

土木研究所資料

応力の周波数応答特性を用いた コンクリートダムの動的解析手法 に関する考察

昭和60年12月

建設省土木研究所
ダム部ダム構造研究室

応力の周波数応答特性を用いた コンクリートダムの動的解析手法 に関する考察

ダム構造研究室 藤沢 侃彦
永山 功
自閑 茂治

要 旨

本報告は、コンクリートダムの耐震設計における応力の動的応答の重要性に着目し、応力のモード、応力の周波数応答関数等の応力の周波数応答特性の概念を開発したものである。また、これに応答スペクトル理論を導入し、与えられた地震動のスペクトルに対して、最大応力応答を推定できることを示したものである。

キーワード：コンクリートダム，耐震設計，振動形解析法，応力のモード，応力の周波数応答関数，応答スペクトル。

目 次

1. 概 説	1
2. 動的解析手法の概要	3
2.1 概 説	3
2.2 振動形解析法	3
2.2.1 振動方程式	3
2.2.2 自由振動	4
2.2.3 強制振動	5
2.2.4 周波数領域の積分	6
2.3 応力の周波数応答特性	8
3. 周波数応答解析	10
3.1 解析条件	10
3.2 変位の周波数応答特性	11
3.2.1 固有振動数	11
3.2.2 基準振動モード	12
3.3 応力の周波数応答特性	12
3.3.1 応力モード	12
3.3.2 応力の周波数応答	13
4. 応力モードによる応力の最大応答の算出	24
4.1 概 説	24
4.2 入力地震動の設定	24
4.3 応力モードによる応力の最大応答の算出	27
4.3.1 応答スペクトルの理論	27
4.3.2 応力の最大応答	28
4.4 応力の時刻歴応答解析	29
4.5 考 察	29
5. ま と め	47
付 録	48
A 動的解析における力学的相似について	48
B 動水圧と応力モード	50

1. 概 説

動的解析手法を用いたダムの耐震設計法は大別して

- ① 設計地震動（入力加速度波形等）の設定
- ② 動的応答（変位，加速度，応力等）の解析
- ③ 解析結果に基づく耐震性の評価

のプロセスからなる。したがって、ダムの耐震性を正しく評価するには、適切な設計地震動を入力し、正確な解析法によって動的応答を求め、またその結果に対する合理的判定基準がなければならない。耐震設計法の研究は上記の各分野で精力的に行われ、コンクリートダムの耐震設計法についても、これが確立されるのはそう遠くない将来のことと思われる。さて、本報告はこのうちダムの動的解析手法について述べたものであるが、本論に入る前に、本主題に関連して動的解析手法上の問題について整理しておく。

まず第一は、解析の基本となる設計地震動についてであるが、一般に設計地震動は当該ダムサイトにおいて発生することが予想される最大規模の地震動が設定される。この場合、当該サイトで観測された地震動のデータが少ない点に最大の問題があるが、設計地震動の選定手法についてもいくつかの問題点が残されている。まず一点は、コンクリートダムの力学的安定性はダム堤体内に発生する応力およびその積分値である断面力によって評価されるが、耐震性を評価する場合、どのような特性を持った地震動が設計上最も危険となるのであろうか。すなわち、最大加速度、卓越周波数等々のパラメータを有する地震動のうち、何を基準として設計地震動を設定するのであろうか。第二点は、現在の動的解析手法では、設計地震動として特定の加速度波形を入力しているが、地震動は本来再現性のない振動であるから、特定の地震動の波形に対する解析結果から普遍的な耐震性の評価が行えるのであろうかという疑問である。

第二の問題は、動的解析手法自体の問題である。前述のとおり、コンクリートダムの耐震性の評価は応力または断面力の動的応答、特にその最大値で判定されるのに対し、現行の動的解析プログラムの多くは変位や加速度の応答が出力の基本となっており、応力や断面力の応答を求めるのに便宜が図られているとはいいがたい状況にある。したがって、ダム堤体のどの部分が応力上問題となるか、また設計地震動としてどのような周波数特性を持った地震動を設定すればよいのかが必ずしも明確ではなく、また所要の解析結果を得るにも手数がかかることになる。

本報告では、このような現状を鑑み、すなわち、コンクリートダムの耐震設計における応力応答の重要性に着目し、応力の振動モード、応力の周波数応答の2つの新しい概念を導入した。これによって、後述のように、耐震設計を行う際に応力上注意すべきダム堤体の部分、また入力として設定すべき地震動の周波数特性が明らかにされることとなる。次に、応力の振動モードと応答スペクトル理論を用いて、ダム堤体内に発生する応力の最大応答を統計学的に求められることを示した。これは一連の耐震設計の計算を簡略化するほか、より重要なことは、応答スペクトルを用いることによって一般化された地震動特性に対する応答が求められることから、特定の入力加速度波形を用いる時刻歴応答解析よりも普遍的な耐震性の評価が行えることである。特に、多数の地震動を統計的に処理した設計応答スペクトルを利用することができれば、より合理的な耐震設計が行えることになる。

さて、以下の章では、まず第2章においては動的解析法の基礎理論について述べ、続いて、応力の振動モード、応力の周波数応答関数の概念を導入する。第3章では重力ダムをモデルとして実際に応力の応答特性を求め、これについて考察する。最後に第4章では、応答スペクトル理論を用いて重力ダム堤体内に生じる最大応力応答を求め、これを時刻歴解析結果と比較検討する。

なお最後に、本解析法を用いた耐震設計法の流れを図1.1に示しておく。

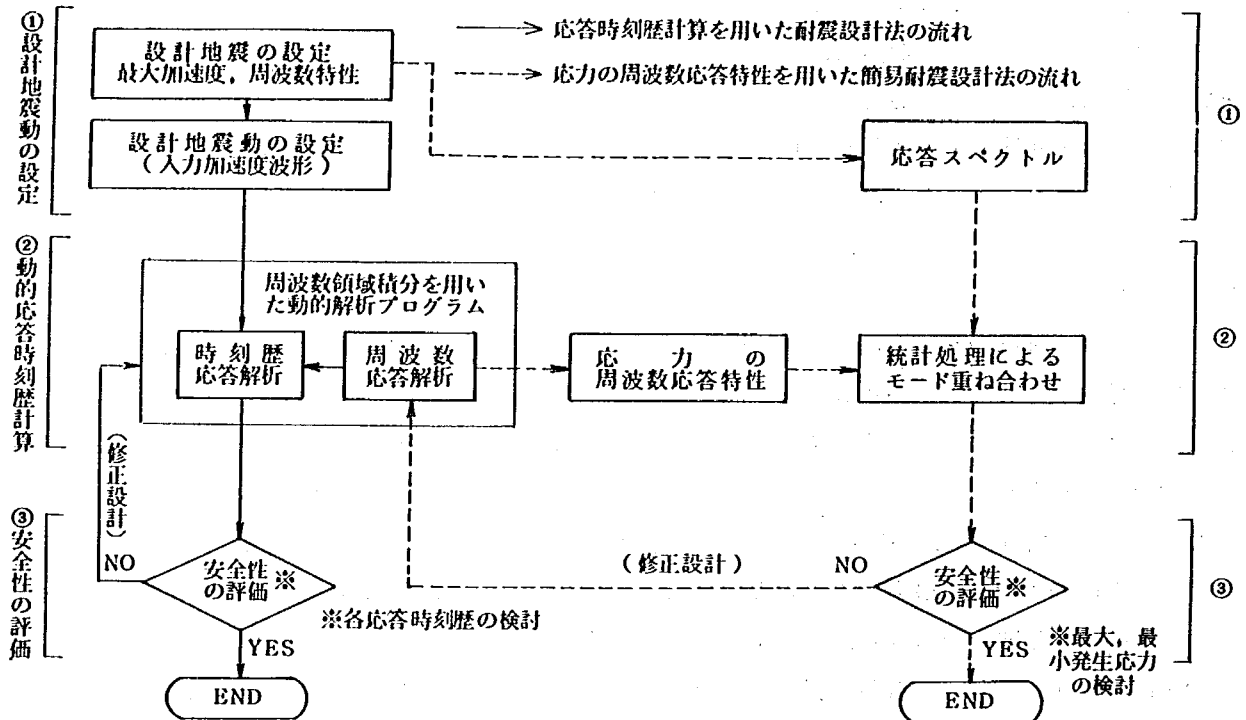


図 1.1 応力の周波数応答特性を用いた耐震設計の流れ

2. 動的解析手法の概要

2.1 概 説

動的解析手法には大別して連続体（または多質点系）の解析を1自由度系の解析に還元して解く振動形解析法（Modal Analysis）と運動方程式を直接解く直接積分法とがあるが、コンクリートダムのように線形弾性体とみなせる構造物の動的解析には振動形解析法を採用している場合が多い。振動形解析法とは、後述のように、振動系の固有値解析を行い、系の固有振動数と基準振動モードを求め、各基準振動の重ね合わせにより系の応答を算出するものである。

一方、時系列の積分方法には、周波数領域の積分法と時間領域の積分法との2通りの方法がある。ここでは周波数領域の積分を行って系の時刻歴応答を求める振動形解析法の概要について言及し、あわせて応力モード、応力の周波数応答関数等、応力の周波数応答特性の算出方法を示すことにする。

2.2 振動形解析法

2.2.1 振動方程式

コンクリートダムのような連続体の構造物では、運動に対する自由度が無限にあるが、いまこれを有限要素法のように離散化された3N自由度系のモデルで表わすことにする*。この3N自由度系の振動方程式はマトリクス表示で次のように表わされる。

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [C]\{\dot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.1)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ系の質量、減衰、剛性マトリクスであり、 $\{\dot{\delta}(t)\}$ 、 $\{\ddot{\delta}(t)\}$ 、 $\{\delta(t)\}$ はそれぞれ系の加速度、速度、変位ベクトルである。また $\{p(t)\}$ は構造物に作用する外力ベクトルである。したがって、(2.1)式の左辺第1項は慣性力を表わす項、左辺第2項は減衰による力を表わす項、左辺第3項は復元力を表わす項、そして右辺は外力を表わす項であり、(2.1)式は振動時における慣性系での力の釣合い方程式を意味している。

(2.1)式は振動の一般式と呼ばれているが、ここでは地震時におけるダム堤体の振動のように、その基礎全体に同一の地震動が強制入力されるような振動を考えることにする。この場合、D'Alembertの原理により、地震動と等価な外力は次式のように与えられる。

$$\{p(t)\} = -[M]\{\ddot{\phi}_x(t)\{i_x\} + \ddot{\phi}_y(t)\{i_y\} + \ddot{\phi}_z(t)\{i_z\}\} \quad (2.2)$$

ここに $\ddot{\phi}_x(t)$ 、 $\ddot{\phi}_y(t)$ 、 $\ddot{\phi}_z(t)$ はそれぞれx、y、z方向に作用する入力加速度である。また $\{i_x\}$ 、 $\{i_y\}$ 、 $\{i_z\}$ は質点の自由度と加速度方向を結合するベクトルであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{i_x\} &= \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0\}^T \\ \{i_y\} &= \{0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0\}^T \\ \{i_z\} &= \{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1\}^T \end{aligned} \quad (2.3)$$

なお以下では簡単のためx方向のみに加速度が入力した場合を考えることにする。この場合、(2.1)式および(2.2)式から振動方程式は

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [C]\{\dot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = -[M]\ddot{\phi}_x(t)\{i_x\} \quad (2.4)$$

となる。

*本章では一般性をもたせるため3次元の振動系を考えることにする。

2.2.2 自由振動

多自由度系の振動方程式 (2.4) 式は $3N$ 組 (総自由度数) の 2 階常微分方程式であるが、各自由度が互いに連成しあうために、直接これを解くことは容易でない。したがって、ここでは基準振動モードを求め、その線形結合として応答 $\{\delta(t)\}$ を表わすことにする。

いま振動方程式 (2.4) 式において、減衰がなく ($\{C\} = 0$)、自由振動 ($\{p(t)\} = 0$) をする場合を考える。

$$\{M\} \{\ddot{\delta}(t)\} + \{K\} \{\delta(t)\} = \{0\} \quad (2.5)$$

(2.5) 式の一般解は次の調和振動で書き表わされる。

$$\{\delta(t)\} = \{u_0\} e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

(2.6) 式を (2.5) 式に代入することによって次式を得る。

$$(-\omega^2 \{M\} + \{K\}) \{u_0\} = \{0\} \quad (2.7)$$

(2.7) 式を解くことは一般に固有値問題と呼ばれるが、自明でない解 $\{u_0\}$ が存在するためには (2.7) 式の $\{u_0\}$ の係数行列式が 0 でなければならない。すなわち、

$$\det (-\omega^2 \{M\} + \{K\}) = 0 \quad (2.8)$$

(2.8) 式は ω^2 についての $3N$ 次の代数方程式であり、一般に振動問題では $3N$ 個の根は全て正の実根である。 ($\omega_s, s = 1, 2, \dots, 3N$)。各根 ω_s は系の第 s 次の固有円振動数と呼ばれている。固有円振動数 ω_s を用いて (2.7) 式を書き改めると次式ようになる。

$$\{K\} \{u_s\} = \omega_s^2 \{M\} \{u_s\} \quad (s = 1, 2, \dots, 3N) \quad (2.9)$$

ここに $\{u_s\}$ は ω_s に対する固有ベクトルであり、系の第 s 次の基準振動モードと呼ばれている。

ここで、基準振動モードに関する 2 つの重要な事項について述べておこう。1 つはモードの直交性についてであり、他の 1 つはモードの正規化についてである。

まずモードの直交性についてであるが、基準振動モードは、 $\{M\}$ 、 $\{K\}$ を重みマトリクスとして互いに直交する。すなわち、

$$\begin{aligned} \{u_r\}^T \{M\} \{u_s\} &= 0 \\ \{u_r\}^T \{K\} \{u_s\} &= 0 \end{aligned} \quad (s \neq r) \quad (2.10)$$

これは $\{M\}$ 、 $\{K\}$ の対称性から簡単に証明される。すなわち、(2.9) 式は全てのモードについて成り立つから、

$$\{K\} \{u_s\} = \omega_s^2 \{M\} \{u_s\}$$

$$\{K\} \{u_r\} = \omega_r^2 \{M\} \{u_r\}$$

ここで、第 1 式に $\{u_r\}^T$ 、第 2 式に $\{u_s\}^T$ を左から乗じて辺々を差引けば、

$$\{u_r\}^T \{K\} \{u_s\} - \{u_s\}^T \{K\} \{u_r\} = \omega_s^2 \{u_r\}^T \{M\} \{u_s\} - \omega_r^2 \{u_s\}^T \{M\} \{u_r\}$$

となる。ここで $\{M\}$ 、 $\{K\}$ の対称性から

$$\{u_r\}^T \{K\} \{u_s\} = \{u_s\}^T \{K\} \{u_r\}$$

$$\{u_r\}^T \{M\} \{u_s\} = \{u_s\}^T \{M\} \{u_r\}$$

であるから、結局

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2) \{u_r\}^T \{M\} \{u_s\} = 0$$

を得る。したがって $\omega_s \neq \omega_r$ の場合 $\{M\}$ に対する直交性が証明された。なお $\{K\}$ に対する直交性も同様に証明することができる。

次に、モードの正規化について述べる。基準振動モード $\{u_s\}$ は (2.9) 式にしたがって $3N$ 個得られるが、その成分は相対的な比のみが決まり、その値は自由にスケールリングすることができる。一般には実用的な見地から

$$\{u_s\}^T [M] \{u_s\} = 1 \quad (2.11)$$

とすることが多い。ここで (2.11) 式のように定められた基準振動モードは正規化されたモードと呼ばれている。

2.2.3 強制振動

前節では減衰のない系の自由振動について述べたが、ここでは減衰を含む系の強制振動について述べることにする。

再び振動の基礎方程式 (2.4) 式を考える。

$$[M] \{\ddot{\delta}(t)\} + [C] \{\dot{\delta}(t)\} + [K] \{\delta(t)\} = -[M] \ddot{\phi}_x(t) \{i_x\} \quad (2.4)$$

