付近については、要素を細かく分割しており、真名川ダムの場合と異なり解析は一回で行なった。使用した要素は後述するASKAのTET4, PERTET4, HETET4であり、総節点数は623点、総要素数は522個となっている。

とが可能であることが判明し、このブロックが充分安定であることが明らかとなった。



この種の問題に関しては従来の2次元設計では、設計は不可能である。また、荷重分割法による3次元解析を行なうにしても岩盤内の応力算出までは、とうてい不可能であることが推察できる。

2. 3次元有限要素法 (ASKA) の概要

2.1 ASKAの概要

ASKA とは Automatic System for Kinematic Analysis の略であり、有限要素法の創始者の 1 人である J. H. Argyris を中心としたグループによって開発されている変位法を基礎とした、理論研究および実際の構造解析のための汎用プログラムである。

ASKA の全体のシステムは 3 部から構成されている。

ASKA Part I	静的解析の部分
ASKA Part II ; DYNAN	動的解析の部分
ASKA Part III	非線形解析の部分 (開発中)

本書で取り扱うのはその第 I の部分である。

さて、ここで有線要素法の根底をなすマトリックス構造解析法について述べておく。この方法は、構造を変位または応力の分布が仮定されている有限要素の集合としてモデル化し、次にこの有限要素の結合点での力の平衡条件と変位の適合条件を満足するように個々の近似的な変位または応力の分布を組合せることによつて全体の解を求めるものである。この方法では系統的に演算を行なうから多くの線形代数が必要でありそのためマトリックス代数を用いて簡便に表わすのである。

このマトリックス法はその他の方法もあるが、主に 2 つの方法に分れる。

マトリックス変位法

マトリックス応力法

変位法は要素の変位分布を仮定し未知変位に対する方程式をたてるものであり、これは要素のすべての点に於て変位の適合条件は満足するが力の平衡条件は近似的にしか満足しない。応力法は要素の応力分布を仮定し未知内力に対する方程式をたてるものであり、これは要素のすべての点に於て力の平衡条件を満足させるが変位の適合条件は近似的にしか満足しない。ASKA に於て採用されているのは前者のマトリックス変位法である。この方法に従って静的解析を行なう場合のフローチャートを示したのが図 2-1 である。なお、マトリックス法による解析の理論式についてはここでは省略する。詳しくは専門書もしくは、「ダム工学における有限要素法 (I)」(飯田隆一ほか) (土木研究所資料 903 号) を参照されたい。

2.2 要素と自由度

ASKA には現在使用可能な 42 種の要素タイプが、ASKA 要素ライブラリに登録されている。ここでは 3 次元解析に必要なと思われる基本的要素を示し説明を加える。

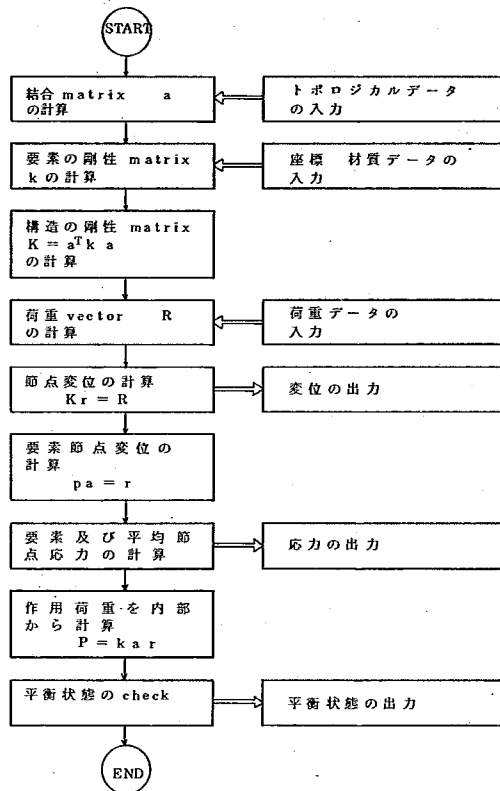
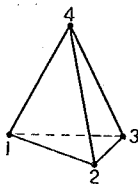


図 - 2 - 1 ASKA による解析の流れ (部分構造なし)

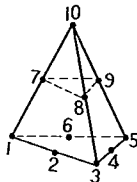
① TET 4



節点数 4

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$

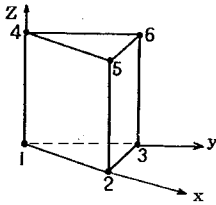
② TET 10



節点数 10

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$
 $+ a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 yz + a_8 z^2 + a_9 zx$

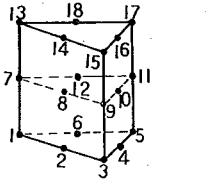
③ PENTA 6



節点数 6

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$
 $+ a_4 xz + a_5 yz$

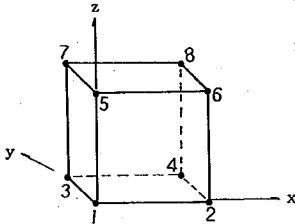
④ PENTA 18



節点数 18

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$
 $+ a_4 xz + a_5 yz + a_6 xy + a_7 x^2$
 $+ a_8 y^2 + a_9 z^2 + a_{10} x^2 z + a_{11} y^2 z$
 $+ a_{12} z^2 x + a_{13} z^2 y + a_{14} xyz$
 $+ a_{15} x^2 z^2 + a_{16} xyz^2 + a_{17} y^2 z^2$

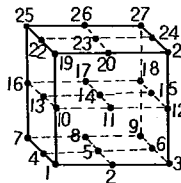
⑤ HEXE 8



節点数 8

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$
 $+ a_4 xy + a_5 yz + a_6 zx + a_7 xyz$

⑥ HEXE 27

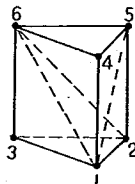
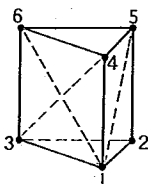


節点数 27

変位分布 $u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2 + a_5 xy$
 $+ a_6 y^2 + a_7 yz + a_8 z^2 + a_9 zx + a_{10} x^2 y$
 $+ a_{11} x^2 z + a_{12} y^2 x + a_{13} y^2 z + a_{14} z^2 x$
 $+ a_{15} z^2 y + a_{16} xyz + a_{17} x^2 yz + a_{18} y^2 xz$
 $+ a_{19} z^2 xy + a_{20} x^2 y^2 + a_{21} x^2 z^2 + a_{22} y^2 z^2$
 $+ a_{23} x^2 y^2 z + a_{24} x^2 z^2 y + a_{25} y^2 z^2 x$
 $+ a_{26} x^2 y^2 z^2$

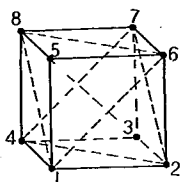
その他これらを組合せた要素があるが本質的には上記のものと変らない。これらは使用上の便宜をはかっているにすぎない。

⑦ PERTET 4 と PELTET 4



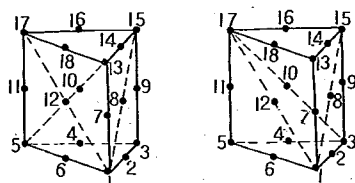
TET 4 3つからなる。

⑧ HETET 4



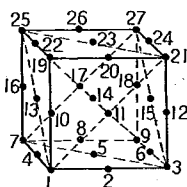
TET 4 6つからなる。

⑨ PERTET 10 と PELTET 10



TET 10 3つからなる。

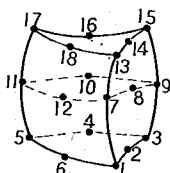
⑩ HETET 10



TET 10 6つからなる。

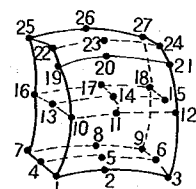
次に稜が放物線をなす要素として次のものがある。

⑪ PENTAC 18



PENTA 18 と同様

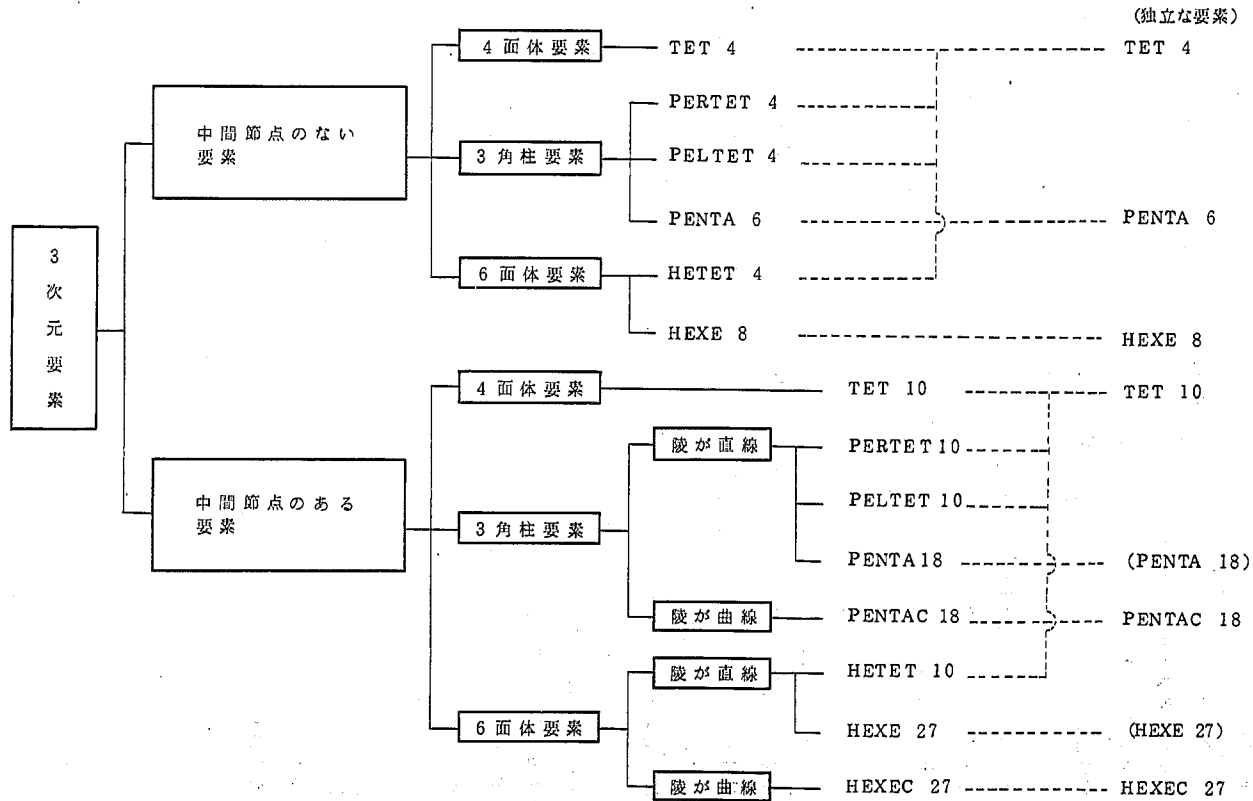
⑫ HEXEC 18



HEXE 27 と同様

これらの要素は自由に組合わして使用することができる。この時、隣接する要素の面が一致しておれば変位の適合条件はその面に於ても満足している。(図-2-2(a)) しかし場合によっては隣接する要素の面が異ならざるを得ない場合もあろう。(図-2-2(b)) このような状態も ASKA に於ては許されるが変位の適合条件はその面に於ては満足されていない。従ってこ

表-2-1 ASKAに登録されている3次元要素



のような組合せはなるべくさけることが望ましい。

これらの要素をどのように選んで使用するかは、解析する構造形の種類と要求される精度によって必然的に異なってくる。適切な要素を選択するにはあらかじめ各要素の性質を把握する必要がある。

ある要素が許される変形の仕方、すなわち要素のもつ変位関数はその要素のもつ節点の数によって規定される。例えば4つの節点をもつ要素TET 4の場合、変位の3成分 (u, v, w) は4つの係数をもつ多項式で仮定することができる。

$$u = a_{01} + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$$

$$v = a_{02} + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z$$

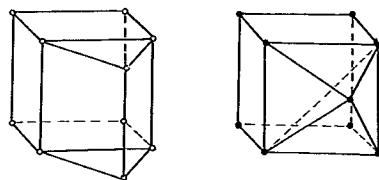
$$w = a_{03} + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$$

同様に、HEXE 27 の場合は変位は 27 個の係数をもつ多項式で表わされる。

この様に、節点数の多いほど、高次の変形量を表現できるため、同様の形状をもつ要素、例えば、HEXE 8 と HEXE 27 を比べた場合、中間節点を持つ HEXE 27 の方が高次の変形を表現でき、従って解析の精度を高めることができる。そこで中間節点を持つ要素を使用することが精度を高めるうえに有利になることは明らかである。

しかし、この議論は、個々の要素に対する議論であり、(例えば、解析する対象を、 n 個の HEXE 8 を用いてモデル化するよりも、 n 個の HEXE 27 を用いてモデル化の方が精度が向上すること)、節点数を同じにした場合 (例えば、解析する対象を n 個の HEXE 27 を用いてモデル化する場合と $4n$ 個の HEXE 8 を用いて解析する場合) の精度については、一概にどちらが優れているかは断定しがたい。これについては第3章において詳しく検討する。

なお、ASKA に於ては、TET 10, PENTA 18, HEXE 27 の中間節点の応力は Output されず、中間節点の応力を知りたい時は、その旨を入力してやらねばならない。この様に ASKA は、中間節点を端節点と同一視しておらず、中間節点は端節点の精度をあげるための補助的なものと考えているようであり、上の議論のうち後者のように全て節点を同一視するようにとらえ方はしていない。



(a) HEXE 8 と
PENTA 6

(b) HEXE 8 と
TET 4

図-2-2

3. 3次元有限要素法 (ASKA) の精度

3.1 使用する要素による解析の精度と計算コスト

2章で述べたように要素によって内部の変位分布について大きな差があるので、同じ程度の要素分割でも使用する要素の種類によって得られる解析結果の精度に大きな差が生じる。一方自由度の少ない要素を用いても要素分割を細かくすることによって、自由度の多い要素を用いた結果と同程度の精度を得るには、どちらが計算コストが有利であるかを検証しておく必要がある。無論この場合、解析するものの応力分布の複雑さによるがその細部については未だ検証された例は少ない。ここでは、片持梁をモデルとして比較した結果を示す。

要素と精度、所要の精度を得るためのもっとも経済的な要素選択を検討するために片持梁をモデルとして精度、計算コスト等の比較を行なった。

片持梁のモデルとして、スパン 20m で断面 1m × 1m のものを選び要素の種類としては HETET 4, PENTA 6, HEXE 8, HETET 10, PENTA 18, HEXE 27 の 6 種を選んだ。

これら要素の詳細については 2 章で述べたとおりである。

比較は、同一節点数となるように要素分割を行ない、それぞれの解析結果、解析時間等に対して行なっている。

要素分割の程度は、図-3-1 に示す通りである。この場合、一つの断面には、9 の節点を有する様に要素分割を行ない、左端の節点番号の 1 ~ 9 までは x, y, z 方向全て固定とし支持端とした。従って、右端が片持梁の自由端となる。

荷重ケースは、図-3-2 に示すものに対して行なった。

荷重ケース 1 は軸引張力を作用せしめ軸方向 (x 方向) の変形について検討したものである。同じく荷重ケース 2 は曲げ変形および曲げ応力、荷重ケース 3 は分布荷重に対する精度の検証を目的としたものである。

次に比較の対象としての、理論値

は、Beam Theory より 次のようになる。

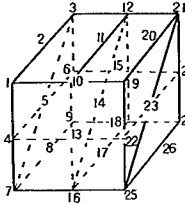
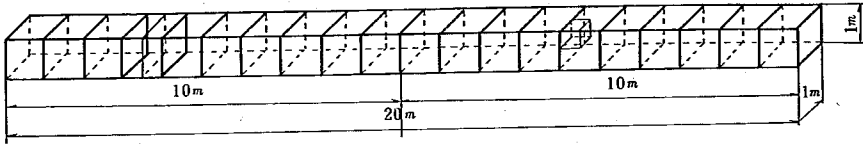
荷重ケース 1

$$\begin{aligned} \text{x 方向の変位} \quad \delta x &= \frac{P \cdot x}{E A} & \text{但し } P: \text{x 方向荷重} \\ & & E: \text{弾性係数} \\ & & A: \text{断面積} \end{aligned}$$

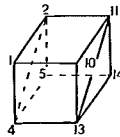
荷重ケース 2

$$\begin{aligned} \text{z 方向変位} \quad \delta_{zx} &= \frac{P}{E I} \left(-\frac{\ell}{6} x^3 + \frac{\ell^2}{2} x - \frac{\ell}{3} \ell^3 \right) \\ \text{x 方向の直応力} \quad \sigma_{xz} &= \frac{P \cdot (\ell - x)}{I} \cdot Z & \text{但し } I \text{ は断面 2 次モーメント} \end{aligned}$$

MODEL 1 節点数 369

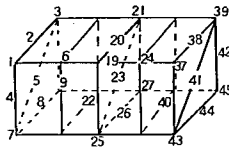
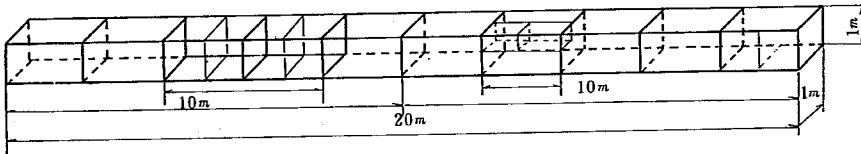


ELEMENT
HEXE 27 (20)
HETET 10 (20)
PENTA 18 (40)

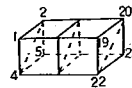


ELEMENT
HEXE 8 (160)
HETET 4 (160)
PENTA 6 (320)

MODEL 2 節点数 189

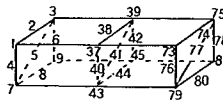
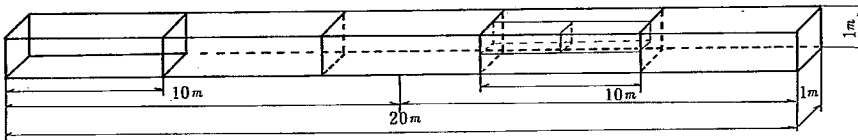


