

1780

すべり面の土質力学的特性を勘案した
地すべり斜面安定計算手法

建設省土木研究所
地すべり研究室

ま え が き

地すべり斜面の安定解析は、現在、極限平衡理論を適用して実施されている。一方すべり面の土質力学的特性として残留強度が注目をあびており、すべり面の粘土強度はピーク強度から、地すべり運動に伴って残留強度に低下するという歪量の概念を導入した安定解析を実施する必要性が生じて来た。特にこれらの残留強度の特性は、切土、トンネル施工を原因とする地すべり斜面の安定解析の実施の際考察しなければならない。また、地すべりの運動は、頭部では引張現象、末端部では圧縮現象を呈するといった異なったセン断現象が観察され、地すべり頭部の変位量は末端部のそれに比較して大きい。したがって地すべり頭部では残留強度を、末端部ではピーク強度をすべり面の土質強度値として安定解析を実施するという提案もある。極限平衡理論では、こういった地すべり頭部、末端部での運動量の相違によるすべり面の強度特性を反映した解析は不可能である。そこでピーク強度から残留強度までの歪量に対する土塊強度特性を勘案した安定解析を実施するため有限要素法を適用した斜面安定計算法を検討した。本内容は有限要素法に初めて携わる技術者の入門書としての性格と筆者のサブノートとしての性格を有するもので、できるだけ有限要素法について詳述し、手計算でも実施可能な計算事例を数多く載せるようにした。有限要素法及び地すべり斜面の安定計算について興味ある読者にとって少しでも参考になれば幸いである。

当解析のシステム開発においては、地すべり研究室藤田室長、プログラム開発を担当された中央開発株式会社システム室長堀井氏および高田氏に深く感謝します。

建設省 土木研究所 地すべり研究室

主任研究員 吉 松 弘 行

目 次

1. 地すべり斜面の安定解析と有限要素法	1
2. 有限要素法の誘導	3
2-1 変位関数	3
2-2 ひずみ	4
2-3 応力	4
2-4 等価節点力	5
3. 全領域への一般化	10
4. 平面応力および平面ひずみ	13
4-1 変位関数	13
4-2 ひずみ (全ひずみ)	18
4-3 弾性応力 — ひずみマトリックス	20
4-3-1 平面応力 — 等方性材料	20
4-3-2 平面ひずみ — 等方性材料	21
4-3-3 異方性材料	23
4-4 座標の変換	27
4-5 剛性マトリックス	28
4-6 初期ひずみによる節点力	29
4-7 分布した物体力	29
4-8 物体力ポテンシャル	31
5. 剛性マトリックスの組立て	33
6. 要素節点変位の計算	35

7. 有限要素法とすべり面	36
7-1 ジョイントの変形モード	37
7-2 ジョイントに対する「応力—ひずみ」関係式	38
7-3 ジョイント要素剛性マトリックス	40
7-4 ジョイント内の初期応力	42
7-5 実際のジョイント特性を表現するための反復解法	43
7-5-1 荷重伝達法と剛性変化法	44
7-6 組合せジョイント要素	51
7-7 ジョイントの開閉	52
7-8 ジョイントのセン断	56
8. 土塊の粘弾性モデル	59
9. 事例解析	61
ケースA-1	62
ケースA-2	70
ケースA-3	71
ケースA-4	75
ケースB-1	79
ケースB-2	87
ケースB-3	88
ケースB-4	89

1. 地すべり斜面の安定解析と有限要素法

地すべり斜面の安定解析は、従来極限平衡理論を適用し、安全率の指標で斜面の安定度を評価している。したがって斜面全体に対しての安定度の評価で、地すべり頭部、末端部での地すべり運動現象（ここでは特に進行性破壊現象の概念をさす）を反映していない。極端な言い方をすると地すべり頭部のあるスライスでは、すべり面の強度は地すべり運動による変位を受け残留強度まで低下しているが、地すべり土塊は粘弾性体であるので地すべり末端では動員せん断応力（Mobilized shear stress）はピーク強度にまで達せず、斜面全体としては安定を保っている場合が考えられる。この解析のためには地すべり斜面を個々のスライスに分割して（これは極限平衡理論でも実施される）、個々のスライス、厳密にはすべり面での変位を明らかにし、この変位量とすべり面土塊の強度特性を反映することができる解析手法を考察しなければならない。

さらに地すべり構成土塊は粘弾性の特性を有し、地すべり運動に伴ない圧縮、引張現象が観察される。これらの解析が可能な手法としては、有限要素法が挙げられよう。しかしながら、地すべりの分野では、土木学の他の分野に比較して有限要素法を適用した例は非常に少ない。これは地すべり斜面を有限の要素に分割していった際、すべり面を含めた要素としての取り扱いしか出来ず、面としてよりもすべりゾーンとしての解釈しかできなかった事に原因する。一方岩盤力学の分野では最近になって、有限要素法の中に不連続面としてのジョイントやクラックの特性を反映し、応力分布特性等についての解析が既に実施されている。したがって、すべり面を地すべり斜面内で厚みを有しない不連続面と考え、ここに室内土質実験及び現地位置試験より得られた変位量と土質強度の特性を導入することによって、前述した目的に合致する安定解析が可能となる。詳細な有限要素法の解析手法については後述するが、当解析のモデルを図示すれば図-1-1の通りである。なお同図(b)において、すべり面はある厚さを有する解析モデルとなっているが、解析においてはこの厚さを零として計算している。図-2に本解析プログラムの計算手順を示す。

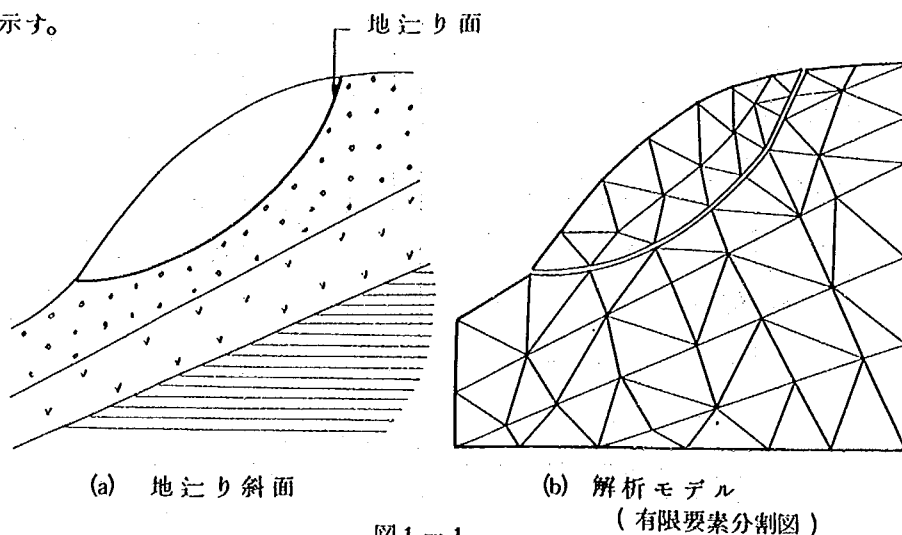


図1-1

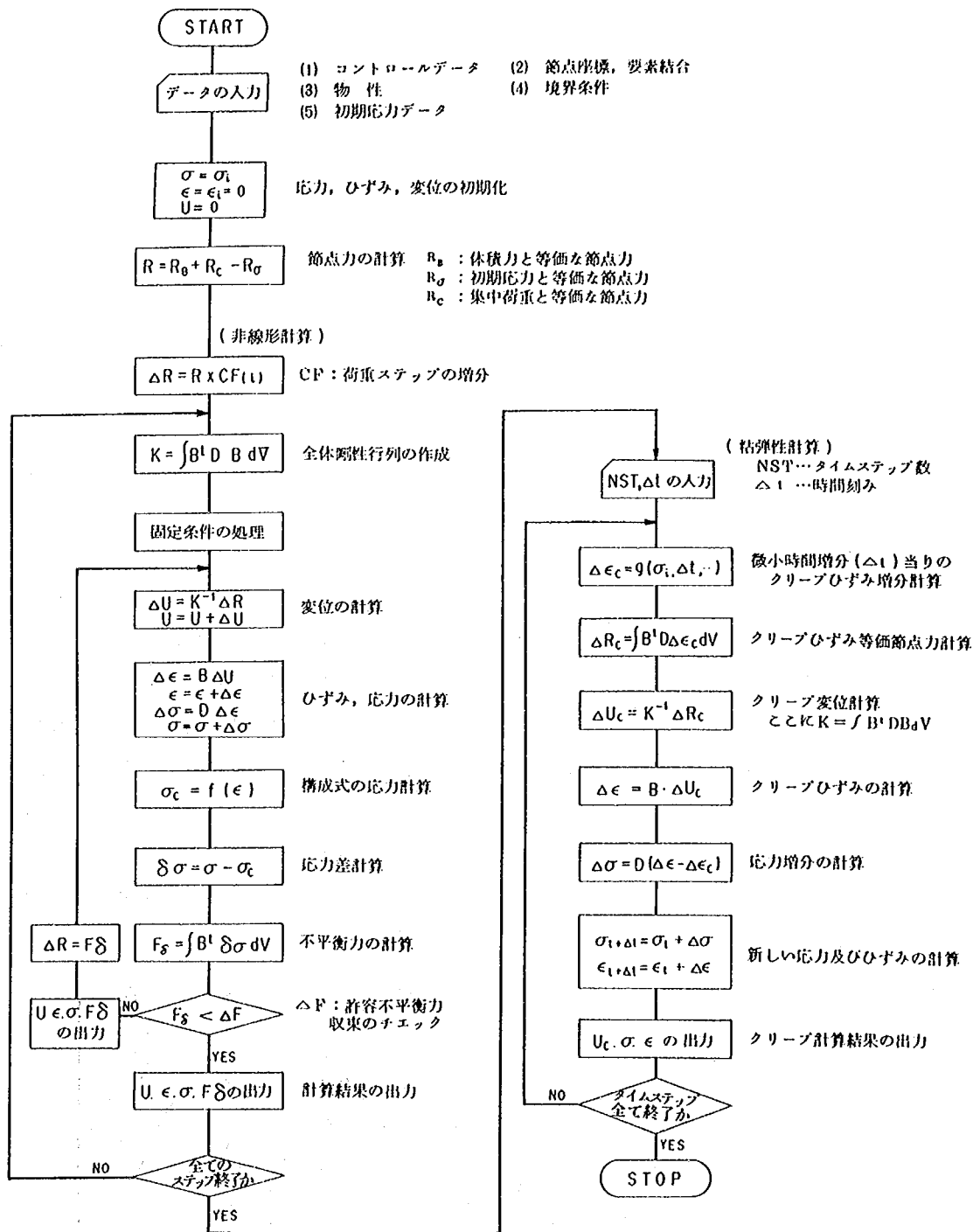


図-2 計算の流れ図

2. 有限要素法の誘導

この章では薄い板の平面応力場の解析を例にとって、有限要素法の一般的関係式について記述する。

2-1 変位関数

直線境界を有する代表的有限要素 e を考え、その節点を i, j, m とする。要素内の任意の点における変位を列ベクトル $\{f(x, y)\}$ で表わすと

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i N_j N_m \cdots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

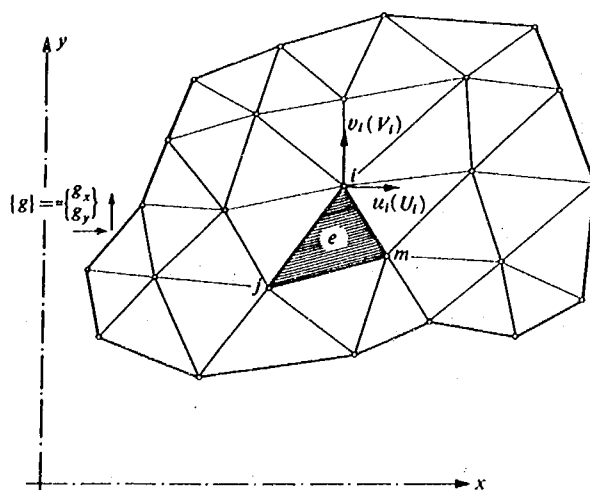


図 2-1 有限要素に分割された平面応力場

ここで $[N]$ の成分は一般に座標 (x, y) の関数であり、 $\{\delta\}^e$ は要素 e に関するすべての節点の変位を表わしている。

図-2-1 の平面応力場を例にとれば

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

は要素内の任意の点 (x, y) における変位の x, y (水平および垂直) 成分を表わす。また

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

は節点 i の変位成分を表わす。

関数 N_i, N_j, N_m は対応する節点の座標 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ をそれぞれ(2.1)に代入した場合、その節点の変位を与えるように選ばなければならない。すなわち、一般的に表示すれば、明らかに

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (単位マトリックス)}$$

である。関数 $[N]$ は形状関数(shape function)と呼ばれ、有限要素解析で重要な役目をする。

2-2 ひずみ

要素内のすべての点で変位が与えられれば、任意の点におけるひずみを求めることができる。その関係は、マトリックス記号を用いてつぎのような形に書き表わせる。

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e \quad (2.2)$$

平面応力の場合、ひずみはよく知られている関係式より、変位の関数としてつぎのように表わされる。

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

式(2.1)とすでに決定した N_i, N_j および N_m などの関数により、マトリックス $[B]$ が容易に求められる。これらの関数に1次関数を採用すると、ひずみは実際に要素内で一定となる。

2-3 応力

要素の材料は、温度変化、収縮、結晶の成長などによって初期ひずみを生じる。このようなひずみを $\{\epsilon_0\}$ で表わせば、実際のひずみと初期ひずみ ϵ_0 の差によって応力が発生する。さらにある既知の系の影響を受けて、解析の初めから、物体が初期残留応力 $\{\sigma_0\}$ を受ける状態にあると仮定しておくことが便利である。 $\{\sigma_0\}$ は、測定できる場合もあるが、材料の履歴が十分わからない場合その値を予測することは困難である。しかしながらこの応力は、一般的な応力-ひずみ関係式にただ加えるだけで解析可能である。以上の観点から、一般的な弾性挙動を仮定したときの線形応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (2.3)$$

ここに、 $[D]$ は適当な材料定数を含んだ弾性マトリックスである。

平面応力場を例にとれば、すでに定義したひずみに対して三つの応力成分を考えなければならない。これはよく知られている記号を使用すると次式で表わされる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

マトリックス〔D〕は、等方性弾性体のひずみ-応力関係式

$$\varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y$$

$$\varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = G\tau_{xy}$$

ただし E : 弾性係数, ν : ポアソン比

から容易に求められる。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{Bmatrix}$$

2-4 等価節点力

要素に働く境界上の応力や要素内の分布荷重 (物体力, body force) と静的に等価な節点力を次の様に表わす。

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

ここで各節点の力 $\{F_i\}$ は、それに対応する節点変位 $\{\delta_i\}$ と同じ数だけの成分を有し、変位と対応つけて正しい順序に並んでいなければならない。

物体力 $\{P\}$ は、要素内の単位体積当たりについて作用するとすると力として定義され、その作用方向は同じ点における変位 $\{f\}$ の方向に対応している。

たとえば、平面応力の場合、節点力は

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

であり、成分 U および V は変位 u および v の方向に対応している。物体力は

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

で X および Y をその成分としている。

節点力を、実際の境界応力や物体力と静的に等価する最も簡単な方法は、任意の（仮想）節点変位を与え、それによって種々の力や応力のなす内部仕事と外部仕事とを等置することである。

<付録-1.>

仮想仕事の原理

構造物に作用する力の相対的な関係を少しも変化することなく、しかもそれらの力とは全然無関係な他の原因によって、その構造物に任意の微小な変位を与えるとき、その変位を仮想変位

（Virtual displacement）と名づけ、この仮想変位に際し、その構造物に作用する内外力がなす仕事を仮想仕事（Virtual work）という。もし構造に作用する力が釣り合っているならば、その構造物に仮想変位を与えたときに生ずる仮想仕事の和は零に等しい。これが仮想仕事の原理である。したがって仮想外力仕事を W_e 、仮想内力仕事を W_i で表わせれば、この原理はまたつぎの式で与えられる。

$$W_e + W_i = 0$$

しかし一般に W_e と W_i は正負が反対であるか、またはともに零であるから、上式はつぎのように表わされる。

$$W_e = W_i$$

これは以下の様に証明される。

いま一つの質点が多数の力を受けて釣り合い状態にあるものとし、それらの力の合力を R 、任意の直角座標軸 x, y, z 方向の R の分力をそれぞれ R_x, R_y, R_z とする。つぎにこの質点が釣り合いの位置から仮想変位 δ をなすものと考え、この変位 δ の x, y, z 方向の成分を $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ とおけば仮想変位に際して力 R がなす仕事は

$$R_x \delta_x + R_y \delta_y + R_z \delta_z$$

となる。ところが上記の質点は、釣り合いの状態にあるから明らかに

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$$

であって、式 (a) の値は零になる。したがって質点に関しては、仮想仕事の原理が証明される。

<付録-1 終り>

節点に与えるこの様な仮想変位を $d\{\delta\}^e$ で表わすと、(2.1) および (2.2) 式により、要素内に生ずる変位およびひずみは、おのおのつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} d\{f\} &= [N] d\{\delta\}^e \\ d\{\epsilon\} &= [B] d\{\delta\}^e \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

節点力のなす仕事は個々の力の成分と対応する仮想変位成分の積の和に等しく、マトリックス表示で書くと、

$$(d\{\delta\}^e)^T \{F\}^e \quad (2.5)$$

同様に、応力および物体力による内部仕事は、単位体積当り、次式で表わされる。

$$d\{\sigma\}^T\{\sigma\} - d\{f\}^T\{p\} \quad (2.6)$$

<付録-2>

マトリックスの積和

力学の問題においては、力のようにマトリックスの特別な形、すなわち“ベクトル”として表示される多くの量に出合う。力を

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{付2-1})$$

とすれば、同じ数の変位成分をもつもう1つのベクトル

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{付2-2})$$

がこれに対応する。仕事は、力と変位の積の和、すなわち

$$W = \sum F_n \delta_n$$

によって表わされることが知られている。マトリックス積の法則によって、このような積和(スカラー積)は

$$W = [F_1 F_2 \cdots F_n] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} = \{\delta\}^T \{F\} \quad (\text{付2-3})$$

と書くことができる。

<付録-2 終り>

また、(2.4)式を代入すると

$$([B] d\{\delta\}^e)^T \{\sigma\} - ([N] d\{\delta\}^e)^T \{p\}$$

積の転置の法則 $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$ より、上式は

$$\begin{aligned} & (d\{\delta\}^e)^T [B]^T \{\sigma\} - (d\{\delta\}^e)^T [N]^T \{p\} \\ &= (d\{\delta\}^e)^T ([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \{p\}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

と書きあらわせる。(2.5)式で与えられる外部仕事を、要素の全容積にわたる積分として与えられる全内部仕事に等置すると

$$(d\{\delta\}^e)^T \{F\}^e = (d\{\delta\}^e)^T \left(\int [B]^T \{\sigma\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \right) \quad (2.8)$$

この関係はいかなる仮想変位 $d\{\delta\}^e$ に対しても成立するので、つぎの等価節点力の式が得られる。

すなわち上述の式から得られる結果に、(2.2)および(2.3)式を代入して

$$\begin{aligned}
 \{F\}^e &= \int [B]^T [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} d(\text{vol}) \\
 &\quad - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \\
 &= \int [B]^T [D] \{\epsilon\} d(\text{vol}) - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) \\
 &\quad + \int [B]^T [D] \{\sigma_0\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \\
 &= \left(\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right) \{\delta\}^e - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) \\
 &\quad + \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

この関係式は、いかなる構造要素の特性も、要素の荷重と変位の関係を表わす。

$$\{F\}^a = [K]^a \{\delta\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\epsilon_0}^a$$

ただし、 $\{F\}_p^a$ は要素に作用する分布荷重とつり合うために必要な節点力、 $\{F\}_{\epsilon_0}^a$ は、温度変化がある場合など、初期ひずみによる節点変位を拘束するのに必要な節点力、当然ながら右辺第1項は、節点の変位によって生じる力である。

上式の形に書き表わせる。したがって要素剛性マトリックスは

$$[K]^e = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \quad (2.10)$$

物体力と等価な節点力は

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \quad (2.11)$$

初期ひずみによる節点力は

$$\{F\}_{\epsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) \quad (2.12)$$

また解析の最初から存在する初期応力によって生じる節点力は

$$\{F\}_{\sigma_0}^e = \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{vol}) \quad (2.13)$$

となる。

普通の残留応力のように初期応力が自己平衡系であれば(2.13)式によって与えられる力は、系を組み立てた後に恒に零になる。しかしながら機械部品が残留応力のあるブロックから製造される場合、あるいはテクトニック応力が存在する岩盤の掘削を行なう場合などには、掘削のために(2.13)式による力の不均衡を生ずる。

平面応力場における三角形要素の特性を求めるには、すでに得た $[B]$ 、 $[D]$ 、 $[N]$ および与えられた物体力 $\{p\}$ ならびに初期ひずみ $\{\epsilon_0\}$ と初期応力 $\{\sigma_0\}$ を(2.10)～(2.13)に代入すればよい。平面応力場の三角形要素では、マトリックス $[B]$ の座標に無関係であるので積分はとくに簡単である。

一般に、各節点には集中外力が作用している。したがって、各節点のつり合いを考える場合には、つぎのマトリックスを加える必要がある。

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

また、境界面上において変位が規定されている場合には、なんら問題は起こらないが、境界が単位面積当たり $\{g\}$ で与えられる分布荷重を受ける場合には、境界面上に面をもつ要素の節点に、それに対応する等価外力を加えなければならない。仮想仕事の原理から等価外力として簡単に次式から得られる。

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \{g\} d(\text{area}) \quad (2.15)$$

これは積分は要素の境界面全体にわたって実施することを意味している。 $\{g\}$ は変位 $\{f\}$ と同じ数だけの力の成分を有していなければならない。実際には、この程の積分を行なうことなく、もっぱら物理的な考察から、簡単な静力学計算により、境界荷重を境界節点に働く等価ないくつかの集中荷重系に置き換えている。平面応力の場合、結果は (2.15) 式とまったく等価である。

構造型の全体の剛性方程式を解き、節点変位が求められると、要素内の任意の点における応力は、(2.2) および (2.3) からつぎのように与えられる。

つまり (2.3) 式

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

に (2.2) 式を代入すれば次式を得る。

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (2.16)$$

すなわち、要素の応力マトリックスは

$$[S]^e = [D][B] \quad (2.17)$$

で、次に示す初期応力が加わっているだけである。

$$\{\sigma_{e0}\} = -[D]\{\epsilon_0\} \text{ および } \{\sigma_0\} \quad (2.18)$$

ここで (2.16) 式では、物体力による応力の項 $\{\sigma\}_p^e$ がないのは、要素内部についてはつり合いを考慮することなく全体としてのつり合いだけを考えているからである。