(2.4) 式の解 $\{\delta(t)\}$ は基準振動モード $\{u_s\}$ の線形結合によって次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{\delta(t)\} &= \sum_s \{u_s\} \psi_s(t) = [U] \{\psi(t)\} \\ \{\dot{\delta}(t)\} &= \sum_s \{u_s\} \dot{\psi}_s(t) = [U] \{\dot{\psi}(t)\} \\ \{\ddot{\delta}(t)\} &= \sum_s \{u_s\} \ddot{\psi}_s(t) = [U] \{\ddot{\psi}(t)\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

これは、 $\{u_s\}$ の直交性から容易に証明できる。

すなわち、

$$\psi_s(t) = \{u_s\}^T [M] \{\delta(t)\}$$

$$\{\epsilon(t)\} = \{\delta(t)\} - \sum_s \{u_s\} \psi_s(t)$$

とおけば、ある任意の時刻 t_0 において、全ての基準モード $\{u_s\}$ に対し

$$\{u_s\}^T [M] \{\epsilon(t_0)\} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3N)$$

となる。したがって、 $\{\epsilon(t_0)\}$ が 0 でなければ $3N$ 次元空間で直交するベクトルが $3N+1$ 個存在することになり、矛盾を生じる。ここで t_0 は任意であったから、 $\{\epsilon(t)\}$ は恒等的に 0 でなければならない。

$$\{\epsilon(t)\} \equiv 0$$

したがって

$$\{\delta(t)\} = \sum_s \{u_s\} \psi_s(t)$$

が証明された。

さて (2.12) 式において

$$[U] = [\{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_{3N}\}]$$

は基準振動マトリックスと呼ばれている。また時間の関数

$$\{\psi(t)\} = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{3N}(t)]$$

は各モードの重ね合わせの割合を示しており、基準座標と呼ばれている。

(2.12) 式を (2.4) 式に代入し、 $[U]^T$ を両辺の左から乗じると

$$\begin{aligned} [U]^T [M] [U] \{\ddot{\psi}(t)\} + [U]^T [C] [U] \{\dot{\psi}(t)\} + [U]^T [K] [U] \{\psi(t)\} \\ = -[U]^T [M] \{i_x\} \ddot{\phi}_x(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

が得られる。

いま、2.2.2 節で述べたように $[U]$ を正規化されたモードマトリックス ((2.11) 式参照) とし、モードの直交性 ((2.10) 式参照) を考慮すると、

$$\{u_r\}^T [M] \{u_s\} = \delta_{rs} \quad (2.14)$$

また (2.9) 式より

$$\{u_r\}^T [K] \{u_s\} = \delta_{rs} \omega_s^2 \quad (2.15)$$

となる。ここに δ_{rs} は Kronecker のデルタであり、

$$\begin{aligned} \delta_{rs} &= 1 & (s=r) \\ &= 0 & (s \neq r) \end{aligned} \quad (2.16)$$

を表わす。さらに [C] についても同様に

$$\{u_r\}^T [C] \{u_s\} = \delta_{rs} \cdot 2 \omega_s h_s \quad (2.17)$$

を仮定する。この [C] に関する直交性は、減衰によるモード間の連成がない場合を想定しているが、これは減衰が小さい場合は近似的に成立するものとみなすことができる。ここで h_s は第 s 次の減衰定数と呼ばれ、第 s 次のモードの臨界減衰比を示している。

さて、(2.14)、(2.15)、(2.17) 式を用いると、(2.13) 式は対角項のみを含むことになるので、次式のような $3N$ 組の互いに独立した線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_s(t) + 2h_s \omega_s \dot{\psi}_s(t) + \omega_s^2 \psi_s(t) &= -\beta_{sx} \ddot{\phi}_x(t) \\ (s &= 1, 2, \dots, 3N) \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここに、 β_{sx} は第 s 次の刺激係数と呼ばれ、

$$\beta_{sx} = \{u_s\}^T [M] \{i_x\} \quad (2.19)$$

である。 β_{sx} は第 s 次のモードが系の応答に寄与する相対的な度合を表わすものであり、この値が大きいほどそのモードの応答が卓越することを示している。^{*}

(2.18) 式は、基準座標 $\psi_s(t)$ の時間的变化を与える式が 1 自由度系の振動方程式と全く同一の形であることを示している。すなわち、多自由度系の振動が 1 自由度系の振動の和として表わされたことになる。ここで、(2.18) 式の解は Duhamel のたたみ込み積分を用いて、

$$\begin{aligned} \psi_s(t) &= \frac{1}{\omega_s \sqrt{1-h_s^2}} \times \\ &\int_0^t \beta_{sx} \ddot{\phi}_x(\tau) e^{-h_s \omega_s (t-\tau)} \sin \{ \omega_s \sqrt{1-h_s^2} (t-\tau) \} d\tau \end{aligned} \quad (2.20)$$

で与えられる。

(2.20) 式から $\psi_s(t)$ が求まれば、これを (2.12) 式に代入することにより、(2.4) 式の解 $\{\delta(t)\}$ を求めることができる。

以上が振動形解析法の概要であるが、ここで重要な点は、(2.12) 式で示されるモードの線形結合が、全てのモードを考慮しなくても、低い方から数個のモードを考慮すれば、実用上十分な精度が得られることである。これは高次のモードほど、その応答に対する寄与分が減少するためで、このことが動的解析を行う上で、振動形解析法を採用する大きな利点となっている。

2.2.4 周波数領域の積分

前節までで、多自由度系の振動方程式 (2.4) 式の解法が、振動形解析法を用いることによって 1 自由度系の振動方程式 (2.18) 式の解法に帰着することを述べた。

(2.19) 式の刺激係数の定義においても正規化されたモードを前提としていることに注意。

しかし地震動のように外力が不規則振動である場合には、(2.20)式の積分を数学的に直接行うことは困難であるので、数値積分法を採用することになる。この数値積分法には、大別して時間領域の積分法と周波数領域の積分法があるが、このうち前者は時間ステップ毎に逐次計算を行うもので、通常 Newmark の β 法のうち線形加速度法や中央差分法が用いられている。

一方、後者の周波数領域における積分法は、入力波を Fourier 変換し、各周波数毎に求めた系の周波数応答特性の合積を求め、その結果を Fourier 逆変換して応答値を求めるものである。ここでは、系の周波数応答特性を明確にする目的で、この周波数領域の積分について述べることにする。

再び (2.18) 式に戻る。

$$\ddot{\psi}_s(t) + 2 h_s \omega_s \dot{\psi}_s(t) + \omega_s^2 \psi_s(t) = -\beta_{sx} \ddot{\phi}_x(t) \quad (2.18)$$

いま、基礎の入力加速度 $\ddot{\phi}_x(t)$ を次式のような単位の調和振動として与えると、

$$\ddot{\phi}_x(t) = e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

(2.18) 式の一般解も次式のような調和振動となる。

$$\psi_s(t) = \bar{\psi}_{sx}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

ここに、 $\bar{\psi}_{sx}(\omega)$ は (2.22) 式を (2.18) 式に代入することによって求められ、

$$\bar{\psi}_{sx}(\omega) = \frac{-\beta_{sx}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2 i h_s \omega_s \omega} \quad (2.23)$$

である。ここで、 $\bar{\psi}_{sx}(\omega)$ は変位に対する第 s 次周波数応答関数と呼ばれる。

次に、基礎の入力加速度 $\ddot{\phi}_x(t)$ が地震動のように不規則振動で与えられる場合を考える。いま (2.18) 式の両辺を Fourier 変換すると、次式が得られる。

$$F\{\ddot{\psi}_s(t)\} + 2 h_s \omega_s F\{\dot{\psi}_s(t)\} + \omega_s^2 F\{\psi_s(t)\} = -\beta_{sx} F\{\ddot{\phi}_x(t)\} \quad (2.24)$$

ここに、 $F\{\quad\}$ は Fourier 変換の演算子で、

$$F\{\psi_s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.25)$$

である。また、 $F\{\dot{\psi}_s(t)\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} F\{\dot{\psi}_s(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\psi}_s(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= [\psi_s(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

地震動による加速度は継続時間以外では 0 であることから、 $t = -\infty, \infty$ では応答は 0 となると考えられる。したがって、上式右辺第一項は 0 となり、

$$F\{\dot{\psi}_s(t)\} = i\omega F\{\psi_s(t)\} \quad (2.26)$$

を得る。同様に $F\{\ddot{\psi}_s(t)\}$ は次式のようになる。

$$F\{\ddot{\psi}_s(t)\} = -\omega^2 F\{\psi_s(t)\} \quad (2.27)$$

(2.24) 式に (2.26) 式および (2.27) 式を代入すると

$$(-\omega^2 + 2 i h_s \omega_s \omega + \omega_s^2) F\{\psi_s(t)\} = -\beta_{sx} F\{\ddot{\phi}_x(t)\}$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} F\{\psi_s(t)\} &= \frac{-\beta_{sx}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2 i h_s \omega_s \omega} F\{\ddot{\phi}_x(t)\} \\ &= \bar{\psi}_{sx}(\omega) F\{\ddot{\phi}_x(t)\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

を得る。(2.28) 式において Fourier の逆変換を施すと、 $\psi_s(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\psi_s(t) &= F^{-1} \{ \bar{\psi}_{sx}(\omega) F \{ \ddot{\phi}_x(t) \} \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{sx}(\omega) F \{ \ddot{\phi}_x(t) \} e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}\quad (2.29)$$

したがって、基準座標 $\psi_s(t)$ が周波数応答関数 $\bar{\psi}_{sx}(\omega)$ と入力加速度の Fourier 変換 $F \{ \ddot{\phi}_x(t) \}$ の積の Fourier 逆変換によって与えられた。

(2.29) 式を (2.12) 式に代入することにより、多自由度系の振動方程式 (2.4) 式の変位応答 $\{ \delta(t) \}$ は次式で与えられる。

$$\{ \delta(t) \} = \sum_s \{ u_s \} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{sx}(\omega) F \{ \ddot{\phi}_x(t) \} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

したがって、変位応答 $\{ \delta(t) \}$ が周波数領域の積分によって求められた。特に地震動 $\ddot{\phi}_x(t)$ が単位の調和振動の場合は、

$$\{ \delta(t) \} = \left[\sum_s \{ u_s \} \bar{\psi}_{sx}(\omega) \right] e^{i\omega t} \quad (2.31)$$

となる。ここで $[\quad]$ 内は単位の調和振動加速度の入力時の変位応答の振幅を示しており、変位の周波数応答と呼ばれている。

系の速度応答 $\{ \dot{\delta}(t) \}$ 、加速度応答 $\{ \ddot{\delta}(t) \}$ の場合も (2.30)、(2.31) 式と同様の方法で得ることができる。

2.3 応力の周波数応答特性

前節までで、振動系の変位、速度および加速度応答が基準振動モード $\{ u_s \}$ の重ね合わせで表わすことができることを述べたが、コンクリートダムの耐震性の評価は、変位、速度、加速度応答よりはむしろ応力の応答によって判定されることが多いから、応力応答についても基準振動モードで記述できれば極めて有用である。したがって、ここでは応力応答について述べることにする。

有限要素法を用いた動的解析の定式化では、要素内応力の応答時刻歴は、節点変位の応答時刻歴から次式で求められる。

$$\{ \sigma(t) \}_e = [D]_e [B]_e \{ \delta(t) \}_e \quad (2.32)$$

ここに、

$\{ \sigma(t) \}_e$: 当該要素の時刻 t における応力応答

$[D]_e$: 当該要素の弾性マトリクス

$[B]_e$: 当該要素のひずみ変位変換マトリクス

$\{ \delta(t) \}_e$: 当該要素構成節点の時刻 t における変位応答

である。また系全体の応力の応答時刻歴は (2.32) 式を系全体に拡張して

$$\{ \sigma(t) \} = [D] [B] \{ \delta(t) \} \quad (2.33)$$

で与えられる。したがって (2.12) 式および (2.33) 式より、変位応答と同様に応力応答も基準振動モード $\{ u_s \}$ の重ね合わせによって次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\{ \sigma(t) \} &= [D] [B] \sum_s \{ u_s \} \psi_s(t) \\ &= [D] [B] [U] \{ \psi(t) \} \\ &= [S] \{ \psi(t) \}\end{aligned}\quad (2.34)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{ \sigma \} &= \{ D \} \{ B \} \{ U \} \\ &= \{ \{ \sigma_1 \}, \{ \sigma_2 \}, \dots, \{ \sigma_{3N} \} \} \end{aligned} \quad (2.35)$$

を応力モードマトリクスと呼ぶことにする。 $\{ \sigma_s \}$ は第 s 次の応力モードであり、系が第 s 次基準振動で振動する場合に発生する応力を示したものである。

応力モードを用いると、系の応力応答 $\{ \sigma(t) \}$ は(2.30)式、(2.31)式と同様に次式で与えられる。

① 任意の地震動 $\ddot{\phi}_x(t)$ が系に入力された場合、

$$\{ \sigma(t) \} = \sum_s \{ \sigma_s \} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{s,x}(\omega) F \{ \ddot{\phi}_x(t) \} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.36)$$

② 単位の調和振動 $\ddot{\phi}_x(t) = e^{i\omega t}$ が系に入力された場合

$$\{ \sigma(t) \} = \sum_s \{ \sigma_s \} \bar{\psi}_{s,x}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.37)$$

ここで、(2.37)式の $\{ \}$ は単位の調和振動加速度が入力された場合の系の応力応答の振幅を示しており、これを応力の周波数応答関数と呼ぶことにする。すなわち、

$$\{ \bar{R}_{s,x}(\omega) \} = \{ \sigma_s \} \bar{\psi}_{s,x}(\omega) \quad (2.38)$$

である。

以上から、応力のモード、応力の周波数応答関数等、系の応力場における周波数応答特性を求めることができることが明らかとなった。

3. 周波数応答解析

3.1 解析条件

前章で得られた応力モード、応力の周波数応答関数等、応力の周波数応答特性を実際に求めるために、ここでは実際に解析モデルを設定して、周波数応答解析を行った。

使用したプログラムは、Chopra¹⁾等によって開発された重力ダムの動的解析プログラム“EADHI”で、これに応力の周波数応答特性を算出する機能を付加した。

計算モデルは、堤高150 mの重力ダムを想定し、図3.1に示す有限要素モデルを用いた。なお、比較のため、図3.2、図3.3に示す堤高90mの重力ダムについても併せて計算を行っている。計算条件は以下のとおりである。