ELEMENT
HEXE 27 (10)
HETET 10 (10)
PENTA 18 (20)

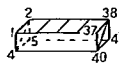


ELEMENT
HEXE 8 (80)
HETET 4 (80)
PENTA 6 (160)

MODEL 3 節点数 99



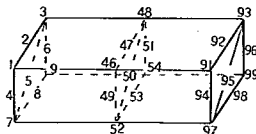
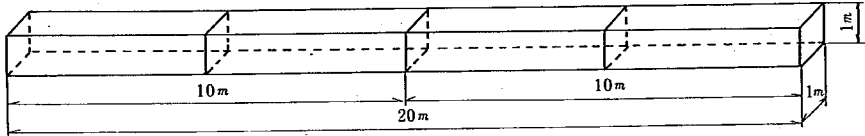
ELEMENT
HEXE 27 (5)
HETET 10 (5)
PENTA 18 (10)



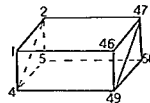
ELEMENT
HEXE 8 (40)
HETET 4 (40)
PENTA 6 (80)

図-3-1 解析モデルの要素分割 (I)

MODEL 4 節点数 81

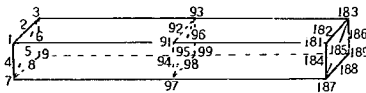
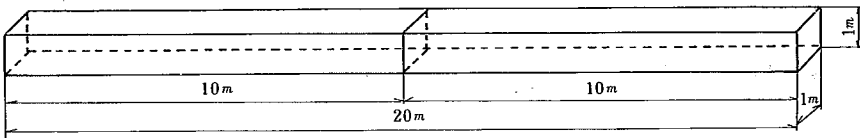


ELEMENT
 HEXE 27 (4)
 HETET 10 (4)
 PENTA 18 (8)

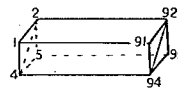


ELEMENT
 HEXE 8 (20)
 HETET 4 (20)
 PENTA 6 (40)

MODEL 5 節点数 45

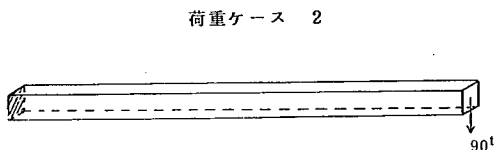
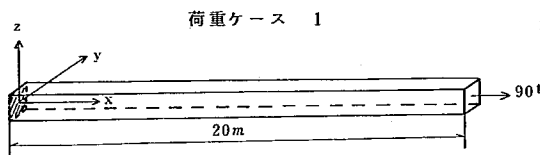


ELEMENT
 HEXE 27 (2)
 HETET 10 (2)
 PENTA 18 (4)



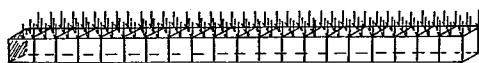
ELEMENT
 HEXE 8 (16)
 HETET 4 (16)
 PENTA 6 (32)

解析モデルの要素分割 (2)

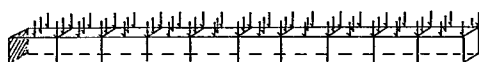


荷重ケース 3

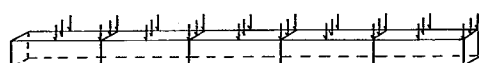
3-1 (モデル1)



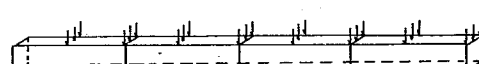
3-2 (モデル2)



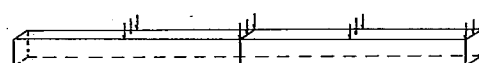
3-3 (モデル3)



3-4 (モデル4)



3-5 (モデル5)



各要素分割モデルに対して全節点に $2t$ ずつ Z 方向に载荷する。

図-3-2 荷重ケース一覧表

荷重ケース1)である。図-3-3は荷重ケース2の場合について節点数と精度の関係を図にまとめたものである。これらの結果より変位については次の事が言える。

1. 節点数が等しい条件では、多節点の要素 (HETET10, PENTA18, HEXE27) を用いた場合の方が精度が良い。
2. HEXE8, PENTA6 は同程度の精度でHETET4の精度がもっとも悪い。
3. 理論値に対して、95%以上の精度を持てば工学的に充分満足できるものとすれば、多節点要素では、MODEL4程度の要素分割で充分である。

荷重ケース 3

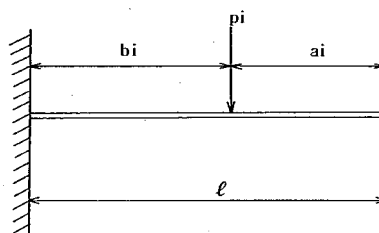
$x = 20$ における x 方向変位

$(\delta z)_{x=20}$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{pi}{6EI} \{ 2bi^3 + 3aibi^2 \} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{pi}{6EI} \{ -bi^3 + 3bi^2 \cdot 1 \} \right\}$$

但し Pi, ai, bi は下図



解析結果が理論値に対してどの程度の精度を有するか整理した結果を以下に示す。

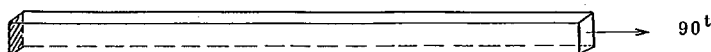
3.1.1 変位に対する精度

変位に対する精度をみるために、荷重ケース毎に各モデルに対する変位を整理したものが、表-3-1 (荷重ケース1), 表-3-3 (荷重ケース2), 図-3-4 (荷重ケース3-1~3-5)である。

また、理論値を100とした時の解析結果の値を整理したものが、表-3-2 (荷

表-3-1 軸引張力を受けた場合の軸方向変位解析結果の比較

荷重ケース 1 (軸引張力を作用させた場合)

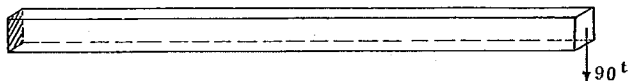


x方向変位 ELEMENT	MODEL 1		MODEL 2		MODEL 3		MODEL 4		MODEL 5	
	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m
理論値	004376 ^{cm}	008751 ^{cm}	同左	同左	同左	同左	同左	同左	同左	同左
HEXE8	004262	009532	004264	009211	004210	008891	004193	008801	004119	008554
PENTA6	004262	009238	004231	008810	004210	008780	004193	008710	004116	008504
HETET4	004254	008435	004264	009015	004175	008629	004147	008569	004003	008272
HETET10	004264	008804	004250	008748	004216	008635	004198	008594	004104	008450
PENTA18	004266	009045	004254	008869	004225	008698	004216	008649	004169	008504
HEXE 27	004266	008860	004254	008749	004226	008633	004214	008596	004164	008477

表-3-2 理論値を100とした場合の解析値の比較 (荷重ケース 1)

x方向変位 ELEMENT	MODEL 1		MODEL 2		MODEL 3		MODEL 4		MODEL 5	
	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m
理論値	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
HEXE 8	—	108.9	—	105.3	—	101.6	—	100.6	—	97.7
PENTA6	—	105.6	—	103.0	—	100.3	—	99.5	—	97.2
HETET4	—	96.4	—	100.7	—	98.6	—	97.9	—	94.5
HETET10	—	100.6	—	100	—	99.4	—	98.2	—	96.6
PENTA18	—	103.4	—	101.4	—	99.4	—	98.8	—	97.2
HEXE 27	—	101.3	—	100	—	98.6	—	98.2	—	96.9

表-3-3 曲げ応力を受けた場合のZ方向変位解析結果の比較 (荷重ケース 2)



x方向変位 ELEMENT	MODEL 1		MODEL 2		MODEL 3		MODEL 4		MODEL 5	
	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m	10 m	20 m
理論値	4285 ^{cm}	13714 ^{cm}	同左	同左	同左	同左	同左	同左	同左	同左
HEXE 8	37.48	12027	2977	9566	16.43	5279	1231	3955	399	1282
PENTA6	—	—	2886	9264	16.16	5189	1217	3905	399	1278
HETET4	2456	7896	1610	5176	7.05	2259	499	1597	149	472
HETET10	4218	13576	4151	13435	40.04	13099	3927	12916	3522	11910
PENTA18	4252	13647	4219	13578	41.33	13388	4080	13271	3745	12510
HEXE 27	4252	13647	4218	13577	41.32	13386	4082	13269	3745	12508

z方向変位	MODEL 1	MODEL 2	MODEL 3	MODEL 4	MODEL 5
ELEMENT	20m	20m	20m	20m	20m
理 論 値	100	100	100	100	100
HEXE 8	87.7	69.7	38.5	28.8	9.3
PENTA 6	84.2	67.5	37.8	28.4	9.3
HETET 4	57.6	37.7	16.5	11.6	3.4
HETET 10	98.9	97.9	95.5	94.2	86.8
PENTA 18	99.5	99.0	97.6	96.8	91.2
HEXE 27	99.5	99.0	97.6	96.8	91.2

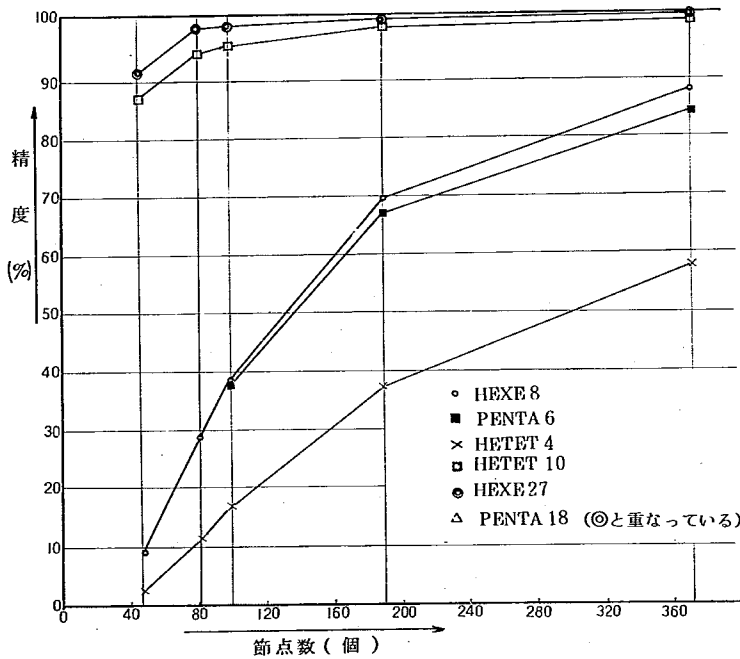


図 - 3 - 3 理論値を100とした場合の比較 (荷重ケース2, Z方向変位)

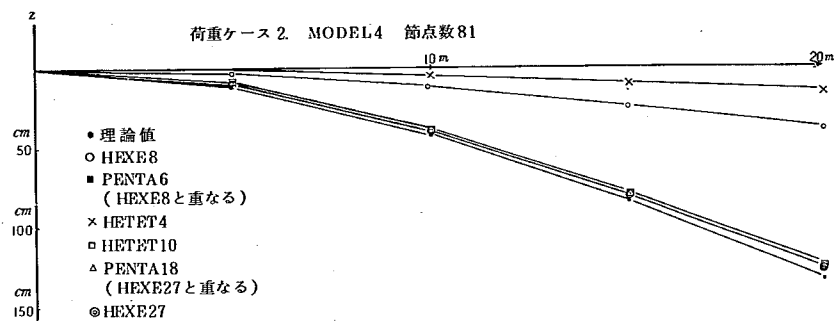
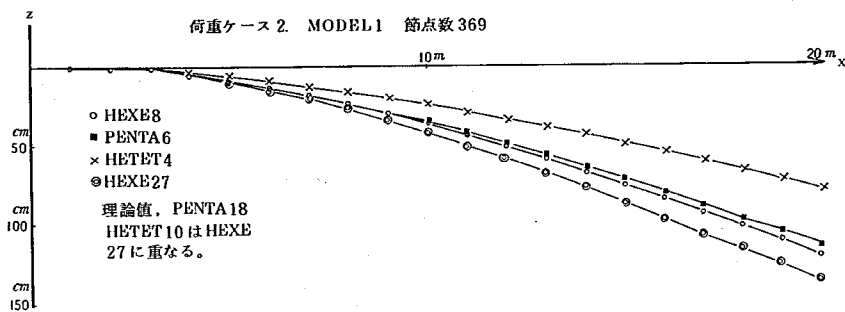


図-3-4-1 たわみ分布の比較

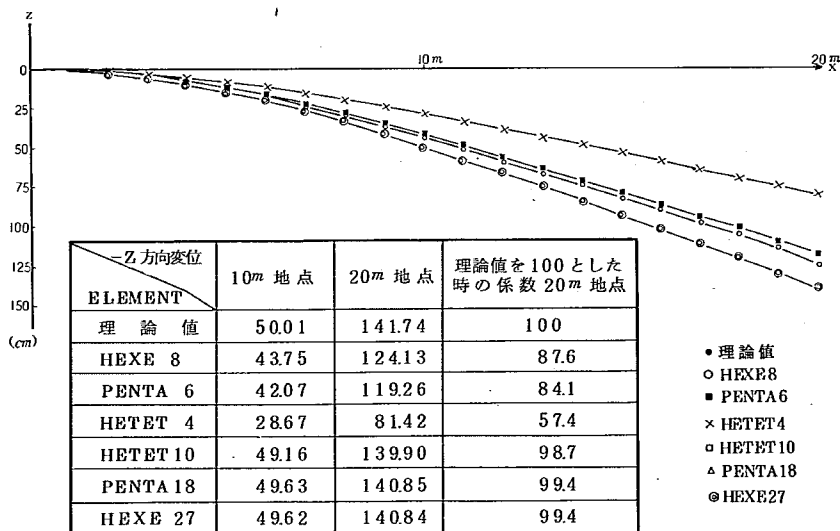


図-3-4-2 たわみ分布の比較

荷重ケース 3-1 MODEL 1 節点数 369

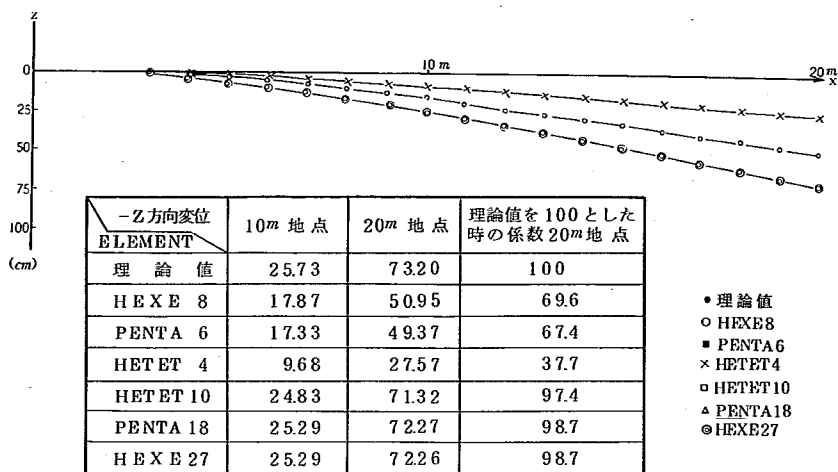


図-3-4-3 たわみ分布の比較
荷重ケース 3-2 MODEL 2 節点数 189

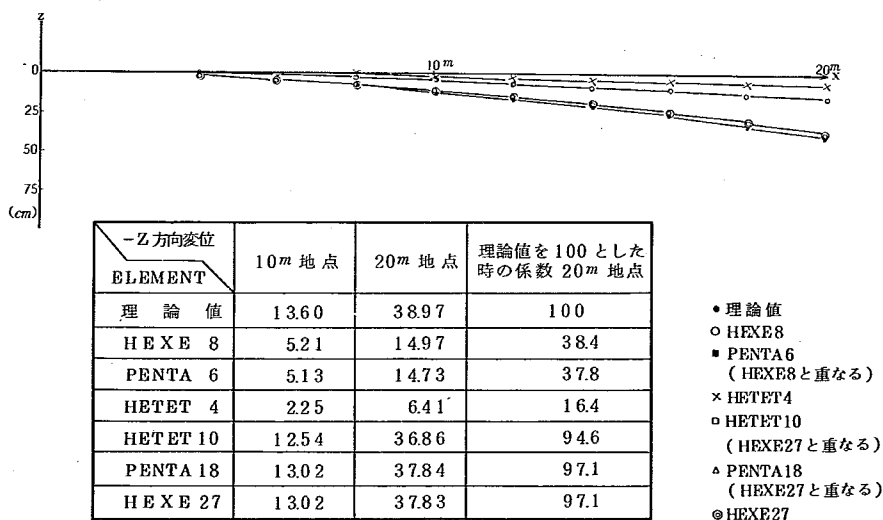


図-3-4-4 たわみ分布の比較
荷重ケース 3-3 MODEL 3 節点数 99

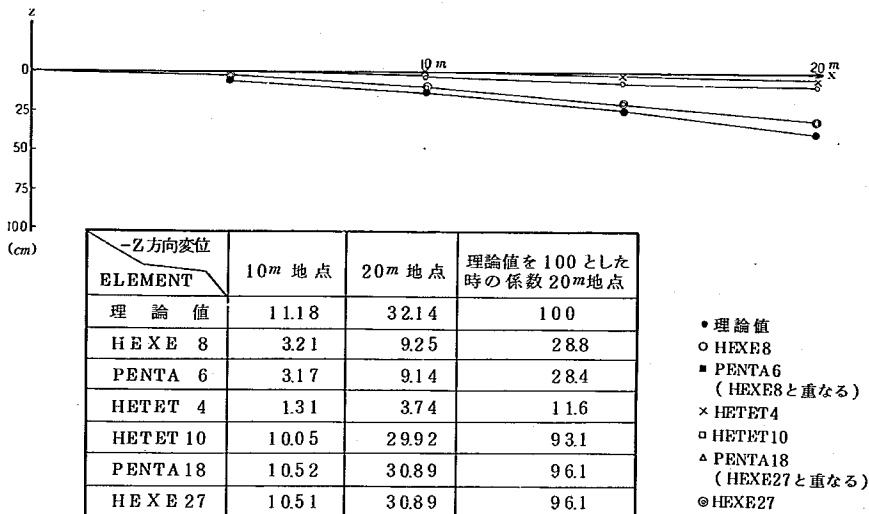


図-3-4-5 たわみ分布の比較
荷重ケース 3-4 MODEL 4 節点数 81

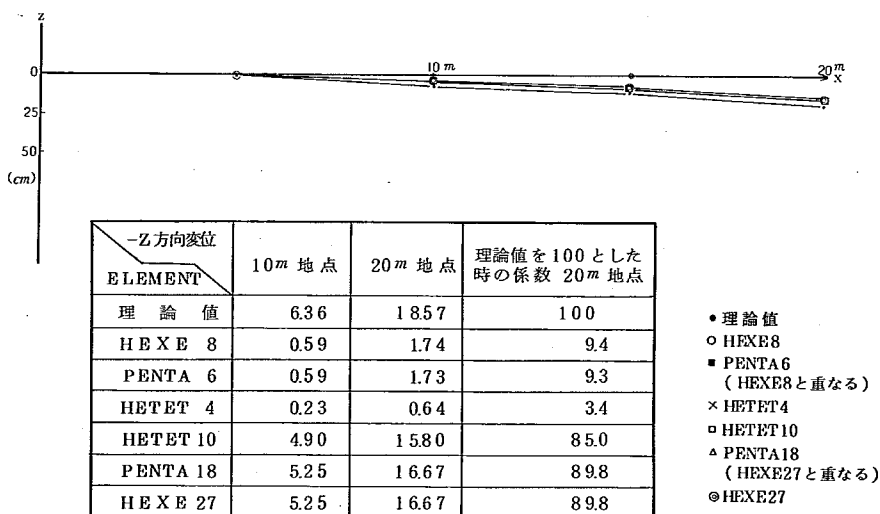


図-3-4-6 たわみ分布の比較
荷重ケース 3-5 MODEL 5 節点数 45

3.1.2 応力に対する精度

曲げ応力の精度をみるために荷重ケース2について固定端及び10m地点の上縁応力を整理したものが、表-3-4である。最も精度のよいのは、HETET 10であるが、10m地点ではHETET 10, PENTA 18, HEXE 27についてほとんど差はなく、MODEL 4程度の要素分割で100%近い精度をあげている。固定端については、HETET 10の精度が一番良くMODEL 4程度で100%近い精度をあげているが、固定端で精度がややおちるのは、要素応力の平均化に関係があると思われる。これについては4章で詳しく述べる。HEXE 8及びPENTA 6を用いて実用上差し支えない程度の精度を得ようとすればMODEL 1程度の要素分割が必要になる。また、HETET 4を用いた場合はMODEL 1程度の要素分割では十分な精度を得られないことも理解できる。