3. 全領域への一般化

2章は、仮想仕事の原理をただ一つの要素に適用し、等価節点力の概念を説明している。物体内部の任意の点における平衡条件を満たす解を直接求めていこうとする従来の方法の代わりに、有限要素法では、理想化された構造体内の有限個の節点での平衡方程式を導くことになるので、要素剛性の組立ての原理 (assembly principle) が必要になってくるのである。基本的には、各要素を別々に考える必要はなく、節点の理論を連続体全体に直接適用していく。

(2.1)式は構造物全体に適用できると解釈してよいので

$$\{f\} = [\bar{N}]\{\delta\} \quad (3.1)$$

ここに $\{\delta\}$ はすべての節点変位を含む。 $[\bar{N}]$ の成分を $\bar{N}_i$ とするとき、考えている点が特定の要素 e の内部にあり、 i がその要素に関係する節点であれば

$$N_i = N_i^e \quad (3.2)$$

点 i が要素に含まれない時は

$$N_i = 0$$

$[B]$ マトリックスも同様の定義に従うとし、仮想仕事の原理を構造物全体に適用する。すると要素間の力についてはもはや考慮する必要がなく、全節点で与えられた任意の仮想変位 $d\{\delta\}$ に対してなされる外部仮想仕事は

$$d\{\delta\}^T \{R\} \quad (3.3)$$

一方において、内部仮想仕事は、

$$\int_V d\{\epsilon\}^T \{\sigma\} d(\text{vol}) + \int_V d\{f\}^T \{p\} d(\text{vol}) + \int_S d\{f\}^T \{g\} d(\text{area}) \quad (3.4)$$

ここで

$d\{\epsilon\}^T \{\sigma\}$ はひずみによる内部仕事

$d\{f\}^T \{p\}$ は物体力による内部仕事

$d\{f\}^T \{g\}$ は分布外荷重による内部仕事をそれぞれ意味する。

ただし、積分は全領域にわたって行なう。この式につきの関係式

$$d\{f\} = [\bar{N}]d\{\delta\} \text{ および } d\{\epsilon\} = [\bar{B}]d\{\delta\} \quad (3.5)$$

を代入し、構成方程式 $\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$ を用いると、内部と外部の仮想仕事を等置して

つまり (3.4) と (3.5) 式から

$$\begin{aligned} & \int_V ([\bar{B}]d\{\delta\})^T \{\sigma\} d(\text{vol}) + \int_V ([\bar{N}]d\{\delta\})^T \{p\} d(\text{vol}) \\ & + \int_S ([\bar{B}]d\{\delta\})^T \{g\} d(\text{area}) \end{aligned}$$

これに $\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$ を代入して

$$\begin{aligned}
& \int_V ([B] d\{\delta\})^T ([D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}) d(\text{vol}) + \int ([\bar{N}] d\{\delta\})^T \{p\} d(\text{vol}) \\
& + \int_S ([\bar{B}] d\{\delta\})^T \{g\} d(\text{area}) \\
& = \int_V ([\bar{B}] d\{\delta\})^T [D] \{\epsilon\} d(\text{vol}) - \int_V ([\bar{B}] d\{\delta\})^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) \\
& + \int_V ([\bar{B}] d\{\delta\})^T \{\sigma_0\} d(\text{vol}) + \int_V ([\bar{N}] d\{\delta\})^T \{p\} d(\text{vol}) \\
& + \int_S ([\bar{B}] d\{\delta\})^T \{g\} d(\text{area}) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

また(3.5)を代入すれば左記の第1項は,

$$\begin{aligned}
& \int_V ([\bar{B}] d\{\delta\})^T [D] [\bar{B}] d\{\delta\} d(\text{vol}) \\
& = \int_V d\{\delta\}^T [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] d\{\delta\} d(\text{vol})
\end{aligned}$$

さらに第2項は

$$\int_V d\{\delta\}^T [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol})$$

同様に第3項, 第4項, 第5項はそれぞれ次式で表わされる。(積の転置の法則より)。

$$\begin{aligned}
& \int_V d\{\delta\}^T [\bar{B}]^T \{\sigma_0\} d(\text{vol}) \\
& \int_V d\{\delta\}^T [\bar{N}]^T \{p\} d(\text{vol}) \\
& \int_S d\{\delta\}^T [\bar{B}]^T \{g\} d(\text{area})
\end{aligned}$$

一方外部仕事は(3.3)式より $d\{\delta\}^T \{R\}$ で与えられる。

したがって(3.6)式は

$$\begin{aligned}
\{R\} & = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] d\{\delta\} d(\text{vol}) - \int_V [\bar{B}]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) \\
& + \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma_0\} d(\text{vol}) + \int_V [\bar{N}]^T \{p\} d(\text{vol}) \\
& + \int_S [\bar{B}]^T \{g\} d(\text{area}) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

上式は簡単に次の式で表現できる。

$$\{K\} \{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{\epsilon_0} + \{F\}_{\sigma_0} - \{R\} = 0 \quad (3.8)$$

剛性マトリックスを代表する項は

$$\{K_{ij}\} = \int [\bar{B}_i] [D] [\bar{B}_j] d(\text{vol}) \quad (3.9)$$

で表わされる。ここでも, 積分は全領域にわたって実施される。(3.9)式の $[\bar{B}_i]$ と(2.2)式の $[B_i]$ との関係から明らかに

$$\{K_{ij}\} = \sum [k_{ij}]^e \quad (3.10)$$

である。ここで, 各要素の寄与 $[k_{ij}]^e$ は, 個々に計算される。(3.8)式に現われているいろいろ

な「力」の成分についても、同様の関係を容易に示すことができる。

このようにして、組立ての法則その他すべての式が「要素間の力」という概念を用いることなく導かれる。

ところが重要な問題点が生じてくる。すなわち、全体の系に対して(3.4)式の仮想仕事を考え、これを各要素からの寄与の和に等しいとおくとき隣りあった要素間で不連続を生じないことを暗黙のうちに仮定している。しかし、不連続があるならば、そのために応力がなす仕事に相当する項を付加しなければならない。したがって、形状関数によって定義される変位の場合は、内部表面に有限なひずみのみを生じるものであること、つまり、変位の連続性が存在し、一般的な方程式の成立を破るものではあってはならないことが必要である。

4. 平面応力および平面ひずみ

2次元弾性問題は、有限要素法の定式化の基礎の説明にあたってよく例にとられる。この章では2次元問題を取り扱ううえでの特別な関係式をいっそう詳細に導く。この章では、最も簡単な三角形要素についてだけ詳細に説明する。しかし基本的アプローチはどの種類の要素にも共通で、もっと高級な要素を使用する場合についても方法的にはまったく同じである。

平面応力問題および平面ひずみ問題いずれにおいても、変位場 (displacement field) は Descartes 直角座標系の x および y 方向の変位 u および v で一義的に与えられる。さらに考慮すべきひずみおよび応力は $x-y$ 平面の3成分のみである。平面応力 (plane stress) 状態では、定義により、 $x-y$ 平面を除く他のすべての応力成分は零となり、これら成分は内部仕事になんらの寄与もしない。平面ひずみ (plane strain) 状態では、 $x-y$ 平面に垂直な z 方向の応力 σ_z は零にならないが、定義により z 方向のひずみが零であるので、結局 σ_z は内部仕事に寄与しないことになる。 σ_z の値はもし必要であれば、すべての計算が終わった後に他の応力成分から求めることができる。

4-1 変位関数 (displacement function)

図-4.1 に示すような代表的な三角形要素を考え、節点に反時計回りに i, j, m の番号を付ける。一つの節点は二つの変位成分

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

をもつ。要素の3節点に関する変位の全成分 (6成分よりなる) はベクトルとして、つぎのように表示することができる。

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

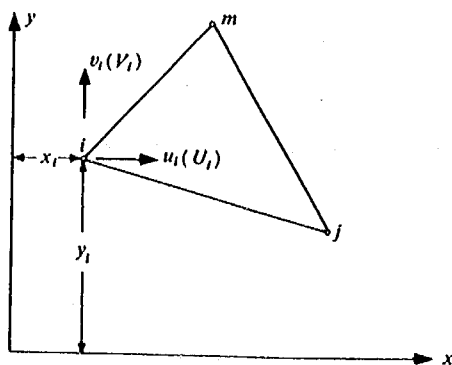


図4-1 平面応力または平面ひずみの連続体要素

要素内の変位は、(4.2) 式の6成分値によって一義的に定められなければならないが、その最も簡単な表示式は、明らかにつぎに示す二つの1次多項式である。

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (4.3)$$

6個の定数 α は、 (x, y) に節点座標を代入して得られる2組の三元連立方程式を解くことによって容易に求められる。たとえば、節点変位 u 成分についての三元連立方程式は

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\
u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m
\end{aligned} \tag{4.4}$$

で表わされる。(4.4)式から、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を u_i, u_j, u_m で表わし、(4.3)式に代入することによって x 方向の変位 u が求められる。

たとえば、(4.4)式はマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

さらに(4.3)式を同様にマトリックス表示すると

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

いま(4.5)式より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

(4.7)式を(4.6)式に代入すれば (付録-3を参照)

$$\begin{aligned}
u &= [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{D} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} x_j y_m - x_m y_j & x_m y_i - x_i y_m & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ただし

$$D = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

付録-3

逆マトリックスの解法

3次元の連立方程式

$$a_1x + a_2y + a_3z = k_1$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = k_2$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = k_3$$

とすれば、その解は次式で表わされる。

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k_1 & a_2 & a_3 \\ k_2 & b_2 & b_3 \\ k_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & a_3 \\ b_1 & k_2 & b_3 \\ c_1 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k_1 \\ b_1 & b_2 & k_2 \\ c_1 & c_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

ここに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

上式の第一式の分子を k_1 について展開すると

$$\begin{aligned} (x \text{ の分子}) &= k_1 b_2 c_3 + k_3 a_2 b_3 + k_2 c_2 a_3 - k_3 b_2 a_3 - k_1 c_2 b_3 - k_2 a_2 c_3 \\ &= k_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) + k_2 (c_2 a_3 - a_2 c_3) + k_3 (a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ &= k_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (y \text{ の分子}) &= k_2 a_1 c_3 + k_1 k_3 c_1 + k_3 a_3 b_1 - k_2 a_3 c_1 - k_3 a_1 b_3 - k_1 b_1 c_3 \\ &= k_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + k_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) + k_3 (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ &= -k_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} - k_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (z \text{ の分子}) &= k_3 a_1 b_2 + k_2 a_2 c_1 + k_1 b_1 c_2 - k_1 b_2 c_1 - k_2 a_1 c_2 - k_3 a_2 b_1 \\ &= k_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) + k_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) + k_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= k_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & C_1 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad \text{〈付録-3 終り〉}$$

いま

$$a_i = x_j x_m - x_n y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

とおきかえ, 他の係数 $a_j, b_j, \dots, c_m$ は i, j, m の添字を循環的に置換えると, 変位 u は

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_i u_i + b_i u_j + c_i u_m \\ a_j u_i + b_j u_j + c_j u_m \\ a_m u_i + b_m u_j + c_m u_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D} [a_i u_i + b_i u_j + c_i u_m + x(a_j u_i + b_j u_j + c_j u_m) + y(a_m u_i + b_m u_j + c_m u_m)] \\ &= \frac{1}{D} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m] \end{aligned} \quad (4.8)$$

が得られる。(4.8) 式はマトリックス表示すると

$$u = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & a_j + b_j x + c_j y & a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

同様に v についても

$$v = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & a_j + b_j x + c_j y & a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

いま一つの節点における二つの変位成分は次式で与えられる。

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

したがって要素3節点における変位の全成分(6成分よりなる)はベクトルとして次の様に表示することができる。

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

したがって(4.11), (4.12)式の概念から(4.9)(4.10)式を代入すると

$$\begin{aligned} \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & 0 & a_j + b_j x + c_j y & 0 & a_m + b_m x + c_m y & 0 \\ 0 & a_i + b_i x + c_i y & 0 & a_j + b_j x + c_j y & 0 & a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (4.13)$$

いま $D = 2A$ で表わされる。(Aは三角形要素の面積)

付録-4

三角形要素の面積

三角形要素の座標を図-4.2の様に規定すると、三角形の面積は次式で表わされる。

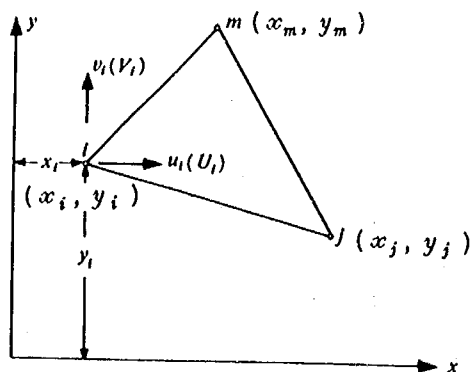


図4-2 平面応力または平面ひずみの連続体要素

$$\begin{aligned}
A &= (x_j - x_i)(y_m - y_i) - \frac{1}{2}(x_j - x_m)(y_m - y_i) - \frac{1}{2}(x_m - x_i)(y_m - y_i) \\
&\quad - \frac{1}{2}(x_j - x_i)(y_i - y_j) \\
2A &= 2x_j y_m - 2x_j y_j - 2x_i y_m + 2x_i y_j - x_j y_m + x_j y_j + x_m y_m - x_m y_j \\
&\quad - x_m y_m + x_m y_i + x_i y_m - x_i y_i - x_j y_i + x_j y_j + x_i y_i - x_i y_j \\
&= x_j y_m + x_i y_j + x_m y_i - x_i y_m - x_m y_j - x_j y_i \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

＜付録-4 終り＞

したがって、 $D = 2A$ となる。

ここで選んだ(4.3)式の変位関数は、隣接する要素との変位の連続性を自動的に満足している。なぜならば、(4.3)式では、三角形のどの辺に沿っても変位が直線的に変化するので、節点に同一の変位を与えれば、要素の接する境界面に沿って、同じ変位を生ずることは明らかである。

4-2 ひずみ (全ひずみ)

要素内 (平面問題) の任意の点におけるひずみは、内部仕事に寄与するつぎの3成分によって定めることができる。

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

いま(4.9)式より x 方向の成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y \quad a_j + b_j x + c_j y \quad a_m + b_m x + c_m y) \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \\
u &= \frac{1}{2\Delta} [N_i \ N_j \ N_m] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad \frac{\partial N_m}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$

したがって、 v についても

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix}$$

が得られる。

したがって

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

いま

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= b_i & \frac{\partial N_j}{\partial x} &= b_j & \frac{\partial N_m}{\partial x} &= b_m \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= c_i & \frac{\partial N_j}{\partial y} &= c_j & \frac{\partial N_m}{\partial y} &= c_m \end{aligned}$$

であるから、 $\{\varepsilon\}$ は次式で表わされることになる。

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e \quad (4.15)$$

これは (2.2) 式の $[B]$ マトリックスを、2次元問題について具体的に表わしたものである。ここでマトリックス $[B]$ が要素内の位置に無関係であり、要素内の全域でひずみが一定であることが理解でき、(4.3) 式の変位関数あるいは形状関数 (shape function) は一定ひずみの条件を満足している。

4-3 弾性応力-ひずみマトリックス (elastic matrix)

一般的な弾性挙動を仮定したときの線形応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\epsilon_0\} \right) + \{\sigma_0\} \quad (4.16)$$

4.3.1 平面応力-等方性材料

等方性材料の平面応力問題では、平面応力の定義により、つぎの式が成立する。

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \epsilon_{x0} \quad (4.17.a)$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \epsilon_{y0} \quad (4.17.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} + \gamma_{xy0} \quad (4.17.c)$$

ただし E : 縦弾性係数

ν : ポアソン比

$\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \gamma_{xy0}$: 初期ひずみ成分

初期ひずみ成分を無視し、応力について解く。

(4.17.a) $\times \nu$ + (4.17.b) より

$$\begin{aligned} \nu\epsilon_x + \epsilon_y &= -\frac{\nu^2\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\nu\epsilon_x + \epsilon_y] \end{aligned} \quad (4.18)$$

同様に (4.17.a) + (4.17.b) $\times \nu$ より

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \nu\epsilon_y &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu^2\sigma_x}{E} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu\epsilon_y] \end{aligned} \quad (4.19)$$

さらに (4.17.c) より

$$\tau_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} \quad (4.20)$$

(4.18), (4.19), (4.20) 式を (4.16) 式の様式のようにマトリックス表示すると

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

したがって〔D〕マトリックスは次式で表わされる。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.3.2 平面ひずみ—等方性材料

この場合には、垂直応力 σ_z が他の三つの応力成分に加わる。熱膨張についても等方性が成立する場合には、

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha Q^e \quad (4.23.a)$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha Q^e \quad (4.23.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \quad (4.23.c)$$

ここに α : 熱膨張係数

Q^e : 温度上昇

αQ^e : 温度上昇による熱膨張を表わす

さらに平面ひずみの条件から次式が得られる。

$$\epsilon_z = 0 = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha Q^e \quad (4.24)$$

いま $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ の条件より

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu^2}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2) - \frac{\sigma_y}{E} \nu (1 + \nu) \\
&= \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu) (1 + \nu) - \frac{\sigma_y}{E} \nu (1 + \nu) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu^2}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\
&= -\frac{\sigma_x}{E} \nu (1 + \nu) + \frac{\sigma_y}{E} (1 - \nu^2) \\
&= -\frac{\sigma_x}{E} \nu (1 + \nu) + \frac{\sigma_y}{E} (1 + \nu) (1 - \nu) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

(4.25) と (4.26) 式より, それぞれ σ_x と σ_y のみの式を求める。

(4.25) $\times (1 - \nu)$ + (4.26) $\times \nu$ より

$$\varepsilon_x (1 - \nu) = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu)^2 (1 + \nu) - \frac{\sigma_y}{E} \nu (1 + \nu) (1 - \nu)$$

$$\varepsilon_y \nu = \frac{\sigma_x}{E} \nu^2 (1 + \nu) + \frac{\sigma_y}{E} \nu (1 + \nu) (1 - \nu)$$

$$\varepsilon_x (1 - \nu) + \varepsilon_y \nu = \frac{\sigma_x}{E} (1 + \nu) [(1 - \nu)^2 - \nu^2]$$

$$= \frac{\sigma_x}{E} (1 + \nu) (1 - 2\nu)$$

$$\gamma_x = \frac{E \varepsilon_x (1 - \nu)}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} + \frac{E \varepsilon_y \nu}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} = \frac{E (1 - \nu)}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon_y \right)$$

(4.27)

同様に (4.25) $\times \nu$ + (4.26) $\times (1 - \nu)$ より

$$\varepsilon_x \nu = \frac{\sigma_x}{E} \nu (1 - \nu) (1 + \nu) - \frac{\sigma_y}{E} \nu (1 + \nu)$$

$$\varepsilon_y (1 - \nu) = -\frac{\sigma_x}{E} \nu (1 - \nu) (1 + \nu) + \frac{\sigma_y}{E} (1 + \nu) (1 - \nu)^2$$

$$\varepsilon_x \nu + \varepsilon_y (1 - \nu) = \frac{\sigma_y}{E} [(1 + \nu) (1 - \nu)^2 - \nu^2 (1 + \nu)]$$

$$= \frac{\sigma_y}{E} (1 + \nu) [(1 - \nu)^2 - \nu^2]$$

$$= \frac{\sigma_y}{E} (1 + \nu) (1 - 2\nu)$$

$$\sigma_y = \frac{E\sigma_x\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\nu\varepsilon_x}{1-\nu} + \varepsilon_y \right) \quad (4.28)$$

γ_{xy} については係数整理を行なうと

$$\tau_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \gamma_{xy} \right] \quad (4.29)$$

(4.27), (4.28), (4.29) 式を (4.16) 式の様式のようにマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + [\alpha Q^t] \quad (4.30)$$

したがって $[D]$ マトリックスは

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

となる。

4.3.3 異方性材料

完全に異方性の材料では、3次元応力-ひずみ関係式を完全に表わすため、21個の独立な弾性定数が必要となる。2次元の場合には、対称性から、マトリックス $[D]$ の中に最大6個の独立な定数が含まれることになり、つぎのように表示することができる。

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ s_{ym} & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

実用上、積層材、または面内等方性 (transversely isotropic) の材料で、これらの材料は、平面内では回転対称 (rotational symmetry) の性質をもち、独立な弾性定数は5個である。

この種の積層材の一般的な応力-ひずみ関係式は、Lekhnitskiiの記号に従うとつぎのようになる。ここで図-4.3に示すように、 y 軸を積層板に垂直にとると (初期ひずみを無視して)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1 \sigma_z}{E_1} \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_z}{E_2} \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_1 \sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_1} \\
\gamma_{xz} &= \left(\frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \right) \tau_{xz} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_2} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_2}
\end{aligned} \quad (4.33)$$

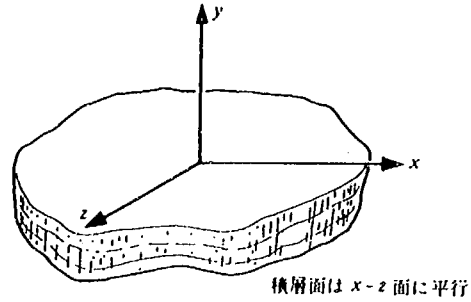


図4-3 面内等方性(transversely isotropic)

積層材の2次元のマトリックス〔D〕を求めることにする。そこで平面応力を考えると、 $\sigma_z = 0$ の条件より次式が求まる。

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} \quad (4.34.a)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} - \frac{\sigma_y}{E_2} \quad (4.34.b)$$

上2式からそれぞれ σ_x , σ_y を求める。ただし $E_1/E_2 = n$, $G_2/E_2 = m$ とする。

(4.34.a) - (4.34.b) $\times \nu$ より

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2}$$

$$\varepsilon_y \nu = -\frac{\nu_2^2 \sigma_x}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2}$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y \nu = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2^2 \sigma_x}{E_2} = \frac{\sigma_x}{E_2} \left(\frac{1}{n} - \nu_2^2 \right) = \frac{\sigma_x}{n E_2} (1 - n \nu_2^2)$$

よって

$$\sigma_x = \frac{E_2}{(1 - n \nu_2^2)} (n \varepsilon_x - n \nu \varepsilon_y) \quad (4.35)$$