コンクリートの弾性係数 $2.5 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$

コンクリートのポアソン比 0.2

コンクリートの単位体積重量 2.3 tf/m^3

計算に用いる使用モードは1次から6次までとし、各次の減衰定数は10%とした。

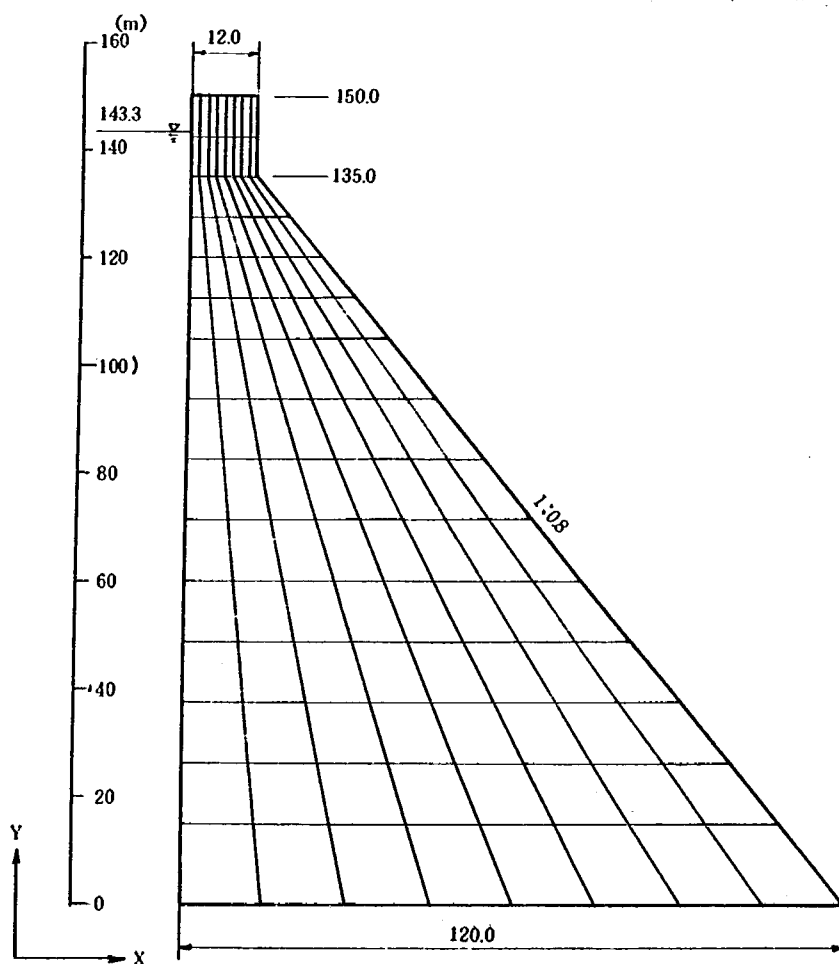


図3.1 解析モデル (A)

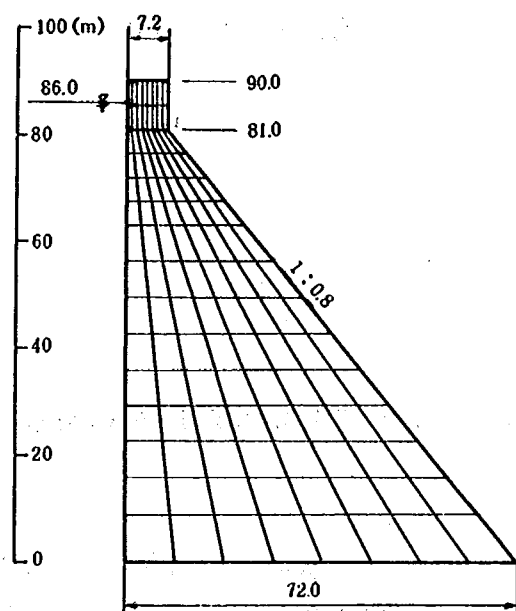


図 3.2 解析モデル (B)

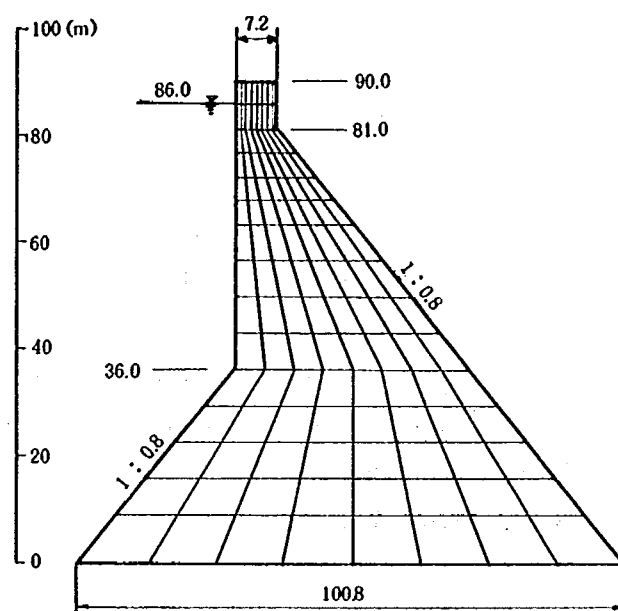


図 3.3 解析モデル (C)

また、貯水池の条件としては、貯水池湛水時と空虚時の両者について考慮した。ここで地震時に貯水がダム堤体に及ぼす地震時動水圧の評価方法としては、動水圧と見合う慣性力をダム堤体上流面を与える Westergaard²⁾の付加質量の方法を用いた。

計算ケースは表 3.1 に示すとおりであり、加振方向は水平方向とした。

表 3.1 計算ケース

ケース	1	2	3	4	5	6
解析モデル*	(A)	(A)	(B)	(B)	(C)	(C)
貯水池条件	湛水時 (WL=143.3m)	空虚時	湛水時 (WL=86.0m)	空虚時	湛水時 (WL=86.0m)	空虚時

* (A) 堤高 150 m (B) 堤高 90 m (C) 堤高 90 m (フィレット)

3.2 変位の周波数応答特性

3.2.1 固有振動数

各ケースの固有振動数を表 3.2 に示す。表に示されるとおり、堤高が低いダムほど固有振動数が高

表 3.2 固有振動数 ($\omega / 2\pi$) (単位 Hz)

次数 \ ケース	1	2	3	4	5	6
1	2.22	2.82	3.74	4.70	4.39	5.50
2	5.01	6.14	8.41	10.23	9.13	10.95
3	7.61	7.67	12.69	12.79	13.28	13.44
4	8.24	10.23	13.87	17.05	14.59	17.53
5	11.53	14.99	19.49	24.97	19.93	25.21
6	14.04	16.78	23.84	27.97	23.85	27.90

くなる。特にケース 2（堤高 150 m，空虚時）およびケース 4（堤高 90 m，空虚時）のように，貯水池空虚でかつ形状が相似な場合（以後，力学的相似という）には，固有振動数は堤高に反比例する。すなわち，

$$\frac{\omega_{s,a}}{\omega_{s,b}} = \frac{1}{\mu_{ab}} \quad (3.1)$$

である。ここに，

$\omega_{s,a}$: モデル a の第 s 次固有振動数

$\omega_{s,b}$: モデル b の第 s 次固有振動数

μ_{ab} : モデル b に対するモデル a の縮尺 ($=L_a/L_b$)

である（力学的相似については付録において詳述する）。

また，貯水池湛水時の場合の固有振動数は付加質量分だけ質量マトリクスが増大するので，貯水池空虚時の場合よりも小さくなる。

3.2.2 基準振動モード

図 3.4 にケース 1（堤高 150 m，湛水時）の場合の基準振動モードを示す。基準振動モードは基本的には片持梁の曲げ振動と同様な性状を示し，高次になるほど変曲点が多く複雑な形状となる。ただし第 3 次の基準振動モードに関しては曲げ振動というよりもむしろ縦振動の性状を示し，他のモードとは異なっている。

次に図 3.5 に変位の周波数応答関数について示す。変位の周波数応答関数とは 2.2.4 節でも述べたように，振動系に単位の調和振動加速度が入力された場合の応答を示すものである。図からもわかるように，高次の周波数応答関数ほど，その応答への寄与分は低減する。また，第 3 次の基準振動に関しては，縦振動の性状を示すので，水平方向に加振しているためその応答への寄与分は他の基準振動よりも相対的に小さくなっている。

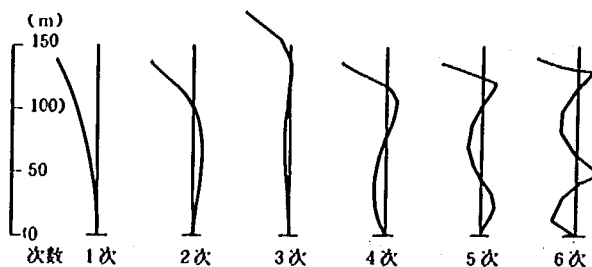


図 3.4 基準振動モード
（堤体上流面）ケース 1

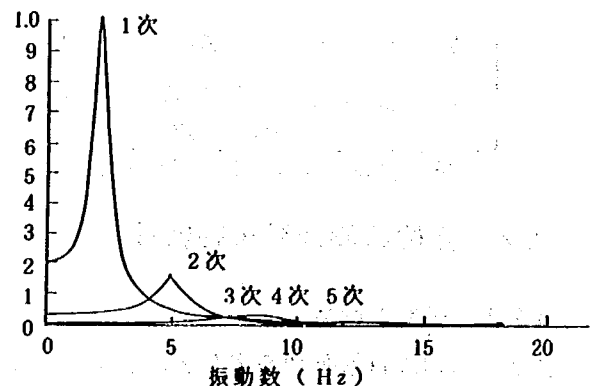


図 3.5 変位の周波数応答関数*
（天端標高）ケース 1

3.3 応力の周波数応答特性

3.3.1 応力モード

図 3.6 から図 3.8 に，ケース 1（堤高 150 m，湛水時）の場合の応力モード（ σ_x ， σ_y ， τ_{xy} 成分）について示す。各次数の応力モードは，2.3 節に示すように，基準振動時に発生する応力の相対比を示すものであって自由にスケールリングできることから，ここでは最大値を 1 として無次元化し，等高

* 周波数応答関数は最大値を 1 として正規化したものを示した。

線図によって示している。ここで影を付した部分は、最大値の60%以上を示す部分で、各基準振動時に応力応答の振幅が大きくなる堤体の部分である。図によれば、高次の応力モードほど複雑な分布形状を示しており、応力の集中域が図3.4で示した基準振動モードの変曲点の数に対応していることがわかる。また第3次の応力モードが他の次数の応力モードと異なっているのは、第3次の基準振動モードが縦振動の性状を示しているためである。

前述したように、基準振動モードは基本的には曲げ振動を示すから、鉛直方向応力 σ_y 成分は σ_x 、 τ_{xy} 成分に比べて卓越する。したがって以下では応力モードのうち σ_y 成分について述べることにする。

図3.7の応力モード(σ_y 成分)によれば、第1次のモードでは堤体上流面着岩部に応力が集中するが、高次のモードになるにつれて応力集中部は上部標高、特に断面変化部の上下流面に移行する。

次に、応力モードの比較のために、各ケースの応力応答の差異について述べる。図3.9および図3.10に、ケース2(堤高150m, 空虚時)およびケース5(堤高90m フィレット付, 湛水時)の応力モード(σ_y 成分)についてそれぞれ示す。図3.7および図3.9は貯水池が空虚または湛水による差を示すが、両者の間には差異がほとんどないことから、応力モードに対する付加質量としての地震時動水圧の影響は小さいとみなすことができる。なお力学的相似の条件の成立するケース2(堤高150m, 空虚時)とケース4(堤高90m, 空虚時)については、応力モードは全く相似形となる。

一方、図3.10によれば、フィレットを有するダムを取扱ったケース5の場合の応力モードについては、第1次のモードの応力集中部は堤体上流面着岩部ではなく、フィレット取付部にある。したがってフィレットを有する堤体の場合には、堤体上流面着岩部だけではなく、これに加えてフィレット取付部の応力集中にも着目する必要があることがわかる。

このように応力モードによって各基準振動時の応力集中部を指摘することが可能である。また、任意地震動が入力する場合の堤体挙動は、第2章で述べたように各基準振動の重ね合わせによって表わされるから、地震動の周波数特性から卓越すると思われる次数の応力モードを参照すれば、任意地震動に対する動的応力集中部の指摘も同様に可能となる。

3.3.2 応力の周波数応答

図3.11にケース1(堤高150m, 湛水時)の場合の堤体上流面着岩部および上部標高における σ_y 成分に関する周波数応答関数を示す。応力の周波数応答関数は、2.3節に述べたように、系に調和振動加速度が入力された場合の応力の応答振幅を示すものであり、図は横軸に入力される調和振動の振動数(Hz)、縦軸に調和振動加速度の振幅が100 galの時の応力応答振幅値(kgf/cm²/100 gal)を示している。図には、各次数毎の応力の周波数応答関数を実線で、また重ね合わせ後の応力の周波数応答を破線で示した。すなわち、

$$\text{実線: } |\sigma_{ys} \bar{\psi}_{sx}(\omega)| \times a_0 \quad (s = 1, 2, \dots, 6)$$

$$\text{破線: } |\sum_s \sigma_{ys} \bar{\psi}_{sx}(\omega)| \times a_0$$

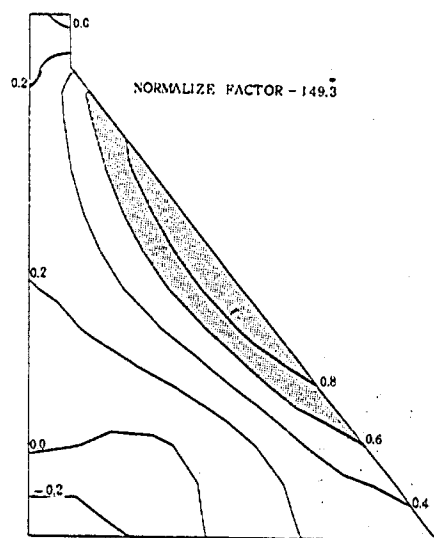
である。ここに、

σ_{ys} : 当該要素の応力モード σ_y の第 s 次成分

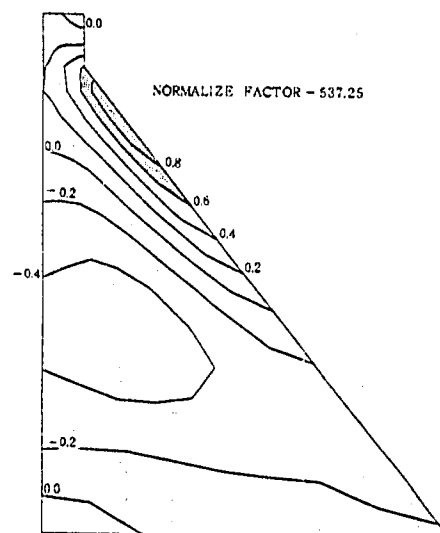
$\bar{\psi}_s(\omega)$: 変位の第 s 次周波数応答関数

a_0 : 調和振動加速度の振幅(100 gal)