次に以上の使用する要素節点数、精度の関係を図示したものが図-3-5である。

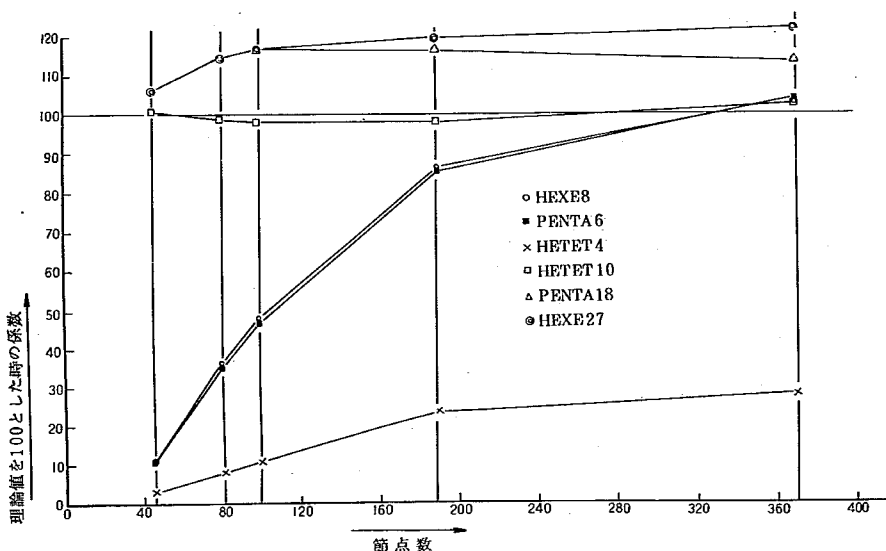


図-3-5-1 節点数と精度の関係(1) (固定端上縁直応力 σ_x)

3.1.3 所要の精度を得るもつとも計算コストが有利となる要素

以上の結果から多節点要素の方が節点数が全て等しくなるように要素分割した場合に精度が良いことが判明したが、HEXE 8, PENTA 6, HETET 4について要素分割を細かくした場合、精度を高め得ることは容易に予想できる。そこで、この種の解析をする場合にどのような要素を用いるのが計算コストの上で有利であるか検討してみた。表-3-6はこの解析に要した時間を

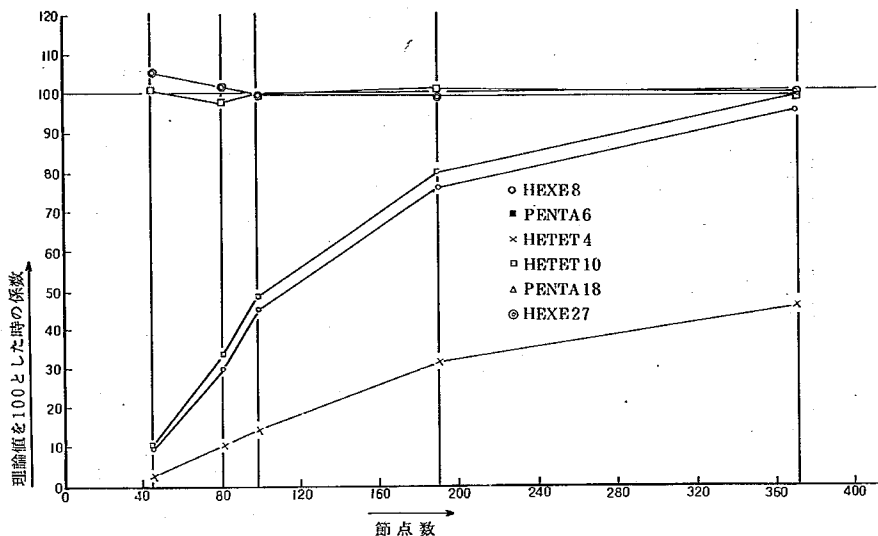


図-3-5-2 節点数と精度の関係(2) (10m 地点上縁直応力 σ_x)

集録したものである。また、図-3-6は、各要素毎の節点数と計算時間の関係を図示したものである。これよりHETET10が同一節点数であれば、計算時間が一番長いことがわかる。

図-3-7、図-3-8は荷重ケース2のたわみ及び応力について計算時間と精度について図示したもので、縦軸は理論値に対する100分率で表示してある。この図は左側かつ上方に線分が来るほど短い計算時間で精度を高め得ることを示している。この結果からこの解析に用いた要素のうちでは、PENTA18及びHEXE27を用いた解析が最も経済的にして、所要の精度を得られるものであると結論できる。

この解析は、解析モデルとして片持梁を用いているが、この関係は他の解析モデルについても同様であろうと推定される。

表-3-4 荷重ケース 2 応力の比較

ELEMENT	MODEL 1 (固定端)			MODEL 1 (10m地点)			MODEL 2 (固定端)			MODEL 2 (10m地点)			MODEL 3 (固定端)		
	σ_x (t/m ²)	B(t·m) Moment	理論値に 対する比	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値
理論値	10800	1800	100	5400	900	100	10800	1800	100	5400	900	100	10800	1800	100
HEXE 8	11169	1862	103	5145	858	95	9293	1549	86	4102	684	76	5152	859	48
PENTA 6	11140	1857	103	5347	891	99	9235	1539	85	4300	717	80	5119	853	47
HETET 4	2930	488	27	2483	414	46	2560	427	24	1705	284	32	1182	197	11
HETET 10	10959	1827	102	5389	898	99	10649	1775	98	5405	901	100	11023	1837	102
PENTA 18	12208	2035	113	5400	900	100	12502	2084	116	5400	900	100	12626	2104	117
HEXE 27	13088	2181	121	5400	900	100	12843	2141	119	5400	900	100	12618	2103	117

ELEMENT	MODEL 3 (10m地点)			MODEL 4 (固定端)			MODEL 4 (10m地点)			MODEL 5 (固定端)			MODEL 5 (10m地点)		
	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値	σ_x	B.M	対理論値
理論値	5400	900	100	10800	1800	100	5400	900	100	10800	1800	100	5400	900	100
HEXE 8	2426	404	45	3877	646	36	1625	271	30	1203	201	11	566	94	10
PENTA 6	2630	438	49	3822	637	35	1833	306	34	1179	197	11	612	102	11
HETET 4	815	136	15	841	140	8	590	98	11	171	29	2	165	28	3
HETET 10	5400	900	100	10758	1793	99	5307	884	98	9154	1526	85	5453	909	101
PENTA 18	5400	900	100	12400	2067	115	5465	911	101	10770	1795	99	5731	955	106
HEXE 27	5400	900	100	12400	2067	115	5471	911	101	10765	1794	99	5738	956	106

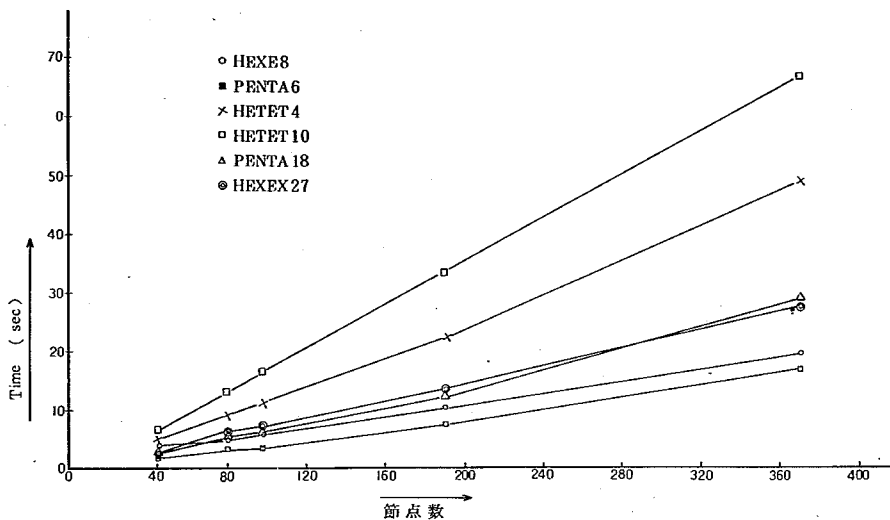


図-3-6 節点数と計算時間の関係

表-3-6 要素と計算時間の関係

MODEL 節点数	MODEL 1 369					MODEL 2 189					MODEL 3 99				
要素 Time(sec)	要素数	SK	TRIA	SOLV	計	要素数	SK	TRIA	SOLV	計	要素数	SK	TRIA	SOLV	計
HEXE 8	160	8.4	7.4	3.9	19.7	80	4.3	3.1	2.1	9.5	40	2.6	1.5	1.3	5.4
PENTA 6	320	4.3	7.6	5.2	17.1	160	2.1	3.0	1.8	6.9	80	1.0	1.9	0.9	3.4
HETET 4	160	35.3	7.7	5.7	48.7	80	17.4	3.1	2.0	22.5	40	8.7	1.5	1.1	11.3
HETET 10	20	53.5	9.9	4.4	67.8	10	26.8	4.2	2.0	33.0	5	13.4	2.0	1.0	16.4
PENTA 18	40	11.8	1.1	6.3	29.2	20	6.0	4.1	2.0	12.1	10	3.0	2.0	1.0	6.0
HEXE 27	20	13.1	9.9	4.3	27.4	10	6.6	4.2	2.0	12.8	5	3.3	2.0	1.0	6.3

MODEL 節点数	MODEL 4 81					MODEL 5 45				
要素 Time(sec)	要素数	SK	TRIA	SOLV	計	要素数	SK	TRIA	SOLV	計
HEXE 8	32	2.6	1.3	0.8	4.7	16	2.5	0.6	0.5	3.6
PENTA 6	64	0.9	1.3	0.8	3.0	32	0.4	0.6	0.4	1.4
HETET 4	32	7.0	1.3	0.9	9.2	16	3.5	0.6	0.4	4.5
HETET 10	4	10.7	1.6	0.9	13.2	2	5.4	0.7	0.4	6.5
PENTA 18	8	2.4	1.6	0.9	4.9	4	1.2	0.7	0.4	2.3
HEXE 27	4	2.6	1.6	0.9	5.1	2	1.3	0.7	0.4	2.4

SK : エLEMENT剛性マトリックス計算時間

TRIA : 剛性マトリックスの三角化に要する時間

SOLV : 連立方程式を解く時間

単位は (秒)

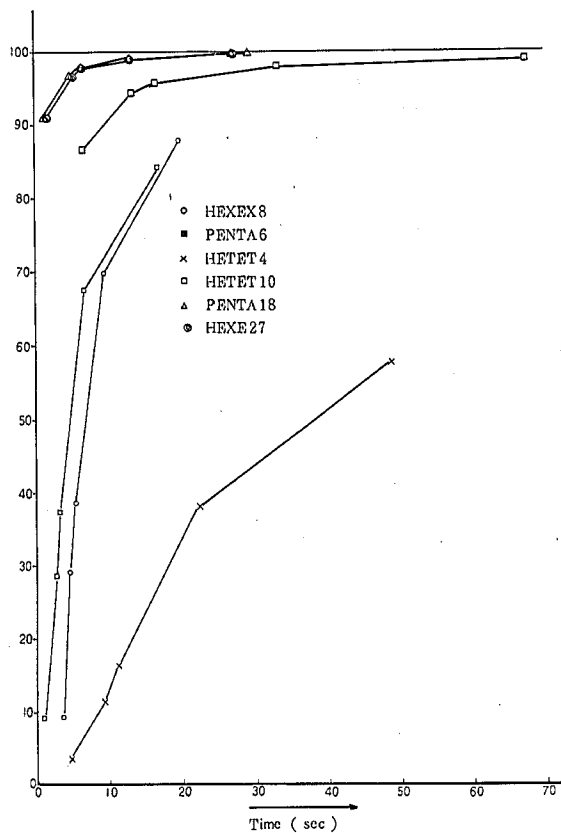


図-3-7 精度と計算時間の関係(1)
荷重ケース2 自由端のたわみ δz

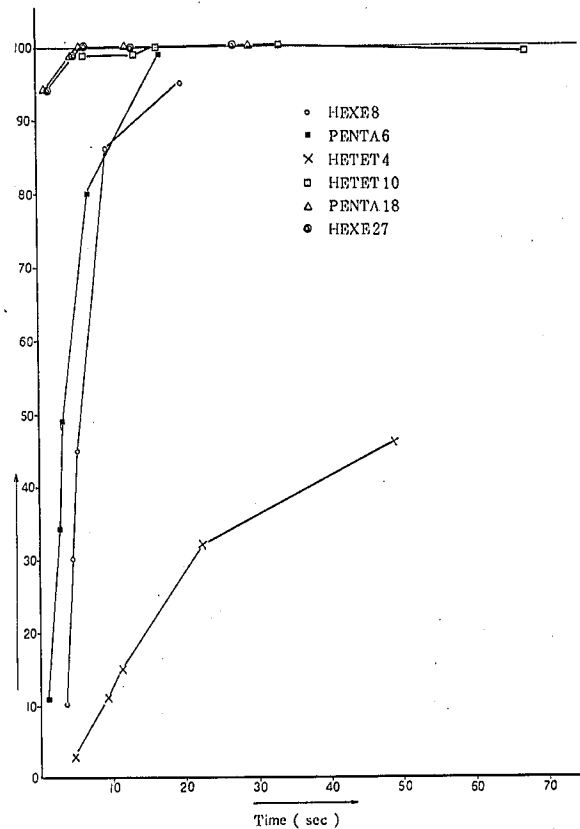


図-3-8 精度と計算時間の関係(2)
荷重ケース2 10m地点 上縁直応力 σ_x

3.2 多自由度要素による解析の精度の検討

前節でASKAの各要素を用いた場合の解析の精度について検討したが、その結果、得られた結論は中間節点を持つ多自由度要素を用いる場合が計算コストと解析精度を比較した場合、最も有利となることが判明した。従ってこれからの解析では、ASKAを用いる場合はPENTA18、HEXE27等の要素を用いるのが安い費用で所要の精度を得やすい道だと言える。

前節では片持梁のモデルに対してたわみと直応力についてみたが、実際の解析では、工学的に意味をもつのはたわみや直応力だけでなく、多くの場合、せん断応力が問題となる。そこでHEXE27を代表要素として選び更に要素分割と精度の関係について詳しく検証した。

解析モデルとしては、重力ダム、アーチダムを念頭にいった片持梁、基礎岩盤内部の応力解析を念頭にいった半無限板に帯荷重が作用した場合を選んだ。

3.2.1 HEXE27 による片持梁の解析

1) 解析のモデル

HEXE27を要素を用いて要素分割と変位応力の精度との関係について検討した。検討したモデルは表-3-5の通りである。

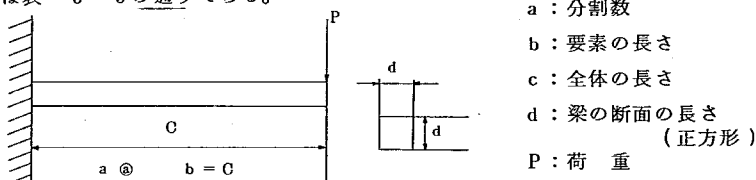


表-3-5 解析ケース一覧表

TYPE	a	b	c	d	p	TYPEの計算形状
A-1	4	2.5	10	1	3.0	
A-2	4	2.5	10	1	3.0	
B-1	4	5.0	20	2	6.0	
B-2	4	5.0	20	2	3.0	
C	4	5.0	20	1	3.0	
D-1	5	4.0	20	1	3.0	
D-2	10	2.0	20	1	3.0	
D-3	20	1.0	20	1	3.0	
E	10	-	20	1	3.0	