同様に、(4.34.a) $\times \nu_2 E_1$ + (4.34.b) $\times E_2$ より

$$\varepsilon_x \nu_2 E_1 = \sigma_x \nu_2 - \frac{E_1}{E_2} \nu_2^2 \sigma_y$$

$$\varepsilon_y E_2 = -\sigma_x \nu_2 + \sigma_y$$

$$\varepsilon_x \nu_2 E_1 + \varepsilon_y E_2 = (1 - n \nu_2^2) \sigma_y$$

$$E_2 (\varepsilon_x \nu_2 + \varepsilon_y) = (1 - n \nu_2^2) \sigma_y$$

よって

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - n \nu_2^2} (n \nu_2 \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.36)$$

さらに

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_2} \text{ より}$$

$$\tau_{xy} = G_2 \gamma_{xy}$$

したがって

$$\tau_{xy} = \frac{G_2 E_2 \gamma_{xy}}{E_2 (1 - n \nu_2^2)} (1 - n \nu_2^2) = \frac{E_2 \gamma_{xy}}{(1 - n \nu_2^2)} [m (1 - n \nu_2^2)] \quad (4.37)$$

(4.35), (4.36), (4.37) 式より (4.16) 式に従って [D] マトリックスは次式で表わされる。

$$[D] = \frac{E_2}{1 - n \nu_2^2} \begin{bmatrix} n & n \nu_2 & 0 \\ n \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m (1 - n \nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

ここで、定数 E_1 , ν_1 (G_1 は独立ではない) は積層面内の変形に関するもの、 E_2 , ν_2 , G_2 は積層面に垂直な方向に関するものである。

平面ひずみの場合

平面ひずみの条件より $\varepsilon_z = 0$ から

$$\sigma_z = \nu_1 \sigma_x + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \sigma_y$$

よって (4.33) 式の ε_x , ε_y はそれぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \left(\nu_1 \sigma_x + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \sigma_y \right) \\ &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1^2 \sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_1 \nu_2}{E_1} n \sigma_y \\ &= \frac{\sigma_x}{E_1} (1 - \nu_1^2) - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \nu_1 n \right) \\ &= \frac{\sigma_x}{E_1} (1 - \nu_1^2) - \frac{\nu_2}{E_2} \gamma_y (1 + \nu_1) \end{aligned} \quad (4.39.a)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} \left(\nu_1 \sigma_x + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \sigma_y \right) \\
&= -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_x - \frac{\nu_2^2}{E_2} n \sigma_y \\
&= -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} (1 + \nu_1) + \frac{\sigma_y}{E_2} (1 - n \nu_2^2) \quad (4.39.b)
\end{aligned}$$

(4.39.a) と (4.39.b) 式からそれぞれ σ_x , σ_y について求める。

(4.39.a) $\times (1 - n \nu_2^2)$ + (4.39.b) $\times (1 + \nu_1)$ より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x (1 - n \nu_2^2) + \varepsilon_y \nu_2 (1 + \nu_1) &= \frac{\sigma_x}{E_1} (1 - \nu_1) (1 + \nu_1) (1 - n \nu_2^2) - \frac{\nu_2^2}{E_2} \sigma_x (1 + \nu_1)^2 \\
&= \left[\frac{\sigma_x}{E_1} (1 - \nu_1) (1 - n \nu_2^2) - \frac{\nu_2^2}{E_2} \sigma_x (1 + \nu_1) \right] (1 + \nu_1) \\
&= \frac{\sigma_x}{E_1} \{ (1 - \nu_1) (1 - n \nu_2^2) - n \nu_2^2 (1 + \nu_1) \} (1 + \nu_1) \\
&= \frac{\sigma_x}{E_1} (1 - n \nu_2^2 - \nu_1 + n \nu_1 \nu_2^2 - n \nu_2^2 - n \nu_1 \nu_2^2) (1 + \nu_1) \\
&= \frac{\sigma_x}{E_1} (1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2) (1 + \nu_1)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\varepsilon_x E_1 (1 - n \nu_2^2) + \varepsilon_y E_1 \nu_2 (1 + \nu_1)}{(1 + \nu_1) (1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} \\
&= \frac{E_2}{(1 + \nu_1) (1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} [n (1 - n \nu_2^2) \varepsilon_x + n \nu_2 (1 + \nu_1) \varepsilon_y] \quad (4.40)
\end{aligned}$$

同様に (4.39.a) $\times E_1 \nu_2$ + (4.39.b) $\times E_2 (1 - \nu_1)$ より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x E_1 \nu_2 + \varepsilon_y E_2 (1 - \nu_1) &= -\frac{E_1}{E_2} \nu_2^2 (1 + \nu_1) \sigma_y + \sigma_y (1 - \nu_1) (1 - n \nu_2^2) \\
&= \sigma_y (1 - n \nu_2^2 - \nu_1 + n \nu_1 \nu_2^2 - n \nu_2^2 - n \nu_1 \nu_2^2) \\
&= \sigma_y (1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \frac{E_2}{(1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} [n \nu_2 \varepsilon_x + (1 - \nu_1) \varepsilon_y] \\
&= \frac{E_2}{(1 + \nu_1) (1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} [n \nu_2 (1 + \nu_1) \varepsilon_x + (1 - \nu_1^2) \varepsilon_y] \quad (4.41)
\end{aligned}$$

τ_{xy} については、平面応力の場合と同様に

$$\tau_{xy} = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \quad (4.42)$$

したがって(4.40), (4.41), (4.42)式から平面ひずみの場合の[D]マトリックスは次式で示される。

$$[D] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

4.4 座標の変換

図-4.4に示すように層の方向が $x-y$ 面内で傾いている場合には、全体座標系(Universal co-ordinate)でのマトリックス[D]を得るために変換が必要である。つまり外力や構造集合体の変位を測る座標系とは異なった座標系について求める方が便利である。

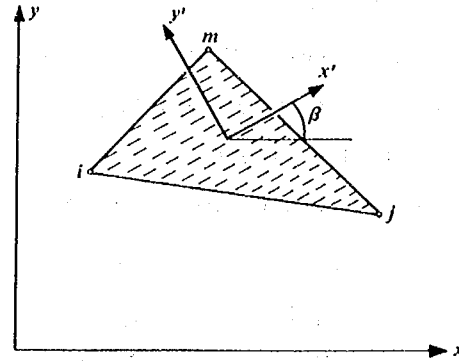


図4-4 異方性材料の要素。ただし、 x' を含む紙面に垂直な面内ではどの方向にも性質が同じ。すなわち、 y' 面に垂直な面内では等方性——transversely isotropic——とする

すなわち実際の計算を容易にするため、各要素ごとに異なった座標系を用いてよい。要素の性質を求める局所座標系はダッシュをつけて表わし、要素を集める時に必要な共通座標系には何もつけないことにする。

変位成分は、適当な方向余弦のマトリックス[L]により、つぎのように変換される。

$$\{\delta'\}^a = [L]\{\delta\}^a \quad (4.44)$$

対応する力の成分は、どちらの座標系においても同じ仕事をしなければならないので

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T \{\delta\}^a \quad (4.45)$$

(4.44)式に(4.45)式を代入すれば

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T [L]\{\delta\}^a$$

したがって

$$\begin{aligned} (\{F\}^a)^T &= (\{F'\}^a)^T [L] \\ \{F\}^a &= [L] \{F'\}^a \end{aligned} \quad (4.46)$$

(4.45)と(4.46)式で与えられる変換の組は、反傾 (controgradient) と呼ばれる。局所座標で作られた剛性マトリックスを全体座標系に変換するためには、局所座標系における剛性方程式

$$\{F'\}^a = [K']^a \{\delta\}^a \quad (4.47)$$

と(4.45)と(4.46)式を組合せればよい。すると

$$\begin{aligned} \{F\}^a &= [L]^T [K']^a \{\delta'\}^a \\ &= [L]^T [K']^a [L] \{\delta\}^a \end{aligned}$$

いま $\{F\}^a = [K]^a \{\delta\}^a$ で表わされるから

$$[K]^a \{\delta\}^a = [L]^T [K']^a [L] \{\delta\}^a$$

したがって

$$[K]^a = [L]^T [K']^a [L] \quad (4.48)$$

この座標系の変換の法則から傾むいた層の方向に一致する座標系 (x', y') でのひずみを応力に結びつけるマトリックスを $[D']$ とすると、全体座標系での $[D]$ は

$$[D] = [T]^T [D'] [T] \quad (4.49)$$

である。ただし $[T]$ はひずみ変換マトリックスで次式で与えられる。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & -2\sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

4.5 剛性マトリックス (stiffness matrix)

要素 i, j, m の剛性マトリックスは、一般的関係を表わす (2.10) 式からつぎのように与えられる。

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (4.51)$$

t は要素の厚さを表わし、積分は要素三角形の全域について行なう。要素の厚さを一定とすれば (要素の寸法を小さくするに従いがい、この仮定は真実に近づく)、マトリックス $[K]$ は x, y を含まない形でつぎのように簡単に求められる。

$$[K] = [B]^T [D] [B] t A \quad (4.52)$$

ただし A はすでに付録-4で定義される三角形の面積を表わす。また (4.15) 式で定義したマトリックス $[B]$ はつぎのように表わすことができる。

$$\{B\} = \{B_i \ B_j \ B_m\} \quad (4.53)$$

ここで

$$\{B_i\} = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} / 2A$$

したがって、剛性マトリックスは分割された形 (partitioned form) でつぎのようにも表わされる。

$$\{K\} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\{K\}$ の成分である 2×2 の部分マトリックス (sub matrix) は、以下のようにつくればよい。

$$\{K_{rs}\} = \{B_r\}^T \{D\} \{B_s\} tA \quad (4.54)$$

で表わされる。

4.6 初期ひずみによる節点力

初期ひずみによる節点力は、(2.12)式の積分を行なえば直接求めることができる。すなわち厚さ t を一様と仮定すれば次式で表わされる。

$$\{F\}_{\epsilon_0}^e = -\{B\}^T \{D\} \{\epsilon_0\} tA \quad (4.55)$$

また、分割された形で書くと

$$\{F_i\}_{\epsilon_0}^e = -\{B_i\}^T \{D\} \{\epsilon_0\} tA \quad (4.56)$$

となり、これら初期ひずみによる等価節点力 (initial strain force) は、節点によって異なる値となるので、上の式に従った正しい評価が必要である。

4.7 分布した物体力 (distributed body force)

一般的な平面応力または平面ひずみの問題では、平面内の各要素に単位面積当たり、つぎのような力が作用する。 X および Y を適当に選んだ x, y 座標軸方向の物体力とすれば

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

いま物体力と等価な節点力を表わす次式から

$$\{F\} = -\int \{N\}^T \{P\} d(\text{Vol})$$

各節点に対して物体力が寄与する等価節点力は

$$\{F\}_p^e = - \iint (N)^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy$$

または、物体力 X, Y が要素内で一定の場合は

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \iint N_i' dx dy \quad (4.57)$$

で表わされる。

N_i' は定数ではないので積分計算を実施する必要がある。座標の原点を要素の図心にとると、上で述べた計算は簡単になる。図心の定義により

$$\iint x dx dy = \iint y dx dy = 0$$

∴

$$\int x dx dy = \frac{A}{3} (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

ただし、要素の3点 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ によって定義し、座標の原点は重心点におくものとする。

$$\text{したがって } \frac{x_i + x_j + x_m}{3} = \frac{y_i + y_j + y_m}{3} = 0$$

したがって $N_i' = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A$ に注意して (4.57) 式を計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \{F_i\}_p &= - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i \iint dx dy / 2A \\ &= - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

となる。また a_i は簡単に次式から求められる

$$\begin{aligned} 2A &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \\ &= x_j y_m + x_i y_j + x_m y_i - x_j y_i - x_m y_j - x_i y_m \\ &= x_i (y_j - y_m) + y_i (x_m - x_j) + x_j y_m - x_m y_j \end{aligned}$$

いま座標の原点を要素の図心にとった場合、つぎの式が成立するから、

$$x_i + x_j + x_m = y_i + y_j + y_m = 0$$

から $x_i = -x_j - x_m, y_i = -y_j - y_m$ を上式に代入すれば、

$$(y_m - y_i)(x_j + x_m) + (x_j - x_m)(y_j + y_m) + x_j y_m - x_m y_j = 2A$$

$$x_j y_m + x_m y_m - x_j y_j - x_m y_j + x_j y_j + x_j y_m - x_m y_j - x_m y_m + x_j y_m - x_m y_j = 2A$$

$$3x_j y_m - 3x_m y_j = 2A$$

$$3(x_j y_m - x_m y_j) = 2A$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \text{ より}$$

$$a_i = 2 \Delta / 3 \quad (4.59)$$

(4.59) 式を (4.58) 式に代入すれば

$$\{F_i\}_p = - \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\} \Delta / 3 = \{F_j\}_p = \{F_m\}_p \quad (4.60)$$

したがって、要素全体についてまとめて書くと

$$\{F\}_p^e = - \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{matrix} \right\} \Delta / 3 \quad (4.61)$$

上式は、物体力の x および y 方向の合力が、各節点に均等に $1/3$ ずつ分布することを示している。

4.8 物体力ポテンシャル (body force potential)

多くの場合、物体力は物体力ポテンシャル ϕ によって、つぎのように定められる。

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.62)$$

X および Y の値よりは、むしろすべての領域内でポテンシャル ϕ の値がわかっており、したがって各節点における ϕ の値も定まっていることが多い。要素の 3 節点におけるポテンシャルの値

$$\{\phi\}^e = \left\{ \begin{matrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{matrix} \right\} \quad (4.63)$$

が与えられているものとし、また要素内においては式 (4.62) から導かれる X および Y の値を一定とすれば、 ϕ は要素内において直線的に変化しなければならない。したがって ϕ の変化を表わす形状関数は、(4.4) 式から (4.10) 式を導くために用いた同じ手法によって求めることができる。結果は次式で表わすことができる。

$$\phi = [N_i' \ N_j' \ N_m'] \{\phi\}^e \quad (4.64)$$

したがって

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \left[\frac{\partial N_i'}{\partial x} \quad \frac{\partial N_j'}{\partial x} \quad \frac{\partial N_m'}{\partial x} \right] \{\phi\}^e$$

$$Y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \left[\frac{\partial N_i'}{\partial y} \quad \frac{\partial N_j'}{\partial y} \quad \frac{\partial N_m'}{\partial y} \right] \{\phi\}^e$$

いま $N_i' = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A$ であるから

$$\frac{\partial N_i'}{\partial x} = b_i, \quad \frac{\partial N_j'}{\partial x} = b_j, \quad \frac{\partial N_m'}{\partial x} = b_m$$

$$\frac{\partial N_i'}{\partial y} = c_i, \quad \frac{\partial N_j'}{\partial y} = c_j, \quad \frac{\partial N_m'}{\partial y} = c_m$$

を代入すれば

$$X = -[b_i \ b_j \ b_m] \{\phi\}^e / 2A$$

$$Y = -[c_i \ c_j \ c_m] \{\phi\}^e / 2A$$

(4.65)

したがって物体力ポテンシアルによる節点力のベクトルは、(4.61)式の関係代入した次式から容易に求められる。

$$X = -[b_i \ b_j \ b_m] \{\phi\}^e \cdot \frac{D}{3} \cdot \frac{1}{2A} = -[b_i \ b_j \ b_m] \{\phi\}^e \cdot \frac{1}{6}$$

$$Y = -[c_i \ c_j \ c_m] \{\phi\}^e \cdot \frac{D}{3} \cdot \frac{1}{2A} = -[c_i \ c_j \ c_m] \{\phi\}^e \cdot \frac{1}{6}$$

したがって

$$\{F\}_e^p = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e \quad (4.66)$$

5. 剛性マトリックスの組立て

いままでに得た式を用いると構造物全体の剛性マトリックスを組立てることができ、それを解けば変位を求めることができる。すなわち、個々の要素の剛性マトリックスを全ての要素について加え合せて全体の剛性マトリックスを作り、任意の分布荷重や集中荷重につり合うように定められた等価節点力、初期ひずみによる節点力を拘束するのに必要な節点力、初期応力に等価な節点力ならびに境界条件の変位等を考慮して、各節点におけるつり合条件式、すなわち剛性方程式を求める。すなわち、各節点のつり合条件式は

$$F = K \delta \quad (5.1)$$

ただし、 F ：節点に作用する力

K ：剛性マトリックス

δ ：節点のひずみ

ここに $F = F_p + F_s + F_{\epsilon_0} + F_{\sigma_0} - R$

F_p ：体積力 P と等価な節点力で (2.11) と (4.66) 式で表わされる。

$$F_p = - \int [N]^T \{P\} d(Vol) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e$$

F_s ：分布荷重 g と等価な節点力で (2.11) と (4.61) 式で表わされる。

$$F_s = - \int [N]^T \{g\} d(Vol) = - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{bmatrix} d/3$$

F_{ϵ_0} ：初期ひずみによる節点力で (2.12), (4.52) 式で表わされる。

$$F_{\epsilon_0} = - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(Vol) = - [B]^T [D] \{\epsilon_0\} t d$$

$$[B] = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし等方性材料の平面応力の場合})$$

F_{σ_0} : 初期応力と等価な節点応力で (2.13) 式で表わされる。

$$\begin{aligned} \{F\}_{\sigma_0} &= \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{Vol}) \\ &= [B]^T \{\sigma\} t A \end{aligned}$$

R : 節点に作用する集中外力

6. 要素節点変位の計算

剛性方程式，(5.1)式は節点変位を未知量とする多元連立方程式になるから，ガウスの消去法等を用いて各節点の変位成分を求める。

$$\gamma = K^{-1}R \quad (5.2)$$

各要素内の応力およびひずみ状態は，(5.2)式で求められた節点変位の値を用いて(2.2)式および(2.16)式からひずみ，応力を計算する。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (2.2)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e - D\{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (2.16)$$

7. 有限要素法とすべり面

移動層と不動層の境界に位置するすべり面は、一種の不連続面と考えられる。それは引張りに対しては応力除荷の作用が働き、せん断に対してはすべり、圧縮に対しては力を伝達する。こうした種々の変形モードが集合して、すべり面の力学挙動を非弾性的なものにしている。さらに現在地すべり面の力学特性として残留強度が注目され、この特性をかみした安定解手法の確立が強く望まれている。したがって、これら特性を有限要素解析に表現するため定ひずみジョイントの考えを導入した。ここでジョイント要素は弾性を示す結合要素であるが、反復法という解析手法で非弾性、非線形の構成特性をもたせる。図7-1はR.E. Goodmanによって提案された不連続面を理想化した4節点のジョイント要素である。彼は、この要素は不連続面の不規則で一定でない壁の間隔を表示するため小さな厚さを有しているとしたが、本解析ではジョイントの初期状態は閉合しているとした。したがってジョイント要素の変形モードは図7-2-1のようになる。

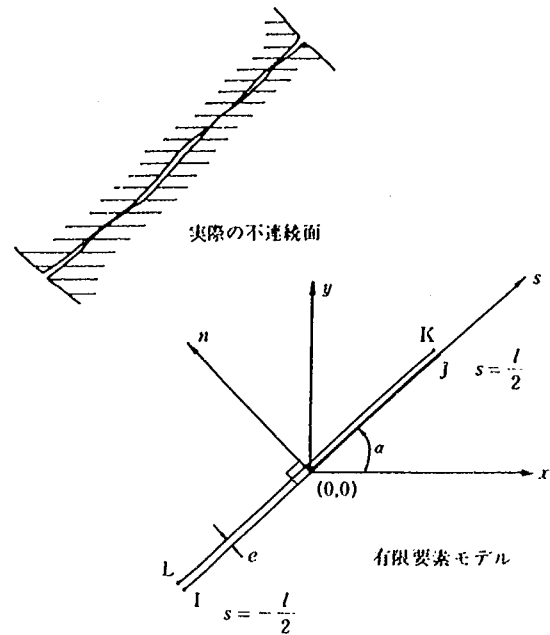


図7-1 「ジョイント」(joint)要素

変形の種類		状 態	ジョイント変位	
初期状態			$\epsilon, \delta = 0$	
すべり	右ずれ		$\delta > 0$	
	左ずれ		$\delta < 0$	
	開 口		$\epsilon > 0$	
	閉 合		$\epsilon < 0$	
回 転	反時計回り		$\omega > 0$	
	時計回り		$\omega < 0$	

図7-2-1 ジョイント要素の各種変形モード

7-1 ジョイントの変形モード (Joint deformation modes)

ひずみ-変位関係式〔 L_0 〕は、節点変位ベクトル〔 u 〕 $_{s,n}$ の関数として、ジョイントの壁 K , I と J 間の相対的変位を表わすものとする。

ここに

$$\{u\}_{s,n} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k, u_l, v_l\}^T$$

であり、 u_i と v_i は局所座標系 s , n (S 軸はジョイントの壁のもとの方向に平行、 n は壁に垂直) において、節点工の全変位量を表わす。ここでジョイントの中心 ($S=0$) の点で定義されるジョイントの変位を考える。

$$\{\varepsilon_j\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_k + u_l}{2} - \frac{u_i + u_j}{2} \\ \frac{v_k + v_l}{2} - \frac{v_i + v_j}{2} \\ \frac{v_k - v_l}{l} - \frac{v_j - v_i}{l} \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

ここでジョイントの壁 KL の相対的時計回りの回転 w を正としている。したがって (7.1) 式より、ひずみと変位の関係を表わすマトリックス〔 L_0 〕は次の様になる。

つまり (7.1) 式は変形すると

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_i}{2} + 0 - \frac{u_j}{2} + 0 + \frac{u_k}{2} + 0 + \frac{u_l}{2} + 0 \\ 0 - \frac{v_i}{2} + 0 - \frac{v_j}{2} + 0 + \frac{v_k}{2} + 0 + \frac{v_l}{2} \\ 0 + \frac{v_i}{l} + 0 - \frac{v_j}{l} + 0 + \frac{v_k}{l} + 0 - \frac{v_l}{l} \end{Bmatrix}$$

よって

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

あるいは

$$\{\varepsilon_j\} = [L_0] \{u\}_{s,n} \quad (7.2a)$$

7-2 ジョイントに対する「応力-ひずみ」関係式

実際の有限要素法ではジョイント間の力の伝達は、いくつかの点（三角形の節点）の点接触による。したがってジョイント要素の応力を定義する必要がある。ジョイント要素の壁にかかる垂直およびせん断応力は、単位面積当りの全垂直力および全せん断力とする（要素の厚さは単位長さとする）と

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_n = \frac{1}{l} (\Delta F_{n,k} + \Delta F_{n,l}) \quad (7.3)$$

$$\Delta \tau = \Delta \tau_{ns} = \frac{1}{l} (\Delta F_{s,k} + \Delta F_{s,l}) \quad (7.4)$$

デルタ記号 (Δ) は、力と応力の増分がすでに計算した変位ベクトル $\{u\}_{s,n}$ によってひき起こされたという意味でつけられている。したがって全応力は次式で表わされる。

$$\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + \{\Delta \sigma\}_{x,y} \quad (7.5)$$