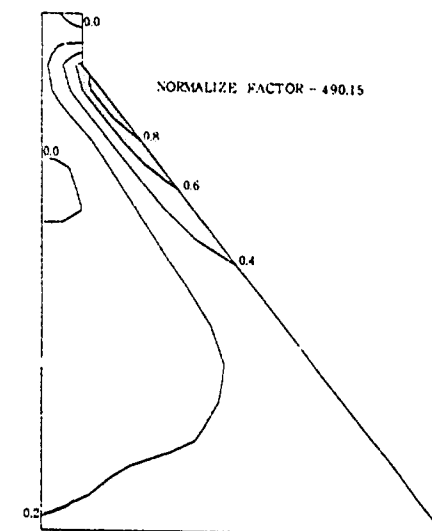
である。



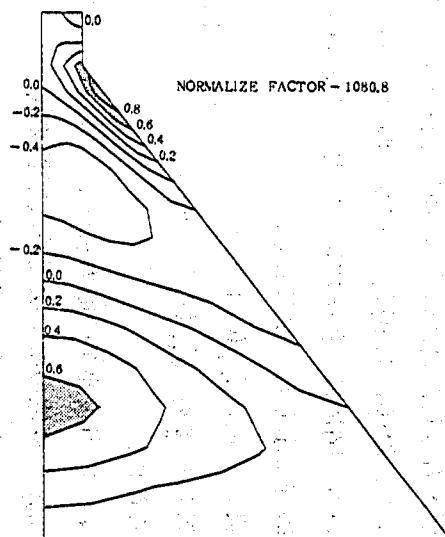
1次 $f_1 = 2.22 \text{ Hz}$



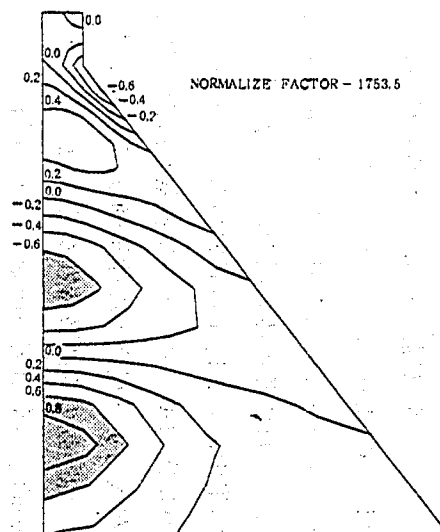
2次 $f_2 = 5.01 \text{ Hz}$



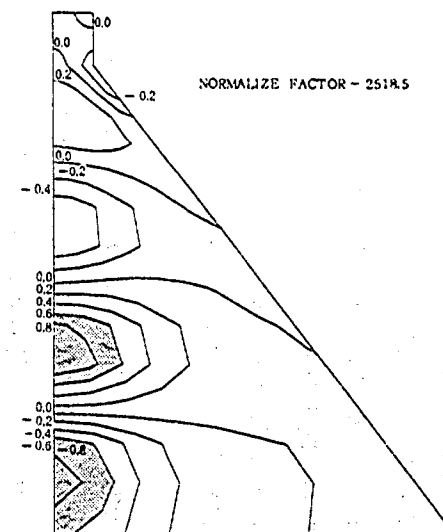
3次 $f_3 = 7.61 \text{ Hz}$



4次 $f_4 = 8.24 \text{ Hz}$



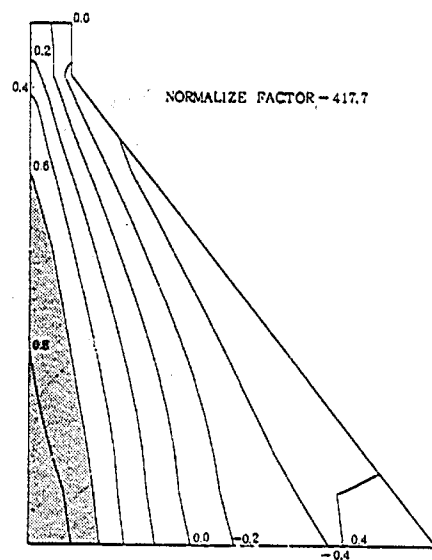
5次 $f_5 = 11.53 \text{ Hz}$



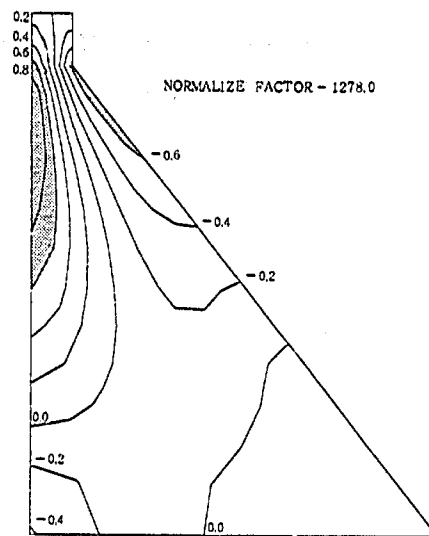
6次 $f_6 = 14.04 \text{ Hz}$

図3.6 応力モード (1次～6次, σ_x 成分) ケース1

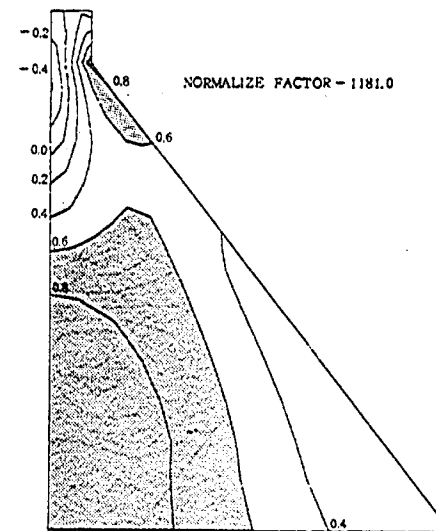
*ノーマライズファクターとは(2.35)式によって表わされる(0,1)の成分の符号を無視した場合の最大値である。