(ii) 解析モデルの単純梁理論による解

単純梁理論による直応力, せん断応力, 変位等を求めておく。梁理論を展開するには, 次のような仮定を設けなければならない。

仮定

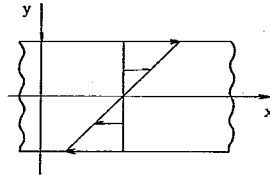
- (1) 梁は真直でその横断面は一様であり, 軸対称平面を有する。
- (2) 曲げMoment は, この対称平面内に於て作用する。
- (3) 梁を構成する材料は, 等方等質であり, かつ曲げ応力即ち繊維応力とそれによって生ずる繊維ひずみの間には, 正比例の法則が成立する。
- (4) 梁を構成する材料の引張弾性係数と圧縮弾性係数と互に相等しい。
- (5) 最初梁の縦繊維に交直していた横断平面は梁が曲ったあともやはり平面を保ちかつ梁の縦繊維に直交する。

(Bernoulli - Navier の仮定)

- (6) 梁の縦繊維は相互間に力を及ぼし合うことなく, 縦横に自由に伸縮することができる。即ち繊維応力は繊維ひずみと材料の縦弾性係数の積に等しい。

この時

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y$$



せん断応力を求める時の仮定

- (1) 梁の自由表面にはせん断応力は存在しない。
- (2) 梁の中立軸に平行する水平直線上に於て, 横断面に作用する鉛直せん断応力 $\tau' = \tau_{xy}$ はこの水平直線上では一様の強さを有する。(この仮定は梁の幅が深さに比べてあまり大きな場合には成立しない)

上図のような座標系で直応力 σ_x は, 上縁応力を σ_u , 下縁応力を σ_d とすれば,



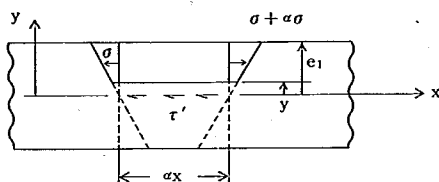
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I} y = \frac{P(l-x)}{I} \cdot y \\ \sigma_u &= \frac{M}{I} y = \frac{P(l-x)}{\frac{d^3}{12}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{6P(l-x)}{d^2} \\ \sigma_d &= \frac{M}{I} y = \frac{P(l-x)}{\frac{d^3}{12}} \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{-6P(l-x)}{d^2} \end{aligned} \right\} (3\text{の}1)$$

y 方向のたわみ δy は

$$\delta y = -\frac{P}{6EI} (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3) \quad (3\text{の}2)$$

せん断応力については少しく詳しく誘導してみる。

図のような梁の微小部分の釣合いを考える。



$$\begin{aligned}\tau' z_0 dx &= \int_y^{e_1} (\sigma + d\sigma) z_0 dy - \int_y^{e_1} \sigma z_0 dy \\ &= \int_y^{e_1} d\sigma z_0 dy \quad (3\text{の}3) \\ &= \int_y^{e_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) (dx) z_0 dy\end{aligned}$$

短形断面に於て

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad I = \frac{1}{12} b h^3 \quad e_1 = \frac{h}{2}$$

より

$$\begin{aligned}\tau' &= \int_y^{e_1} \frac{y}{I} \left(\frac{dM}{dx} \right) dy = \frac{12}{b h^3} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_y^{e_1} y dy \\ &= \frac{12S}{b h^3} \left(\frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{s}{bh} \right) \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad \therefore s = \frac{dM}{dx} \\ &= \frac{3}{2} \tau_{\text{mean}} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad \tau_{\text{mean}} \frac{s}{bh} \quad (3\text{の}4)\end{aligned}$$

(iii) 解析結果

解析結果は、たわみ、直応力、せん断応力について図-3-9に示した。

図-3-9には、B-1とB-2の結果は収録していない。この結果について簡単に説明する。

B-1:

B-1の形状はA-1に全く相似形で縮尺倍率は2倍の断面は、 2×2 長さ20となっている。いま変位 y は、

$$y = - \frac{P}{6EI} (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3)$$

で示される。Iは長さの4乗、()は長さの3乗となっているから、PをA-1に対するPの2倍に採れば荷重に対しても全く相似のモデルとなり、縮尺の対応する点ではA-1と同じ値になるはずであり、計算結果もその通りとなった。

直応力については、 $\sigma = \frac{P(1-x)}{I} \cdot y$ で表されるから σ_u, σ_d については、A-1の直の $\frac{1}{2}$ 倍となるはずであり、計算結果もその通りとなった。

せん断応力についても、 $\tau_{xy} = \frac{1}{2} \times (\tau_{xy})_{A-1}$ となるはずでありその通りの結果となった。

B-2:

B-2の形状は、B-1と全く同じ形状で $P=3$ (B-1は $P=6$) としたもので重ね合わせが成立する限り変位応力ともB-1の $\frac{1}{2}$ となるはずであり、計算もその通りの結果となった。

解析結果の図の見かたを説明する。

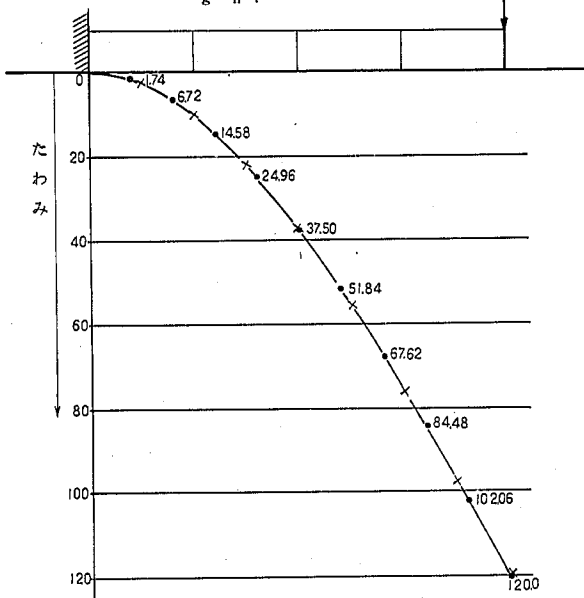
理論値は実線で計算値は×印で示してある。直応力については、上縁直応力のみについて示し

A-1

$E = 100$
 $V = 0$



$P = 3$



理論値 ●

計算値 ×

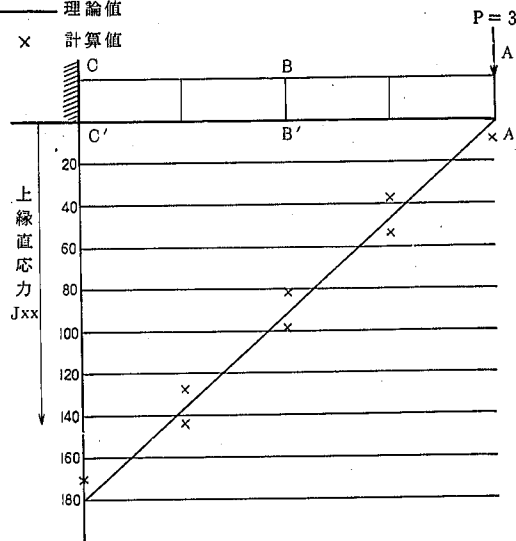
37.50

374.4

120.00

119.87

— 理論値
× 計算値



断面内せん断応力分布

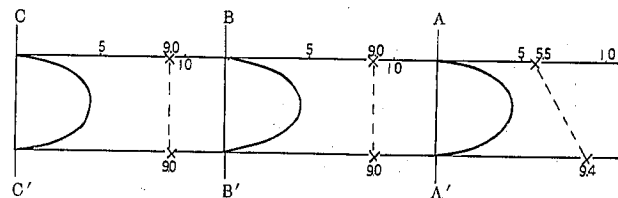


図-3-9-1 H E X E 27 による片持梁の解析結果(1)

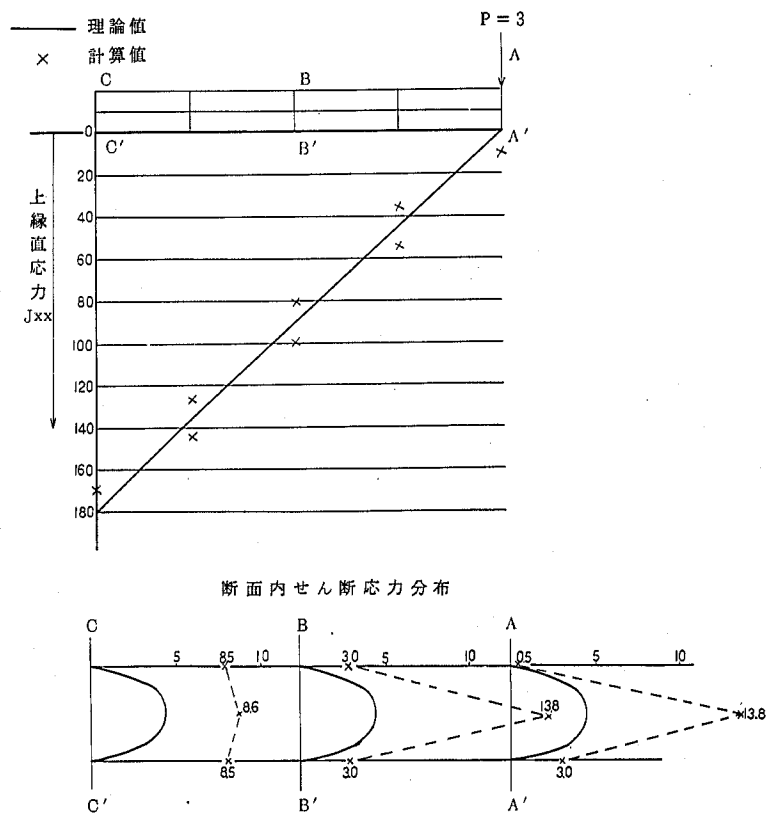
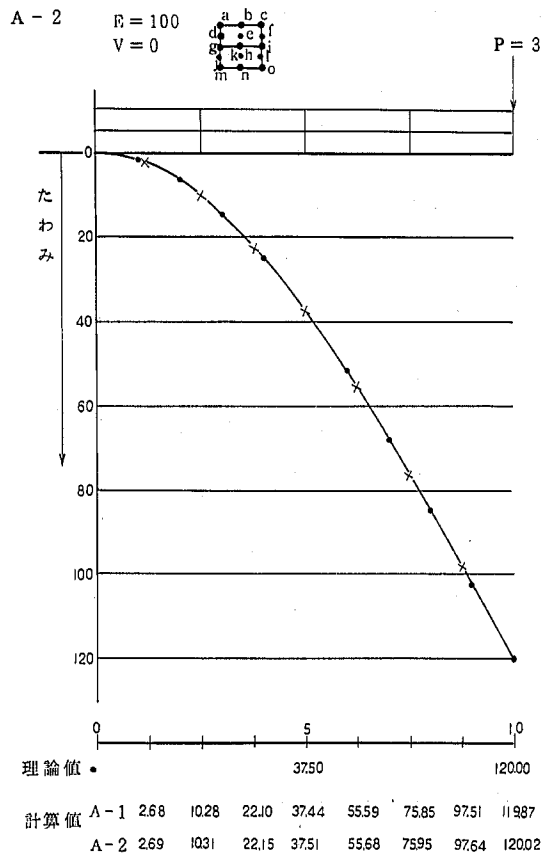


図-3-9-2 H E X E 27 による片持梁の解析結果(2)

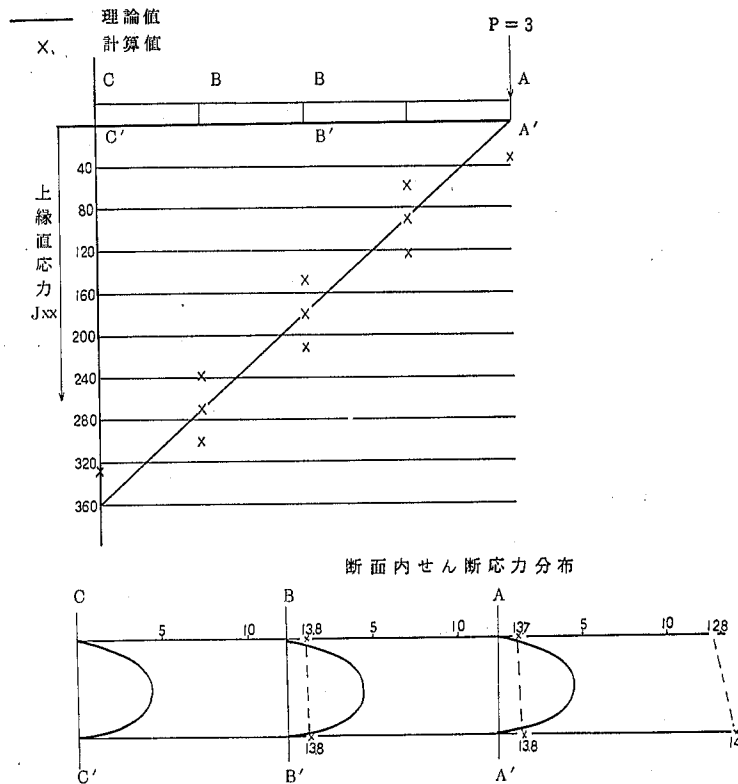
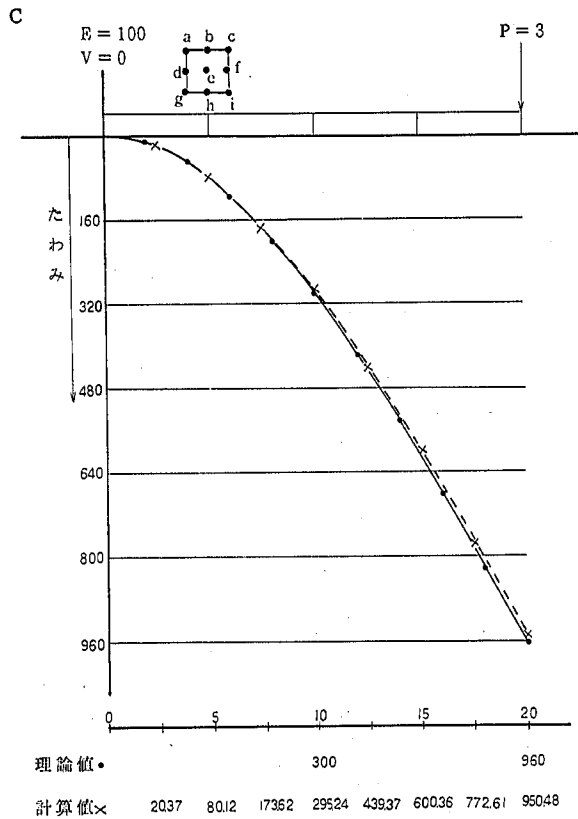


図-3-9-3 H E X E 27 における片持梁の解析結果(3)

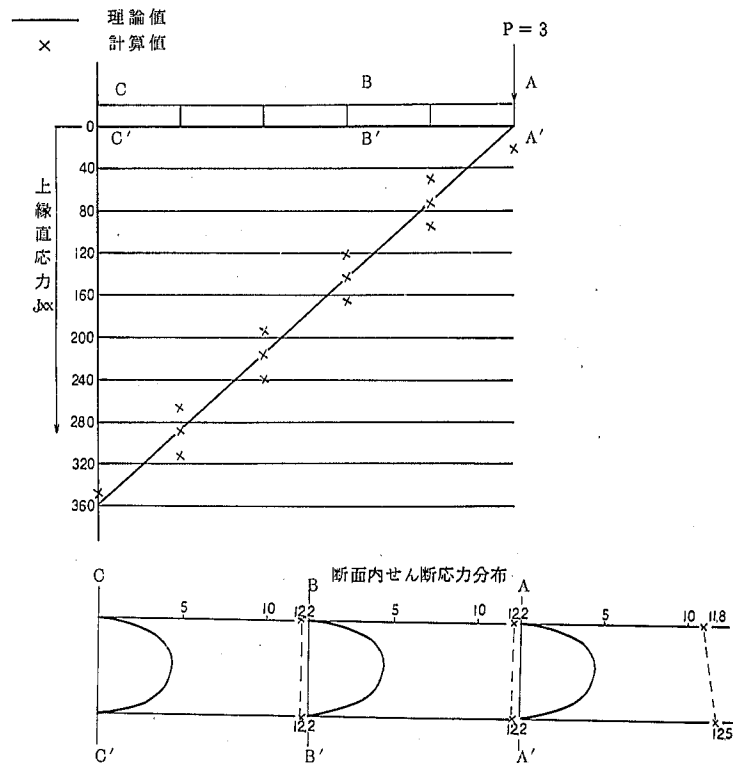
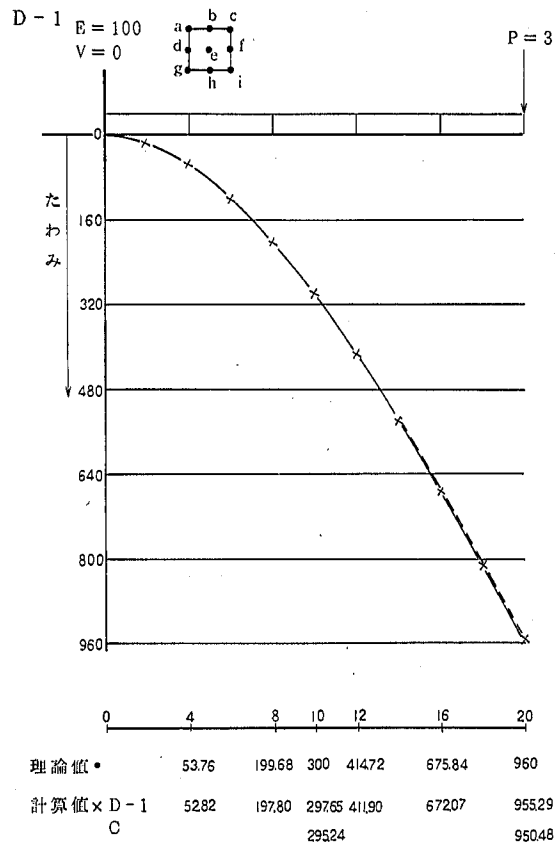


図-3-9-4 HEXE 27 による片持梁の解析結果(4)