ただし、 $\{\sigma_0\}$ は x, y 座標系における初期応力ベクトルである。

ジョイントの中心に関する節点力によるモーメント (M_0) は、ジョイント内の応力分布を示すことになる（面 KL の反時計回りの外からのモーメントが正である）。

$$M_0 = \Delta F_{n,k} \cdot \frac{l}{2} - \Delta F_{n,l} \cdot \frac{l}{2} \quad (7.6)$$

(7.3) と (7.6) 式から

$$l \Delta \sigma_n = \Delta F_{n,k} + \Delta F_{n,l}$$

$$\frac{2}{l} M_0 = \Delta F_{n,k} - \Delta F_{n,l}$$

より

$$\Delta F_{n,k} = \frac{l}{2} \Delta \sigma_n + \frac{1}{l} M_0$$

また

$$\Delta F_{n,l} = \frac{l}{2} \Delta \sigma_n - \frac{1}{l} M_0$$

が求められる。また $F_i = -F_l$, $F_j = -F_k$ の関係より

$$\Delta F_{n,j} = -\frac{l}{2} \Delta \sigma_n - \frac{1}{l} M_0$$

$$\Delta F_{n,i} = -\frac{l}{2} \Delta \sigma_n + \frac{1}{l} M_0$$

したがって節点力は「応力」から次のように導くことができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{s,i} \\ \Delta F_{n,i} \\ \Delta F_{s,j} \\ \Delta F_{n,j} \\ \Delta F_{s,k} \\ \Delta F_{n,k} \\ \Delta F_{s,l} \\ \Delta F_{n,l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \tau_{n,s} \\ \Delta \sigma_n \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

あるいは

$$\{\Delta F\}_{s,n} = [B] \{\Delta \sigma_j\}_{s,n} \quad (7.8)$$

で表わすことができる。

ジョイントの「応力」と「ひずみ」は次のような剛性特性で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tau_{n,s} \\ \Delta \sigma_n \\ M_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

ここでジョイントの剛性 k_s と k_n は応力とともに変化する。したがって物理的に適切な解を得るためには、(7.9)式のように線形に定式化すれば反復法を利用しなければならない。またダイレンシーによる垂直応力の影響を考慮する必要もある。しかしこの特性は非線形特性を有し、その解析が複雑となる。そこでとりあえずダイレンシーの効果を無視して剛性マトリックスを作成する。

ジョイントの回転と応力分布の相互作用から起こる影響を表わす係数 k_w は未知で新しい変数である。しかしジョイントの変形モードが仮定できれば、 k_n の関数として表わすことができる。したがって、ここで向い合った節点の閉合あるいは接近は対応する節点の垂直応力の増分に比例するという仮定を設定する。そこで図7-2のように対面する節点 I と L だけに節点力が作用している場合を考える。この仮定から回転量 $w = 2v_0/l$ が求められる。ここで v_0 は $(v_k + v_l)/2 - (v_i + v_j)/2$ で定義されたジョイント中心点での垂直方向の変位である。この場合のモーメント M_0 は $\Delta \sigma l^2/2$ で与えられる。

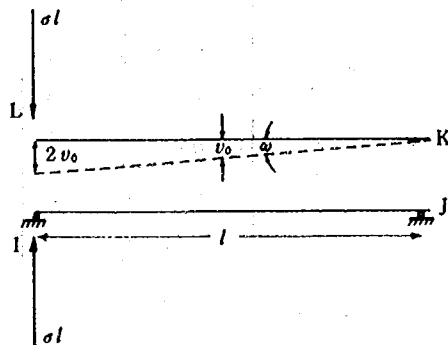


図7-2 回転剛性

一方 (7.9) 式から $v_0 = \Delta\sigma/k_n$ であり, (7.9) 式から

$$k_w = \frac{M_0}{w} = \frac{\Delta\sigma l^2}{2} \cdot \frac{l}{2v_0} = \frac{l^3}{4} \cdot \frac{\Delta\sigma}{v_0} = \frac{l^3}{4} \frac{k_n \Delta\sigma}{\Delta\sigma} = \frac{k_n l^3}{4}$$

これは応力がどのように分布しても変らない。

一方 (7.9) 式は次式でまた表わすことも可能である。

$$\{\Delta\sigma_j\} = [C_j] \{\epsilon_j\} \quad (7.10)$$

したがって

$$[C_j] = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} l^3 k_n \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

7-3 ジョイント要素剛性マトリックス

ジョイント要素の節点の変位とそれに対応する外力増分との関係式を書き表わすと

$$\{\Delta F\}_{s,n} = [B] \{\Delta\sigma_j\} = [B] [C_j] \{\epsilon_j\}$$

いま $\{\epsilon_j\} = [L_0] \{u\}_{s,n}$ で表わされるから最終的には次式で表わされる。

$$\{\Delta F\}_{s,n} = [B] [C_j] [L_0] \{u\}_{s,n} \quad (7.12)$$

ここで $[B]$ は (7.7) と (7.8) 式で定義されるマトリックス, $[C_j]$ は (7.11) 式で定義されるマトリックス, さらに $[L_0]$ は (7.2) と (7.2.a) で定義されるマトリックスである。

したがって (7.12) のマトリックスを計算すれば次のように表わされる。

(7.7) と (7.9) 式から

$$\{\Delta F\}_{s,n} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s u_0 \\ k_n v_0 \\ \frac{l^3}{4} k_n w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} k_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} k_n & \frac{l^2}{4} k_n \\ -\frac{l}{2} k_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} k_n & -\frac{l^2}{4} k_n \\ \frac{l}{2} k_s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} k_n & \frac{l^2}{4} k_n \\ \frac{l}{2} k_s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} k_n & -\frac{l^2}{4} k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{bmatrix}$$

したがって

$$[B][C_j][L_0] = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 & -\frac{l}{4}k_s & 0 & -\frac{l}{4}k_s & 0 \\ 0 & \frac{l}{2}k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}k_n \\ \frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 & -\frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2}k_n & 0 & -\frac{l}{2}k_n & 0 & 0 \\ -\frac{l}{4}k_s & 0 & -\frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}k_n & 0 & \frac{l}{2}k_n & 0 & 0 \\ -\frac{l}{4}k_s & 0 & -\frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 & \frac{l}{4}k_s & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2}k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2}k_n \end{bmatrix}$$

したがって

$$[K]_{s,n} = \frac{l}{4} \begin{bmatrix} k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_n \\ k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_n \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

この剛性マトリックスを全体座標 x, y に変換するために回転しなければならない。図-7-1を参照すれば、どの節点においても次式が成立する。

$$\Delta F_s = \cos \alpha \cdot F_x + \sin \alpha \cdot F_y$$

$$\Delta F_n = -\sin \alpha \cdot F_x + \cos \alpha \cdot F_y$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_s \\ \Delta F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

ここで $\alpha = \tan^{-1} (y_j - y_i) / (x_j - x_i)$ である。いまジョイントの節点は i, j, k, l の4点であるので、これを考慮に入れてベクトル表示すると

$$[\Delta F]_{s,n} = [T][\Delta F]_{x,y} \quad (7.15)$$

また

$$[u]_{s,n} = [T][u]_{x,y} \quad (7.16)$$

となる。

ここで

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

したがって (7.15), (7.16) 式を (7.12) 式に代入すれば

$$[T]\{\Delta F\}_{x,y} = [B][C_s][L_0][T]\{u\}_{x,y}$$

$$\{\Delta F\}_{x,y} = [T]^T[B][C_s][L_0][T]\{u\}_{x,y}$$

いま $[K]_{s,n} = [B][C_s][L_0]$ であるから

$$\{\Delta F\}_{x,y} = [T]^T[K]_{s,n}[T]\{u\}_{x,y} \quad (7.18)$$

あるいは

$$\{\Delta F\}_{x,y} = [K]_{x,y}\{u\}_{x,y} \quad (7.19)$$

となる。

7-4 ジョイント内の初期応力

初期に圧縮あるいはせん断を受けているジョイント要素は、その初期応力と平衡を保っている外力が取り去られたとき蓄積されたエネルギーを放出する。したがってジョイントの初期応力も考慮しなければならない。

ジョイントの座標軸を基準にして考えると、その垂直およびせん断方向の応力は隣接する要素の応力成分と同じである。そこで図-7.3のような座標変換を考える。 x, y 軸に平行な辺をもつ単位奥行の微小直角三角形 ABC を仮想するとき、AB, BC 面の接線応力はともに等しく、これを τ_{xy} と置き、かつ、AB, BC 面の垂直応力をそれぞれ σ_y, σ_x とする。 x 方向の α をなす AC 面の応力 ρ の面に垂直、接線応力をそれぞれ σ, τ とすれば、

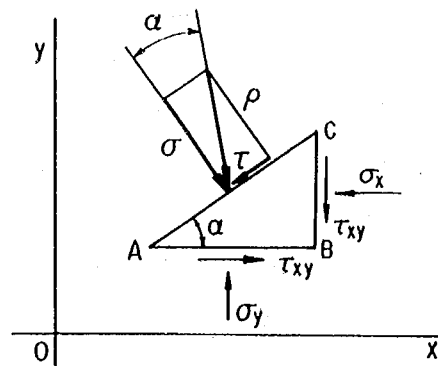


図 7-3

つり合の条件から、この微小直角三角形に働く力の水平、垂直分力の代数和を零と置いて

$$\begin{aligned}(\sigma \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \overline{AC} + \tau_{xy} \overline{AB} - \sigma_x \overline{BC} &= 0 \\-(\sigma \cos \alpha + \tau \sin \alpha) \overline{AC} - \tau_{xy} \overline{BC} + \sigma_y \overline{AB} &= 0 \\(\overline{AB}/\overline{AC}) = \cos \alpha, (\overline{BC}/\overline{AC}) = \sin \alpha \text{ なる関係によって上式は} \\ \sigma \sin \alpha - \tau \cos \alpha &= \sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha \\ \sigma \cos \alpha + \tau \sin \alpha &= \sigma_y \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha\end{aligned}$$

この2式から σ , τ を求めると

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

この考えをジョイント要素に適用すると

$$\{\sigma_{0,j}\}_{s,n} = \begin{Bmatrix} \tau_{sn,0} \\ \sigma_{n,0} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x,0} \\ \sigma_{y,0} \\ \tau_{xy,0} \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

あるいは

$$\{\sigma_{0,j}\}_{s,n} = [T_{\sigma,j}] \{\sigma_0\}_{x,y} \quad (7.21)$$

ジョイント要素の応力は次のように与えられる。

$$\{\sigma_j\}_{s,n} = \{\sigma_{0,j}\}_{s,n} + \{\Delta \sigma_j\}_{s,n} \quad (7.22)$$

ジョイント内にある初期応力を考慮するには、構造物にかかる外荷重ベクトル $\{F_e\}$ から初期の力ベクトル $\{F_{0,j}\}$ を差し引かねばならない。

$$\{F_{0,j}\} = \{F_{0,j}\}_{x,y} = [T]^T \{F_{0,j}\}_{s,n} = [T]^T [B] [T_{\sigma,j}] \{\sigma_0\}_{x,y} \quad (7.23)$$

ここで $[T]$ は (7.17) で定義されるマトリックス, $[B]$ は (7.7) 式で定義されるマトリックス, $[T_{\sigma,j}]$ は (7.20) 式で定義されるマトリックスである。

7-5 実際のジョイント特性を表現するための反復解法

節点の変位に対して組み立てられた線形方程式は、第1段階の答を提供する。しかしこの解はあるジョイントにおいては引張りを、他のものにおいては過剰なせん断を推定している可能性があり、またダイレタンシーのような非線形特性を加味した解析を実施する必要がある。したがって反復法を通して完全に満足する変形と応力を計算する。

7-5-1 荷重伝達法 (load transfer method) と剛性変化法 (variable stiffness method)

図-7.4 にいろいろな反復手法が図示されているが、この図では、初期に圧縮を受けたバネによって初期せん断応力がかかっている直接せん断中の試料が考えられている。計算を始めるにあつ

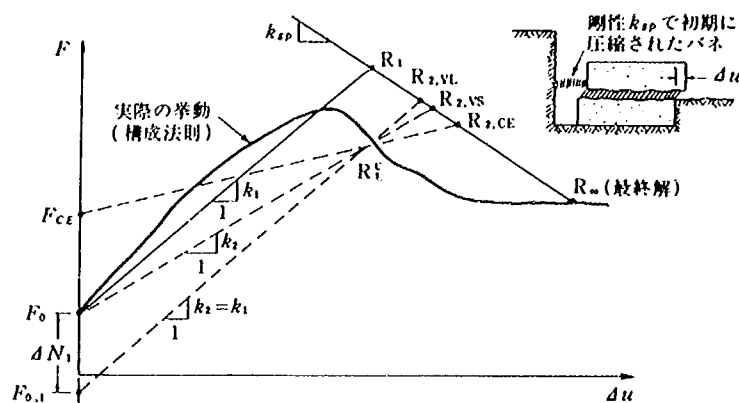


図7-4 実際の材料の挙動に解を従わせるのに用いるいくつかの反復計算手法

て初期剛性率 k_1 をジョイントの荷重-変形曲線の弾性部分を表わすものとして選んだ。バネに初期荷重がかかっているため、バネとジョイントは図中の点 R_1 で平衡に達する。しかしこの点は実際のジョイントの荷重-変形曲線から外れているので、解としては適切でない。そこで点 R_1 に近い構成曲線上のある点、たとえば R_1^p をねらって、新しい条件のもとで再度解析を実施する。2回目の試みでは、 R_1^p を通ると考えられる剛性率を k_2 と再定義する (剛性変化法)。こうして新しい解は点 $R_{2,VS}$ となるが、まだ適切とはいえない。しかし正しい解 (R_∞) にはより近くなっている。

剛性マトリックスは何度も繰返し計算するものをさけるため、Zienkiewicz (1971) は、剛性はそのまま ($k_1 = k_2$) で、新しい初期荷重 $F_{0,1}$ を導入 (荷重伝達法) して計算を続けることを提案した。つまり、この例題では、 $\Delta N_1 = R_1^p - R_1$ とすると、 $F_{0,1}$ は簡単に $F_{x,0} + \Delta N_1$ である。この解として $R_{2,VL}$ が求められる。

上述の解法 (反復解法) は、材料が非線形構成要素より盛り立っている場合、非常に有力な解法となる。そこでこの反復解法について詳述する。

a) 一般の物理的取扱い

変位法によって定式化された小さなひずみ領域における線形弾性問題では、つぎのように組み立てられる剛性方程式 ((3.8) 式参照)

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0$$

を解き、最終の解に到達するのが普通である。ただし (7.23) 式中の $\{R\}$ は、外荷重、初期応力お

および初期ひずみなどによるすべての力を並べたベクトルを表わす。

上の定式化では、線形のひずみ-変位関係式 ($\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e$)、変位の連続性、および近似的に力のつり合いを満足するという条件のほか、つぎの線形弾性構成方程式の成立することが仮定されている。

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (7.24)$$

上述の式とは違った形のおそらく非線形の構成方程式を適用する場合にも、微少な変形を解析する問題では、変位の連続性と力のつり合いは、依然として満足されなければならない。したがって変更を要する関係式は、(7.24)式のみとなる。新しい関係式は一般に次式で与えられる。

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon\}) = 0 \quad (7.25)$$

いま(7.24)式に含まれるパラメーター $[D]$ 、 $\{\epsilon_0\}$ または $\{\sigma_0\}$ の1つ、または、それ以上を調節し、その結果、(7.24)および(7.25)式が(7.23)の解として同じ応力およびひずみ値を与えるようにすることができれば、非線形問題の解が得られる。したがって反復計算が必要となる。

反復計算において、上で述べた $[D]$ 、 $\{\epsilon_0\}$ 、 $\{\sigma_0\}$ の三つの量のうちどれを調節すればよいかは、次の二つの条件

- (i) 等価な線形弾性問題で用いている解法 (solution method)
- (ii) 応力-ひずみ関係を定義する物理法則の性質

によって決まる。

反復計算が、 $[D]$ マトリックスを調節して行なわれるとき、その手法は剛性変化法 (variable stiffness) の手法として知られ、一方 $\{\epsilon_0\}$ 、 $\{\sigma_0\}$ を調節するとき、いわゆる、初期ひずみ、または初期応力法と言われる。

実際問題の多くでは、全ひずみと応力によって記述される式(7.25)の関係式が使用されることはなく、代わりに、増分 $d\{\sigma\}$ と $d\{\epsilon\}$ の関係が与えられるのが普通である。そのような場合にも、荷重増分区間 (クリープ問題では時間刻みの区間) に対して同じ過程を適用することができる。すなわち、増分計算法 (incremental process) は、いままでのどの方法とも結合が可能である。

b) 剛性変化法 (variable stiffness)

(7.25) 式の応力-ひずみ関係を、特別な材料の挙動に対して、(7.24) 式の形に書き表わし、弾性マトリックス $[D]$ を到達したひずみレベル $\{\epsilon\}$ の関数、すなわち

$$[D] = [D(\{\epsilon\})] = [D(\{\sigma\})] \quad (7.26)$$

とみなせば、剛性変化の過程を適用することができる。この場合には、組み立てた最終剛性マトリックスに対して、弾性マトリックスが影響を及ぼす形となり、つぎの問題

$$\{\phi\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0 \quad (7.27)$$

の解を求めればよいことになる。解は、いろいろな反復計算の方法で求めることができる。最も簡

単な繰返し計算では、最初に $\{\delta\}_0 = 0$ において、 $[K(\{\delta\}_0)] = [K_0]$ を評価し、第一近似として

$$\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1} \{R\}$$

を求める。以下、つぎの式

$$\{\delta\}_n = [K]_{n-1}^{-1} \{R\} \quad (7.28)$$

により、同じ過程を繰返し、もはや変位の変化を生じなくなるまで繰返す。もし(7.26)式の型の方程式が、応力増分とひずみ増分の関係としてしか得られない場合、すでに到達した状態を出発点とし、小さな荷重増分について、同じ過程を適用すればよい。

剛性変化法の一つの大きな欠点は、各段階で剛性方程式を組み直し、新しい方程式の解を求めなければならない。

c) 初期応力法 (initial stress method)

構成方程式が、与えられたひずみに対し、応力レベルを定める形となっていて、(7.25)式が

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}) \quad (7.29)$$

の形をとるものとする。このとき $\{\sigma_0\}$ の値を調節して、(7.24)式が(7.29)式と同じ応力値を与えるようにすることができる。初期応力法では、 $\{\sigma_0\}$ が $\{R\}$ に及ぼす影響を考慮して、つぎの方程式を反復計算によって解く。

$$\{\phi\} = [K_0] \{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0 \quad (7.30)$$

繰返し計算はつぎのようにする。最初に

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1} \{R_0\}$$

を求める。ここに $\{R_0\}$ は実際に作用する外荷重である。つぎに到達したひずみに対応する弾性応力解を、同じひずみに対応する真の応力に一致させるに必要な応力レベル $\{\sigma_0\}_1$ を決定する。こうして新しい初期応力すなわち $\{\sigma_0\}_1$ から $\{F\}_{\sigma_0}^e = \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{Vol})$ によって計算される荷重により、 $\{R_0\}$ を修正して $\{R_1\}$ を定め、 $\{R_1\}$ に対して

$$\{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \{R_1\}$$

を求める。以下

$$\{\delta_n\} = [K_0]^{-1} \{R_n\} \quad (7.31)$$

により、変化がなくなるまで計算を繰返す。

以上に対する別法として、反復計算での初期応力の変化によって生じる $\{R\}$ の変化のみを決定する方法がある。このときは、 $\{\delta_0\}$ を前と同様に求めた後、

$$\Delta\{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \Delta\{R_1\}$$

により、 $\Delta\{\delta_n\}$ が十分に零に近づくまで計算を繰返す。

数値的には、この別法のほうが好ましく、物理的意味も明確で、計算の各段階で、構造物のすべ

ての点について、得られたひずみに対する真の応力値と弾性解での応力の差を求めている。反復計算の n 段階で計算される量 $\Delta\{R\}$ は、構造物内に残留した残差不平衡力とみなすことができ、実際に作用する荷重に対して誤差を評価する非常に便利な尺度となる。ここでマトリックス $[K_0]$ の評価に、どのような弾性定数値を用いればよいか問題が存在するが、材料がほとんど線形弾性の挙動をし、線形性からの偏りが局所的であれば、初期の弾性定数を用いればよいことが理解される。

d) 初期ひずみ法 (initial strain method)

一般にクリープの問題では、応力のレベルを、ひずみによって陽に表わすことができない。しかしひずみ（あるいはその増分）を応力によって表わすことができ、次式で表わせられる。

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}) \quad (7.32)$$

したがって $\{\varepsilon_0\}$ を調節して(7.32)式と(7.24)式を等価にすることができる。そして(7.32)式をふたたび反復法によって解くことになるが、初期ひずみ法では、各段階で得られた弾性ひずみを、構成方程式(7.32)式に対応するひずみと比較し、その差を残差不平衡力 $\Delta\{R_n\}$ の計算に用いる。手法については、基本的に初期応力法の場合と同じで、各段階において一定の剛性マトリックス $[K_0]$ を用いることによる利点がある。

初期応力法と初期ひずみ法の相違は、図-7.5によれば最初の近似で得られた応力とひずみのレベルが点1で示されているが、この取れんの仕方の相違によるものである。初期応力法では、図に見られるように、初期応力 $\Delta\{\sigma_0\}_1$ を導入して、応力を正しいレベルにもちきたす。これに対して、初期ひずみ法では、 $\Delta\{\varepsilon_0\}_1$ で示される補正によってひずみを調節する。前者は、応力とともにひずみが急激に増加する場合に、後者はこれと逆の場合の方が有利となる。

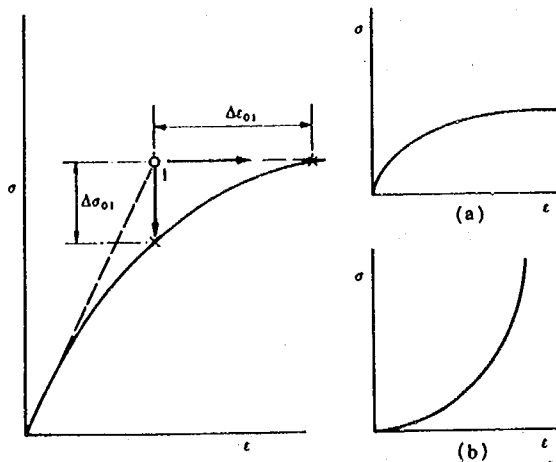


図7-5 初期ひずみ法と初期応力法。(a) 変形とともに硬化率が減少,
(b) 変形とともに硬化率が増す締結性の材料(locking material)

c) 数学的な解釈

単一の変数 x に関するつぎの形の一般的な非線形方程式の解法は Newton - Raphson 法が良く知られている。

$$f(x) = 0$$

Newton 法について概説する
いま上式を $x = f(x)$ の形に書き変える。したがって方程式の根は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標として求めることができる。さらに $x = f(x)$ を次のように書き換える。