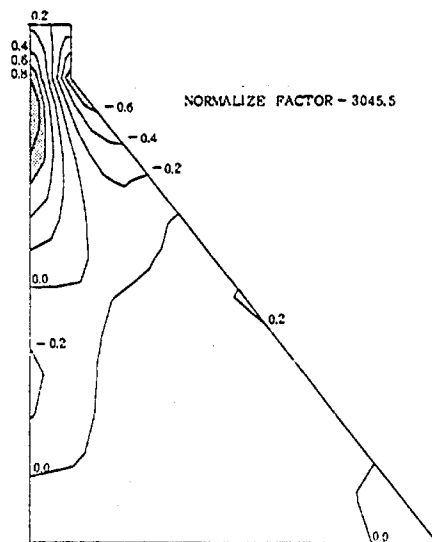
1次 $f_1 = 2.22 \text{ Hz}$



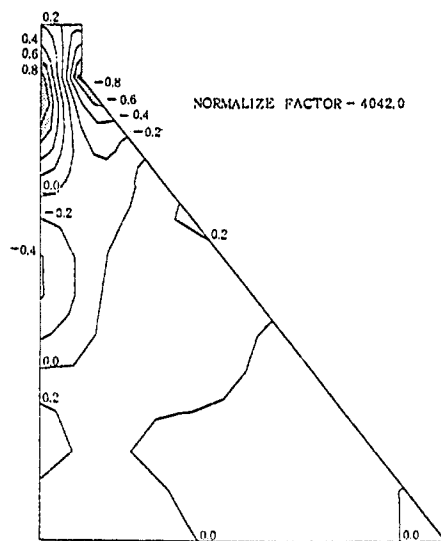
2次 $f_2 = 5.01 \text{ Hz}$



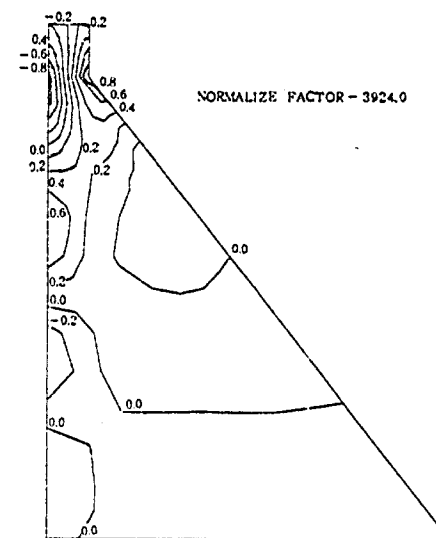
3次 $f_3 = 7.61 \text{ Hz}$



4次 $f_4 = 8.24 \text{ Hz}$

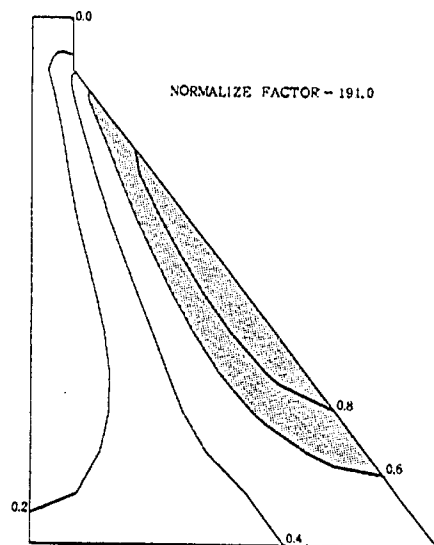


5次 $f_5 = 11.53 \text{ Hz}$

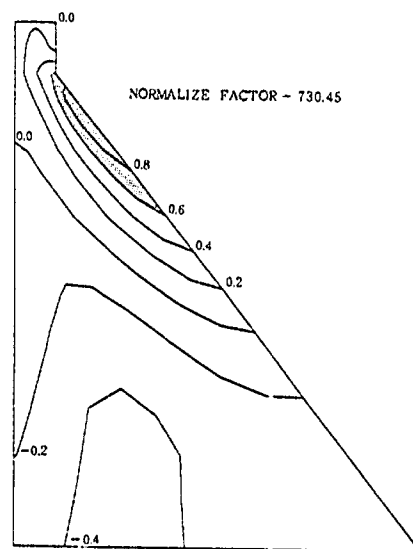


6次 $f_6 = 14.04 \text{ Hz}$

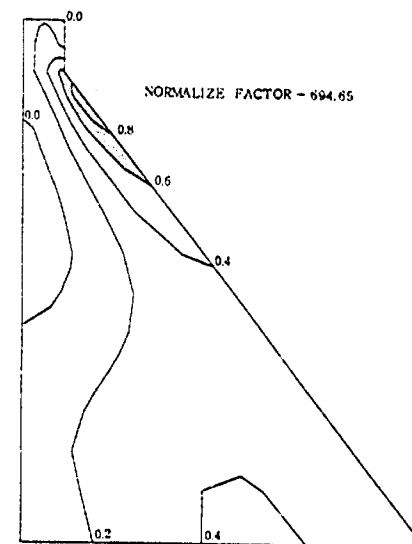
図3.7 応力モード (1次~6次, σ_y 成分) ケース 1



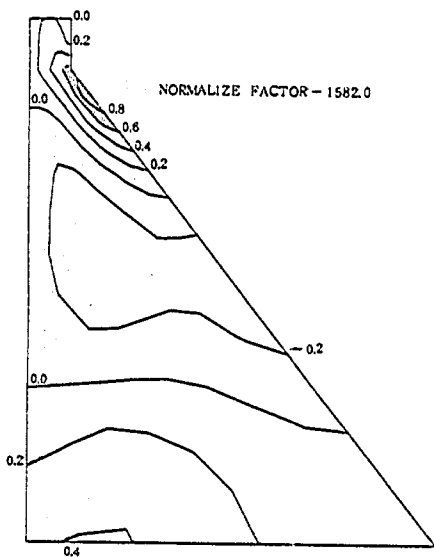
1次 $f_1 = 2.22 \text{ Hz}$



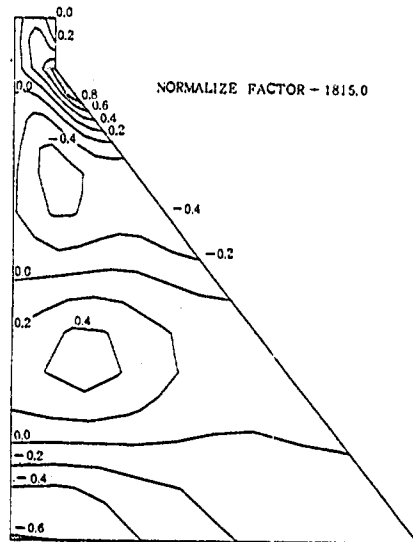
2次 $f_2 = 5.01 \text{ Hz}$



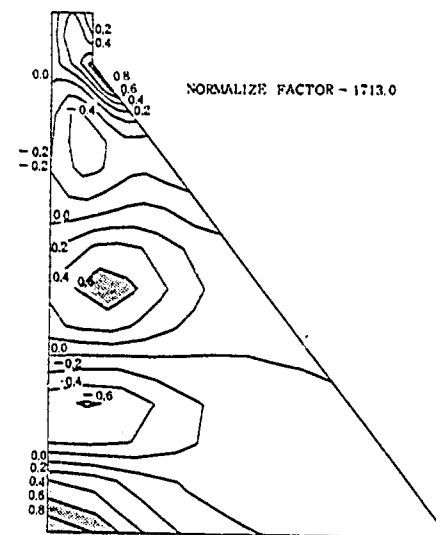
3次 $f_3 = 7.61 \text{ Hz}$



4次 $f_4 = 8.24 \text{ Hz}$

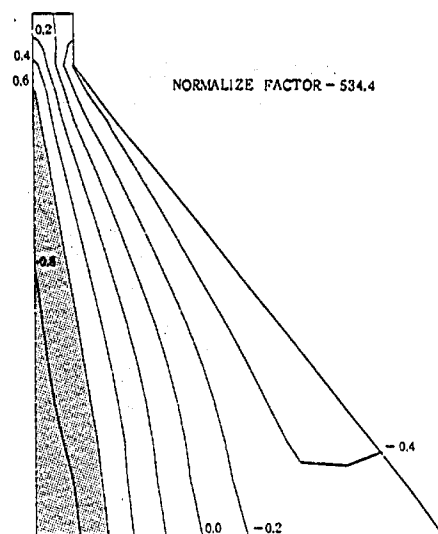


5次 $f_5 = 11.53 \text{ Hz}$

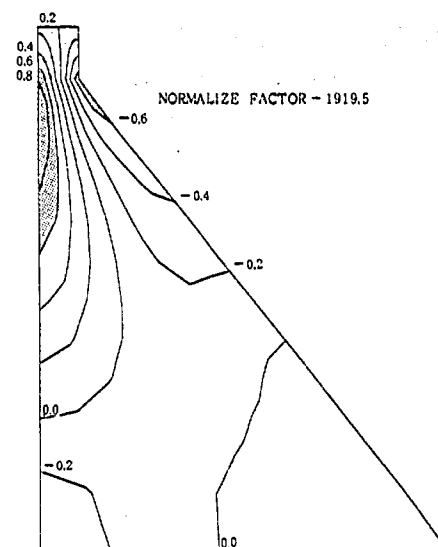


6次 $f_6 = 14.04 \text{ Hz}$

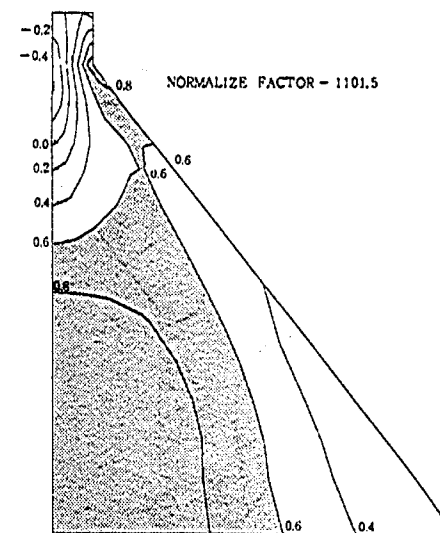
図 3.8 応力モード (1次~6次, τ_{xy} 成分) ケース 1



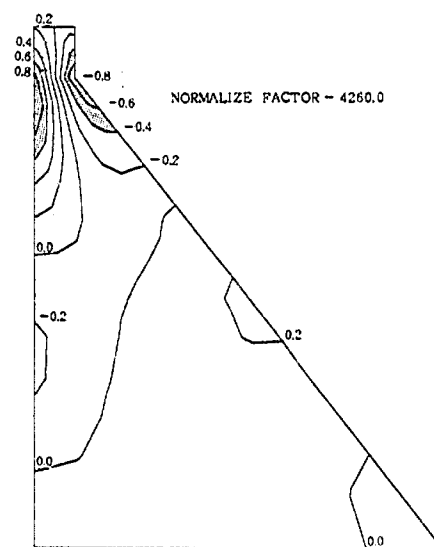
1次 $f_1 = 2.82 \text{ Hz}$



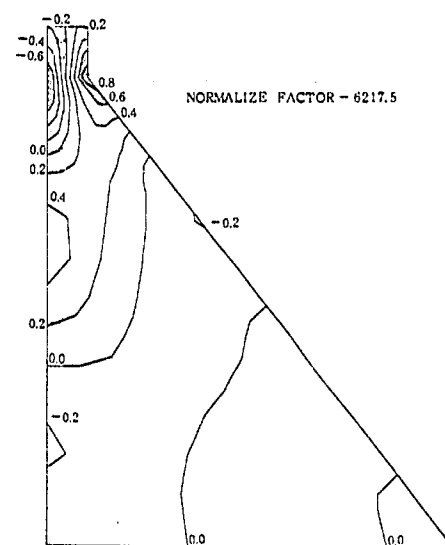
2次 $f_2 = 6.14 \text{ Hz}$



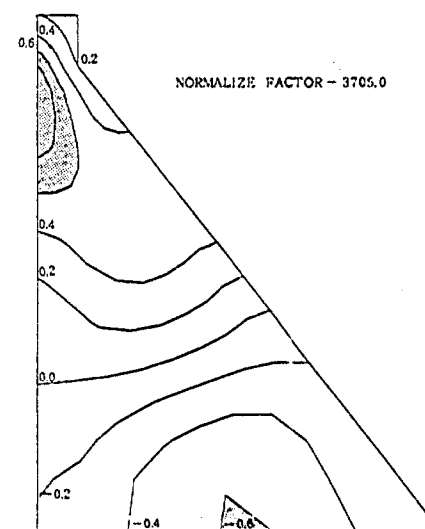
3次 $f_3 = 7.67 \text{ Hz}$



4次 $f_4 = 10.23 \text{ Hz}$

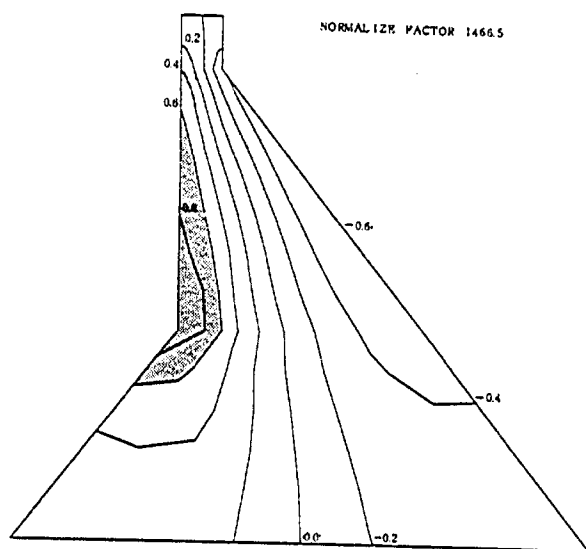


5次 $f_5 = 14.99 \text{ Hz}$

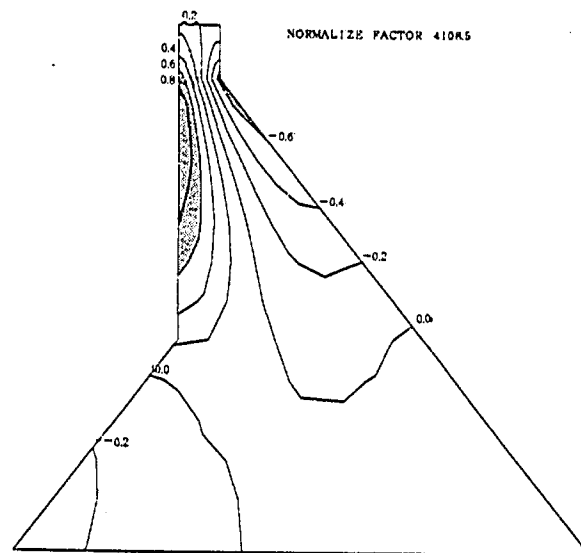


6次 $f_6 = 16.78 \text{ Hz}$

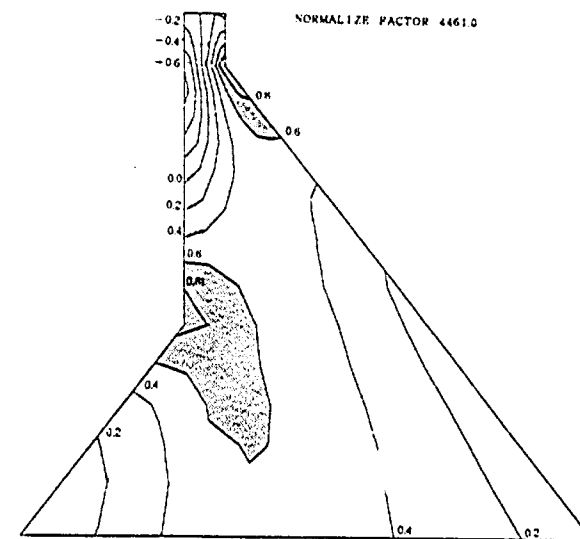
図 3.9 応力モード (1次～6次, σ_y 成分) ケース 2



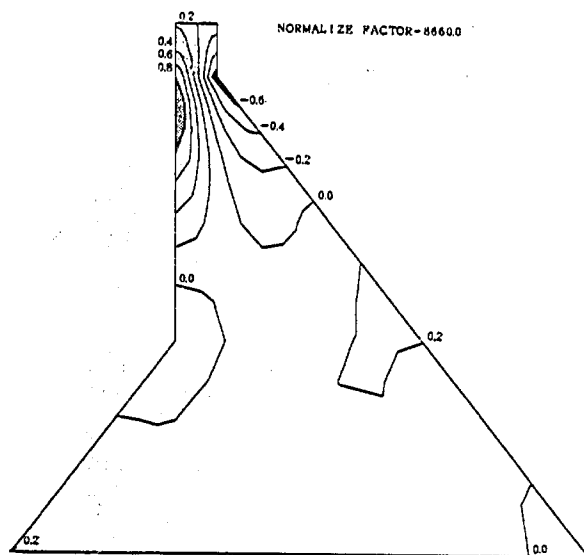
1次 $f_1 = 4.39 \text{ Hz}$



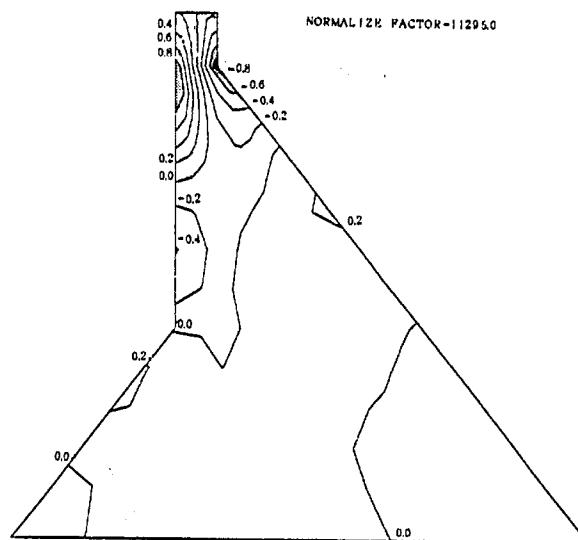
2次 $f_2 = 9.13 \text{ Hz}$



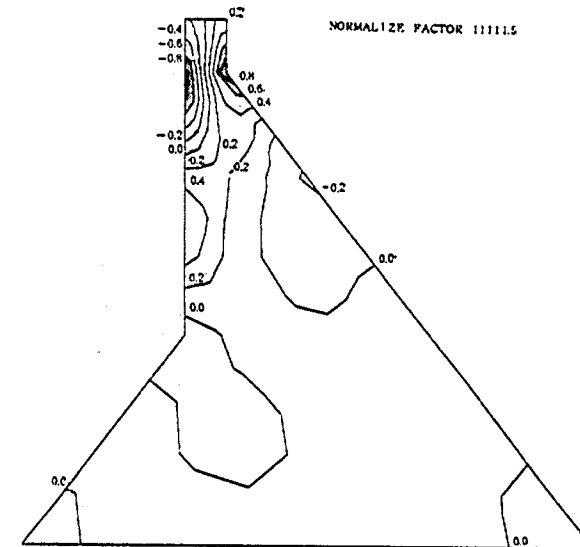
3次 $f_3 = 13.28 \text{ Hz}$



4次 $f_4 = 14.59 \text{ Hz}$



5次 $f_5 = 19.93 \text{ Hz}$

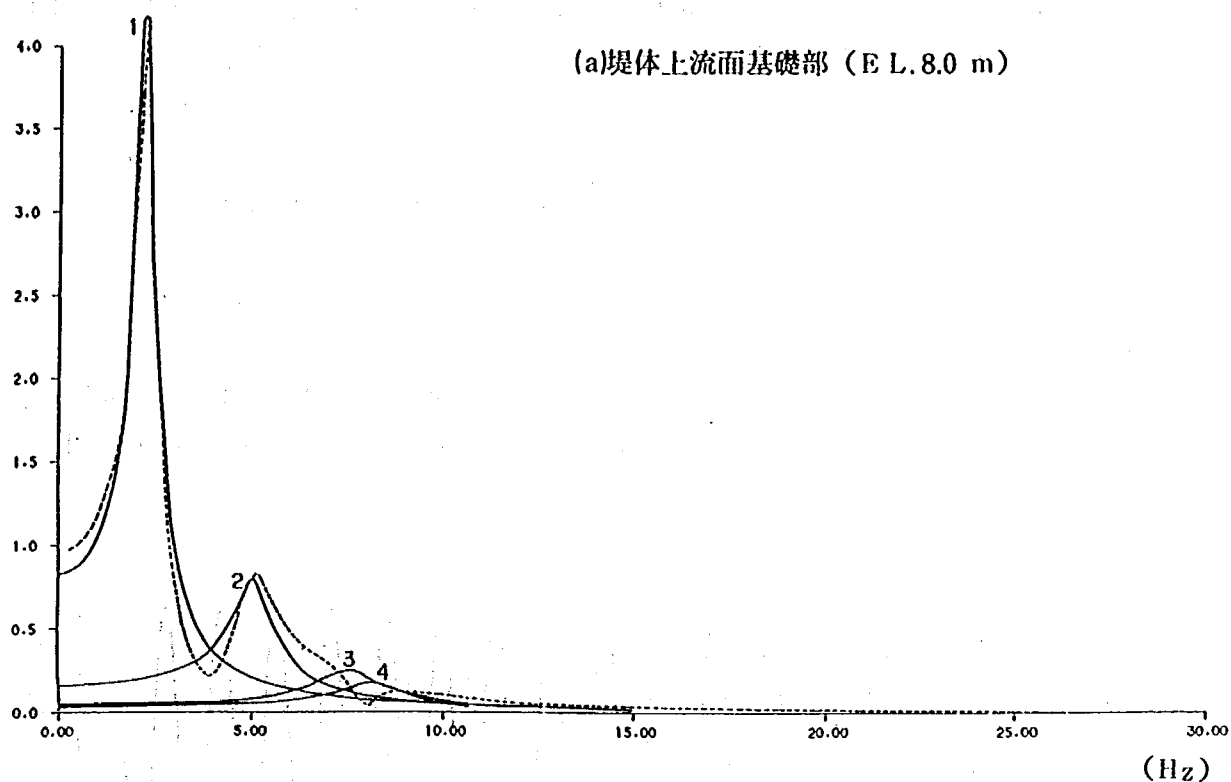


6次 $f_6 = 23.85 \text{ Hz}$

図 3.10 応力モード (1次～6次, σ_y 成分) ケース 5

($\times 10 \text{ kgf/cm}^2/100 \text{ gal}$)

(H=150M) *WESTERGAARD*



($\times 10 \text{ kgf/cm}^2/100 \text{ gal}$)

(H=150M) *WESTERGAARD*

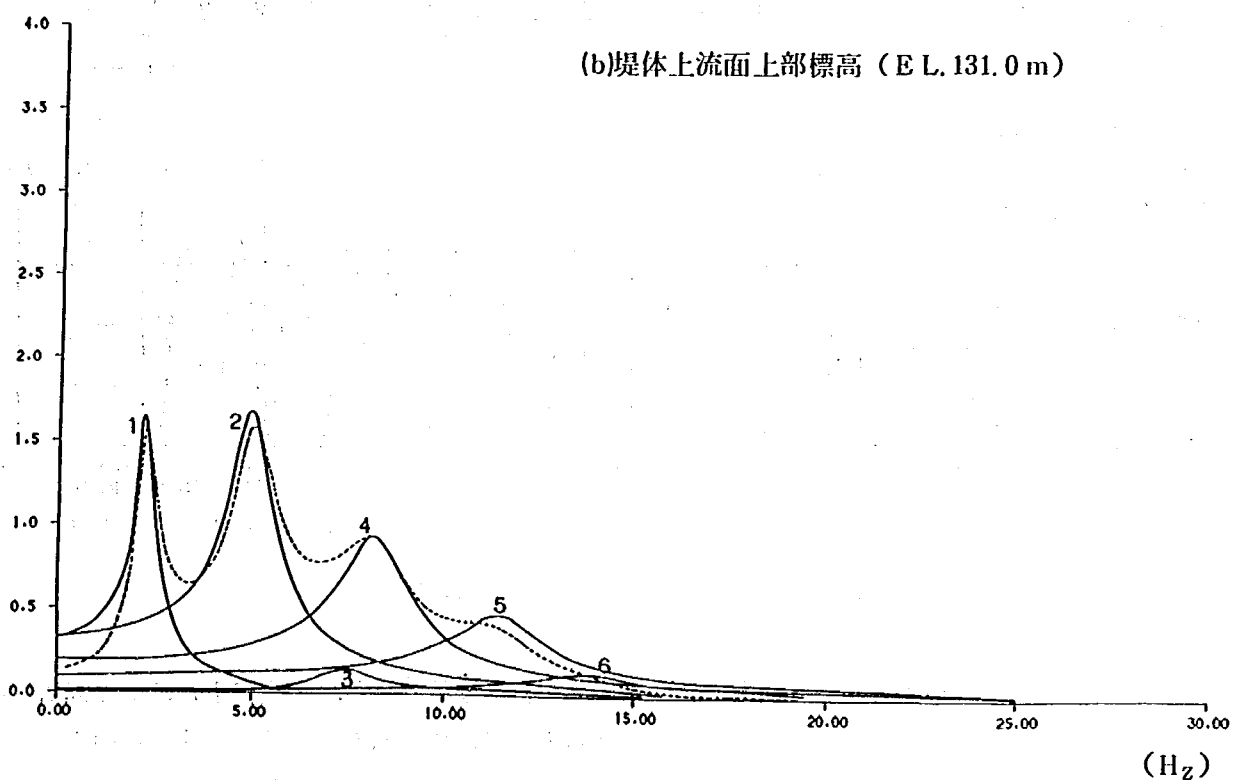


図 3.11 応力の周波数応答 (σ_y 成分)

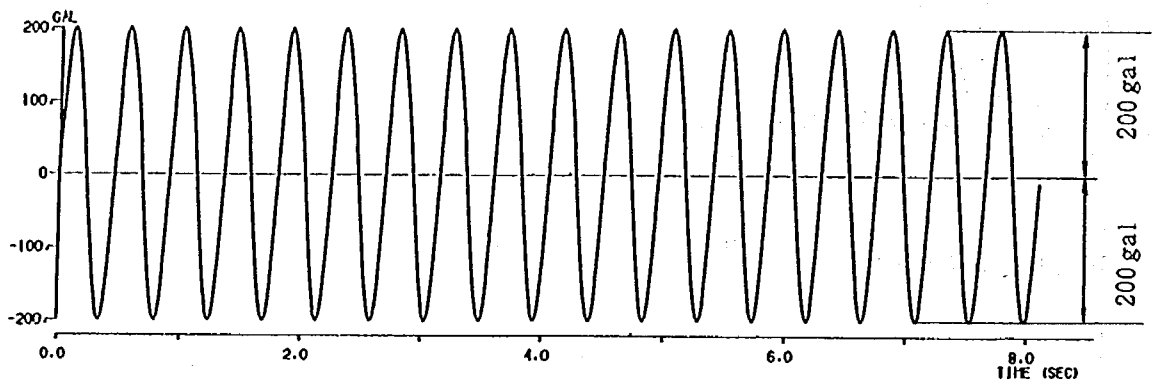
次に、実際に系に調和振動が入力された場合の応力の応答時刻歴と応力の周波数応答とを比較してみる。図 3.12 は、ケース 1（堤高 150 m，湛水時）に、振動数が第 1 次の固有振動数($f_1 = 2.22 \text{ Hz}$)に等しく、振幅が 200 gal の調和振動が入力された場合の応力の応答時刻歴（堤体上流面上部標高， σ ，成分）を示したものである。図によれば、応力の応答は数波ではほぼ定常状態に移行し、この定常状態における応力の応答の振幅は図 3.11(b)より得られた応力の周波数応答と全く一致する。すなわち、図 3.11(b)より振動数 2.22 Hz の場合、応力の周波数応答は $16.2 \text{ kgf/cm}^2/100 \text{ gal}$ より

$$16.2 \times 200 / 100 = 32.4 \text{ kgf/cm}^2$$

となる。したがって、応力の周波数応答関数は、系に調和振動が入力された場合の応力応答振幅の定常解を示すことが再確認された。

さて、図 3.11 に戻って、堤体上流面着岩部では、堤体の第 1 次固有振動数に一致する調和振動加速度が入力する場合に応力の周波数応答が最も卓越し、高次の固有振動数における周波数応答は急激に