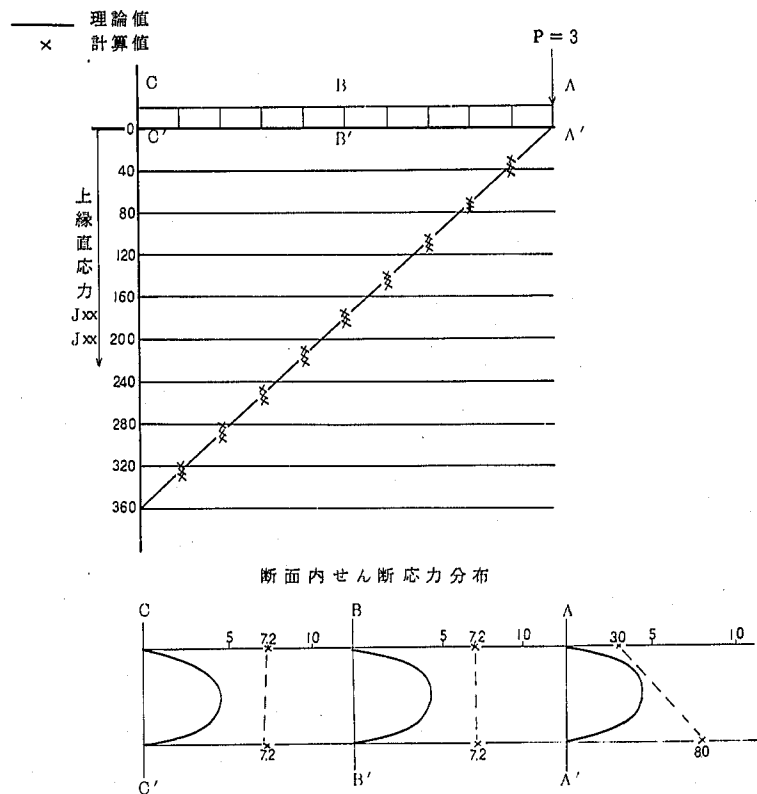
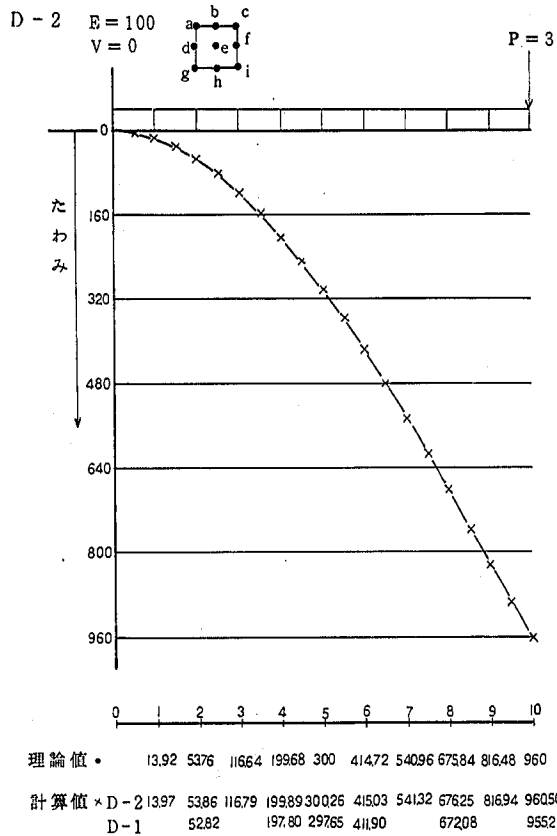
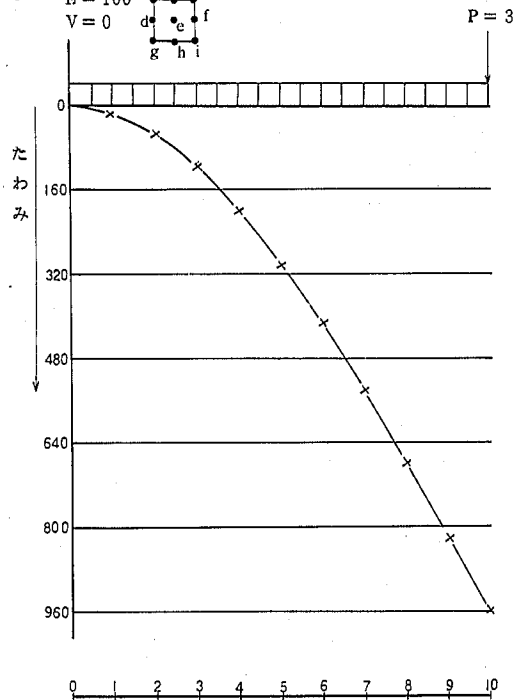
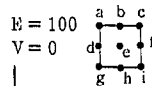


図-3-9-5 H E X E 27 による片持梁の解析結果(5)

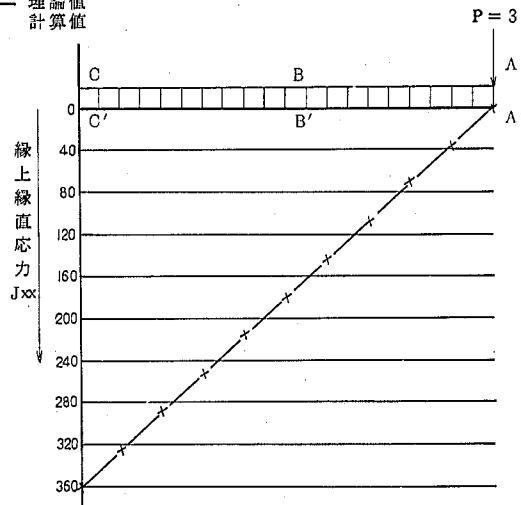
D - 3



理論値 • 1392 5376 11664 19968 300 41472 54096 67584 81645 960

計算値 × D-31403 5399 11698 20014 30057 41541 54176 67676 81751 96113
D-21397 5386 11679 19959 30026 41503 54132 67625 81674 96050

理論値
× 計算値



断面内せん断応力分布

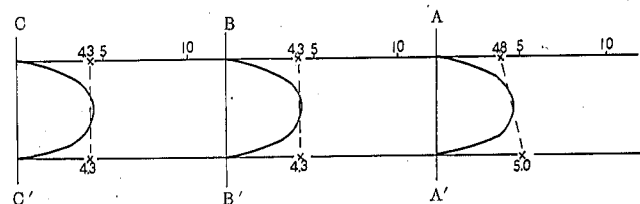


図 - 3 - 9 - 6 H E X E 27 による片持梁の解析結果(6)

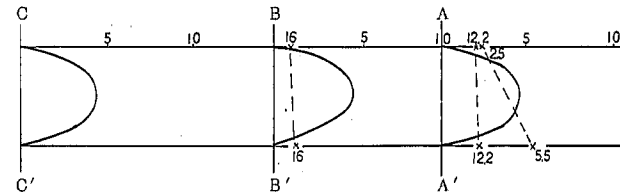
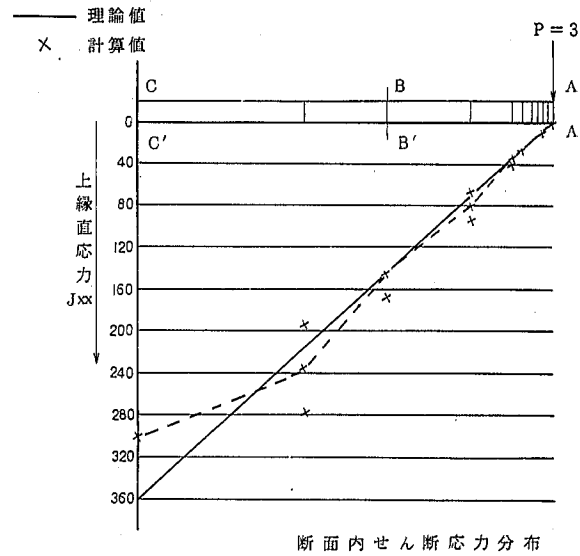
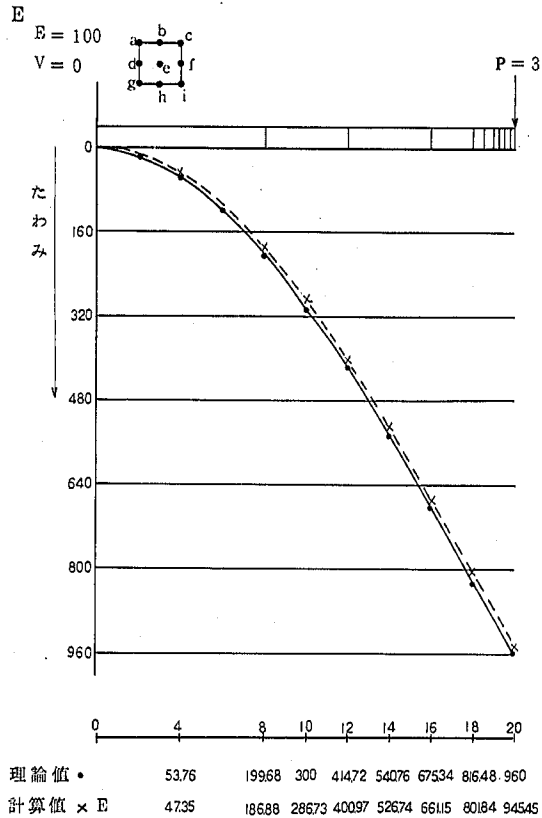


図-3-9-7 H E X E 27 による片持梁の解析結果(7)

たが節点応力は隣接する右及び左の要素の節点応力として同一箇所て2つの値を持つ(但し、固定端と自由端では1つ)。この値を両方示してある。すなわち、理論値を境にして小さな値が右側要素の節点応力、大きな値が左側要素の節点応力である。

せん断応力については、理論値(放物線分布)と比較して断面内のせん断応力分布を代表断面について表示してある。この場合中間節点の応力は通常 output されないのてこの点の応力は省いてある。

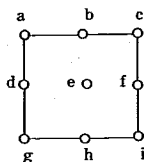
(V) 解析結果に対する考察

解析の結果より、次のことが言える。

。全体について

1. B-1 および B-2 の結果により重ね合わせが成立することがわかる。又、A-1, B-1 の結果より相似形のモデルでは全く同等の結果を示すことがわかる。
2. C~D₃ までのシリーズの結果より、要素数がふえるに従って精度があがることがわかる。節点(平均)応力、変位でみる限り C TYPE 程度の要素分割で実用上充分である。
3. 断面内で対応する節点での応力は等しい。

(右図で a と c, d と f 等)



。変位について

4. 全ての計算結果から変位は小さい方から真値に近づく。
5. D-3 の変位の結果が理論値より大きいのは、理論値が高次の微少項を省略しているから、正確ではなく、4 と矛盾しない。
6. 変位は応力に比して著しく合いが良い。
7. E タイプの変位が真値ともっとも合いが悪く、8 地点より自由端まで誤差の絶対値が変わらないのは、固定端~8 地点までの要素分割の粗さに伴う誤差がそのままのかたちで保持されるため逆に8 地点より自由端までのたわみの形状はよくつかまえている。

上縁直応力について

8. 固定端、自由端(载荷点)では、上縁応力の精度が悪いのは、平均化が行なわれていないためと推定できる。
9. 平均節点応力(左右要素節点応力の平均)ではかなり粗い分割でも理論値とよく合う。
10. A-1 と A-2 の断面内のメッシュの粗密に対して精度の改善がみられないのは、A-1 タイプで応力の直線分布を既につかまえてきていることを示す。要素応力に対して精度があがらないのは、応力の変化方向(この場合 x 方向)に対して直交する方向の要素分割の粗密は精度にあまり影響を与えないといえる。
11. E タイプの上縁応力の精度は悪い。しかも平均節点応力の精度が悪いことは、要素応力の平均に際して要素分割の粗密に応じて要素応力の誤差を消し切れないことを示している。
12. 上縁直応力と下縁直応力の比較によれば絶対値は3 ケタまで等しい。

せん断応力について

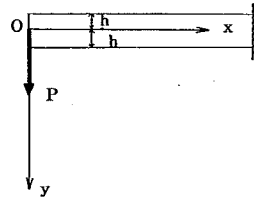
13. せん断応力の精度は直応力の精度に比して非常に悪いがこれはせん断応力が直応力に比して高次の分布（2次）であることが主原因であると思われる。

この点について、少し詳しく説明を加えよう。既に述べたが Beam Theory によれば、右図のように座標系をとると

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau = -\frac{P}{I} \frac{1}{2} (h^2 - y^2)$$



となるが、これから変位を求めると、(x, y)点におけるx方向変位u, y方向変位vは

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y - \frac{\nu P}{6EI} y^3 + \frac{P}{6GI} y^3 + \left(\frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI} \right) y$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI} xy^2 + \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{P\ell^2}{2EI} x + \frac{P}{3EI} \ell^3$$

となる。従って、HEXE 27 を用いる限り、この変位分布は表現できないわけであり、

(Hexe 27 の変位分布参照)、要素を細かく分割することによって、徐々にこの変位分布に近似した分布形が得られることになる。今、要素分割を十分細かく行なって、変位分布が十分な精度で得られたとする。この時、 σ_x と τ_{xy} の精度について考えよう。

σ_x τ_{xy} は変位, u, v より次式によって算出することができる。

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

従って、 σ_x には、u, v における y^3, x^3 の項は無関係であり、 τ_{xy} にはこの項が影響してくることがわかる。

一方、u, v の精度は主として、HEXE 27 で表わせない y^3, x^3 の項の近似度によって左右されることから、この項を含む τ_{xy} の方が σ_x より精度が落ちることが理解できよう。又、 τ_{xy} の精度が σ_x の精度よりも劣るのは応力が変位の微分形で表わされるためで、 y^3, x^3 が十分に近似できても、その微係数が十分よい精度をもつとは必ずしもいえないためである。なぜなら、微係数の方が真値に収束する割合が遅いためである。

14. A-2 は A-1 に比して精度の改善が行なわれていると考えられ、応力の変化方向の要素分割の粗密が精度に大きく影響する。

15. 軸方向 (x 方向) 要素分割の粗密がせん断応力の精度に関係するが、この影響はさ程大きく

ない。

16. 荷重端でのせん断応力の乱れが大きい。

17. 要素の分割を一定に行なった A, B, D タイプではせん断応力は、荷重端から、ある程度離れた部分では一定に保持される。一方, E タイプでは, 要素分割が細かい部分で真値に近付くという傾向を示す。

以上解析結果から得られる定性的に整理される事項について述べたがここで注目すべきことは直応力とせん断応力が同じように変位の微分形で示されるものであるが, 両者の解析結果には大きな差を生じるということである。これはすでに述べたように, せん断応力の分布形が複雑であること, 応力の変化方向に対する分割が充分でないことに由来するものであるが, いま解析者が直応力のみを問題として考えるなら, せん断応力の精度が悪いのは問題とならない。逆にせん断応力が問題となるのであればすでに示した要素分割では不充分となる。

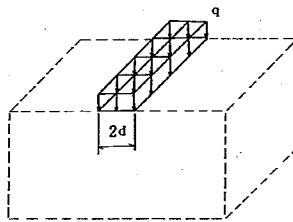
片持梁のせん断応力に関して参-2 にその分布形をつかむためにどの程度の要素分割が必要であるか示してある。この結果から Hexe 27 に使う場合, 応力, 変化方向に最低 4 分割が必要であることがわかる。

次にこれまでに示した片持梁の解析結果を利用して, 同種の問題に対して要素分割を決めることができる。それには, 重ね合わせと, 相似則を用いて行なうのであるがこれに関しては, 3.4 で詳しく論じることにする。

3.2.2 H E X E 27 による半無限体に帯荷重が作用する場合の Boussinesq の解の解析

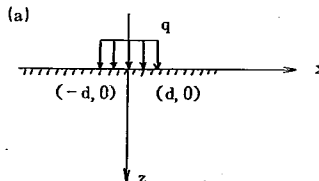
(i) 概 説

図のように半無限体に幅 $2d$ の等分布帯荷重 q が載荷する場合の応力分布に対して H E X E 27 による解析解の精度を検討する。この状態は基礎岩盤にダムからの力が作用する状態を近似しており, この種の計算の参考になる。

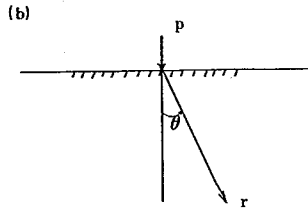


(ii) 理論解

上の問題は次のような平面歪状態での 2 次元問題に帰着される。



さらにこれは次の荷重状態に対する解を積分することにより求められる。



この問題に対する応力関数 ϕ は次式で与えられる。[※]

$$\phi = -\frac{p}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (3 \text{ の } 5)$$

従って、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi \\ &= -\frac{2p}{\pi r} \cos \theta \end{aligned} \quad (3 \text{ の } 6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi \quad (3 \text{ の } 7)$$

$$\begin{aligned} &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3 \text{ の } 8)$$

直交座標系 (x, z) に対して、上式は次式で改められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2p}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2pxz^2}{\pi(x^2 + z^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3 \text{ の } 9)$$

これを適当に積分すれば、問題 (a) に対する解は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{\pi} \left\{ T(x, z) - 2z(d^2 - x^2 + z^2) K(x, z) \right\} \\ \sigma_z &= -\frac{q}{\pi} \left\{ T(x, z) + 2z(d^2 - x^2 + z^2) K(x, z) \right\} \\ \tau_{xz} &= -\frac{4q}{\pi} xz^2 K(x, z) \end{aligned} \right\} \quad (3 \text{ の } 10)$$

※ ϕ は 調和関数である。即ち

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi = 0$$

又、問題 (b) の境界条件

$$r \rightarrow 0 \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{で} \quad \sigma_\theta, \tau_{r\theta} = 0$$

$$r = \delta r \text{ で}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \delta r d\theta = -p$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) \delta r d\theta = 0$$

を満たしているから、 ϕ はこの問題の解である。従って、任意の点での応力は応力関数 ϕ に次の演算をすることにより求められる。

$$\sigma_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} T(x, z) &= \tan^{-1} \frac{-2dz}{d^2 - x^2 - z^2} \\ K(x, z) &= \frac{d}{\{(d^2 + x^2 + z^2)^2 - 4d^2 x^2\}} \end{aligned} \right\} \quad (3の11)$$

(iii) ASKAによる解析結果

ASKAによる解析に付随する誤差には次の3種の誤差が考えられる。

- (1) 有限要素法自身が持つ誤差……… 要素を細かくすることによりある程度改善できる。
- (2) ASKA使用者側に起因す……… モデル化が適切でないために生ずる誤差
- (3) 計算誤差