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) - x_n = x_n + \Delta x$$

図-7.6 に示すように、 Δx は x_{n+1} と x_n の間隔であるが、これを α 倍して

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x \quad \alpha > 1$$

とすれば x_{n+1} より根に近い値が求められる。 $\alpha \Delta x$ として真の根 (a) と x_n の距離をとれば、 x_{n+1} は根に一致する。図-7.6 で x_{n+1} と a の距離が $(\alpha - 1) \Delta x$ であり、 $y = x$ の直線が 45° 度の傾きを持っていることから $f(a)$ と $f(x_n)$ の高さの差が $(\alpha - 1) \Delta x$ に等しいことを考えると

$$\tan \theta = \frac{(\alpha - 1) \Delta x}{\alpha \Delta x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

の関係のあることが判る。一方図 7.6 の幾何学的関係から

$$\tan \theta = \frac{f(a) - f(x_n)}{a - x_n}$$

が得られる。

いま近似的に

$$f(a) = f(x_n) + (a - x_n) f'(\xi) + \dots$$

が成立するので

$$\tan \theta = f'(\xi) \quad \text{ただし } x_n \leq \xi \leq a$$

が得られる。したがって

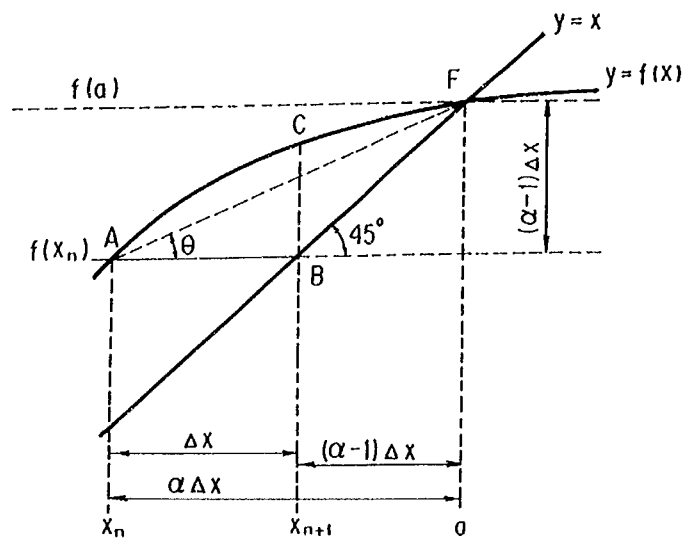


図 7-6 ニュートンラフソン法

$$\tan \theta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

$$\tan \theta = f'(\xi)$$

の関係から

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(\xi)}$$

の値が求められる。しかし $f'(\xi)$ の正確な値はわからない。これを何らかの方法で近似すれば収束の早い次の反復公式が求められる。

$$x_{n+1} = x_n + \alpha (f(x_n) - x_n)$$

いま、 $\alpha = 1/(1 - f'(x_n))$ の $f'(x_n)$ として $f'(x_n)$ を用いると

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

が得られる。ここでもとの方程式 ($x = f(x)$) を $F(x) \equiv f(x) - x = 0$ と書き変えたと

$$F'(x) = f'(x) - 1 \quad \text{及び} \quad F(x_n) = f(x_n) - x_n$$

より

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

の方程式が得られる。これが方程式 $F(x) = 0$ の根を求めるニュートン・ラフソンの反復公式である。

Newton - Raphson 法の収束の様態を図示すると図-7.7 のようになる。この別法としてすべての段階で一定の勾配 $(df/dx)_0$ を用いる手法がある (図-7.7 の (b))。

この Newton - Raphson 法は、前節で述べた材料非線形特性解析に使用できる。

さらに議論を進めるためには、仮想仕事の原理から出発

する有限要素法の基本的な構成式にもどって考えるのが便利である。いま仮想仕事の原理から (3.3) 式と (3.4) 式を等置とすれば、次式が得られる。

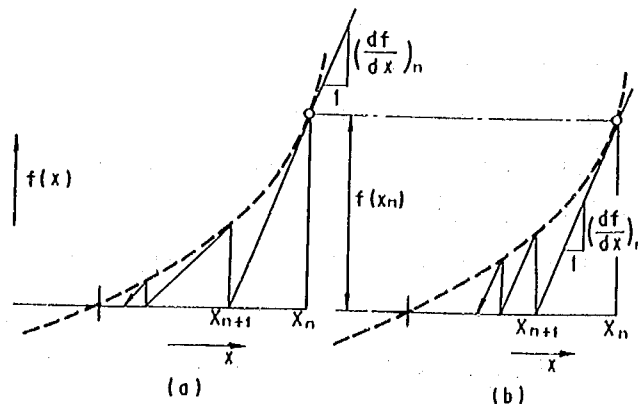


図 7-7 (a) 変化する勾配を用いる
Newton - Raphson の反復計算法
(b) 勾配一定の反復計算法

$$\int d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(\text{Vol}) - [d\{\delta\}^T R + \int d\{f\}^T \{p\} d(\text{Vol}) + \int d\{f\}^T \{g\} d(\text{area})] = 0 \quad (7.33)$$

これに基づいて、 $\{\phi\}$ が内力と外力の和のベクトルを表わすものとすれば、

$$d\{\delta\}^T \{\phi\} = \int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{\bar{R}\} = 0 \quad (7.34)$$

ただし $\{\bar{R}\}$ は外部から課せられた荷重によるすべての力を集めたもの（例えば $\int d\{f\}^T \{p\} d(\text{Vol})$ と $\int d\{f\}^T \{g\} d(\text{area})$ である。ここで、ひずみの変分が(2.2)式の仮定に従って

$$d\{\varepsilon\} = [B]d\{\delta\} \quad (7.35)$$

で書き表わされるものとする。(7.35)式を(7.34)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} d\{\delta\}^T \{\phi\} &= \int_V d\{\delta\}^T [B]^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{\bar{R}\} \\ \phi(\{\delta\}) &= \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

が求められる。

ここに、 $\{\sigma\}$ は到達したひずみレベルに対応して得られる正解の応力を表わす。変形が小さい場合、 $[B]$ マトリックスは座標にのみ依存するひずみマトリックス（(4.53)式参照）である。したがって、変位に対する応力 $\{\sigma\}$ の依存性を定めるためには、非線形方程式

$$\phi(\{\delta\}) = 0 \quad (7.37)$$

を解かなければならない。ここで、変位の変化 $d\{\delta\}$ に対する $\{\phi\}$ の変化を考えると、外荷重ベクトル $\{\bar{R}\}$ は $\{\sigma\}$ に無関係であるので

$$d\{\phi\} = \int_V [B]^T d\{\sigma\} dV \quad (7.38)$$

また、構成方程式は、つぎのように書くことができる。

$$d\{\sigma\} = [D_T(\{\varepsilon\})]d\{\varepsilon\} \quad (7.39)$$

ここで $[D_T]$ は増分弾性マトリックスあるいは接線弾性マトリックスを表わす。

(7.39)を(7.38)に代入し、さらに(7.35)式を代入すれば

$$\begin{aligned} d\{\phi\} &= \left(\int_V [B]^T [D_T(\{\varepsilon\})] [B] dV \right) d\{\delta\} \\ &= [K_T]d\{\delta\} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Newton-Raphson法を第 n 近似の解 $\{\delta\}$ に適用し、非零の $\{\phi_n\}$ を与えるような結果が得られたならば、反復計算において

$$d\{\delta\}_{n+1} = -[K_T]_n^{-1} \{\phi_n\} \quad (7.41)$$

補正值を使用することになる。ただし $[K_T]_n$ は近似解 $\{\delta_n\}$ における変位とひずみから求めた接線係数マトリックスを表わす。

初期応力法の場合、次式で示される(7.36)式に従い計算を行なう。

$$\begin{aligned} \phi(\{\delta\}) &= \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} \\ &= [K_0]\{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0 \end{aligned}$$

最初に、 $\{R_0\}$ による外荷重により到達したひずみに対応する弾性応力解を、同じひずみに対応する真の応力に一致させるに必要な応力レベル $\{\sigma_0\}_1$ を決定する。つまり

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1} \{R_0\}$$

を求め、

$$\{\epsilon_0\}_1 = [B] \{\delta_0\} \quad ((2.2) \text{式参照})$$

$$\{\sigma_0\}_1 = [D] (\{\epsilon_0\}_1 - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad ((2.3) \text{式参照})$$

この $\{\sigma_0\}_1$ の初期応力をもとに

$$\{F\}_{\sigma_0 1} = \int [B]^T \{\sigma_0\}_1 d(\text{Vol}) \quad ((2.13) \text{式参照})$$

を算出し、 $\{R(\delta)\}$ を修正し、 $\{R_1\}$ を定め、 $\{R_1\}$ に対して

$$\{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \{R_1\}$$

を求める。以下

$$\{\delta_n\} = [K_0]^{-1} \{R_n\}$$

により変化を生じなくなるまで計算をくり返す。

ここで $\{\sigma_0\}_1$ を $[D] (\{\epsilon_0\}_1 - \{\epsilon_0\})$ とすれば、 $\Delta \{\sigma_0\}_1$ が求められ、結局 $\Delta \{\delta_1\}$ が求められることになる。したがって、

$$\Delta \{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \Delta \{R_1\}$$

により計算が実施される。

初期ひずみ法の場合、各段階で得られた弾性ひずみを、構成方程式 (例えば $\{\epsilon\} = f(\{\sigma\})$) に対応するひずみと比較し、その差を $\Delta \epsilon$ とすれば

$$\{\Delta R\} = \int [B]^T [D] \{\Delta \epsilon\} d(\text{Vol}) \quad ((2.12) \text{式参照})$$

により、残差不平衡力 $\{\Delta R_n\}$ の計算にこの値を用い、

$$\{\Delta \delta_n\} = [K]^{-1} \{\Delta R_n\} \quad \text{ただし } [K] = \int [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{\Delta \epsilon_n\} = [B] \{\Delta \delta_n\}$$

を計算し、許容の範囲まで計算を繰返す。

Newton-Raphson 法では、一般に多くの反復計算が必要になるが、初期応力法、初期ひずみ法は剛性マトリックスを一度だけ逆変換すればよいので比較的簡単に計算が可能である。

すべて非線形に共通する重要な事は、全体の力の不平衡を表わすベクトル $\{\phi\}$ の直接計算にあり、弾性解は、単に近似解の収束を加速するための手段として用いられるにすぎないものである。

7-6 組み合せジョイント要素 (Interlaced joint element)

ある1つの節点とその他の節点との相互関係を表わしている剛性マトリックスは、節点の間をうめている要素から作られる。そのジョイント要素の解は、節点での力と変位の形で与えられるが、

次の反復計算における荷重ベクトルの修正を行なう必要がある。したがって図-7.8に示されているように、この段階で一連のジョイント要素を再定義しておく必要がある。実際には、おのおの修正ジョイント要素に関する長さ(l')と方向角(α)の値さえ記憶しておけば十分である。

図-7.8の例では、 l'_1 に $l_1/2$ 、 $l'_2 = (l_1/2 + l_2/2)$ などであり、既知の変位から力を計算しようとするとき、修正ジョイント要素に関するジョイント剛性特性 k'_s と k'_n は単にそれがつくられている

半分ずつの2つのジョイント要素の剛性特性を加重平均したものとなる。たとえば

$$(k'_s)_1 = (k_s)_1$$

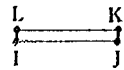
$$(k'_s)_2 = \frac{1}{l'_2} \left((k_s)_1 \frac{l_1}{2} + (k_s)_2 \frac{l_2}{2} \right)$$

$$(k'_s)_3 = \frac{1}{l'_3} \left((k_s)_2 \frac{l_2}{2} + (k_s)_3 \frac{l_3}{2} \right)$$

$$(k'_n)_1 = (k_n)_1$$

$$(k'_n)_2 = \frac{1}{l'_2} \left((k_n)_1 \frac{l_1}{2} + (k_n)_2 \frac{l_2}{2} \right)$$

剛性マトリックスを作るためのジョイント



荷重伝達法での修正ジョイント

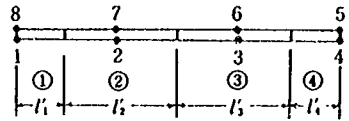
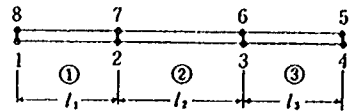


図7-8 修正ジョイント要素

7-7 ジョイントの開閉

goodmanによる不連続面のジョイントには、垂直変形に対して2つの物理的制約がある。そこでgoodmanの提唱するジョイント要素の垂直特性(開口及び閉合)について述べ、後地すべりのすべり面の特性についての適用性の可否について検討を行なう。

まず、goodmanによるジョイントは、開口したジョイントは引張強度をもたない。さらに可能な圧縮量に対して1つの限度、すなわち、最大可能閉塞量 V_{mc} があり、これはジョイントの「厚み」 e より小さくなければならない。そこで対になった節点の垂直応力と垂直変位の関係を(図7.9)次式で表わしている。

$$F_n = \left(\frac{\Delta v}{V_m - \Delta v} + 1 \right) F_{n,0} \quad (7.42)$$

ここに $F_{n,0}$ は節点の初期外力 Δv は垂直力の増分($F_n - F_{n,0}$)によって生じたジョイント要素1

対の節点間の垂直方向の変位の差であり、 V_m は初期の荷重 $F_{n,0}$ から始まり閉じることのできる最大量である。(7.42)式は載荷時でも除荷時でも適用できると仮定する。

初期応力 ($\sigma_n = \sigma_0$) を開放し、 V_{mc} を測定するときによく使われるジョイントが合わさっているだけの基準圧力 (seating pressure) $\sigma_n = \xi$ になったときのジョイントの開口を dv とすると (7.42) 式から

$$\begin{aligned} dv &= V_m - (F_{n,0}/F_n) V_m \\ &= V_m - (\sigma_0/\xi) V_m \end{aligned}$$

いま図 7.9 から $V_{mc} = dv(\xi) - V_m$ であるので、さらに上式は $dv - V_m = (\sigma_0/\xi) V_m$

に変形されるから

$$V_{mc} = - \left(\frac{\sigma_0}{\xi} \right) V_m$$

より、次式が求められる。

$$V_m = \frac{-V_{mc}}{\sigma_0/\xi} \xi \quad (7.43)$$

計算は (7.42) 式を dv に関して微分し、単位垂直剛性率 $k_{n,0}$ を求めることから始める。

$$k_{n,0} = \frac{\sigma_0}{V_m} = \frac{-\sigma_0^2}{\xi V_{mc}} \quad (7.44)$$

ここに σ_0 はジョイント要素の初期垂直応力である。この垂直剛性率の値を使うと、解として修正ジョイント要素の節点 a と b (図 7.8 参照) での変位 v_a と v_b が求まる。したがって

$$dv_1 = v_a - v_b \quad (7.45)$$

初期応力 σ_0 、基準となる圧力 ξ 、修正ジョイント要素を構成する半分ずつの要素の最大閉合量 V_{mc} 、ならびに (7.44) 及びジョイントの修正式 (7-6 章) を使って、垂直剛性率 (k'_n) が計算できる。もし修正ジョイント要素を構成している両方のもとの要素が同じ初期応力と最大閉合量を有しているとすれば

$$k'_n = \frac{\sigma_0}{V_m} = \frac{F_{n,0}}{V_m l'} \quad (7.46)$$

ここに l' は修正ジョイント要素の長さであり、 V_m は (7.43) 式で与えられる量である。したがって対になっている節点 a, b の a 点での外力は、次式で与えられる。

$$F_{n,1} = l' k'_n (dv_1) + F_{n,0} \quad (7.47)$$

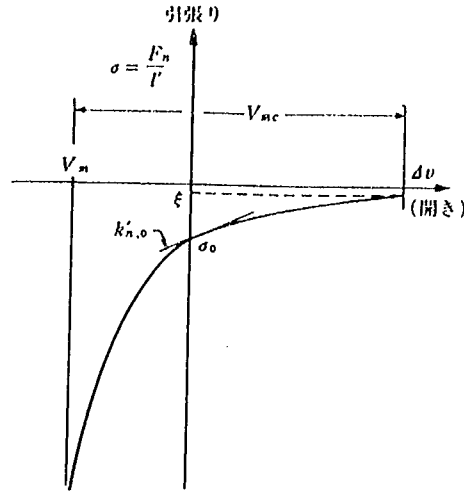


図 7-9 対になった節点の垂直応力と垂直変位の関係

a) ジョイントの開口

図7.10では、 Δv_1 は正で、点 R_1 は構成曲線より上の部分に位置している。 $\Delta v = \Delta v_1$ での構成曲線上の点を R_1^c と定義すると距離 $R_1^c - R_1$ が2回目の反復計算の初期荷重 $(F_{n,0})_2$ と規定される。

$$(F_{n,0})_2 = (F_{n,0})_1 + \Delta N_1 \quad (7.48)$$

ここで

$$\Delta N_1 = \left(\frac{\Delta v_1}{V_m - \Delta v_1} + 1 \right) F_{n,0} - F_{n,1}$$

($i+1$)番目の反復計算で初期応力と最大閉合量を有している場合、(7.47)

式に従って

$$\begin{aligned} F_{n,1} &= l' k_n' \Delta v_1 + (F_{n,0})_1 \\ (F_{n,0})_{i+1} &= (F_{n,0})_i + (\Delta N_i) \end{aligned} \quad (7.49)$$

ここで

$$\Delta N_i = \left(\frac{\Delta v_i}{V_m - \Delta v_i} + 1 \right) F_{n,0} - F_{n,i} \quad (7.50)$$

そして

$$\Delta v_i = v_a - v_b + (\Delta v(\tau))_i$$

この手順を、すべての要素において ΔN_i が十分小さな量 ε より小さくなるまで反復すると同時に、考慮すべきその他の非線形の条件に対しても答が満足するように計算を行なう。

ジョイントの開口に対する荷重伝達手順の公式は(7.49)、(7.50)式から

$$(F_{n,0})_{i+1} = (F_{n,0})_i + \left(\frac{\Delta v_i}{V_m - \Delta v_i} + 1 \right) F_{n,0} - F_{n,i}$$

いま $(F_{n,0})_i - F_{n,i} = -l' k_n' \Delta v_i$ ((7.49)式の上段の公式)から

$$(F_{n,0})_{i+1} = -l' k_n' \Delta v_i + \left(\frac{\Delta v_i}{V_m - \Delta v_i} + 1 \right) F_{n,0}$$

さらに(7.46)式より、 $F_{n,0} = l' k_n' V_m$ であるから

$$\begin{aligned} (F_{n,0})_{i+1} &= -l' k_n' \Delta v_i + \left(\frac{\Delta v_i}{V_m - \Delta v_i} + 1 \right) k_n' V_m l' \\ &= k_n' l' \left(-\Delta v_i + \frac{V_m \Delta v_i}{V_m - \Delta v_i} + V_m \right) \\ &= \left[\frac{\Delta v_i V_m}{(V_m - \Delta v_i)} + (V_m - \Delta v_i) \right] k_n' l' \end{aligned} \quad (7.51)$$

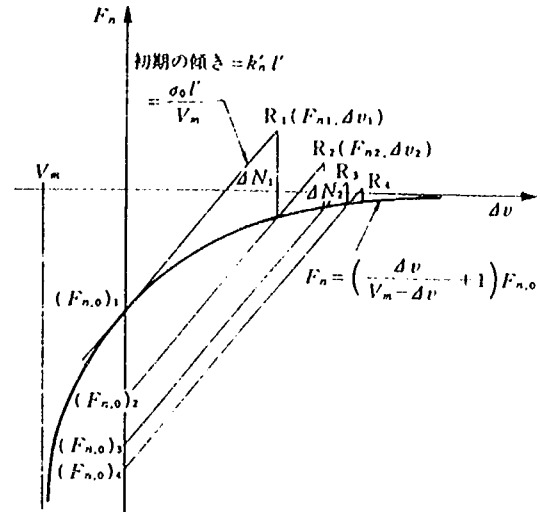


図7-10 ジョイントの開口(Δv 正)に対する反復計算過程

b) ジョイントの閉合

ジョイントの閉合は、ジョイントの開口の場合と同様に取扱いことができる。このため(7.42)式を次のように変形する。

つまり (7.42) 式は

$$F_n = \left(\frac{\Delta v}{V_m - \Delta v} + 1 \right) F_{n,0}$$

である。したがって d_v について整理を行なうと

$$\left(\frac{F'_n}{F'_{n,0}} - 1\right) = \frac{\Delta v}{V_m - \Delta v}$$

$$\left(\frac{F_n}{F_{n,0}} - 1\right)(V_m - \Delta v) = \Delta v$$

$$\left(\frac{F_n}{F_{n,0}} - 1\right) V_m - \frac{F_n}{F_{n,0}} \Delta v + \Delta v = \Delta v$$

$$\left(\frac{F_n}{F_{n,0}} - 1\right) V_m = \frac{F_n}{F_{n,0}} \Delta v$$

$$\frac{F_n - F_{n,0}}{F_n} V_m = \Delta v \quad (7.52)$$

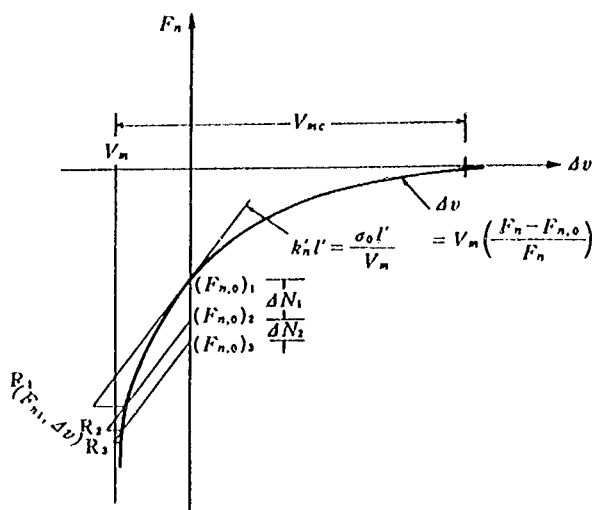


図 7-11 ジョイントの閉合 (d の負) に対する反復計算過程

最初の計算の結果 Δv_1 は負となり、点 $R_1 = (\Delta v_1, F_{n,1})$ が得られる。2回目の反復計算での初期荷重は、

$$(F'_{n,0})_2 = (F_{n,0})_1 + \Delta N_1$$

で表わされる。ここで

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= (\Delta v_1 - \Delta v) k_n' \ell' \\ &= \left(\Delta v_1 - \frac{V_m (F_{n,i} - F_{n,0})}{F_{n,i}} \right) k_n' \ell' \end{aligned} \quad (7.53)$$