(a) 入力調和振動（振動数 2.22 Hz，振幅 200 gal）



(b) 応力の応答時刻歴（堤体上流面上部標高， σ ，成分）

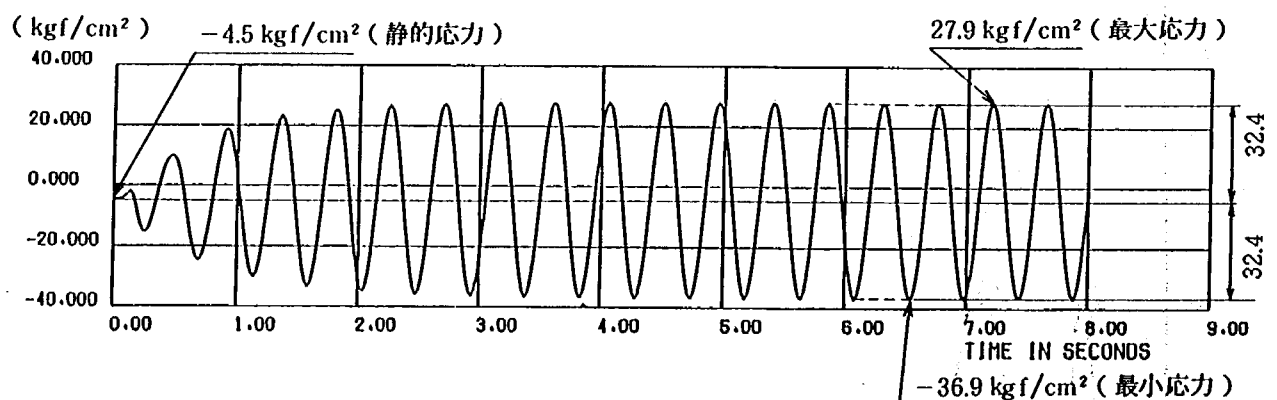


図 3.12 調和振動入力時の応力応答時刻歴

減少する。しかし、堤体上流面上部標高では、第 1 次固有振動数のほか、第 2 次またはより高次の固有振動数に等しい調和振動が入力する場合にも、応力の応答は比較的大きな値を示す。このように、応力の周波数応答は堤体の着目部分によって大きく異なってくる。ここでは参考のために、図 3.13 および図 3.14 に、ケース 1（堤高 150 m，湛水時）の堤体上流面および下流面の各標高における応力の周波数応答を示しておく。

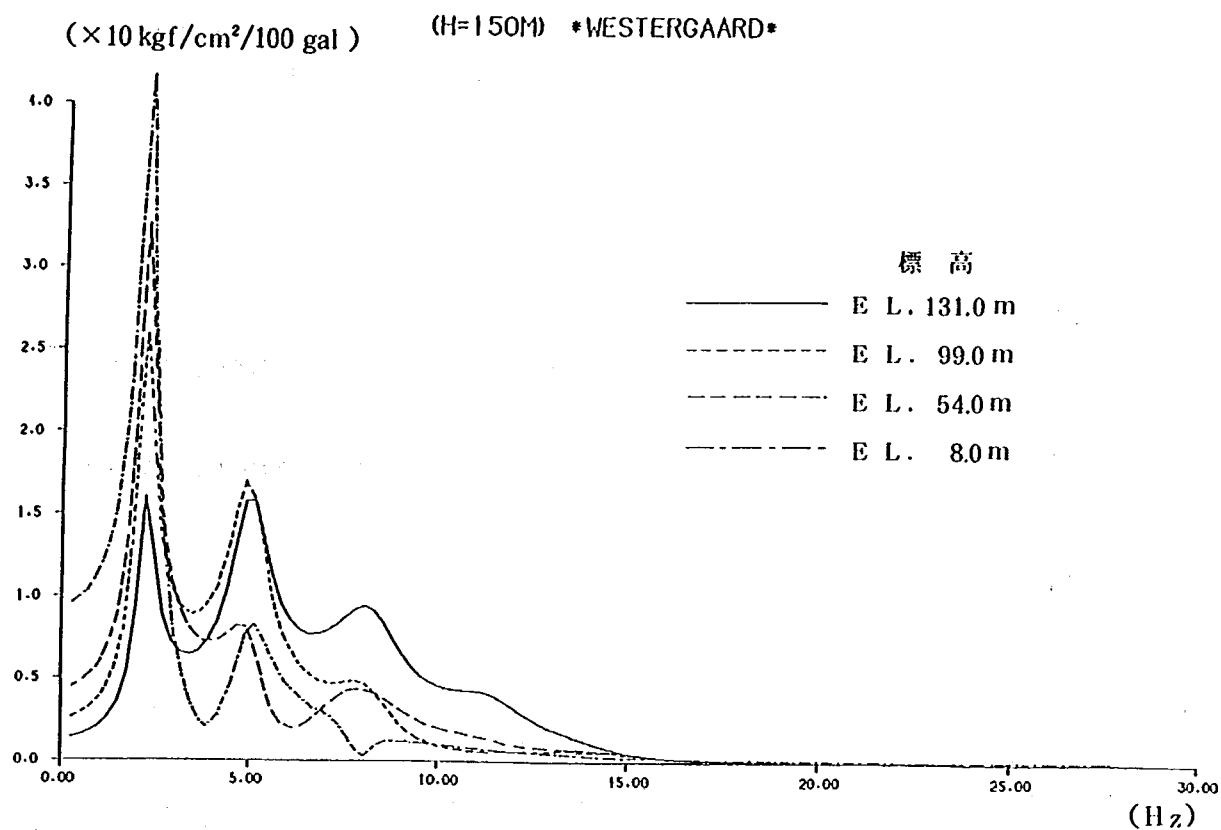


図 3.13 応力の周波数応答 (ケース 1, 堤体上流面 σ_y 成分)

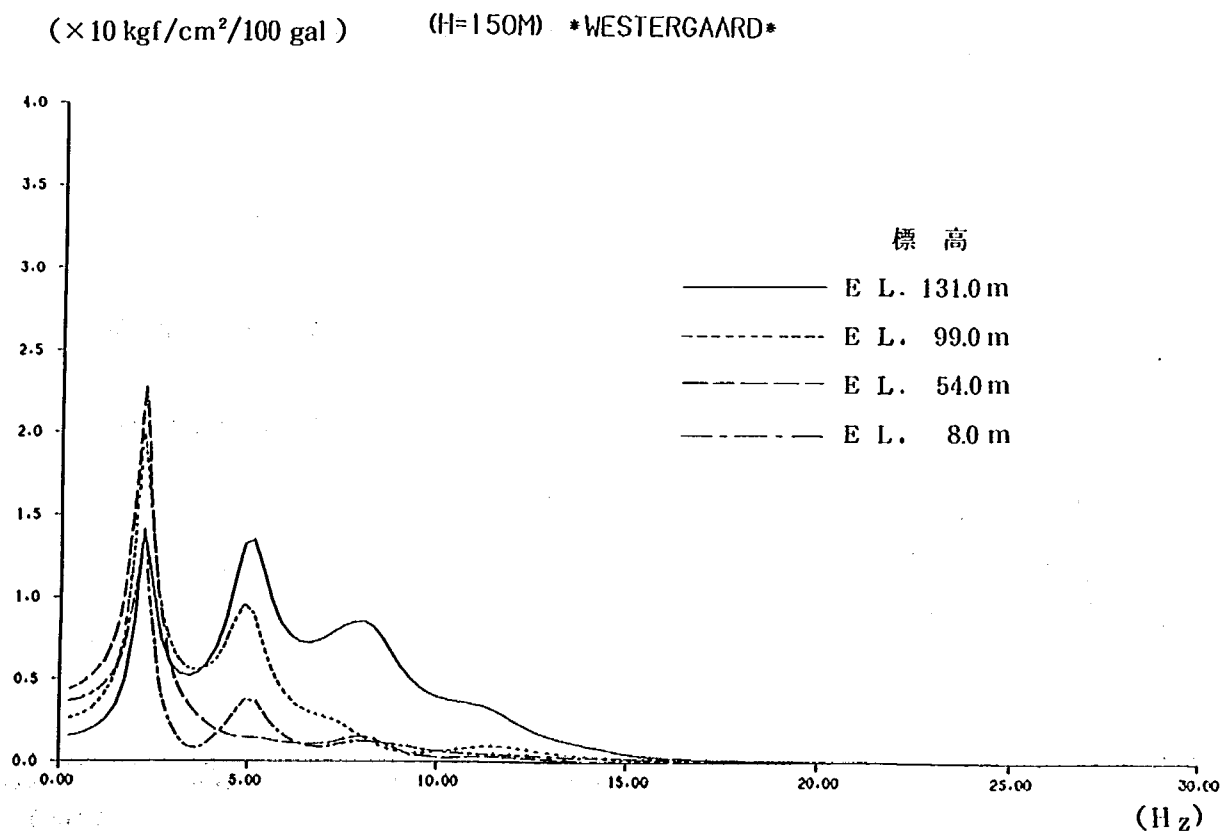
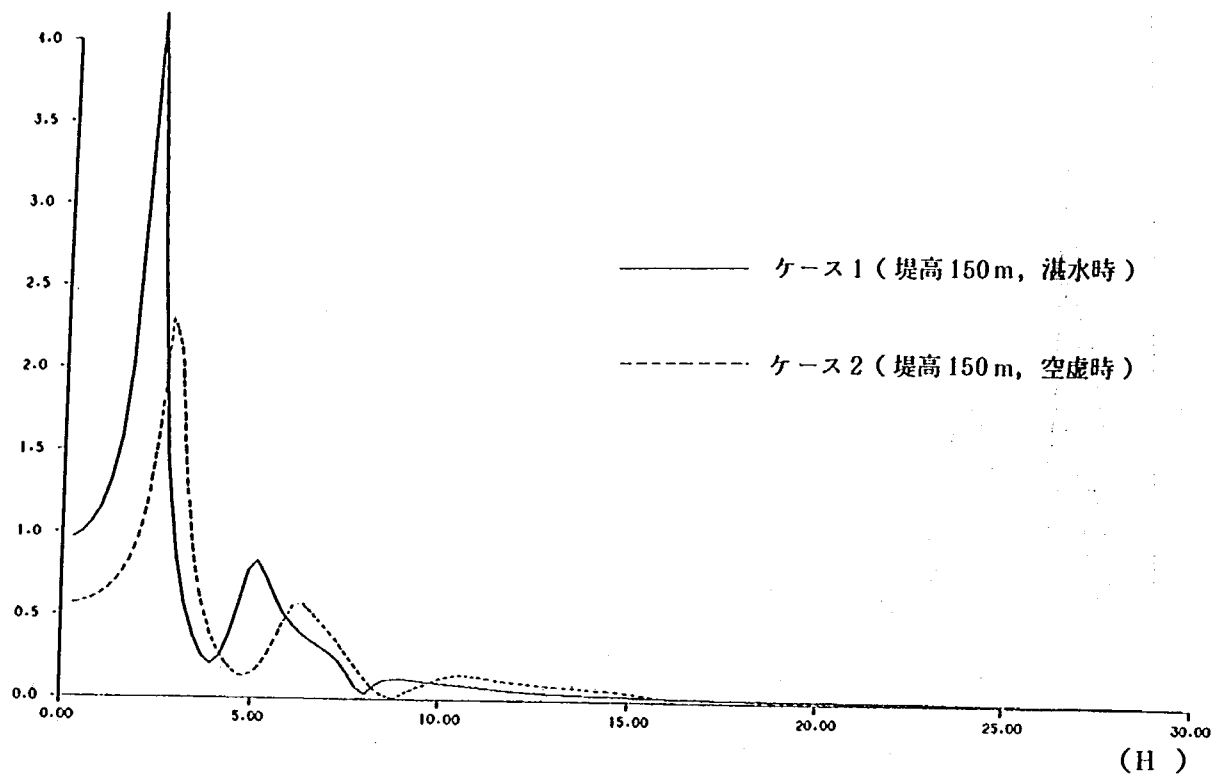


図 3.14 応力の周波数応答 (ケース 1, 堤体下流面 σ_y 成分)

($\times 10 \text{ kgf/cm}^2 / \text{H } 100 \text{ gal}$)

(a) 堤体上流面基礎部 (E L. 8.0 m)



($\times 10 \text{ kgf/cm}^2 / 100 \text{ gal}$)

(b) 堤体上流面上部標高 (E L. 131.0 m)

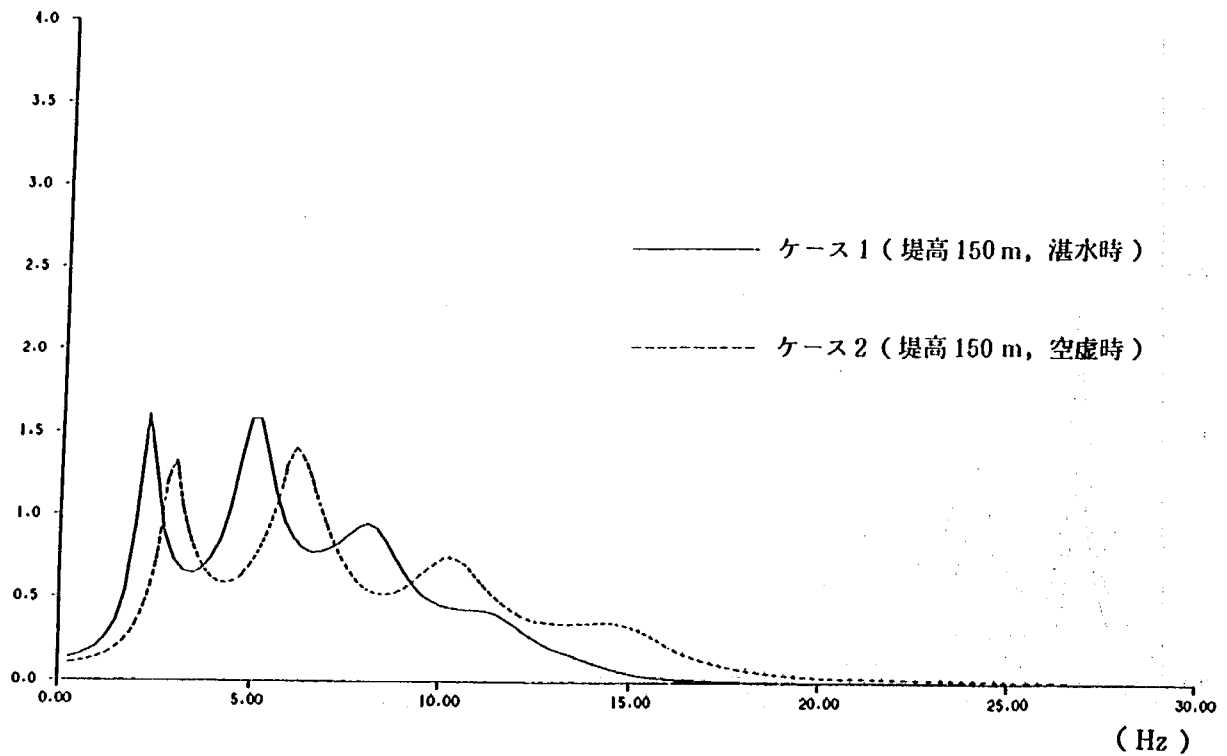


図 3.15 応力の周波数応答 (σ , 成分) 貯水条件の比較

次に、貯水池の条件の異なるケース 1（堤高 150 m，湛水時）とケース 2（堤高 150 m，空虚時）を比較してみる。図 3.15 にはそれぞれ堤体上流面着岩部および上部標高の応力の周波数応答を示した。図によれば、貯水池を湛水としたケース 1 の方が一般に大きなピーク値をとり、特にその傾向は着岩部で著しい。これは、付加質量によるモーメントの増加によるものと思われる。なお、力学的相似条件の成立するケース 2（堤高 150 m，空虚時）とケース 4（堤高 90 m，空虚時）については、応力の周波数応答も相似形となる。