このうち(3)については実用上問題はないと思われるので(1)および(2)を検討の対象として扱う。これらを調べるに当たり、次の3モデルを作成した。

B-1 要素を細かく分割し、半無限体を有限のモデルとして取扱う際に生ずる誤差を消去するため境界条件を規定変位の形で代入したもの。

B-2 B-1の境界条件を固定支持にかえたもの。

B-3 B-2の要素分割を粗くしたもの。
これを図示すると、図-3-10のようになる。
なお、固定条件は、側面に於ては面に垂直方向のみ固定、底面は全固定とした。又、モデルは対

(B-3)

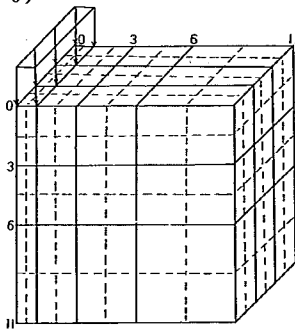
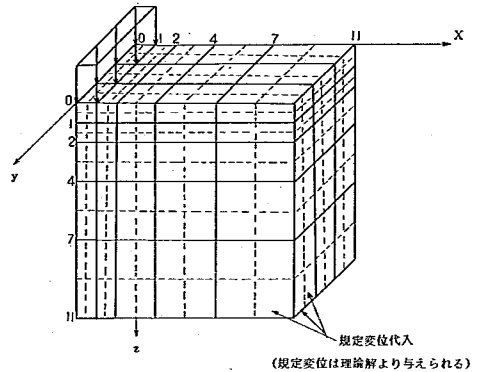


図-3-10-2 解析モデル

(B-1)



(B-2)

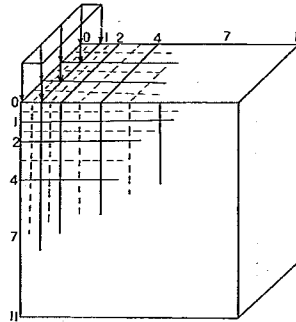


図-3-10-1 解析モデル

称性を考慮して、 $x \geq 0$ のみを考えた。

ケースB-1は最も理想的なモデルであり、前述した(2)の誤差は小さいと思われる。ここで生ずる誤差は主として(1)の誤差に起因する。

応力は各鉛直断面とほとんど一定であり、その結果は次の表の通りである。

表-3-6 ケースB-1の応力解析結果

σ_z						
	X=0 断面			X=4 断面		
Z	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	t/m^2	t/m^2	%	t/m^2	t/m^2	%
0	1.000	1.075	7	0	-0.002	-
1	0.818	0.840	3	0.006	-0.001	-
2	0.550	0.528	4	0.029	0.029	0
4	0.306	0.288	6	0.083	0.090	8
7	0.180	0.171	5	0.104	0.109	5
11	0.115	0.111	3	0.090	0.092	2

σ_x						
	X=0 断面			X=4 断面		
Z	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	t/m^2	t/m^2	%	t/m^2	t/m^2	%
0	1.000	1.025	3	0	-0.001	-
1	0.182	0.160	12	0.074	0.064	14
2	0.041	0.017	59	0.103	0.106	3
4	0.006	-0.004	-	0.078	0.087	12
7	0.001	-0.002	-	0.033	0.037	12
11	0.000	-0.001	-	0.012	0.012	0

τ_{xz}						
	X=0 断面			X=4 断面		
Z	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	t/m^2	t/m^2	%	t/m^2	t/m^2	%
0	0	-0.081	×	0	-0.012	×
1	0	0.014	×	0.020	0.009	55
2	0	0.007	-	0.062	0.052	16
4	0	0.001	-	0.080	0.085	6
7	0	0.000	-	0.058	0.062	6
11	0	0.000	-	0.033	0.003	91

(注) ×は精度が悪いことを示す。

—は理論値がほぼ0となったため、精度が悪いが絶対誤差は小さいことを示す。

ケースB-2は境界条件の影響をみるためのもので、境界は応力が荷重の1/10程度になる所に設定した。結果は以下に示す。

表-3-7 ケースB-2の応力解析結果

σ_z						
Z	X=0 断面			X=4 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%
0	1.000	1.005	1	0	0.001	-
1	0.818	0.868	6	0.006	0.003	-
2	0.550	0.528	4	0.029	0.029	0
4	0.306	0.293	4	0.083	0.092	11
7	0.180	0.185	3	0.104	0.117	12
11	0.115	0.152	32	0.090	0.115	28

σ_x						
Z	X=0 断面			X=4 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%
0	1.000	1.003	0	0	-0.067	x
1	0.182	0.100	45	0.074	0.011	85
2	0.041	-0.026	x	0.103	0.064	38
4	0.006	-0.033	x	0.078	0.058	26
7	0.001	-0.017	x	0.033	0.028	15
11	0.000	-0.008	-	0.012	0.020	67

τ_{xz}						
Z	X=0 断面			X=4 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%
0	0	-0.100	x	0	-0.011	x
1	0	0.018	x	0.020	0.007	65
2	0	0.006	-	0.062	0.049	21
4	0	0.001	-	0.080	0.077	4
7	0	0.000	-	0.058	0.045	12
11	0	0.000	-	0.033	0.001	97

ケースB-3はメッシュの粗さによる影響をみるためのものである。結果を以下に示す。

表-3-8 ケースB-3応力解析結果

σ_z						
Z	X=0 断面			X=3 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%	$t/m\bar{t}$	$t/m\bar{t}$	%
0	1.000	1.082	8	0	-0.021	x
3	0.396	0.414	5	0.114	0.107	6
6	0.209	0.209	0	0.136	0.150	10
11	0.115	0.147	26	0.100	0.129	29

σ_x

Z	X = 0 断面			X = 3 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
0	t/m^2 1.000	t/m^2 0.865	13%	t/m^2 0	t/m^2 -0.096	×
3	0.014	0.031	×	0.102	0.068	33
6	0.002	-0.018	-	0.034	0.019	44
11	0.000	-0.009	-	0.008	0.008	0

 τ_{xz}

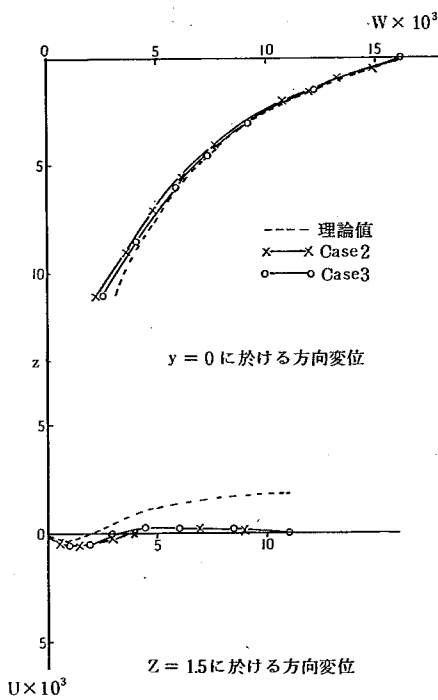
Z	X = 0 断面			X = 3 断面		
	理論値	計算値	誤差	理論値	計算値	誤差
0	t/m^2 0	t/m^2 -0.057	×	t/m^2 0	t/m^2 -0.047	×
3	0	-0.012	-	0.106	0.118	11
6	0	-0.001	-	0.066	0.060	9
11	0	0.000	-	0.027	0.002	93

(iv) 解析結果に対する考察

ケースB-1は、境界条件(規定変位代入)と節点数(847)を考慮すれば十分な精度が得られるものと思われる。

結果をみると、全般的にかなりの精度が得られている。しかし、荷重載荷点近辺では精度が少しおちている。特に τ_{xz} は(0.0.0)点に於て $-0.081 t/m^2$ (理論値 $0 t/m^2$)と非常に大きな誤差が得られる。又、同点で σ_z が $1.075 t/m^2$ で載荷々重 $1.000 t/m^2$ との力の釣合条件が保たれていないのに留意されたい。これはASKAは変位法を用いているためこれは要素の細かさを高めても完全に除去できない。

ケースB-2は、B-1の規定変位を固定変位におきかえたものである。この結果をみると σ_z に対してはB-1とほぼ近い値を得ているが σ_x に対してはかなりの差が生じている。これは、Z方向は $Z=11(m)$ で固定しているのに対し、X方向は $X=0, 11$ の2面で固定し



(注) Z方向変位は $Z=0$ でそろえてある。

図-3-12 変位分布

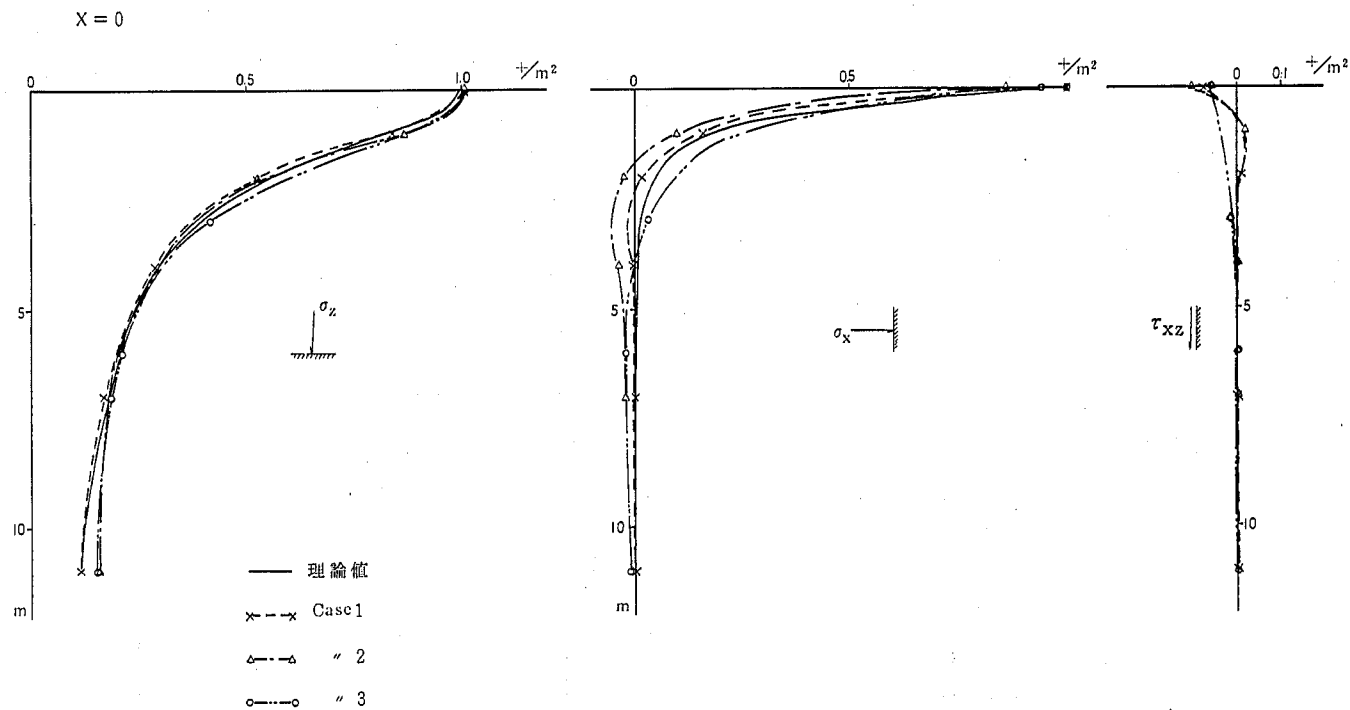


図-3-11-1 解析結果の比較 (1)

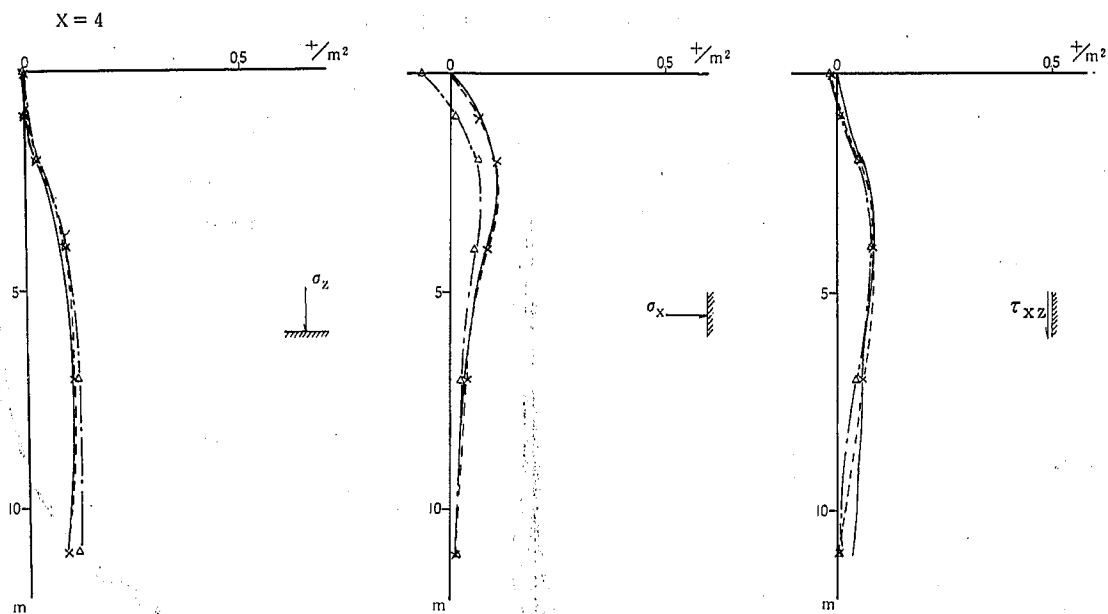


図-3-11-2

解析結果の比較(2)

ているためと考えられる。これは図-3-12の変位分布を見れば一層明らかになる。次に、固定点での応力が理論値とかなりの食い違いを示すが、これは固定点から離れるとただちに理論値に近づき、固定点の誤差は実際の応力を知りたい部分にはほとんど影響を与えない。

ケースB-3は、B-2のメッシュを粗くしたものである。

この結果を見ると、 σ_z に対してはB-2とほぼ近い値を得ているが σ_x τ_{xz} に対してはかなりの差が得られている。従ってこのメッシュは多少粗いと思われる。

以上の結果をまとめると次のようになる。

- (1) HEXE 27 を用いるとかなりの精度が得られる。
- (2) 荷重載荷近辺では精度が落ちる。
- (3) 応力の精度は各成分に於て異なる。これは境界のとり方により定まる。
- (4) 境界点での応力はかなりの誤差をもつが、これは内部の応力にさほど影響を及ぼさない。

3.3 解析の精度とは

一般に我々は“精度”という言葉をなげなく使っているが、厳密な意味を追及するとなかなか難しい。ここでは、“精度”あるいは“誤差”を理学的に用いている。すなわち、

$$\text{精度} = \left\{ 1 - \frac{|\text{基準値} - \text{解析値}|}{\text{基準値 (理論値)}} \right\} \times 100\%$$

$$\text{誤差} = \frac{|\text{基準値} - \text{解析値}|}{\text{基準値 (理論値)}} \times 100\%$$

である。あるいは、解析値が理論値より大きい小さいかを判断できるように理論値に対する係数として、

$$\text{理論値に対する係数} = \frac{\text{解析値}}{\text{基準値}}$$

として整理したものもある。

さて、精度、誤差は、数学的には、前述のようにして、算出されるべきであることは当然であるが、ここで取り上げている工学上の諸問題については、視点を変えて精度を見る必要を感じる。前節のBousinesqの解を基にした、解析精度の検討では、例えば、ケースB-1のせん断応力 τ_{xy} は、表に示すように、理論値は0であるから、上述の式で誤差を表すならば、 ∞ にしかなくようなない。従って誤差だけをみると、この解析の精度は著しく悪いことになるが工学的には、多くの場合、絶対誤差が問題になることが多く、理論値0に対して、 $-0.081 \text{ } \mu\text{m}^2$ が誤差の絶対値の最大と考えると工学上この値が実際には、何ら問題がないことを考える時、実用上は差し支えないと言える。更にケースB-2の境界を固定したものは、変位の理論値を境界に入力したのより、境界付近の応力は著しく、精度が悪い。これは境界を固定にしたため当然のことである。一方実際の諸問題を解析する場合は、当然半無限のものもどこかに境界を設定しなければならない。そして、半無限を有限にした場合、前述のように境界の変位を入れるべきもないから

固定にせざるを得ない。この様な場合、誤差が大きくて悲観的かと言えば、全くその逆である。すなわち、B-1、B-2の比較では、境界付近の応力の精度は悪かったが、内部もしくは、載荷付近の応力は、殆んど影響はなく、ある程度の精度を有することが結論される。このことは、工学上もっとも問題となる応力の絶対値が大きい付近、載荷付近では精度が良いことになり、実用上、境界付近の応力が知りたいわけではないので、その付近の精度が悪いことは何ら苦にならないのである。従って、精度をみる場合には、一律にながめるのではなくて使用者の価値判断の大小に基づいてみるべきであり、このことは、工学と理学の重要な相違点である。

3.4 所要の精度を有し、経済的に解析を行なうために必要な要素・要素分割・境界条件に対する考察

有限要素法による解析で最も問題となるのは、その Output の精度である。これは主として使用要素・メッシュの切り方・境界の位置及び支持条件によって定まってくる。

使用する要素は既に述べたように節点数の多い要素を使用することが望ましい。

つぎに要素分割について説明を加える。メッシュを切る際の原則は次の2つである。

1. 応力が集中している所ほど細かく、応力分布が一様ないしは応力値が小さい所は粗く分割する。
2. 極端に偏平な要素を使用しない。

1については各要素内の応力を一様にするのが望ましいことを表現しているわけであり、2については、さらに計算中の桁落ちによる誤差を少なくする要領を述べている。

そのほか、次のことも心得ておくことが望ましい。これは分割が粗い時重要になる。

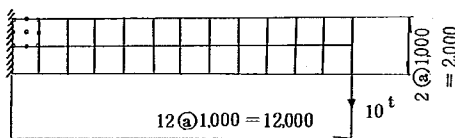
3. 隣接する要素の大きさは極端に変化させない。

これは節点応力を出す際にアベレージング（平均化）という操作を行なうためで、これによって隣接する要素の応力の誤差が打消されるが、この際要素の大きさをそろえておくことが誤差の絶対値をそろえる上で有利となるからである。