である。

($i + 1$) 番目の反復計算では

$$F_{n,i} = \ell' k_n' \Delta V_i + (F_{n,0})_i \quad (7.54)$$

$$(F_{n,0})_{i+1} = (F_{n,0})_i + (\Delta N_i)$$

で表わされる。

 $\tau, \tau, \nu\tau$

$$\Delta N_i = \left(\Delta v_i - \frac{V_m (F_{n,i} - F_{n,0})}{F_{n,i}} \right) k_n' \ell'$$

(7.54) と (7.45) 式から

$$\begin{aligned}(F_{n,0})_{i+1} &= (F_{n,0})_i + \left[\Delta v_i - \frac{V_m (F_{n,i} - F_{n,0})}{F_{n,i}} \right] k_n' \ell' \\ &= (F_{n,0})_i + \left[\Delta v_i - V_m + \frac{V_m F_{n,0}}{F_{n,i}} \right] k_n' \ell'\end{aligned}$$

いま $(F_{n,0})_i = k_n' \ell' \Delta v_i$

$$F_{n,0} = V_m k_n' \ell'$$

を代入すると

$$\begin{aligned}(F_{n,0})_{i+1} &= k_n' \ell' \Delta v_i + \left[\Delta v_i - V_m + \frac{V_m^2 k_n' \ell'}{F_{n,i}} \right] k_n' \ell' \\ &= k_n' \ell' \left[2 \Delta v_i - V_m + \frac{V_m^2 k_n' \ell'}{F_{n,i}} \right] k_n' \ell'\end{aligned}$$

さらに $F_{n,i} = k_n' \ell' \Delta v_i + (F_{n,0})_i$ より

$$(F_{n,0})_{i+1} = k_n' \ell' \left[2 \Delta v_i - V_m + \frac{V_m^2 k_n' \ell'}{k_n' \ell' \Delta v_i + (F_{n,0})_i} \right]$$

$$(F_{n,0})_{i+1} = k_n' \ell' \left[2 \Delta v_i - V_m + \frac{V_m^2}{\Delta v_i + (F_{n,0})_i / (k_n' \ell')} \right] \quad (7.55)$$

が得られ、ジョイントの開合に対する荷重伝達の漸化式が求まる。

7-8 ジョイントのせん断

ジョイントはせん断を受けるわけであるが、この解析手法はジョイントの開口と同じ手順で計算できる。この場合、ジョイントのせん断変形に対して極限となるせん断応力基準（破壊基準）が課せられる。

ジョイントのせん断変形とせん断応力の関係について、図-7.12のような構成法則を考える。この構成法則では、初期応力 τ_0 と初期せん断剛性率 k_s は弾性領域を定義するが、その極限応力 τ_p は最大せん断強度から求まる基準に従い、 σ に依存する。すなわち、

$$\tau_p = f_1(\sigma) \quad (7.56)$$

もし τ_p を応力が越えたならば強度は低下し、変位 u_r のとき残留強度まで低下する。

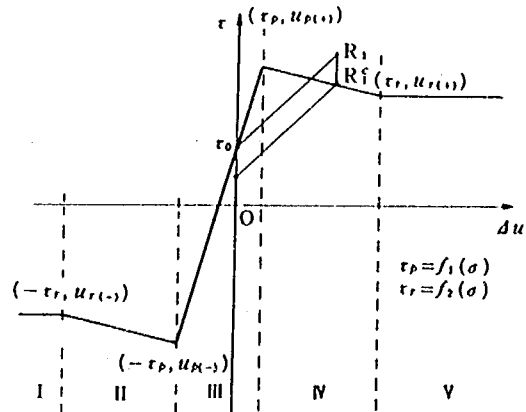


図7-12 せん断変形での構成法則

$$\tau_r = f_2(\sigma) \quad (7.57)$$

垂直応力に対する最大せん断応力時の変位 u_p と残留応力時の変位 u_r の関係について、次のモデルを考える。

正のせん断 τ (右方向のせん断) に対して

$$\begin{aligned} u_{p(+)} &= u_p = \frac{\tau_p - \tau_0}{k_s} \\ u_{r(+)} &= u_r = \frac{M\tau_p - \tau_0}{k_s} \quad M > 1 \end{aligned} \quad (7.58)$$

負の τ に対して

$$\begin{aligned} u_{p(-)} &= -u_p - \frac{2\tau_0}{k_s} \\ u_{r(-)} &= -u_r - \frac{2\tau_0}{k_s} \end{aligned} \quad (7.59)$$

ここで

$$\Delta u_i = u_a - u_b \quad (7.60)$$

を修正ジョイント要素の相対せん断変位とすると図-7.12の構成関係は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \tau = -\tau_r; \quad \Delta u \leq u_{r(-)} \\ \text{II} \quad & \tau = -\tau_p + \frac{\tau_p - \tau_r}{u_p - u_r} (\Delta u - u_{p(-)}); \quad u_{r(-)} \leq \Delta u \leq u_{p(-)} \\ \text{III} \quad & \tau = k_s \Delta u + \tau_0; \quad u_{p(-)} \leq \Delta u \leq u_{p(+)} \\ \text{IV} \quad & \tau = \tau_p + \frac{\tau_p - \tau_r}{u_p - u_r} (\Delta u - u_{p(+)}); \quad u_{p(+)} \leq \Delta u \leq u_{r(+)} \\ \text{V} \quad & \tau = \tau_r; \quad \Delta u \geq u_{r(+)} \end{aligned} \quad (7.61)$$

荷重の伝達は修正ジョイント要素の力の項をもとに行なわれる。各ジョイント要素で剛性率 k_s を決めて計算をすると、 $\Delta u_1 = u_a - u_b$ という結果が得られる。図-7.8における節点 a に対するせん断力は

$$F_{s,1} = l' k_s' \Delta u_1 + (F_{s,0})_1 \quad (7.62)$$

ここで k_s' は 7-6 章で求められた手法で与えられ、 $(F_{s,0})_1 = \tau_0 l'$ である。そしてジョイントの開く場合と同じく、2回目の反復計算における節点 a の初期応力は

$$(F_{s,0})_2 = (F_{s,0})_1 + \Delta S_1 \quad (7.63)$$

または

$$\Delta S_1 = \tau_1 l' - F_{s,1} \quad (7.64)$$

ここに、 $\Delta u = \Delta u_1$ であるから、 τ_1 は (7.61) 式で与えられる。同様に $(i+1)$ 番目の反復計

算では

$$F_{s,i} = \ell' k_s' \Delta u_i + (F_{s,0})_i$$

$$\Delta S_i = \tau_i \ell' - F_{s,i}$$

そして

$$(F_{s,0})_{i+1} = (F_{s,0})_i + \Delta S_i \quad (7.65)$$

上式を組合せて

$$(F_{s,0})_{i+1} = \tau_i \ell' - k_s' \ell' \Delta u_i \quad (7.66)$$

ここで、 τ_i は (7.61) 式から求められる値である。

8. 土塊の粘弾性モデル

地すべり斜面の土塊は、弾性体ではなく粘弾性の特徴を有する。そこでこれらの特性を反映させるため粘弾性モデルを設定しなければならない。しかしながら地すべり土塊の粘弾性モデルは種々考慮されているが、未だ確定的なモデルはない。そこで当解析においては、モデル構造が比較的簡単で物理的背景の明確な、図-8.1に示される柴田～村山モデルを採用することとした。解析において、この物理モデルが妥当でない場合(8.7)式を換えることによって容易に地すべり斜面の粘弾性特性を考察可能である。

ここで応力と作用時間の関係を求める。

A領域において、Maxwell modelの特性から

$$\sigma = \epsilon_1 E_1 \quad (8.1)$$

B領域においてはVoight modelの特性(このB領域では σ はスプリングとダッシュポットがそれぞれ受け持つので $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$)から

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (8.2)$$

$$\sigma_1 = \epsilon_2 E_2 \quad (8.3)$$

(8.2)と(8.3)式から

$$\sigma = \epsilon_2 E_2 + \eta \frac{d\epsilon_2}{dt} \quad (8.4)$$

よって

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{\sigma - \epsilon_2 E_2}{\eta} \quad (8.5)$$

上式は次の様に変形される。

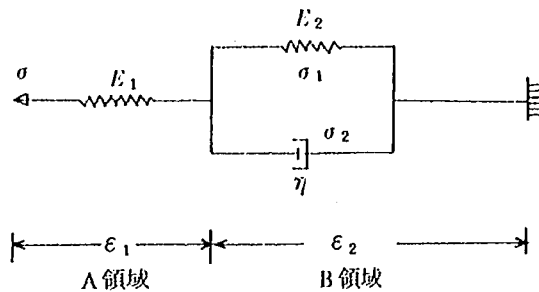
$$\frac{d\epsilon_2}{\sigma - \epsilon_2 E_2} = \frac{dt}{\eta}$$

したがって上式は積分でき、次式が求まる。

$$-\frac{1}{E_2} \log(\sigma - \epsilon_2 E_2) = \frac{t}{\eta} + C$$

$t = 0$ の条件で $\epsilon_2 = 0$ とすれば

$$C = -\frac{\log \sigma}{E_2}$$



σ : 応力
 ϵ : 歪
 E_1 : 縦弾性係数
 E_2 : 遅延縦弾性係数
 η : 粘性係数
 $T : \eta/E_2$ 遅延時間
 t : 時間

図8-1 粘弾性モデル

したがって

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{E_2} \log (\sigma - \varepsilon_2 E_2) &= \frac{t}{\eta} - \frac{\log \sigma}{E_2} \\
 \log \sigma - \log (\sigma - \varepsilon_2 E_2) &= \frac{E_2 t}{\eta} \\
 \sigma - \varepsilon_2 E_2 &= \sigma \exp \left(-\frac{E_2 t}{\eta} \right) \\
 \sigma \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{E_2 t}{\eta} \right) \right\} &= \varepsilon_2 E_2 \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\sigma}{E_2} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{E_2 t}{\eta} \right) \right\} \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

(8.1) と (8.6) 式を $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ に代入すると

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{E_2 t}{\eta} \right) \right\} \right\} \sigma \quad (8.7)$$

が得られる。この (8.7) 式を使用することによって時間の経過による歪量が求められ、最終的な歪量は次式で表わされる量になる。

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \sigma \quad (8.8)$$

9. 事例問題

これまでに有限要素法の基本的な定式化及び解析手続について述べて来たが、実際の計算は電子計算機で実行される。したがって解析プログラムのシステム解析力も必要となるが、ここでは有限要素法の十分なる理解とプログラム作成手順の参考とするため簡単なモデルを通しての手計算による事例解析を実施する。

計算は図-9.1による計算モデルに対して荷重条件図-9.2を種々変えて実施する。計算条件は表-9.1に示す。

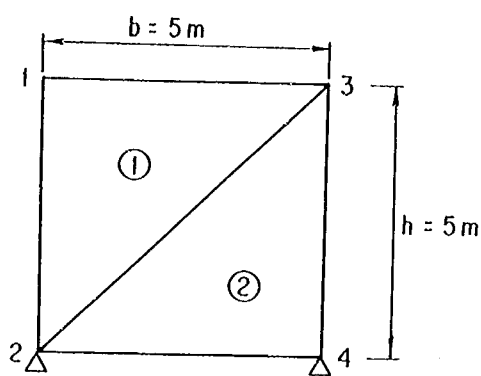
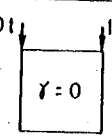
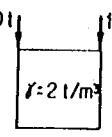
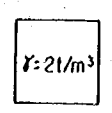
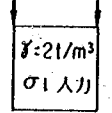


図9-1 計算モデル
(三角形要素)

表9-1 物性値

γ	(t/m^3)	2.0
E_1	(t/m^2)	100
E_2	(t/m^2)	1000
F_2	($t/m^2 \cdot hr$)	1000

図9-2 計算条件			
計算 ケース	計算内容	荷重条件	備 考
A-1	弾 性		節点外力
A-2	弾 性		節点外力と体積力
A-3	初期応力		体 積 力
A-4	弾 性		σ_1 にケースA-3の結果を与える。

ケース A-1 弾性問題

- 1) 節～変位関係を表わす〔B〕マトリックスを求める。〔B〕マトリックスは(4.15)式から次式で与えられる。

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

A は三角形要素の面積で、 $2A$ は次式で与えられる。

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_m y_j - x_i y_m$$

$b_i = y_j - y_m$ …… $b_m = y_i - y_j$ で、 $c_i = x_m - x_j$ …… $c_m = x_j - x_i$ で与えられる。

したがって図-9.1の三角形要素①について

$(x_i, y_i) = (3.8)$, $(x_j, y_j) = (3.3)$, $(x_m, y_m) = (8.8)$ とすれば

$$\begin{aligned} 2A &= x_j y_m + x_m y_i + x_i x_j - x_j y_i - x_m y_j - x_i y_m \\ &= 3 \times 8 + 8 \times 8 + 3 \times 3 - 3 \times 8 - 8 \times 3 - 3 \times 8 \\ &= 25.0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

〔B〕マトリックスは

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3-8 & 0 & 8-8 & 0 & 8-3 & 0 \\ 0 & 8-3 & 0 & 3-8 & 0 & 3-3 \\ 8-3 & 3-8 & 3-8 & 8-8 & 3-3 & 8-3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.3)$$

同様に三角要素②についても

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & 3-8 & 0 & 8-3 & 0 \\ 0 & 8-3 & 0 & 8-8 & 0 & 3-8 \\ 8-3 & 3-3 & 8-8 & 3-8 & 3-8 & 8-3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.4)$$

2) 応力-ひずみ関係を表わす〔D〕マトリックス（弾性体と考える）を求める。〔D〕マトリックスは、等方性材料の場合（4.31）式で与えられる。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

いま三角形要素の物性値は $E = 100 \text{ t/m}^2$ $\nu = 0.3$ とすれば

$$\begin{aligned} [D] &= \frac{100 \times (1-0.3)}{(1+0.3)(1-2 \times 0.3)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3/(1-0.3) & 0 \\ 0.3/(1-0.3) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2 \times 0.3)/2(1-0.3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 134.62 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.62 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.5)$$

3) 全体剛性マトリックス〔K〕の計算を行なう。

要素の剛性マトリックス〔K〕は、（4.51）式で表わされる。

$$\begin{aligned} [K] &= \iint [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \\ &= [B]^T [D] [B] t A \end{aligned}$$

いま t は単位厚さであるとすれば

$$[K] = [B]^T [D] [B] A$$

したがって三角形要素①では（9.2）、（9.3）と（9.5）式から

$$[K] = 125 \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134.62 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.62 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

参考 マトリックスの積

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1\alpha_1+B_1\alpha_2+C_1\alpha_3 & A_2\alpha_1+B_2\alpha_2+C_2\alpha_3 & A_3\alpha_1+B_3\alpha_2+C_3\alpha_3 & A_4\alpha_1+B_4\alpha_2+C_4\alpha_3 & A_5\alpha_1+B_5\alpha_2+C_5\alpha_3 & A_6\alpha_1+B_6\alpha_2+C_6\alpha_3 \\ A_1\beta_1+B_1\beta_2+C_1\beta_3 & A_2\beta_1+B_2\beta_2+C_2\beta_3 & A_3\beta_1+B_3\beta_2+C_3\beta_3 & A_4\beta_1+B_4\beta_2+C_4\beta_3 & A_5\beta_1+B_5\beta_2+C_5\beta_3 & A_6\beta_1+B_6\beta_2+C_6\beta_3 \\ A_1\gamma_1+B_1\gamma_2+C_1\gamma_3 & A_2\gamma_1+B_2\gamma_2+C_2\gamma_3 & A_3\gamma_1+B_3\gamma_2+C_3\gamma_3 & A_4\gamma_1+B_4\gamma_2+C_4\gamma_3 & A_5\gamma_1+B_5\gamma_2+C_5\gamma_3 & A_6\gamma_1+B_6\gamma_2+C_6\gamma_3 \end{bmatrix} \\
 & \begin{aligned} & a_1(A_1\alpha_1+B_1\alpha_2+C_1\alpha_3) + a_2(A_2\alpha_1+B_2\alpha_2+C_2\alpha_3) + a_3(A_3\alpha_1+B_3\alpha_2+C_3\alpha_3) \\ & b_1(\quad \quad \quad) + b_2(\quad \quad \quad) + b_3(\quad \quad \quad) \\ & c_1(\quad \quad \quad) + c_2(\quad \quad \quad) + c_3(\quad \quad \quad) \\ & d_1(\quad \quad \quad) + d_2(\quad \quad \quad) + d_3(\quad \quad \quad) \\ & e_1(\quad \quad \quad) + e_2(\quad \quad \quad) + e_3(\quad \quad \quad) \\ & f_1(\quad \quad \quad) + f_2(\quad \quad \quad) + f_3(\quad \quad \quad) \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & a_1(A_2\alpha_1+B_2\alpha_2+C_2\alpha_3) + a_2(A_2\beta_1+B_2\beta_2+C_2\beta_3) + a_3(A_2\gamma_1+B_2\gamma_2+C_2\gamma_3) \\ & b_1(\quad \quad \quad) + b_2(\quad \quad \quad) + b_3(\quad \quad \quad) \\ & c_1(\quad \quad \quad) + c_2(\quad \quad \quad) + c_3(\quad \quad \quad) \\ & d_1(\quad \quad \quad) + d_2(\quad \quad \quad) + d_3(\quad \quad \quad) \\ & e_1(\quad \quad \quad) + e_2(\quad \quad \quad) + e_3(\quad \quad \quad) \\ & f_1(\quad \quad \quad) + f_2(\quad \quad \quad) + f_3(\quad \quad \quad) \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & a_1(A_3\alpha_1+B_3\alpha_2+C_3\alpha_3) + a_2(A_3\beta_1+B_3\beta_2+C_3\beta_3) + a_3(A_3\gamma_1+B_3\gamma_2+C_3\gamma_3) \\ & b_1(\quad \quad \quad) + b_2(\quad \quad \quad) + b_3(\quad \quad \quad) \\ & c_1(\quad \quad \quad) + c_2(\quad \quad \quad) + c_3(\quad \quad \quad) \\ & d_1(\quad \quad \quad) + d_2(\quad \quad \quad) + d_3(\quad \quad \quad) \\ & e_1(\quad \quad \quad) + e_2(\quad \quad \quad) + e_3(\quad \quad \quad) \\ & f_1(\quad \quad \quad) + f_2(\quad \quad \quad) + f_3(\quad \quad \quad) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1(A_4\alpha_1+B_4\alpha_2+C_4\alpha_3) + a_2(A_4\beta_1+B_4\beta_2+C_4\beta_3) + a_3(A_4\gamma_1+B_4\gamma_2+C_4\gamma_3) \\
& b_1(\quad " \quad) + b_2(\quad " \quad) + b_3(\quad " \quad) \\
& c_1(\quad " \quad) + c_2(\quad " \quad) + c_3(\quad " \quad) \\
& d_1(\quad " \quad) + d_2(\quad " \quad) + d_3(\quad " \quad) \\
& e_1(\quad " \quad) + e_2(\quad " \quad) + e_3(\quad " \quad) \\
& f_1(\quad " \quad) + f_2(\quad " \quad) + f_3(\quad " \quad)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1(A_5\alpha_1+B_5\alpha_2+C_5\alpha_3) + a_2(A_5\beta_1+B_5\beta_2+C_5\beta_3) + a_3(A_5\gamma_1+B_5\gamma_2+C_5\gamma_3) \\
& b_1(\quad " \quad) + b_2(\quad " \quad) + b_3(\quad " \quad) \\
& c_1(\quad " \quad) + c_2(\quad " \quad) + c_3(\quad " \quad) \\
& d_1(\quad " \quad) + d_2(\quad " \quad) + d_3(\quad " \quad) \\
& e_1(\quad " \quad) + e_2(\quad " \quad) + e_3(\quad " \quad) \\
& f_1(\quad " \quad) + f_2(\quad " \quad) + f_3(\quad " \quad)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1(A_6\alpha_1+B_6\alpha_2+C_6\alpha_3) + a_2(A_6\beta_1+B_6\beta_2+C_6\beta_3) + a_3(A_6\gamma_1+B_6\gamma_2+C_6\gamma_3) \\
& b_1(\quad " \quad) + b_2(\quad " \quad) + b_3(\quad " \quad) \\
& c_1(\quad " \quad) + c_2(\quad " \quad) + c_3(\quad " \quad) \\
& d_1(\quad " \quad) + d_2(\quad " \quad) + d_3(\quad " \quad) \\
& e_1(\quad " \quad) + e_2(\quad " \quad) + e_3(\quad " \quad) \\
& f_1(\quad " \quad) + f_2(\quad " \quad) + f_3(\quad " \quad)
\end{aligned}$$

したがって三角形要素①における剛性マトリックス〔K〕は

$$〔K〕 = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 \\ -48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 \\ -19.23 & 19.23 & 19.23 & 0 & 0 & -19.23 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 67.31 & -28.85 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -28.85 & 67.31 & 0 \\ 19.23 & -19.23 & -19.23 & 0 & 0 & 19.23 \end{bmatrix}$$

したがって三角形要素①についての剛性方程式〔(3.7)式参照〕〔F〕=〔K〕〔δ〕から次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 \\ -48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 \\ -19.23 & 19.23 & 19.23 & 0 & 0 & -19.23 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 67.31 & -28.85 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -28.85 & 67.31 & 0 \\ 19.23 & -19.23 & -19.23 & 0 & 0 & 19.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

同様に三角形要素②についての剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.23 & 0 & 0 & -19.23 & -19.23 & 19.23 \\ 0 & 67.31 & -28.85 & 0 & 28.85 & -67.31 \\ 0 & -28.85 & 67.31 & 0 & -67.31 & 28.85 \\ -19.23 & 0 & 0 & 19.23 & 19.23 & -19.23 \\ -19.23 & 28.85 & -67.31 & -19.23 & 86.54 & -48.08 \\ 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 & -48.08 & 86.54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (9.8)$$

(9.7) と (9.8) 式から全体の剛性マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & 19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 & 0 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 & 0 & 0 \\ -19.23 & 19.23 & 86.54 & 0 & 0 & -48.07 & -67.31 & 28.85 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 86.54 & -48.07 & 0 & 19.23 & -19.23 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -48.07 & 86.54 & 0 & -19.23 & 19.23 \\ 19.23 & -19.23 & -48.07 & 0 & 0 & 86.54 & 28.85 & -67.31 \\ 0 & 0 & -67.31 & 19.23 & -19.23 & 28.85 & 86.54 & -48.08 \\ 0 & 0 & 28.85 & -19.23 & 19.23 & -67.31 & -48.08 & 86.54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