さて以上のように、応力の周波数応答関数は、系に任意の振動数の調和振動が入力した場合の応力の最大応答を示すから、これによって応力の応答が最大となる入力振動数が明らかにされる。したがって、堤体の着目する部分に対して、応力上注意すべき振動特性を有する地震動の指摘が可能となるわけである。

4. 応力モードによる応力の最大応答の算出

4.1 概 説

第2章で述べたように、時刻歴応答計算では、ダムの各部における応力の応答が時間的にどのように変化するかを知ることができるが、ダムの耐震設計を行う場合、設計上重要なのは応答時刻歴の全過程でなく、応力の最大応答であるのが一般である。そこで本章では、実際に入力地震動を設定して、前章で示した応力モードと応答スペクトルの理論から、ダム堤体内に発生する応力の最大応答の算出を試みることにする。また併せて時刻歴応答計算を実際に行い、両者を比較することにする。

4.2 入力地震動の設定

入力地震動には、実際にダムサイトで記録された加速度波形³⁾を用いた。ここでは、入力地震動の周波数特性が解析結果に及ぼす影響を明確に示すため、

- (A) 低周波数卓越（狭帯域）波：樽水波
- (B) 高周波数卓越（狭帯域）波：三保波
- (C) 広帯域波：四十四田波

の3種類の周波数特性を有する地震動を考えた。なお、発生応力の大きさを比較するため、各地震動の最大加速度は200 gal に統一した。表4.1に地震動の概要を、図4.1および図4.2に各入力地震動の加速度波形およびパワースペクトルを示す。

解析モデルは3.1節に用いたケース1（堤高150 m、湛水時）とした。その際の解析条件は3.1節に示したものと全く同一である。

表 4.1 入力地震動

	原 波	原波の 最大加速度	卓越振動数 (Hz)	継 続 時 間 (sec)	最大加速度	備 考
(A)	樽 水 (10-3-Y)	236 gal	2.0	10.23	200 gal	低振動数卓越 狭帯域
(B)	三 保 (13-1-X)	38 gal	6.9	9.00	200 gal	高振動数卓越 狭帯域
(C)	四十四田 (4-Y)	51 gal	4.3	10.23	200 gal	広帯域

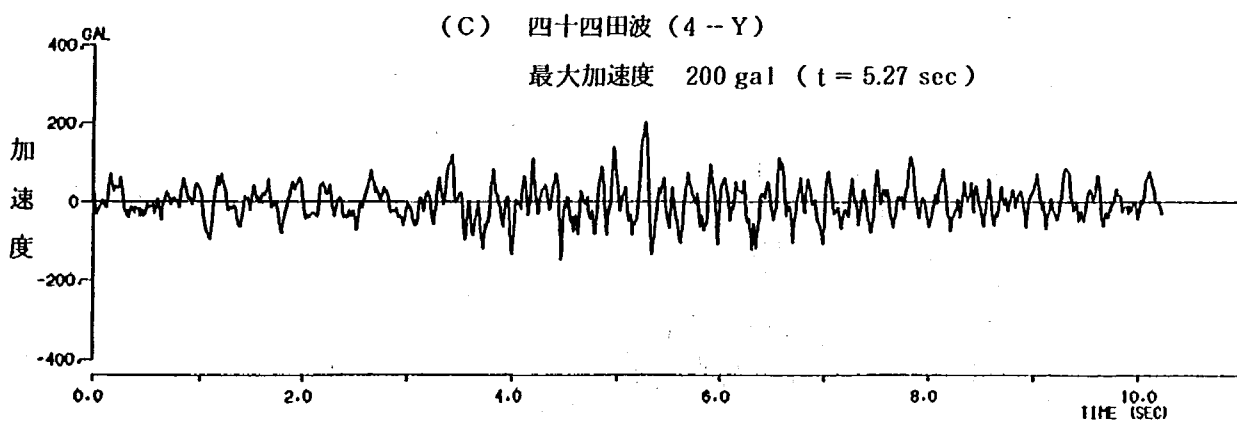
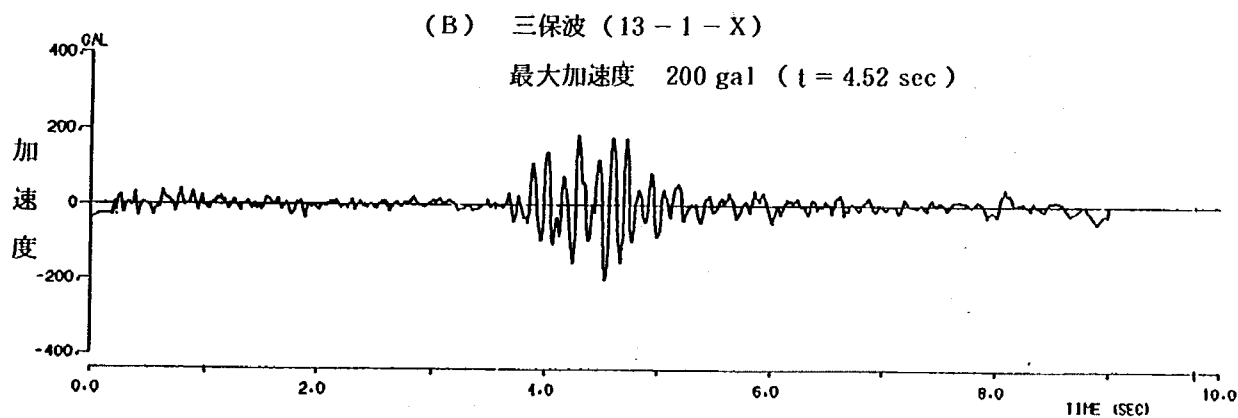
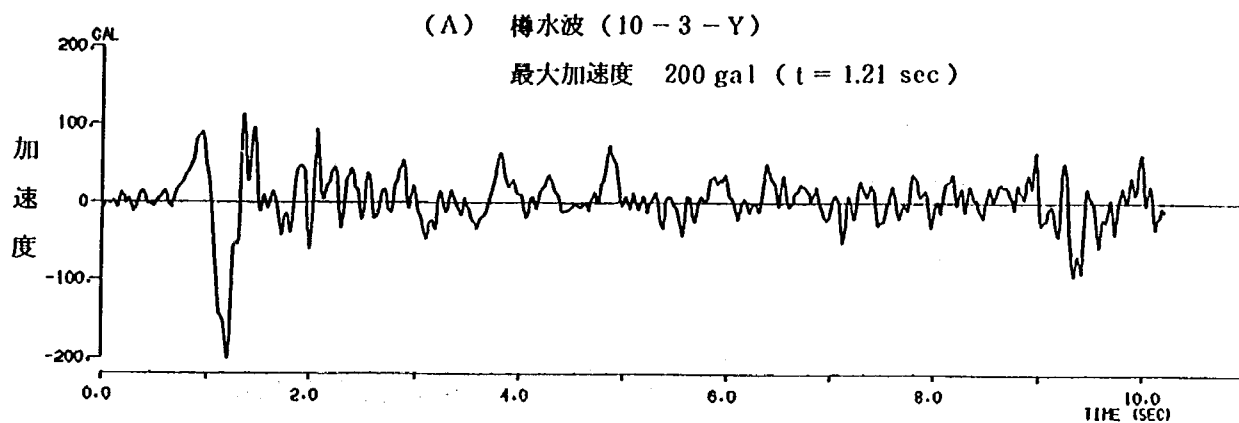


図 4.1 入力地震動加速度波形

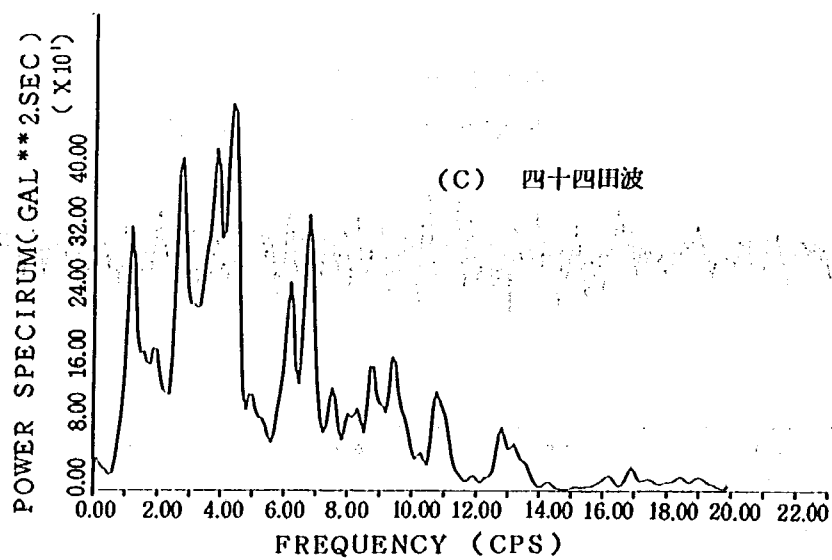
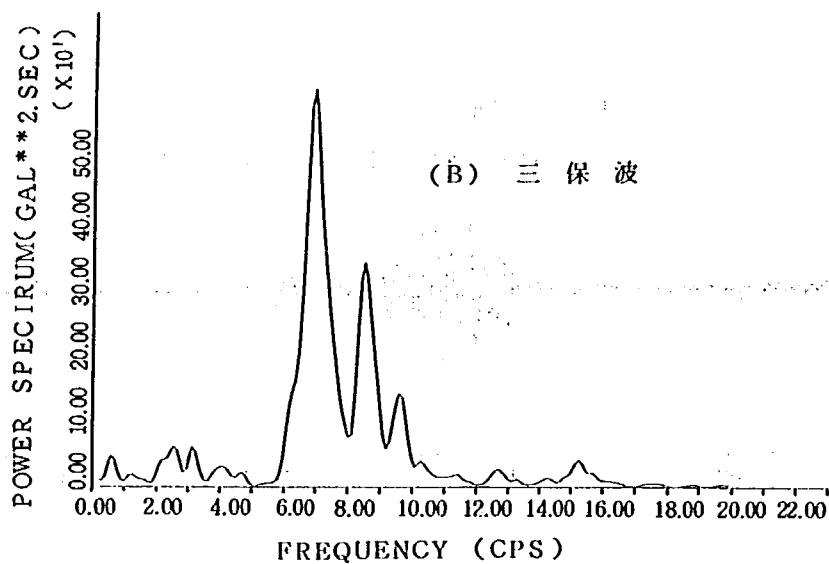
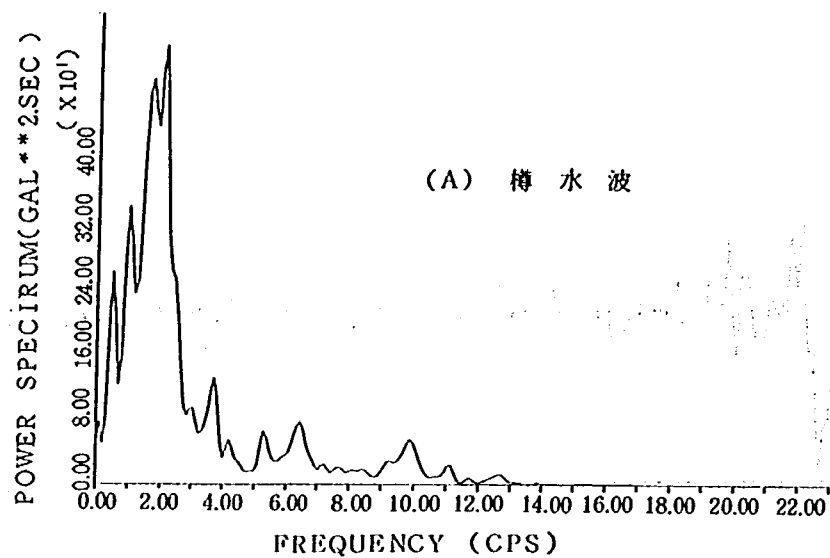


図 4.2 入力地震動パワースペクトル

4.3 応力モードによる応力の最大応答の算出

4.3.1 応答スペクトルの理論

応答スペクトルの理論を用いて実際に応力の最大応答の算出を行う前に、ここではこの応答スペクトルの理論について簡単に触れておく。もう一度、(2.18)式を考えることにする。

$$\ddot{\psi}_s(t) + 2h_s\omega_s\dot{\psi}_s(t) + \omega_s^2\psi_s(t) = -\beta_{sx}\ddot{\phi}_x(t) \quad (2.18)$$

ここで、刺激係数 $\beta_{sx} = 1$ 、すなわち、図4.3に示すような固有振動数 ω_s 、減衰定数 h_s の1自由度振動系の基礎に地震動 $\ddot{\phi}_x(t)$ が作用した場合に、系に生じる応答を考える。

$$\ddot{\psi}_s(t) + 2h_s\omega_s\dot{\psi}_s(t) + \omega_s^2\psi_s(t) = -\ddot{\phi}_x(t) \quad (4.1)$$

この時、系に生じる変位の応答は(2.20)式を参照して、

$$\begin{aligned} \psi_s'(t) = & \frac{1}{\omega_s'} \sin \omega_s' t \int_0^t \ddot{\phi}_x(\tau) e^{-h_s\omega_s(t-\tau)} \\ & \cos \omega_s' \tau d\tau \\ & - \cos \omega_s' t \int_0^t \ddot{\phi}_x(\tau) e^{-h_s\omega_s(t-\tau)} \sin \omega_s' \tau d\tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

で与えられる。ここに

$$\omega_s' = \omega_s \sqrt{1-h_s^2} \quad (4.3)$$

である。いま、

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t \ddot{\phi}_x(\tau) e^{-h_s\omega_s(t-\tau)} \cos \omega_s' \tau d\tau \\ B(t) &= \int_0^t \ddot{\phi}_x(\tau) e^{-h_s\omega_s(t-\tau)} \sin \omega_s' \tau d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$S_V(t) = \sqrt{\frac{A(t)^2 + B(t)^2}{1-h_s^2}}$$

とおけば、(4.2)式は次のような形で表わされる。

$$\begin{aligned} \psi_s'(t) &= \frac{1}{\omega_s'} (A(t) \sin \omega_s' t + B(t) \cos \omega_s' t) \\ &= \frac{1}{\omega_s \sqrt{1-h_s^2}} \sqrt{A(t)^2 + B(t)^2} \sin(\omega_s' t + \alpha(t)) \\ &= \frac{1}{\omega_s} S_V(t) \sin(\omega_s' t + \alpha(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