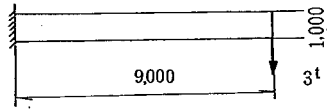
以上の説明はあまりに抽象的であり、実際の作業を行なうためにはもっと定量的な議論が必要となる。しかしこれは経験的要素が極めて支配的であり定量的説明を十分に行なうのは現在の所不可能である。従って、要素分割を行なう際は先例を参考にして行なうのがよい。

その際、参考になるのが幾何学的相似性と重ね合わせの原理である。これを例題によって説明する。

（例題） 下のような片持梁のメッシュ切りでAの精度が得られた。

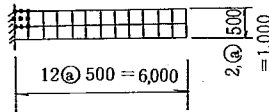


この時、次の片持梁でA%の精度を得るためのメッシュは如何？

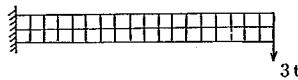


(解) 荷重に対しては重ね合せの原理より(当然ながら有限要素法でもこの原理は成立する)メッシュ分割には無関係である。

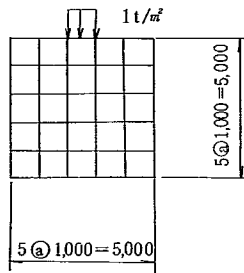
次に幾何学的相似性より、例題のメッシュは下図と同値である。



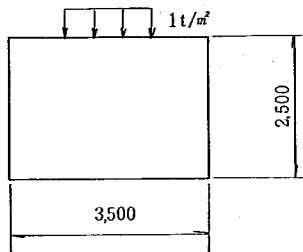
従って与えられた問題の答えは次の通り



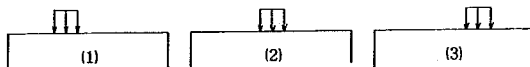
(例題) 下の様なメッシュでA%の精度が得られた。



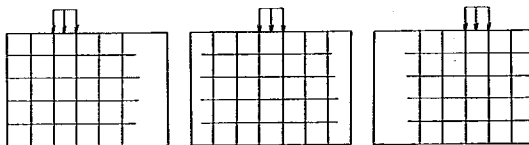
この時、次のモデルでA%の精度を得るためのメッシュは如何？



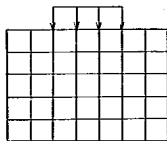
(解) 荷重を次の3つに分割する。



各ケースに対し、次のメッシュで十分である。

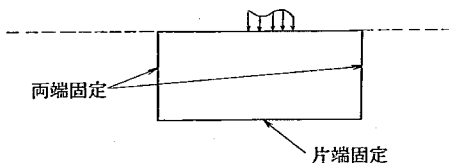


従って次のメッシュで十分である。

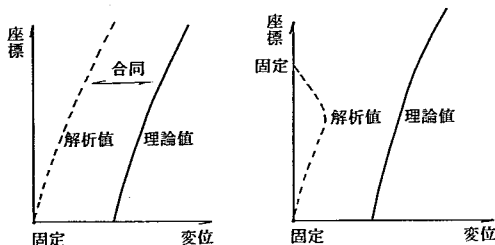


最後に境界条件について述べる。無限体を解析するためには、これを有限体で近似しなければならない。この際どの位の大きさのもので近似すればよいかが問題となる。この点については、モデル作成上極めて重要なことであるが、現在はまだ定量的な説明を加える段階に至っていない。しかし、これもメッシュ切りの場合と同様に、幾何学的相似性を用いて決定することができる。

なお、Boussinesq の解の解析で述べたが、図の様に、両端に境界を設ける時は、変位が完全に拘束されてしまうため、片端固定の場合より、境界を遠方に設ける必要があろう。



即ち、片端固定の時は、変位分布は合同な分布形状を保ちうるが、両端を固定した時は、合同な形を保ちえず、従って、その変位分布の微係数で表わされる応力は、全く理論とはかけはなれた値となるからである。



次に、境界の支持条件は、モデルに加わる外力・内力の方向を考慮して決定しなければならない。例えば、自重を考慮する時は、側面境界の鉛直方向支持条件を自由端にする必要があり、境界面でせん断抵抗が期待できる場合は、その方向を固定しなければならないように、力の伝達の有無を考えて、支持条件は決定されるべきである。

4 3次元有限要素法 (ASKA) を使用する場合の注意

4.1 使用上の制約条件

ASKA に於ける解析問題の上限は、次の制約より定まる。

- 1) 記憶装置の容量
- 2) 計算費用
- 3) 精度

このうち、実際に問題となるのは、2) 計算費用であり、これは解析する問題の重要度によって定められるべきである。計算費用は、節点数と使用する要素の関数である。節点数については3次元問題の場合、2次元問題に比べ極端に大きくなることを心得なければならない。例えば約2,000点の節点数でHEX27を使用した場合、要素は 6^3 個になる。従って細かい形状は表現できず、又精度の面からメッシュを切ることもできない事もある。従って使用する要素を変えることも考慮されるべきこともありうる。

又、この時次の様な手法を採ることがある。すなわち、計算を2段階に分け、第1段階は粗いメッシュで計算する。第2段階では、必要な範囲をとりだし、第1段階の変位 Out Putを規定変位の形で第2段階の境界条件として In Put して計算を行なう方法である。これにより境界の影響を取除くため解析に不要な領域までメッシュを切ることなく、必要な部分だけを細かいメッシュに切って応力計算を行なえるわけである。(図-4-1 参照)

しかし、精度上は、第2段階の計算の精度は第1段階の計算の精度によって大概規定されてしまう。これは第2段階の計算はあくまで第1段階の変位を境界条件としているためで、真値とは違った条件の下で計算をしているからである。それにもかかわらずこの様な手法が採用されるのは、変位の精度が応力の精度よりも格段と優れているためである。これは ASKA が変位法を採用しており、応力は変位の微係数により求められるからである。

なお、この際、規定変位の入力にかなりの労力を要することを留意されたい。

以上述べてきたとおり、3次元解析は、節点数によってその規模が限定されてしまい、十分な精度と多くの情報を得るには、計算費用を度外視し

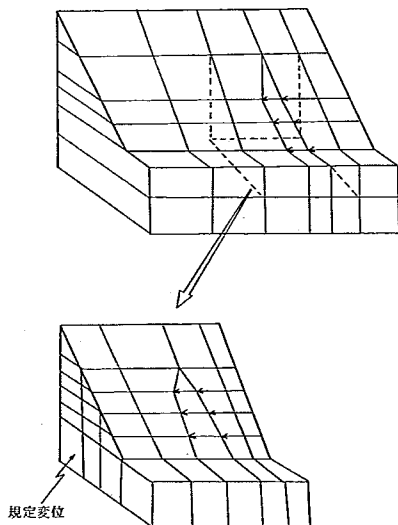


図-4-1

たメッシュ切を必要とする。従って、3次元解析は、かなりスレンダーなモデルに対しては有用な武器になりうるが、マッシブなモデルに対しては、3次元 FEM の有用性が認められないか、十分な威力を発揮できないこともありうるわけであり、3次元解析を実行するにあたっては、十分に検討を加える必要があろう。

5 ま と め と 今 後 の 研 究 の 展 望

ダム工学に限らず構造物中に生ずる応力を正しく求めることは、合理的な設計を行なうには、不可欠である。この場合、問題によっては、3次元応力状態を求めることが必要となる場合も多い。

3次元応力解析には、現在のところ有限要素法を用いるのがもっとも実用的な手段と考えられるがこの有限要素法も解析の精度等について基本的な知識の集積が少なくと解析結果にどの程度の信頼性があるか判断するのが難しい。そこで既存の3次元有限要素法のプログラム ASKA について種々検討を加えその汎用性について検討したものである。本報告で述べた検討の結果から次の点が結論される。

1. ASKA を用いて3次元応力解析を行なった場合、注意深い解析を行なえば、工学の問題については、実上用差し支えない程度の精度を有する解析結果を得られる。
2. この場合、所要の精度を得るにもっとも経済的な方法は、ASKA の保有する要素ライブラリーのうちでも、中間節点を有する多節点要素 PENTA 18, HEXE 27 の組み合わせとして解くのがよい。
3. 荷重載荷点、構造物の境界等応力の変化が大きい部分では、要素分割を密にする必要がある。
4. この場合、極端に大きさの異なる要素を隣接させることは、精度を悪くする。従って漸次要素の大きさを変化させるのがよい。
5. 解析する応力分布の次数によって、要素分割を変える必要がある。この場合、生じる誤差は応力分布の複雑さによって変わるもので片持梁の解析例でみる直応力とせん断応力のようなものである。
6. 境界付近は精度が悪いのは、既に述べた通りであるが、境界条件の不備は致命的なものではない。
7. 解析されたものの精度は一様ではないので常に工学的な“精度”を頭に入れて解析結果を見る必要がある。
8. 3次元解析された全ての結果は、それが理論解と対比されておれば解析の際の参考となり得る。その根拠は、重ね合せの原理と相似則である。その取り扱いには例に示す通りである。

次に ASKA の Hexe 27 を用いて解析を行なう場合にどの程度の計算コストがかかるか示しておこう。図-5-1に要素数と計算時間の関係を示してある。但しこの中には、チェックラン等の時間は除いてあり本計算に要する費用のみである。計算時間は様々な要因によって異なるので図に示したようにかなりのバラツキがある。我々は連立方程式を解く時間が支配的であると考えがちだが実際にはそれ程でもなく要素数と計算時間はほぼリニアになると考えてよさそうである。

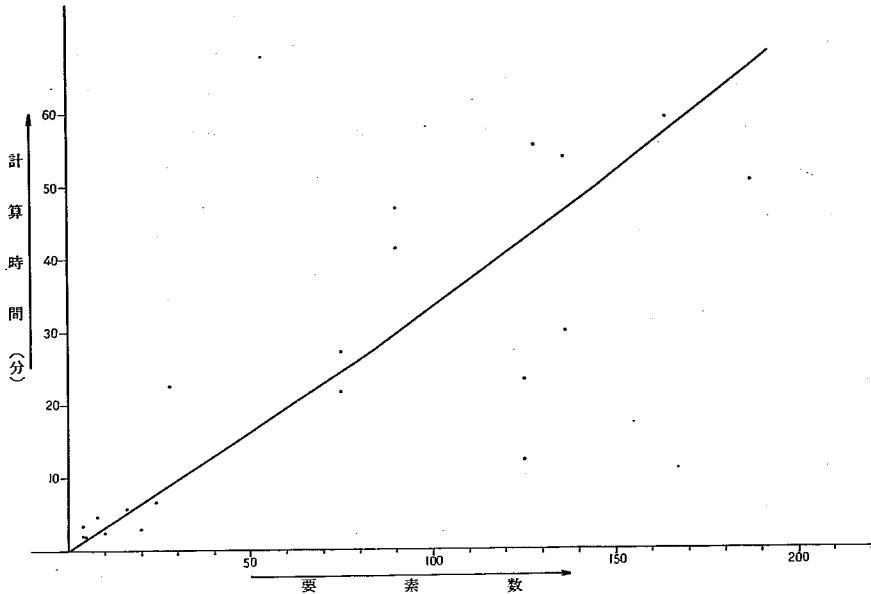


図 - 5 - 1 要素数と計算時間の関係

また計算費用としてはこれ以外に manpower が加算されることも留意しておく必要がある。

○ 今後の研究の展望

ASKA が優れたプログラムであることは、既に述べた通りであるが、汎用性をめざしたものであるのも、無駄があるのも事実である。

例えば、構造物中に生ずる応力は、一様ではなくその構造物にそれぞれ特有の性質を有する。片持梁の直応力は一次分布、せん断応力は二次分布である。このような場合に、両者の応力を適当な精度で得る要素分割は、既に述べた様に異なるもので、この場合、せん断応力を正しく解析するには、かなり細かい要素分割を必要としたが、直応力は既にずっと以前の粗い分割で理論値に近い値をおさえていることは、既に見た通りである。

あらゆる応力分布を有するあらゆる構造物の解析が可能のように ASKA は出来ている。従がって、変位法における変位分布の仮定は全ての方向に対して同等である。

しかしながら、我々工学の各分野が扱う構造物は、多種多様のもではなく限定されている。従がって相手とする構造物の応力分布に適した要素、変位分布の仮定が可能ははずである。このようにすることによって更に粗い要素分割、安い費用で精度のよい解析が可能となるはずである。今後はこの点に着目した研究を行なう必要がある。

次に解析の問題点としては、入力データの作成である。単純な形状であれば、自動要素分割

は可能であり、当研究室でも、アーチダムの自動分割のためのプログラムを作成している。しかし、ダム工学でしばしば相手にする基礎岩盤のモデル化等は非常に煩雑な作業の代表的な例である。従がって任意のモデルを自動分割できる方法も今後の重要な研究課題である。

最後にこの報告では、本文でも述べている通りあらゆる解析結果が次の解析の参考になるということと今まで行なった解析例は全て網羅することに務めた。このため大部となり簡明さにかけるところもあると思われるが御容しや願いたい。

参考 1 薄層を含む要素分割に伴い応力値に生ずる誤差

有限要素法に於ては極端に薄い要素を用いると大きな誤差が生じるとされているが、場合によっては、やむをえずこの様な要素を使用することがある。この時応力分布にどのような変化が生ずるかを調べてみる。本検討に使用したモデルは、下図のようなものであり、これを B-2 と比較してみた。

解析結果を以下に示すが、B-2 とほとんど一致した応力値を示している。これは、B-2 に於て、既に十分な応力の精度が得られているため、薄層を挿入することにより生ずる誤差が少ないものと考えられる。片持梁に於ては、せん断応力が大きな誤差をもつため、大きさの異なる要素を隣接するとアベレージングによる誤差の相殺ができず、結果として精度が落ちたものと考えられる。

(B-4)

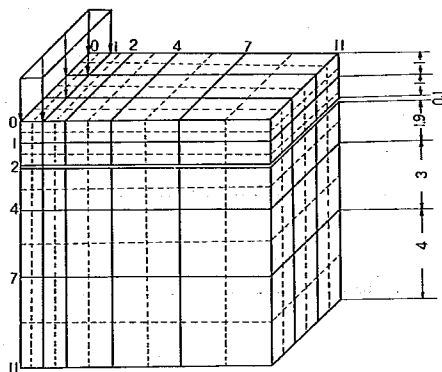


表-参-1 応力解析結果の比較 (B-2, B-4)

δz

Z	X = 0 断面			X = 4 断面		
	B - 2	B - 4	誤差	B - 2	B - 4	誤差
0	$1.005 \frac{t}{m^2}$	$1.004 \frac{t}{m^2}$	0%	$0.001 \frac{t}{m^2}$	$0.001 \frac{t}{m^2}$	0%
1	0.868	0.867	0	0.003	0.003	0
2	0.528	0.540	2	0.029	0.029	0
4	0.293	0.294	0	0.092	0.091	1
7	0.185	0.185	0	0.117	0.117	0
11	0.152	0.151	1	0.115	0.114	1

δx

Z	X = 0 断面			X = 4 断面		
	B - 2	B - 4	誤差	B - 2	B - 4	誤差
0	$1.003 \frac{t}{m^2}$	$1.002 \frac{t}{m^2}$	0%	$-0.067 \frac{t}{m^2}$	$-0.067 \frac{t}{m^2}$	0%
1	0.100	0.100	0	0.011	0.010	10
2	-0.026	-0.022	15	0.064	0.064	0
4	-0.033	-0.032	3	0.058	0.058	0
7	-0.017	-0.017	0	0.028	0.028	0
11	-0.008	-0.008	0	0.020	0.019	5

 τ_{xz}

Z	X = 0 断面			X = 4 断面		
	B - 2	B - 4	誤差	B - 2	B - 4	誤差
0	$-0.100 \frac{t}{m^2}$	$-0.100 \frac{t}{m^2}$	0%	$-0.011 \frac{t}{m^2}$	$-0.011 \frac{t}{m^2}$	0%
1	0.018	0.018	0	0.007	0.007	0
2	0.006	0.006	0	0.049	0.046	6
4	0.001	0.001	0	0.077	0.076	1
7	0.000	0.000	0	0.045	0.045	0
11	0.000	0.000	0	0.001	0.001	0

参考2 片持梁のせん断応力に対する追加検討

3.1で取り扱った片持梁を用いての精度の検討では、直応力に比してせん断応力の精度が悪いことが判明し、これはすでに述べたように、せん断応力の分布が直応力に比して高次の分布をしていることに起因する。

そこで Hexe 27 を用いて断面内の要素分割を密にすることによって片持梁のせん断応力の2次式の分布をつかまえるのにどの程度の要素分割が必要か検討した。その結果この分布を容易につかまえることが判明した。

なおこの検討はC・R・C社が行なったものである。

解析に用いたモデルは下図のもので、使用した要素は Hexe 27 であり、軸方向(y方向)の分割数は20でこれは各ケースとも一定である。比較は断面内の要素分割(x方向)を変えて行なった。

要素分割とせん断応力分布との関係を図-参-1に示すが Hexe 27を用いた場合、断面内を4分割することでかなり精度の良い結果を示すことがわかる。

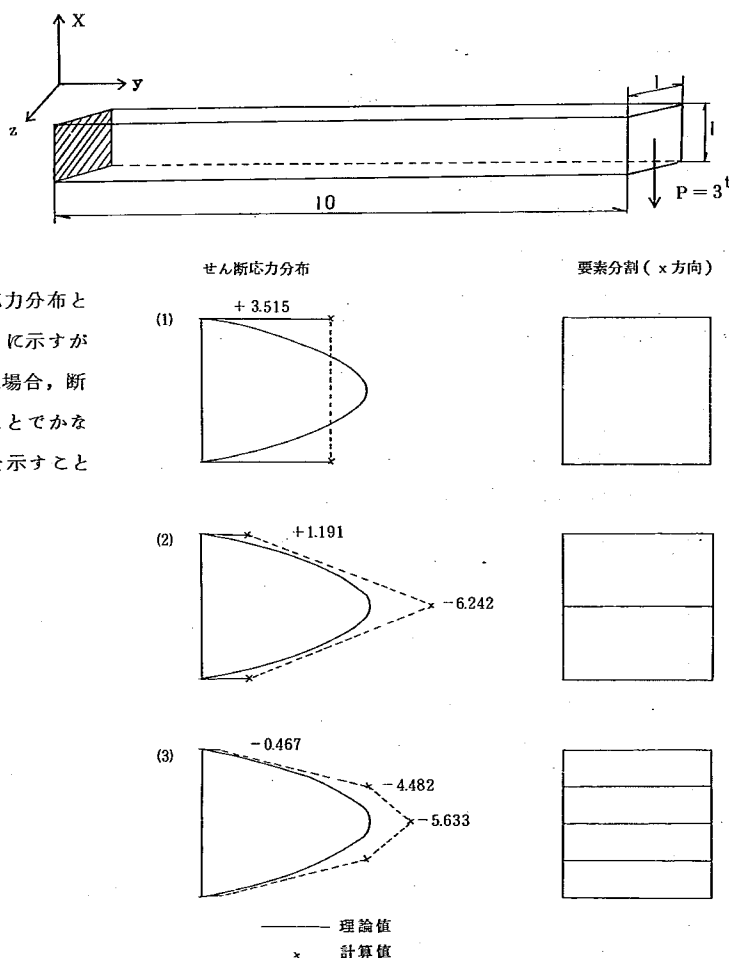


図-参-1 要素分割とせん断応力の関係 ($P=3t$ $\ell=5$ 地点)