4) 節点の変位の計算

節点の変位の計算は (3.8) 式から

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{ \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_b - \{F\}_{\varepsilon_0} - \{F\}_{\sigma_0} \} \quad (9.10)$$

で求められる。事例解析 A-1 では (9.10) 式は $\{R\}$ のみであるから、直接的に (9.9) 式から求めることができる。しかしながら (9.9) 式をただちに解くわけにはいかない。(9.9) 式に境界条件を導入する必要がある。図-9-2 の計算モデルによれば、変位を生じないのは u_2, v_2, v_4 である。また外力は f_{y1}, f_{y3} に 10 t の集中荷重が作用するので、(9.9) 式の全体剛性マトリックスは次式のようにになる。ただし鉛直下向き作用方向を負とする。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 & 0 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 & 0 & 0 \\ -19.23 & 19.23 & 86.54 & 0 & 0 & -48.07 & -67.31 & 28.85 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 86.54 & -48.07 & 0 & 19.23 & -19.23 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -48.07 & 86.54 & 0 & -19.23 & 19.23 \\ 19.23 & -19.23 & -48.07 & 0 & 0 & 86.54 & 28.85 & -67.31 \\ 0 & 0 & -67.31 & 19.23 & -19.23 & 28.85 & 86.54 & -48.08 \\ 0 & 0 & 28.85 & -19.23 & 19.23 & -67.31 & -48.08 & 86.54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.11)$$

上式は、境界条件を含めた全体剛性マトリックスである。したがって未知数の変位 u_1, v_1, u_3, v_3, u_4 を求めるには次式を解けば良いことになる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -67.31 & 19.23 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 28.85 & -19.23 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 86.54 & 0 & -19.23 \\ 19.23 & -19.23 & 0 & 86.54 & 28.85 \\ 0 & 0 & -19.23 & 28.85 & 86.54 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.12)$$

これを解くと

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.63 \times 10^{-7} \\ v_1 &= -0.182 \times 10^0 \\ u_3 &= 0.78 \times 10^{-1} \\ v_3 &= -0.182 \times 10^0 \\ u_4 &= 0.78 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

が得られる。したがって $\Lambda-1$ ケースにおける節点変位は

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} 0.63 \times 10^{-7} \\ -0.182 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.078 \\ -0.182 \\ 0.078 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (9.13)$$

この変位に全体剛性マトリックスを乗ずると節点に作用する力、いわゆる節点反力が容易に求められる。

$$\begin{Bmatrix} 86.54 & -48.08 & -19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 & 0 & 0 \\ 48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 & 0 & 0 \\ -19.23 & 19.23 & 86.54 & 0 & 0 & -48.07 & -67.31 & 28.85 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 86.54 & -48.07 & 0 & 19.23 & -19.23 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -48.07 & 86.54 & 0 & -19.23 & 19.23 \\ 19.23 & -19.23 & -48.07 & 0 & 0 & 86.54 & 28.85 & -67.31 \\ 0 & 0 & -67.31 & 19.23 & -19.23 & 28.85 & 86.54 & -48.08 \\ 0 & 0 & 28.85 & -19.23 & 19.23 & -67.31 & -48.08 & 86.54 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.63 \times 10^{-7} \\ -0.182 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.078 \\ -0.182 \\ 0.078 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.00053 \\ -10.095 \\ -0.00132 \\ 10.096 \\ -0.00053 \\ -10.095 \\ -0.00052 \\ 10.095 \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

計算の結果、節点1と節点3の y の負の方向に10 tの力が作用しており、これは与えた条件、すなわち節点外力と一致している。また x 方向、 y 方向の力のつり合いをみると $\sum X \doteq 0$ 、 $\sum Y \doteq 0$ となっており、力のつり合いを満足しているのが理解される。

5) ひずみの計算

平面ひずみは、(2.2)式から容易に求められる。

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}$$

三角形要素①においては、

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.633 \times 10^{-7} \\ -0.182 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.78 \times 10^{-1} \\ -0.182 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.56 \times 10^{-2} \\ -3.64 \times 10^{-2} \\ 1.3 \times 10^{-8} \end{Bmatrix}$$

つまり要素①では

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1.56 \times 10^{-2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -3.64 \times 10^{-2} \quad (9.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \doteq 0$$

である。

同様に三角形要素②においては

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.78 \times 10^{-1} \\ -0.182 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.78 \times 10^{-1} \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-2} \\ -3.64 \times 10^{-2} \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1.56 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -3.64 \times 10^{-2} \quad (9.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \doteq 0$$

6) 応力の計算

弾性問題としての応力は(2.3)式から容易に計算できる。

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (9.17)$$

いま A-1 ケースの場合、それぞれ $\varepsilon_0 = \sigma_0 = 0$ と仮定してあり、さらにひずみ $\{\varepsilon\}$ が、三角形要素①、②とも同じ値であるので、応力は

$$\begin{bmatrix} 134.62 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.62 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-2} \\ -3.64 \times 10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.56 \times 10^{-4} \\ -4.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって、三角形要素①、②について

$$\sigma_x = 1.56 \times 10^{-4} \doteq 0$$

$$\sigma_y = -4.0 \quad (9.18)$$

$$\tau_{xy} = 0$$

となる。

ケース A-2

ケース A-2 の計算は A-1 と同様であるが、A-2 においては体積力も考慮するため、節点 1 および節点 3 に作用する外力の外に三角形要素の体積力を考える。体積力は (2.11) 式で計算されるが、実際には (4.60) 式で計算する。

$$\begin{aligned} \{F\}_p &= \int [N]^T \{P\} d(\text{Vol}) \\ \{F\}_p &= - \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\} d/3 \end{aligned} \quad (9.19)$$

したがって要素①においては

$$\begin{aligned} &= (\text{単位体積重量}) \times (\text{三角形の面積} \div 3) \\ &= (-2) \times 12.5 \div 3 = -8.3 \quad (\text{t}) \end{aligned}$$

要素②についても同様であり、したがって節点①、③に作用する外力は、

$$\begin{aligned} f_{v_1} &= -10 + (-8.3) = -18.3 \quad (\text{t}) \\ f_{v_3} &= -10 + 2 \times (-8.3) = -26.7 \quad (\text{t}) \end{aligned} \quad (9.20)$$

この値を用いて、ケース A-1 と同様に (9.12) 式に従って変位を計算する。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -67.31 & 19.23 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 28.85 & -19.23 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 86.54 & 0 & -19.23 \\ 19.23 & -19.23 & 0 & 86.54 & 28.85 \\ 0 & 0 & -19.23 & 28.85 & 86.54 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -18.3 \\ 0 \\ -26.7 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

この計算から

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.1833 \\ v_1 &= -0.3398 \\ u_3 &= 0.2451 \\ v_3 &= -0.4791 \\ u_4 &= 0.2142 \end{aligned} \quad (9.21)$$

を得る。この場合物体力は鉛直方向のみ作用する。したがって要素全体においては次の変位を得る。

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.1083 \\ v_1 &= -0.3398 \\ u_2 &= 0.0 \\ v_2 &= 0.0 \\ u_3 &= 0.2451 \\ v_3 &= -0.4791 \\ u_4 &= 0.2142 \\ v_4 &= 0.0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

他のひずみ、応力、反力の計算は A-1 の事例と同様な手法で実施できる。

ケース A-3

A-3 においては、体積力に相当する初期応力を入力しており、初期応力と等価な節点力を考慮しなければならない。初期応力と等価な節点力は (2.13) 式によって計算される。

$$\{F\}_{\sigma_0} = \int [B]^T \{\sigma_0\} d(\text{Vol}) \quad (9.23)$$

そこで、物体力による初期応力を求める計算を実施する。まず、変位を (9.12) 式に従って求める。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -67.31 & 19.23 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 28.85 & -19.23 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 86.54 & 0 & -19.23 \\ 19.23 & -19.23 & 0 & 86.54 & 28.85 \\ 0 & 0 & -19.23 & 28.85 & 86.54 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.3 \\ 0 \\ -16.7 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0.1092043 \div 0.1092$$

$$v_1 = -0.157301 \div -0.1573$$

$$u_3 = 0.167712 \div 0.1677$$

$$v_3 = -0.297704 \div -0.2977$$

$$u_4 = 0.136513 \div 0.1365$$

(9.24)

したがって全体三角形要素についての変位は

$$u_1 = 0.1092$$

$$v_1 = -0.1573$$

$$u_2 = 0.0$$

$$v_2 = 0.0$$

$$u_3 = 0.1677$$

$$v_3 = -0.2977$$

$$u_4 = 0.1365$$

$$v_4 = 0.0$$

(9.25)

となる。いまこの変位を使用してひずみを求める。

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (9.26)$$

三角形要素①において

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1092 \\ -0.1573 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1677 \\ -0.2977 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0117 \\ -0.03146 \\ 0.00624 \end{Bmatrix} \quad (9.27)$$

三角形要素②において

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1677 \\ -0.2977 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1365 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0273 \\ -0.05954 \\ 0.0624 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

このひずみを使用して、初期応力を求める。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (9.29)$$

より

三角形要素①, ②について初期応力は

$$\{\sigma_0\} = \begin{bmatrix} 134.62 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.62 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0117 \\ -0.03146 \\ 0.00624 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.238 \\ -3.570 \\ 0.238 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

$$\{\sigma_0\} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02729 \\ -0.05954 \\ 0.00624 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.238 \\ -6.430 \\ 0.238 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

上記の値が体積力に相当する初期応力である。そこで初期応力と等価な節点力は(2.13)式から

$$\{R\} = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (9.32)$$

求められる。

三角形要素①について

$$\int [B]^T \{\sigma_0\} dV = 12.5 \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.238 \\ -3.57 \\ -0.238 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8.33 \\ 0.595 \\ 8.925 \\ -0.595 \\ -0.595 \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

三角形要素②については

$$\int [B]^T \{\sigma_0\} dV = 12.5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.238 \\ -6.43 \\ 0.238 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.595 \\ -16.075 \\ -0.595 \\ -0.595 \\ 0 \\ 16.667 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

初期応力と等価な節点を含めた構造全体系のつり合いは、(3.7)式又は(3.8)式で与えられる。

$$[K]\{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{\varepsilon 0} + \{F\}_{\sigma 0} - \{R\} = 0 \quad (9.35)$$

したがって変位を求めるためには

$$\{\delta\} = [K]^{-1} (\{R\} - \{F\}_p - \{F\}_b - \{F\}_{\varepsilon 0} - \{F\}_{\sigma 0}) \quad (9.36)$$

の計算を実施する必要がある。

したがってケースA-3の場合次のマトリックスを解けばよい。全節点力は外力から初期応力と等価な節点力をさしひいたものである。

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R\}_i = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -67.31 & 19.23 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 28.85 & -19.23 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 86.54 & 0 & -19.23 \\ 19.23 & -19.23 & 0 & 86.54 & 28.85 \\ 0 & 0 & -19.23 & 28.85 & 86.54 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.667 \\ 0 \\ 6.67 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = -0.10842 \quad v_1 = -0.02420$$

$$u_3 = -0.08920 \quad v_3 = 0.11520$$

$$u_4 = -0.58221$$

したがって要素全体における変位は

$$u_1 = -0.10842 \quad v_1 = -0.02420$$

$$u_2 = 0.0 \quad v_2 = 0.0$$

$$u_3 = -0.08920 \quad v_3 = 0.11520$$

$$u_4 = -0.58221 \quad v_4 = 0.0$$

(9.37)

となる。この変位を使用して節点反力を求めると

$$\{F\} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -19.23 & 28.85 & -67.31 & 19.23 & 0 & 0 \\ 48.08 & 86.54 & 19.23 & -67.31 & 28.85 & -19.23 & 0 & 0 \\ -19.23 & 19.23 & 86.54 & 0 & 0 & -48.07 & -67.31 & 28.85 \\ 28.85 & -67.31 & 0 & 86.54 & -48.07 & 0 & 19.23 & -19.23 \\ -67.31 & 28.85 & 0 & -48.07 & 86.54 & 0 & -19.23 & 19.23 \\ 19.23 & -19.23 & -48.07 & 0 & 0 & 86.54 & 28.85 & -67.31 \\ 0 & 0 & -67.31 & 19.23 & -19.23 & 28.85 & 86.54 & -48.08 \\ 0 & 0 & 28.85 & -19.23 & 19.23 & -67.31 & -48.08 & 86.54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$fx_1 = -9.73 \times 10^{-6}$$

$$fy_1 = -1.67$$

$$fx_2 = -2.73 \times 10^{-4}$$

$$fy_2 = 1.67$$

$$fx_3 = 2.04 \times 10^{-6}$$

(9.38)

$$fy_3 = 6.67$$

$$fx_4 = 2.81 \times 10^{-4}$$

$$fy_4 = -6.67$$

が得られる。

ケース A-4

ケースは節点 1 と節点 3 に 10 t の集中荷重が作用し、物体力に相当する初期応力及び物体力を
入力したものである。物体力に相当する初期応力はケース A-3 から求められる。

要素①について

$$\{F\}_{\sigma 0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.33 \\ 0.595 \\ 8.925 \\ -0.595 \\ -0.595 \end{Bmatrix}$$

要素②について

$$\{F\}_{\sigma 0} = \begin{Bmatrix} 0.595 \\ -16.075 \\ -0.595 \\ -0.595 \\ 0 \\ 16.67 \end{Bmatrix}$$

物体力の計算は (4.61) 式から容易に計算される。

$$\{F\}_p = - \int \{N\}^T \{P\} dV \quad (9.39)$$

$$= - \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} A/3$$

したがって、三角形要素の各節点に -8.33 t ずつ作用する。

また物体力と等価な節点力は

$$\{F\}_e = - \int \{N\}^T \{P\} dV$$

で表わされるので、結局節点 1 においては

$$-10t + 8.33t - 8.33t = -10t$$

同様に節点 2 においては作用する節点力は

$$-10t + 16.67 - (2 \times 8.33) = -10t$$

となる。

結局、節点力は荷重のみ作用した場合と同じになる。これは体積力による力と、体積力と等価な初期応力が力を打ち消しあうためである。したがって変位はケース A-1 と同様に次のマトリックスを計算すれば求められる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.54 & -48.08 & -67.31 & 19.23 & 0 \\ -48.08 & 86.54 & 28.85 & -19.23 & 0 \\ -67.31 & 28.85 & 86.54 & 0 & -19.23 \\ 19.23 & -19.23 & 0 & 86.54 & 28.85 \\ 0 & 0 & -19.23 & 28.85 & 86.54 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} u_1 &\div -0.86527 \times 10^{-4} & v_1 &\div -0.182056 \\ u_2 &= 0.0 & v_2 &= 0.0 \\ u_3 &\div 0.77944 \times 10^{-1} & v_3 &= -0.18194 \\ u_4 &\div 0.77969 \times 10^{-1} & v_4 &= 0.0 \end{aligned} \quad (9.40)$$

並はケースA-1と同様に計算される。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$$

三角形要素①において

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.865273 \times 10^{-4} \\ -0.182056 \\ 0 \\ 0 \\ 0.779443 \times 10^{-1} \\ -0.181944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0156 \\ -0.0364 \\ 5.09 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

同様に三角形要素②においては

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.779443 \times 10^{-1} \\ -0.181944 \\ 0 \\ 0 \\ 0.779691 \times 10^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0156 \\ -0.0364 \\ -4.96 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

つぎに応力を求める。応力の計算は次式によって実施される。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\sigma_0\} + \{\sigma_0\} \quad (9.41)$$

上式において、物体力に相当する初期応力によるひずみ ε_0 はケースA-3から次の値が求められている。

要素①において

要素②において

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0.117 \times 10^{-1} & \varepsilon_x &= 0.272 \times 10^{-1} \\ \varepsilon_y &= -0.315 \times 10^{-1} & \varepsilon_y &= -0.595 \times 10^{-1} \\ \varepsilon_{xy} &= -0.062 \times 10^{-2} & \varepsilon_{xy} &= 0.62 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (9.42)$$

しかしながらこのケースA-4の場合、計算されたひずみ((9.42), (9.43)式で示される)はこの物体力に等価な初期応力を含めたひずみである。つまり(9.41)式は

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}_{\sigma_0} \quad (9.43)$$

で表わされる。ここで $\{\varepsilon\}_{\sigma_0}$ は (9.42) で表わされる値である。したがって求める体積歪は

要素①において

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0.0156 + 0.0117 \div 0.0273 \\ \varepsilon_y &= -0.0364 + 0.0315 \div 0.0679 \\ \gamma_{xy} &= 5.09 \times 10^{-6} + 0.062 \div 0.062 \end{aligned}$$

要素②において

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0.0156 + 0.0272 \div 0.0428 \\ \varepsilon_y &= -0.0364 - 0.0595 \div 0.0959 \\ \gamma_{xy} &= -4.96 \times 10^{-6} + 0.062 \div 0.062 \end{aligned}$$

したがって応力は $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ より

要素①において

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} 134.615 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.61 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0273 \\ 0.0679 \\ 0.062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.235 \\ -7.573 \\ -0.238 \end{bmatrix}$$

要素②においては

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} 134.61 & 57.69 & 0 \\ 57.69 & 134.61 & 0 \\ 0 & 0 & 38.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0428 \\ -0.0959 \\ 0.062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.235 \\ -1.043 \\ 0.238 \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

ジョイント要素

すべり面の土質力学特性および変位特性を表わすものとして、ジョイント要素を考えるが、これの事例解析としての計算モデル及び計算条件は図-9.3、図-9.4の通りである。なお物性値を表-9.2に示す。

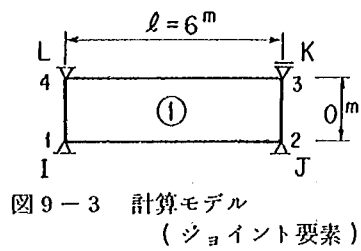


表9-2 物性値

G_1 (tf/m ³)	500
G_2 (tf/m ³)	500
K_1 (tf/m ³)	25
K_2 (tf/m ³)	1000
C_P (tf/m ³)	2
C_R (tf/m ³)	1
ϕ_P (deg.)	20
ϕ_R (deg.)	10

計算 ケース	チェック内容	荷重条件
B-1	せん断剛性	
B-2	垂直剛性 (引張側)	
B-3	垂直剛性 (圧縮側)	
B-4	回転モーメント	

図 9-4 計算条件

ケース B-1

ジョイント要素におけるセン断剛性を求める。

ジョイントの要素のセン断剛性は (7.13) 式で与えられる。

$$[K]_{s,n} = \frac{l}{4} \begin{bmatrix} k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_n \\ k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_n \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

したがって、表-9.2の物性値から

$$k_s = 500, \quad k_n = 1000, \quad l = 6$$

であるから、(9.44) 式は次の様になる。

$$[K]_{s,n} = \begin{bmatrix} 750 & 0 & 750 & 0 & -750 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3000 \\ 750 & 0 & 750 & 0 & -750 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & -750 & 0 & 750 & 0 & 750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & -750 & 0 & 750 & 0 & 750 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

ジョイントの節点変位は (7.12) 式から容易に求められる。

$$\{ \Delta F \}_{s,n} = [B][C_J][L_0]\{u\}_{s,n} = [K]_{s,n}\{u\}_{s,n} \quad (9.46)$$

ここで $\{u\}_{s,n}$ の値は、計算モデルの条件、記号に従うと

$$u_I = v_I = u_J = v_J = u_K = v_K = 0$$

したがって (9.47) 式は簡単に次式で表わされる。

$$\{ \Delta F \}_{s,k} = [K]_{s,k}\{u_k\} \quad (9.47)$$

ここで $\{ \Delta F \}_{s,k}$ の値が判明すれば、容易に変位の計算が可能となる。図-9.3の計算モデルによれば、ジョイントの厚さは零であるから、外力 2.5 t は K の節点に作用している。したがって (9.47) 式は

$$2.5 = 750\{u\}_{s,k}$$

となり、 $\{u\}_{s,k} = 0.333 \times 10^{-2}$ の値を得る。

この変位を (9.45) 式に乗ずると、各節点における反力が求められる。

$$\begin{bmatrix} 750 & 0 & 750 & 0 & -750 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3000 \\ 750 & 0 & 750 & 0 & -750 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 750 & 0 & -750 & 0 & 750 & 0 & 750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & -750 & 0 & 750 & 0 & 750 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.333 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 0 \\ -2.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

計算の結果、節点3と節点4の x の方向に2.5 tの力が作用しており、 ΔF_{Lp} には逆方向の力2.5 tが作用する。したがって x 方向、 y 方向の力のつり合をみると $\Sigma X = 0$ 、 $\Sigma Y = 0$ となっており、力のつり合い条件を満足する。

歪の計算は (7.2,a) 式で計算できる。

$$\{\epsilon_j\} = [L_0] \{u\}_{8n}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.333 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.49)$$

が得られる。したがってジョイント要素は、 x の方向 1.67×10^{-3} mの変位が観測されることになる。

応力の計算は、(7.10) 式で計算される。

$$\{\sigma_j\} = [C_j] \{\epsilon_j\}$$

したがって $[C_j]$ は (7.11) 式で表わされるから

$$\begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1000}{4} \times 6^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.67 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.833 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

したがってジョイント要素は x 方向に 0.833 t/m^2 のせん断応力を受けている。

せん断応力と歪の関係については、残留強度の概念を導入すれば非線形解析を実施しなければならない。したがってすべり面の特性を表現するため反復解法を利用しなければならない。