附録 1 ASKA 入力データ作成例

図-1 に示した簡単なモデルを例にとり説明する。

(A) トポロジカル・データ

- 1 行 トポロジカルデータの始まり
- 2 ネットの定義
NET (ネット番号) (最大節点番号) (コメント)
- 3 ~ 4 コメント
- 5 ~ 6 グループ 50 の要素の記述
HEXE 8 (グループ番号) (k) (P₁) (P₈)
- 7 コメント
- 8 ~ 13 グループ 20 の要素の記述
- 14 グループ 21 の要素の記述
- 16 コメント
- 17 ~ 23 固定条件の記述
SUPPRESS (固定方向) (k) (P₁)
- 25 ネットの記述の終り
- 26 トポロジカルデータの終り

(B) 外部フォーマット・データ

- 1 行 外部フォーマットデータの始まり
- 2 コメント
- 3 節点座標データのヘッダレコード
- 4 ~ 9 データレコード (節点番号と座標)
- 11 コメント
- 12 ヤング率ポアソン比データのヘッダレコード
- 13 データレコード
- 19 コメント
- 20 分布荷重データのヘッダレコード
- 21 ~ 26 データレコード (要素番号と荷重)
- 27 外部フォーマットデータの終り

ヘッダレコード内のパラメータは次の意味をもつ

N = ネット番号

C = データブロック列数

G = 要素グループ番号

E = グループ内の要素番号

S = データブロックの最初の列の番号 (省略した時は S=1)

L = 荷重ケース番号

なお次の省略形を用いることができる。

E = A グループ G = $\times \times \times$ の全ての要素について

G = A このネットの全てのグループの全ての要素について

この時データカードの行数は意味がなくなるが 1 として指定する。

なお詳しくは CDC 6600 ASKA 使用説明書を参照されたい。

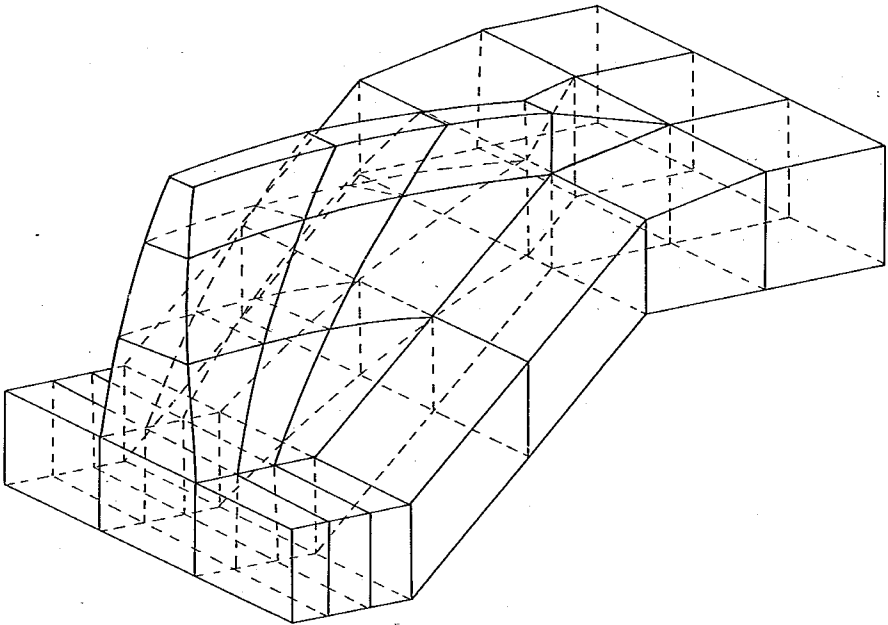


図-付-1

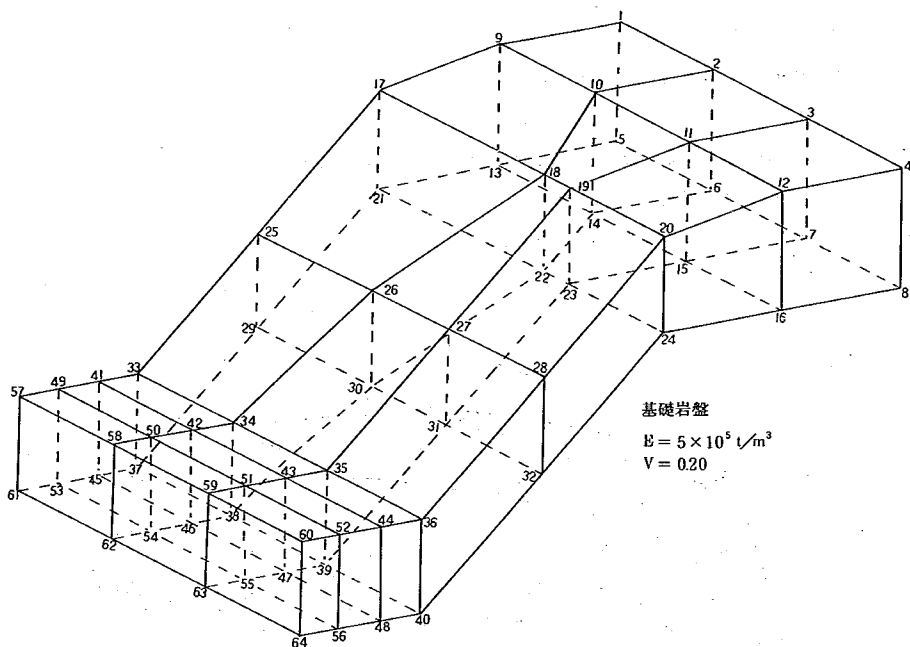
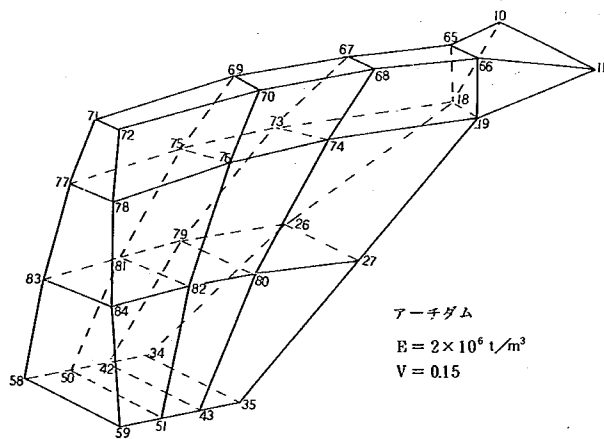


図-付-2



図付-3

CONTROL DATA 3600 DATA INPUT FORM

01	T.O.P.O.L.O.G.Y.																																																												01
02	N.E.T. (1,0,0) (8,4) (EXAMPLE)																																																												02
03	D.E.S.C.R.I.P.T.I.O.N. O.F. E.L.E.M.E.N.T.S.																																																												03
04	F.O.U.N.D.A.T.I.O.N. G=5.0																																																												04
05	H.E.X.E.8. (5,0) (3,1) (2,1) (9,1) (1,0,1) (5,1) (6,1) (1,3,1) (1,4,1)																																																												05
06	R (7) (0) (8) (8) (8) (8) (8) (8) (8) (8)																																																												06
07	A.R.C.H. D.A.M. G=2.0, 2.1																																																												07
08	H.E.X.E.8. (2,0) (1,6) (5,6) (6,7) (6,8) (1,8) (1,9) (7,3) (7,4)																																																												08
09	(2,0) (2,6) (7,2) (6,8,2) (6,9,2) (7,0,2) (7,3,2) (7,4,2) (7,5,2) (7,6,2)																																																												09
10	(2,0) (1,8) (1,9) (7,3) (7,4) (2,6) (2,7) (7,9) (8,0)																																																												10
11	(2,0) (2,7) (3,2) (7,4,2) (7,5,2) (7,6,2) (7,9,2) (8,0,2) (8,1,2) (8,2,2)																																																												11
12	(2,0) (1,2) (6,2) (2,7) (7,9) (8,0) (3,4) (3,5) (4,2) (4,3)																																																												12
13	(2,0) (2,7) (9,2) (8,0,2) (8,1,2) (8,2,2) (4,2,8) (4,3,8) (5,0,8) (5,1,8)																																																												13
14	P.E.N.T.A.6. (2,1) (1,1) (0,6) (5,1) (8,1) (1,1) (6,6) (1,9)																																																												14
15																																																													15
16	S.U.P.R.E.S.S. O.F. N.O.D.A.L. P.O.I.N.T.S.																																																												16
17	S.U.P.R.E.S.S. (1,2,3) (8) (1,1)																																																												17
18	(1,2,3) (7) (9,8)																																																												18
19	R (2) (0) (3)																																																												19
20	R.R. (2) (0) (0) (3) (0)																																																												20
21	S.U.P.R.E.S.S. (2) (8) (5,7,1)																																																												21
22	(2) (2) (7,1,1)																																																												22
23	R (3) (0) (6)																																																												23
24																																																													24
25	E.N.D. N.E.T.																																																												25
26	E.N.D. T.O.P.O.L.O.G.Y.																																																												26
27																																																													27
28																																																													28
29																																																													29
30																																																													30

DATA DESCRIPTION EXAMPLE OF DATA DESCRION

PREPARED BY

DATE PAGE 1 OF 2

- 68 -

DATA DESCRIPTION_

PREPARED BY

DATE _____ PAGE 2 OF 2

附録 2 トポロジカル記述法

トポロジカル変数による記述は、一連の節点及び要素の番号に関する指定を効率よく記述する方法である。

トポロジカル変数は通常次の形式を取る。

(k) (P)

ここに、k は P によって作られる一連の節点又は要素の総数を表わす。

表式 P は次の様に使いわけらる。

- 定数トポロジカル変数 (i)
- 一次トポロジカル変数 (i, j)
- 二次トポロジカル変数 (i, j, l)

各形式は次のような内容をもつ、

$$(k)(i) \quad \underbrace{i, i, \dots, i}_k \text{ 個}$$

$$(k)(i, j) \quad \underbrace{i, i+j, i+2j, \dots, i+(k-1)j}_k \text{ 個}$$

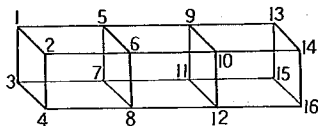
$$(k)(i, j, 1) \quad \underbrace{i, i+j, i+2j+1, \dots, i+(k-1)j + \frac{(k-1)(k-2)}{2} 1}_k \text{ 個}$$

たとえば次の数列はトポロジカル変数を用いると以下の様に記述される。

- 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

(7)(2, 1)

同様に次の様な一連の要素も以下の様に記述される。



HEX E 8 (ネット番号) (3)(1,4)(2,4)(3,4)(4,4)(5,4)(6,4)(7,4)(8,4)

トポロジカル記述法は繰返しの手法を用いるとさらに効果を表わす。即ち、

$R(k_1)(k_0 \Delta 1)(P_1 \Delta 1)(P_2 \Delta 1) \dots (P_n \Delta 1)$

は第 1 レベルの繰返しを表わし、

(k₁) 第 1 レベル繰返し総回数

(k₀ Δ 1) (k₀) の増分

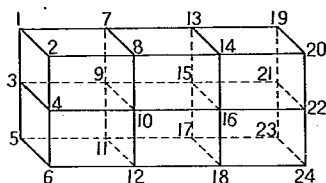
(Pi 41) (Pi) の増分

を意味する。例えば次の一連の数列は以下の様に記述される。

- 1, 2, 3 (3) (1, 1)
- 2, 3, 4, 5 (4) (2, 1)
- 3, 4, 5, 6, 7 (5) (3, 1)

(3) (1, 1)
└──┬──┘
R (3) (1) (1)

同様に以下の様な一連の要素は、



HEX E8 (ネット番号) (3)(1,6)(2,6)(3,6)(4,6)(7,6)(8,6)(9,6)(10,6)

R (2) (0)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)

と記述される。

RR (k₂) (k₀ 42) (k₁ 42) (P₁ 42) (P₁ 41 42) (P_n 42) (P_n 41 42)

は第2レベルの繰返しを表わし、

(k₂) Rステートメントに対する繰返し総回数

(k_i 42) (k_i) の増分

(P_i 42) (P_i) の増分

(P_i 41 42) (P_i 41) の増分

を意味する。例えば次の一連の数列は以下の様に記述される。

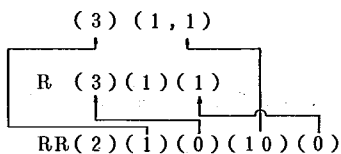
- 1, 2, 3 ◦ 11, 12, 13, 14
- 2, 3, 4, 5 ◦ 12, 13, 14, 15, 16
- 3, 4, 5, 6, 7 ◦ 13, 14, 15, 16, 17, 18

は

(3) (1, 1)
└──┬──┘
R (3) (1) (1)

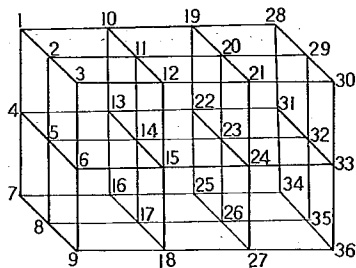
(4) (11, 1)
└──┬──┘
R (3) (1) (1)

と表わされ、さらに



と表わされる。

同様に以下の様を一連の要素は、



HE×E8 (ネット番号) (3)(2,9)(3,9)(5,9)(6,9)(11,9)(12,9)(14,9)(15,9)

R (2) (0)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)

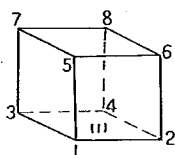
RR (2) (0)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)(-1)(0)

と表わされる。

なお詳しくは CDC 6600 ASKA 使用説明書を参照されたい。

附録 3 分布荷重（面荷重，体積荷重）の入力法

① HEXE 8（HEXE 27）の場合



分布荷重の自己計算ルーチンに於て，面荷重は面に垂直な成分のみ考慮できる。入力は次の順序で行なわれる。

($P_1, P_2, P_3, P_4 ; P_5, P_6, P_7, P_8 ; P_1, P_2, P_5, P_6 ; P_3, P_4, P_7, P_8 ; P_1, P_3, P_5, P_7 ;$
 (1)
 $P_2, P_4, P_6, P_8 ; V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} ; V_{2x}, V_{2y}, V_{2z} ; \dots ; \dots ;$
 $\dots ; \dots ; \dots ; \dots ; V_{8x}, V_{8y}, V_{8z}$)

ここに

$P_i \dots i$ 点での面荷重 ($t/m^2, Kg/cm^2$)

$V_{ij} \dots i$ 点での j 方向体積荷重 ($t/m^3, Kg/cm^3$)

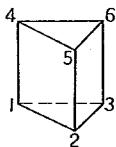
先行ないし，後続する 0 なるデータは入力する必要はなく，S と C によって必要なデータのみを入力することができる。例えば， P_5, P_6, P_7, P_8 での応力を入力するときは，

S = 5 C = 4

と指定すればよい。

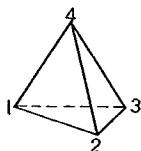
なお，各点での荷重は，1 次式で内挿される。

② PENTA 6（PENTA 18）の場合



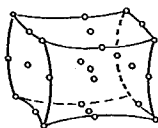
($P_1, P_2, P_3 ; P_4, P_5, P_6 ; P_1, P_2, P_5, P_4 ; P_1, P_4, P_6, P_3 ;$
 $P_2, P_5, P_6, P_3 ; V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} ; V_{2x}, V_{2y}, V_{2z} ; \dots ;$
 $\dots ; \dots ; V_{6x}, V_{6y}, V_{6z}$)

③ TET 4（TET 10）の場合



($P_1, P_2, P_3 ; P_1, P_4, P_2 ; P_2, P_4, P_3 ; P_3, P_4, P_1 ;$
 $V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} ; \dots ; \dots ;$
 V_{4x}, V_{4y}, V_{4z})

④ HEXEC 27 の場合



$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 ;$
 $P_{19}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{26}, P_{27} ;$
 $P_1, P_2, P_3, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{19}, P_{20}, P_{21} ;$
 $P_7, P_8, P_9, P_{16}, P_{17}, P_{18}, P_{25}, P_{26}, P_{27} ;$
 $P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16}, P_{19}, P_{22}, P_{25} ;$
 $P_3, P_6, P_9, P_{12}, P_{15}, P_{18}, P_{21}, P_{24}, P_{27} ;$
 $V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} ; V_{2x}, V_{2y}, V_{2z} ; \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots ; \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots ; V_{27x}, V_{27y}, V_{27z})$

⑤ PENTAC 18 の場合

$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 ; P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18} ;$
 $P_1, P_2, P_3, P_7, P_8, P_9, P_{13}, P_{14}, P_{15} ;$
 $P_1, P_6, P_9, P_7, P_{12}, P_{11}, P_{13}, P_{18}, P_{17} ;$
 $P_3, P_4, P_5, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{15}, P_{16}, P_{17} ;$
 $V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} ; V_{2x}, V_{2y}, V_{2z} ; \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots ; \dots\dots\dots ;$
 $\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots ; V_{18x}, V_{18y}, V_{18z})$

④, ⑤の場合, 任意の点での荷重は, 2 次式で内挿される。