地すべり粘土の力学的特性は図-9.5の歪軟化型の応力-歪関係式で表わされると考える。さらにジョイント要素の破壊規準はクーロンの破壊規準で表わされると考える。

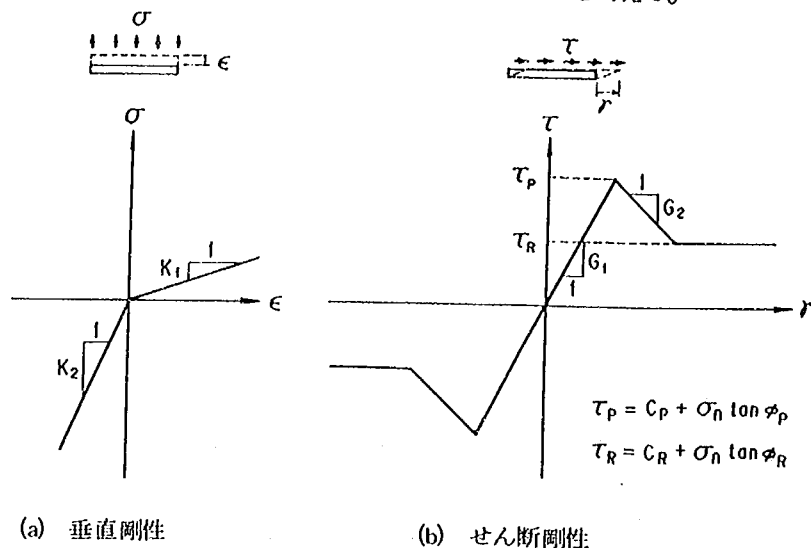


図9-5 ジョイント剛性

ピーク強度においては

$$\tau_p = C_p + \sigma \tan \phi_p \quad (9.51)$$

残留強度においては

$$\tau_R = C_R + \sigma \tan \phi_R \quad (9.52)$$

ここに、 τ はせん断強度、 C は粘着力、 ϕ は内部摩擦角を表わす。また、ジョイントに垂直方向の引張応力が生じている場合には、

$$\text{ピーク強度} \quad \tau_p = C_p / 10 \quad (9.53)$$

$$\text{残留強度} \quad \tau_R = C_R / 10 \quad (9.54)$$

とする。

ジョイント要素の応力-歪関係は、前述のように歪軟化型の非線形な関係として与えられるので、反復解法として、荷重伝達法を利用する。計算手順は以下の通りである。

- (1) 解析系を線形系として、剛性式を解くことにより、節点変位を求め、これよりジョイントの応力を求める。
- (2) 求められたジョイント要素の応力から、応力-歪関係曲線上のせん断強度 τ_y を求め、これと求められたせん断応力 τ_o を比較する。次にこれらの応力差 $\Delta\tau = \tau_o - \tau_y$ を計算し、この不平衡応力に等価な節点力と異符号の節点力（不平衡力）を求める。
- (3) この不平衡力が許容値以下なら、次の荷重ステップに移り(1)から計算を始める。

(4) もしそうでないならば、再びこの不平衡力に対して解析を行ない、前記(1)の応力に追加し、(2)にもどる。

したがってケース B-1 の場合

(1)の計算での要素内の応力は、(9.50)で与えられる。

$$\tau_{n,s} = 0.833 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{n,s} = 0$$

$$M_{n,s} = 0$$

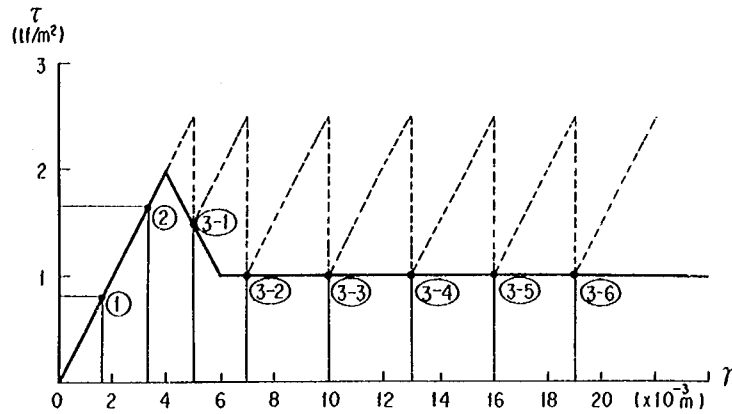


図 9-6

(2)図-9.6において、 $\tau = 0.833 \text{ t/m}^2$ の場合、弾性領域内に存在しているので、せん断剛性率 G は G_1 の 500 t/m^2 となる。したがって図-9.6においては、 $\tau_y = 0.833 \text{ t/m}^2$ となる。 $\Delta\tau = \tau_c - \tau_y = 0$ となり、第1回の荷重ステップでは、イテレーション1回で収束していることになる。

つぎに荷重ステップ2における計算を実施してみよう。荷重段階はケース B-1 にならって $7.5 \text{ t} \times 2 = 15 \text{ t}$ とする。したがって、変位 $\{u_k\}$ は(9.47)式に従い

$$5 = 750 \{u_k\}$$

より $\{u_k\} = 0.667 \times 10^{-2}$ の変位となる。

したがって歪は $\{\epsilon\} = [L_0] \{u\}_{s,n}$ より、 $\epsilon_{s,x} = 0.333 \times 10^{-2}$ となり、 x 方向に 0.333×10^{-2} の変位が観測されることになる。

応力の計算は、 $\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}$ より、 $\tau_c = 1.667 \text{ t/m}^2$ となる。この場合 $\tau_{s,x}$ は弾性領域内にはいっており、図-9.6の応力～歪曲線上では $\tau_y = 1.667 \text{ t/m}^2$ となり、 $\Delta\tau = \tau_c - \tau_y = 0$ となる。したがって、イテレーション1回で収束していることになる。

つぎに荷重ステップ3の場合について考えてみよう。

荷重は前述のモデルに従って $7.5 \text{ t} \times 3 = 22.5 \text{ t}$ 作用する。変位 $\{u_k\}$ は前述と同じ手法により $\{u_k\} \div 0.1 \times 10^{-1}$ ，歪は $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ ， $\tau_e = 2.5 \text{ t/m}^2$ となる。いま図-9.6の応力-歪曲線上の τ_y は 1.5 t/m^2 である。したがって， $\Delta\tau = \tau_e - \tau_y = 2.5 \text{ t/m}^2 - 1.5 \text{ t/m}^2 = 1.0 \text{ t/m}^2$ となる。

ここで，反復解法として Newton-Raphson 法を利用する。

ここで Newton-Raphson 法の具体的手法は以下の通りである。

応力-歪関係式が次式のように与えられるとする。

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (イ)$$

一方，弾性体の構成式は次式で与えられる。

$$\sigma = D\varepsilon + \sigma_0 \quad (ロ)$$

ここに， $D: \text{const}$

ここで(1)と(2)を等置して σ_0 を求めると

$$\sigma_0 = f(\varepsilon) - D\varepsilon \quad (ハ)$$

当解析では(ロ)式に基づいて計算を実施するが，応力と歪が(イ)式を満足するためには，(ロ)式の σ_0 に(ハ)式で得られる値を用いて計算すればよい。いま外力 R は σ_0 の影響を受けるので，剛性方程式は(7.27)式にならって

$$\{\phi\} = [K_0]\{\delta\} - \{R\} = 0 \quad (ニ)$$

ここに，Newton-Raphson 法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (ホ)$$

を適用する。したがって(ニ)と(ホ)式より

$$\begin{aligned} \{\delta_{n+1}\} &= \{\delta_n\} - \frac{\phi(\delta_n)}{\phi'(\delta_n)} = \{\delta_n\} - \frac{[K_0]\{\delta_n\} - R}{[K_0]} \\ &= \{\delta_n\} - \{\delta_n\} + [K_0]^{-1}R \\ &= [K_0]^{-1}R \end{aligned} \quad (ヘ)$$

となる。

したがって，まず次式を解く。

$$\delta_0 = [K_0]^{-1}R_0 \quad (ト)$$

ここに R_0 は実際に作用する節点外力である。

次に次式に従がい歪量を求める。

$$\varepsilon_1 = B\delta_0 \quad (チ)$$

次にこの変位から応力を求める

$$\sigma_1 = D \varepsilon_1 \quad (リ)$$

次に不平衡応力 $\sigma_{0,1}$ を求める

$$\sigma_{0,1} = f(\varepsilon_1) - D \varepsilon_1 \quad (ヌ)$$

次に残差不平衡力を求める

$$R_1 = R_0 + \int R^t \sigma_{0,1} dv \quad (ル)$$

この R_1 を基に (ト) 式にかえり, (ヌ) 式での不平衡応力が許容の範囲までくりかえす。

さて, ケース B-1 の事例について (イ) ~ (ル) 式に従って具体的な計算を実施してみよう。この荷重ステップ 3 の段階では, 不平衡応力は $\Delta \tau = \sigma_{0,1} = 1.0 \text{ t/m}^2$ である。したがって (ル) 式の計算は, (7.12) 式, いわゆる

$$\{\Delta F\} = [B][C_j][L_0]\{u\}_{s,n} = [B]\{\sigma\}_{s,n}$$

の計算をすればよい。

ここで $[B]$ マトリックスは, (7.7) 式で与えられる。

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{1}{l} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

したがって, (7.7) 式の計算から

$$\Delta F_{s,i} = -\frac{l}{2} \Delta \tau_{n,s} = -3.0 \text{ t}$$

$$\Delta F_{n,i} = 0$$

$$\Delta F_{s,j} = -\frac{l}{2} \Delta \tau_{n,s} = -3.0 \text{ t}$$

$$\Delta F_{n,j} = 0$$

$$\Delta F_{s,k} = \frac{l}{2} \Delta \tau_{n,s} = 3.0 \text{ t}$$

$$\Delta F_{n,k} = 0$$

$$\Delta F_{s,l} = \frac{l}{2} \Delta \tau_{n,s} = 3.0 \text{ t}$$

$$\Delta F_{n,l} = 0$$

となる。

したがって (ル) 式における $\{R_i\}$ は

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} F_{s,1} \\ F_{n,1} \\ F_{s,j} \\ F_{n,j} \\ F_{s,k} \\ F_{n,k} \\ F_{s,l} \\ F_{n,l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.5 + 3.0 \\ 0 \\ 7.5 + 3.0 \\ 0 \\ 7.5 - 3.0 \\ 0 \\ 7.5 - 3.0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.5 \\ 0 \\ 10.5 \\ 0 \\ 4.5 \\ 0 \\ 4.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.55)$$

次に (へ) 式, $\delta_{n+1} = [K_0]^{-1} R$ により, 新しい変位を求める。したがって $[K_0]^{-1}$ は (9.48) 式より得られる。ただしこの場合注意しなければならないのは, 単純に $[K_0]^{-1}$ の値が求められないので, 境界条件を導入した上で計算を実施する必要がある。したがって境界条件 (変位の規制) を考えると

$$4.5 = 750 \{u_k\}$$

となり, $\{u\}_k = 0.6 \times 10^{-2}$ となる。したがって歪は前述した $\{\varepsilon\} = [L_0] \{u\}_{s,n}$ より, $\varepsilon_{s,x} = 0.3 \times 10^{-2}$ となる。

さらに, 応力は $\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$ より

$$\tau_{s,n} = 500 \times 0.3 \times 10^{-2} = 1.5 \text{ t/m}^2$$

となる。そこで図-9.6の応力～歪曲線上から 0.5×10^{-2} のひずみ上のせん断応力 τ_y は 1.5 t/m^2 となる。計算されたせん断力 τ_c は 1.5 t/m^2 で $\Delta\tau = \tau_c - \tau_y = 0$ で収束することになる。

つぎに荷重ステップ4の段階における計算を実施してみよう。

$$\text{荷重は } 7.5 \text{ t} \times 4 = 30 \text{ t}$$

$$\text{変位は } \{u_k\} = 10/750 = 0.133 \times 10^{-1}$$

$$\text{歪は, } 0.133 \times 10^{-1} / 2 = 0.667 \times 10^{-2}$$

$$\text{応力は, } 500 \times 0.667 \times 10^{-2} = 3.33 \text{ t}$$

$$\text{となる。したがって } \Delta\tau = \sigma_{0,1} = 3.33 \text{ t} - 1.0 \text{ t} = 2.33 \text{ t}$$

$$\text{不平衡力は } \{F\} = [B] \{\sigma\} \text{ より}$$

$$\Delta F = 2.33 \times \frac{L}{2} = 6.999 \text{ t}$$

$$\text{したがって } \{R\} = F_{s,k} = 10 - 6.999 \div 3.0 \text{ t}$$

Newton-Raphson法を適用して

$$3.0 = 750 \{u_k\}$$

$$\{u_k\} = 0.4 \times 10^{-2}$$

歪は、 $\{\epsilon\} = [L_0]\{u\}_{s,n}$ より、 $\epsilon_{s,n} = 0.2 \times 10^{-2}$

さらに応力は、 $\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\}$ より

$$\tau_{s,n} = 500 \times 0.2 \times 10^{-2} = 1.0 \text{ t./m}^2$$

となり、せん断応力は残留強度のライン上に載っている。(図-9.6 参照)

ケース B-2

このケースは垂直剛性（引張応力と歪の関係）について検討するものである。

この場合節点 K に 2.5 t 作用する。さらに節点の境界条件に従い、 $[K]_{e,n}$ マトリックスは簡単になり、結局 $\{F\} = [K]\{u\}$ 式は次の様に表わされる。

$$2.5 = 75 \times \{u\}_{n,k}$$

したがって変位は

$$\{u\}_{n,k} = 0.333 \times 10^{-1}$$

歪は $\{\epsilon\} = [L_0]\{u\}_{n,k}$ より

$$\epsilon = 0.333 \times 10^{-1} / 2 = 0.1667 \times 10^{-1}$$

となる。

応力は $\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\}$ より

$$\sigma_n = 25 \times 0.1667 \times 10^{-2} = 0.4167 \text{ t/m}^2$$

となる。したがって図-9.7 の関係が得られる。なおそれぞれの荷重ステップの計算値も同図上に示してある。

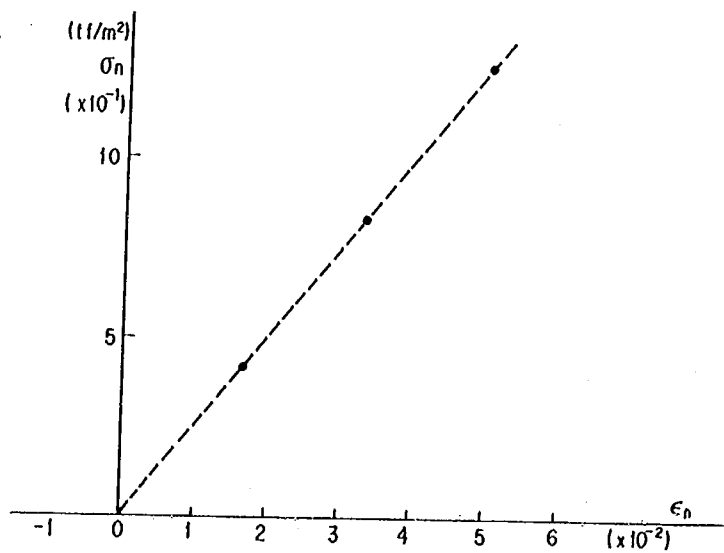


図9-7 垂直剛性（引張側）

ケース B-3

これは垂直剛性（圧縮応力と歪の関係）を計算するものであるが、これは容易に前節に従って計算が可能である。

変位は

$$-2.5 = 3000 \times \{u\}_{k,n}$$

より, $\{u\}_{k,n} = -0.833 \times 10^{-3}$

歪は

$$\epsilon = -0.8333 \times 10^{-3} / 2 = 0.4167 \times 10^{-3}$$

応力は

$$\sigma_n = -0.416 \times 10^{-3} \times 1000 = -0.416 \text{ t/m}^2$$

となる。

ケース B-4

ケース B-4 は回転モーメントが作用する場合の計算である。

ジョイントの応力と歪の関係は、(7.10) 式で表わされる。

$$\{ \Delta \sigma \} = [C] \{ \varepsilon \}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tau_{n,s} \\ \Delta \sigma_n \\ M_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \ell^3 k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} \quad (9.56)$$

これより

$$M_0 = \frac{1}{4} \ell^3 k_n w \quad (9.57)$$

となる。

まず、ケース B-4 の変位を (9.47) 式に従い求める。境界条件を導入すると (9.47) 式は

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{n,k} \\ \Delta F_{n,l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{4} \begin{bmatrix} 2 k_n \\ 2 k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ v_l \end{Bmatrix}$$

となる。

したがって、 $v_k = 2 \Delta F_{n,k} / (\ell \cdot k_n) = 2.5 \times 2 / (6 \times 25) = 0.333 \times 10^{-1}$

$$v_l = 2 \Delta F_{n,l} / (\ell \cdot k_n) = -2.5 \times 2 / (6 \times 1000) = -0.833 \times 10^{-3}$$

ここで、注意しなければならないのは、(9.47) 式は節点での変位を求めるのであって、ジョイントの中心での変位ではない。したがって、ジョイント中心では、

$$v_k = 0.1667 \times 10^{-1}, \quad v_e = -0.4167 \times 10^{-3} \text{ となる。}$$

回転量 w は、 $\{ \varepsilon \} = [L_0] \{ u \}$ より求めることができる。

したがって

$$W = (v_k - v_e) / \ell = (0.1667 \times 10^{-1} + 0.4167 \times 10^{-3}) / 6 = 0.284 \times 10^{-2}$$

したがって、ジョイント中心点での回転モーメントは (9.56) 式より

$$M_0 = \frac{\ell^3}{4} k_n W = 54000 \times 0.284 \times 10^{-2} \div 15 \text{ t} \cdot \text{m}$$

となる。

マトリックスの乗算のプログラム

例

$$K \left\{ \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} M \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \hline \end{array} & \begin{array}{c} N \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{array}$$

```

10 DIM A(20,20),B(20,20),C(20,20)
20 K=2
30 M=2
40 N=1
50 FOR I=1 TO K
60 FOR J=1 TO M
70 READ A(I,J)
80 NEXT J
90 NEXT I
100 FOR I=1 TO M
110 FOR J=1 TO N
120 READ B(I,J)
130 NEXT J
140 NEXT I
150 FOR I=1 TO K
160 FOR J=1 TO N
170 S=0
180 FOR L=1 TO M
190 S=S+A(I,L)*B(L,J)
200 NEXT L
210 C(I,J)=S
220 NEXT J
230 NEXT I
240 FOR I=1 TO K
250 FOR J=1 TO N
260 WRITE (15,270)C(I,J)
270 FORMAT F20.10
280 NEXT J
290 NEXT I
300 STOP
310 END
320 DATA 1,2
330 DATA 3,4
340 DATA 4,3
    
```

逆マトリックスを求めるプログラム

$$\text{例} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2.0 & -1.0 \end{vmatrix}$$

```

10 DIM A(20,30)
20 INPUT N
30 N1=N+1
40 N2=2*N
50 FOR I=1 TO N
60 FOR J=1 TO N2
70 READ A(I,J)
80 NEXT J
90 NEXT I
100 E5=10+(-10)
110 FOR K=1 TO N
120 M9=ABS(A(K,K))
130 I9=K
140 K1=K+1
150 IF (K1>N) THEN 210
160 FOR I=K1 TO N
170 IF (ABS(A(I,K)) <= M9) THEN 200
180 M9=ABS(A(I,K))
190 I9=I
200 NEXT I
210 REM
220 IF (M9 >= E5) THEN 250
230 PRINT "ILL CONDITION"
240 GOTO 490
250 IF (I9=K) THEN 310
260 FOR J=1 TO N2
270 R=A(K,J)
280 A(K,J)=A(I9,J)
290 A(I9,J)=R
300 NEXT J
310 W=A(K,K)
320 FOR J=K1 TO N2
330 A(K,J)=A(K,J)/W
340 NEXT J
350 FOR I=1 TO N
360 IF (I=K) THEN 410
370 W=A(I,K)
380 FOR J=K1 TO N2
390 A(I,J)=A(I,J)-W*A(K,J)
400 NEXT J
410 NEXT I
420 NEXT K
430 FOR I=1 TO N
440 FOR J=N+1 TO N2
450 WRITE (15,460)I,J,A(I,J)
460 FORMAT "M(",F3.0,"",",",F3.0,"")=",F20.10
470 NEXT J
480 NEXT I
490 PRINT
500 STOP
510 END
520 DATA 2,3,1,0,4,5,0,1

```

$(K_0)^{-1}(R)$ を求めるプログラム

```
10 DIM A(20,20),B(20,20),C(20,20)
20 INPUT N
30 N1=N+1
40 N2=2*N
50 FOR I=1 TO N
60 FOR J=1 TO N2
70 A(I,J)=0
80 NEXT J
90 NEXT I
100 FOR I=1 TO N
110 FOR J=1 TO N
120 READ A(I,J)
130 NEXT J
140 NEXT I
150 FOR I=1 TO N
160 A(I,I+N)=1
170 NEXT I
180 E5=10+(-10)
190 FOR K=1 TO N
200 M9=ABS(A(K,K))
210 I9=K
220 K1=K+1
230 IF (K1>N) THEN 290
240 FOR I=K1 TO N
250 IF (ABS(A(I,K)) <= M9) THEN 280
260 M9=ABS(A(I,K))
270 I9=I
280 NEXT I
290 REM
300 IF (M9 >= E5) THEN 330
310 PRINT "ILL CONDITION"
320 GOTO 850
330 IF (I9=K) THEN 390
340 FOR J=1 TO N2
350 R=A(K,J)
360 A(K,J)=A(I9,J)
370 A(I9,J)=R
380 NEXT J
390 W=A(K,K)
400 FOR J=K1 TO N2
410 A(K,J)=A(K,J)/W
420 NEXT J
430 FOR I=1 TO N
440 IF (I=K) THEN 490
450 W=A(I,K)
460 FOR J=K1 TO N2
470 A(I,J)=A(I,J)-W*A(K,J)
480 NEXT J
490 NEXT I
```

```

500 NEXT K
510 FOR I=1 TO N
520 FOR J=N+1 TO N2
530 WRITE (15,540)I,J,AC(I,J)
540 FORMAT "N(",F3.0,";",",",F3.0,"")=",F20.10
550 NEXT J
560 NEXT I
570 PRINT
580 FOR I=1 TO N
590 FOR J=N+1 TO N2
600 B(I,J-N)=AC(I,J)
610 NEXT J
620 NEXT I
630 K=M=N
640 INPUT N
650 FOR I=1 TO M
660 FOR J=1 TO N
670 READ B(I,J)
680 NEXT J
690 NEXT I
700 FOR I=1 TO K
710 FOR J=1 TO N
720 S=0
730 FOR L=1 TO M
740 S=S+AC(I,L)*B(L,J)
750 NEXT L
760 C(I,J)=S
770 NEXT J
780 NEXT I
790 FOR I=1 TO K
800 FOR J=1 TO N
810 WRITE (15,820)C(I,J)
820 FORMAT E20.10
830 NEXT J
840 NEXT I
850 STOP
860 END
870 DATA 750,0,750,0,-750,0,-750,0
880 DATA 0,3000,0,0,0,0,0,-3000
890 DATA 750,0,750,0,-750,0,-750,0
900 DATA 0,0,0,3000,0,-3000,0,0
910 DATA -750,0,-750,0,750,0,750,0
920 DATA 0,0,0,-3000,0,3000,0,0
930 DATA -750,0,-750,0,750,0,750,0
940 DATA 0,3000,0,0,0,0,0,3000
950 DATA 10.5,0,10.5,0,4.5,0,4.5,0

```

あ　と　が　き

今回は、地すべり斜面の安定計算において、すべり面の土質力学的特性を反映させた安定解析を実施する必要があると考え、不連続ジョイントの特性勘案した有限要素法の解析を参考にし、地すべり斜面の安定解析手法についての検討を実施した。具体的なプログラムについては例示しなかったが、現在、地すべり対策工も含めた上での解析システムを考察中で、別の機会に詳述したいと考えている。なお最後に有限要素法に必要な基本的なプログラムを掲載したので参考とされたい。