同様に $\dot{\psi}_s(t)$ 、 $\ddot{\psi}_s(t)$ もそれぞれ次式で与えられる。

$$\dot{\psi}_s(t) = S_V(t) \cos(\omega_s' t + \beta(t)) \quad (4.6)$$

$$\ddot{\psi}_s(t) = \omega_s S_V(t) \sin(\omega_s' t + \gamma(t)) - \ddot{\phi}_x(t) \quad (4.7)$$

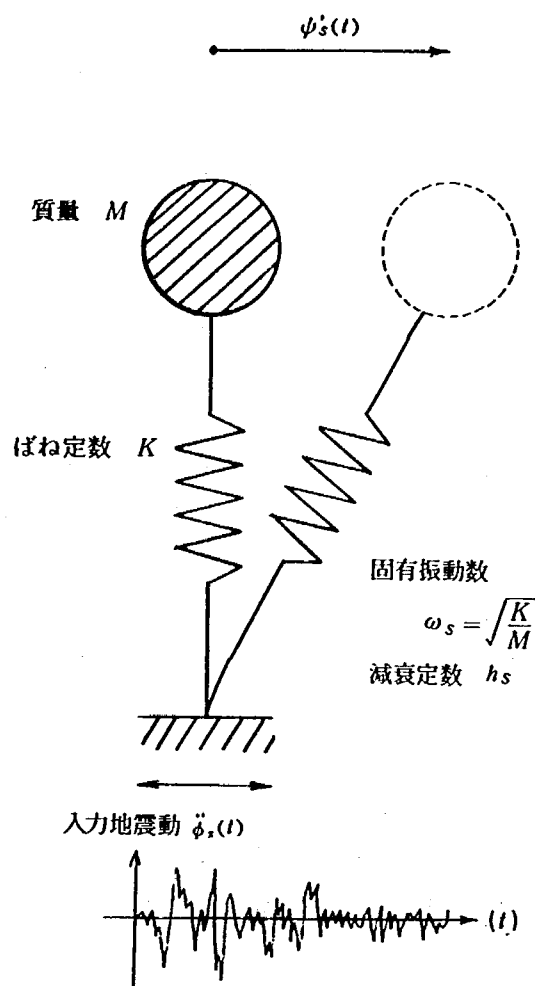


図4.3 1自由度系の応答

(4.7) 式は次のようにも書き表わされる。

$$\ddot{\psi}_s(t) + \dot{\phi}(t) = \omega_s S_V(t) \sin(\omega_s t + r(t)) \quad (4.8)$$

これは系の絶対加速度の応答を示している。さて、(4.5)、(4.6)、(4.8) 式の絶対値の最大値は、与えられた地震動 $\ddot{\phi}_x(t)$ に対して、系の固有振動数 ω_s 、減衰定数 h_s の関数として表わされるから、これを $S_d(\omega_s, h_s)$ 、 $S_v(\omega_s, h_s)$ 、 $S_a(\omega_s, h_s)$ で表わすことにする。これらの値は近似的に次式で表わされる。

$$\begin{aligned} S_d(\omega_s, h_s) &= \frac{1}{\omega_s} S_V(t)_{max} \\ S_v(\omega_s, h_s) &= S_V(t)_{max} \\ S_a(\omega_s, h_s) &= \omega_s S_V(t)_{max} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.9) 式で定義される値を地震動 $\ddot{\phi}_x(t)$ に対する変位応答スペクトル、速度応答スペクトル、加速度応答スペクトルと呼んでいる。

このように、応答スペクトルとは、与えられた地震動に対する 1 自由度振動系の最大応答を示すものであるが、この応答スペクトルは、コンクリートダムのように多自由度振動系とみなされる構造物に対しても適用可能である。すなわち、(2.18) 式に戻って、系の第 s 次基準座標 $\psi_s(t)$ の最大応答値は

$$|\psi_s(t)|_{max} = \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s) \quad (4.10)$$

で与えられる。したがって、系の最大変位応答は、基準座標の重ね合わせ式 (2.12) 式を用いて次式で表わされる。

$$|\delta(t)|_{max} \leq \sum_s |u_s \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s)| \quad (4.11)$$

等号は、各基準振動が同時に最大値をとる場合に成立するが、実際にはこのようなことは起こり得ず、系の最大変位応答は (4.11) 式の右辺よりも常に小さくなる。統計的な考え方になてば、このような場合の最大値は、各基準振動の 2 乗和の平方根で近似される。⁴⁾ すなわち、

$$|\delta(t)|_{max} = \sqrt{\sum_s \{u_s \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s)\}^2} \quad (4.12)$$

である。速度の最大応答を求める場合は、(4.12) 式の $S_d(\omega_s, h_s)$ を $S_v(\omega_s, h_s)$ とすればよい。ただし、加速度の最大応答は、 $S_a(\omega_s, h_s)$ が絶対加速度を表わすから、(4.12) 式のような重ね合わせはできないので注意を要する。

一方、応力の最大応答は応力モードを用いることにより、(4.12) 式と同様に

$$|\sigma(t)|_{max} = \sqrt{\sum_s \{\sigma_s \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s)\}^2} \quad (4.13)$$

で表わされる。ここに、

σ_s : 第 s 次の応力モード

である。なお (4.13) 式で応答スペクトルとして変位の応答スペクトルを用いるのは、(2.34) 式で示されるように、応力が基準座標の変位形 $\psi_s(t)$ で表わされるためである。

したがって、(4.13) 式により、応力モードを用いて振動系内の応力の最大応答の算出が可能であることが明らかになった。

4.3.2 応力の最大応答

4.3.1 節で述べたように、振動系内に発生する応力の最大応答は、変位応答スペクトル、応力モー

ドおよび刺激係数が得られれば(4.13)式を用いて推定することができる。そこで、3.1節で示したケース1(堤高150 m, 満水時)を解析モデルとして、応力の最大応答を算出するものとする。ここで応力のモードおよび刺激係数は第3章の周波数応答解析で既に求められている。また、図4.4には3つの入力地震動の変位応答スペクトルを示した。したがって、計算に用いる各因子は表4.2のようにまとめられ、応力の最大応答が計算される。

以上の手順から、各入力地震動に対する応力の最大応答を算出したものを図4.5に示す。なお、重ね合わせには1次から6次までの応力モードを用いた。

4.4 応力の時刻歴応答解析

ここでは、前節で用いた応力モードの重ね合わせの式(4.13)式の近似度を検討するため、実際に地震動波形を入力して時刻歴応答解析を行った。

まず、静的解について示す。ここでいう静的解とは、地震動が入力する前の堤体の状態を示し、自重および静水圧の静的荷重を受けた場合の変位、応力等をいう。図4.6に堤体内に生じる静的応力を示す。また、静的変位については、最大値が生じる堤体天端で、水平方向下流向きに1.0 cm、鉛直方向下向きに0.4 cmである。これら静的解は、地震時に生じる動的応答の中立軸を表わしている。

次に動的応答について示す。図4.7に、堤体天端の変位の応答時刻歴を示す。ここで時刻 $t=0$ における値は静的変位である。図によれば、各入力地震動の最大加速度を200 galに統一してあるにもかかわらず、地震動の周波数特性の違いにより、応答が大きく異なっていることがわかる。

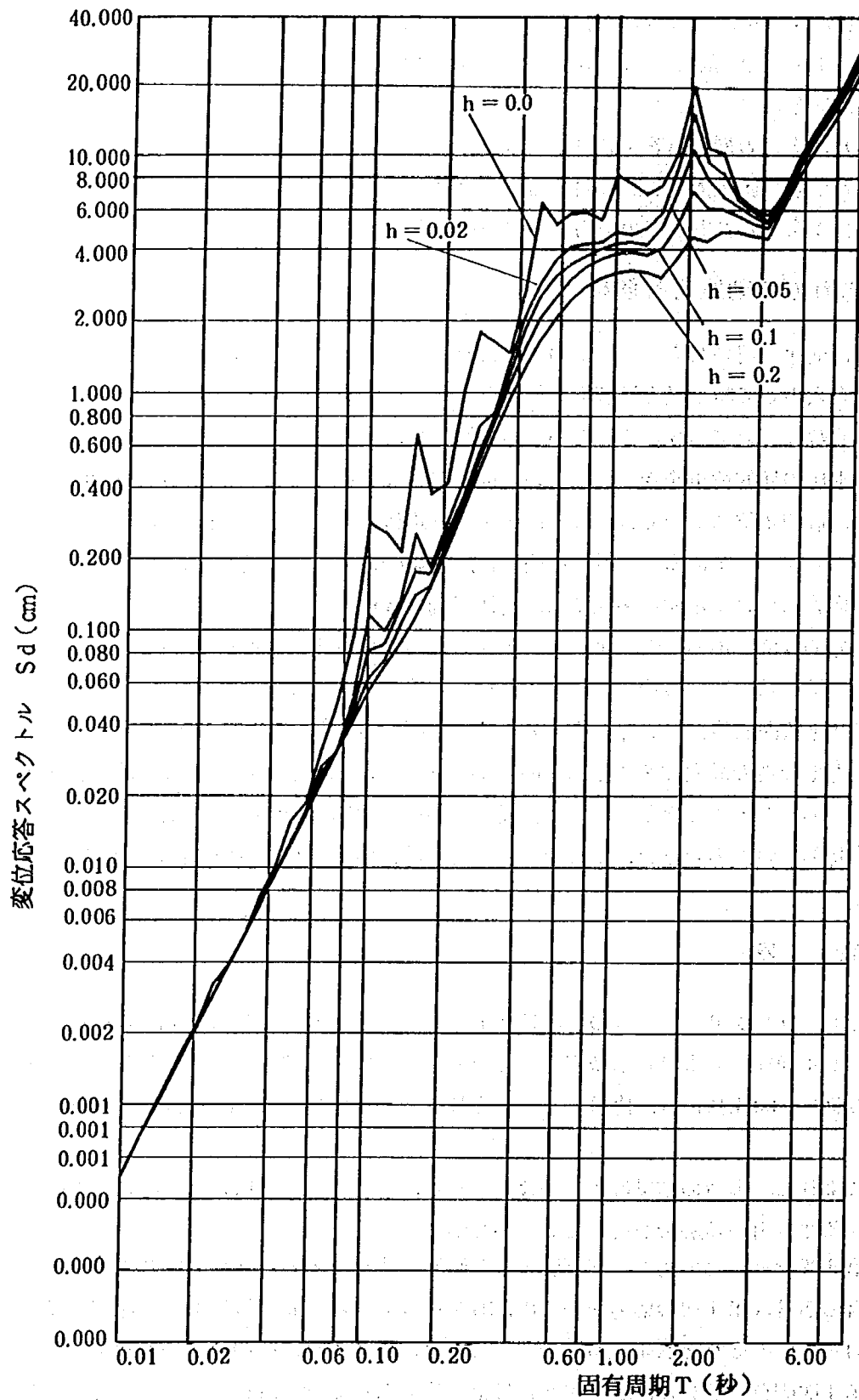
次に、堤体上流面着岩部における応力の応答時刻歴のうち σ_x 成分について図4.8に示す。この場合も、各入力地震動の最大加速度を200 galに統一してあるにもかかわらず、地震動の周波数特性の違いにより、応答が大きく異なっている。図4.8の応力の応答時刻歴のうち、静的応力からの変動が最も大きい時刻でのその変動分(すなわち、応力の最大応答)を堤体の各部について示したものが図4.9である。

4.5 考 察

前節までで、コンクリートダムの耐震設計上重要となる応力の最大応答が、応力のモードを用いた応答スペクトル理論、および時刻歴応答解析の両方でそれぞれ求められることを示した(図4.5および図4.9参照)。図4.10には、比較のためにそれぞれの結果のうち σ_x 成分について再掲するものとする。

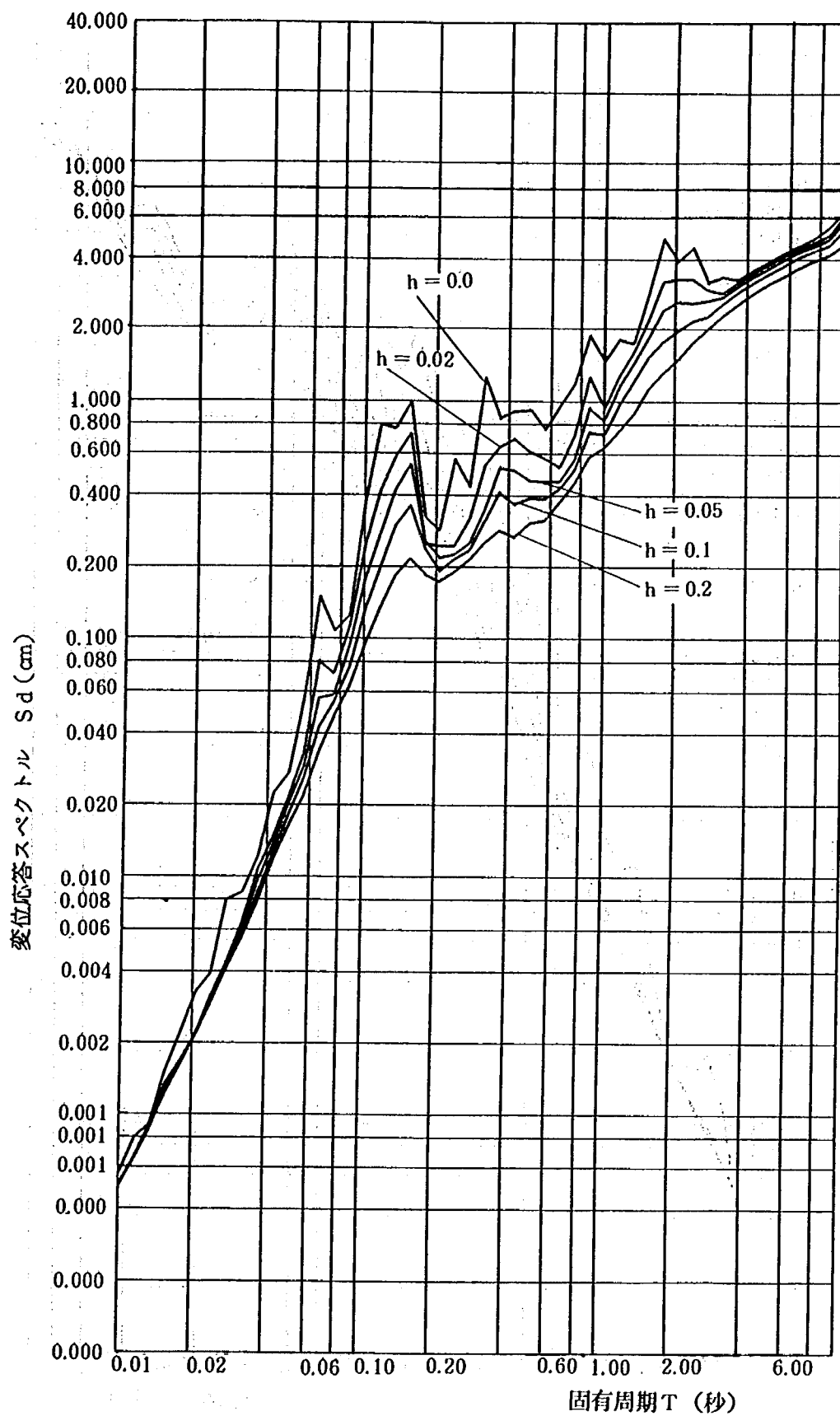
図4.10によれば、両者の結果はよく一致しており、応力モードを用いた推定式(4.13)によって実用上十分な精度を用いる解析が行えることがわかる。

一方、第3章で示した応力モード(図3.7参照)と比較すると、(A)低周波数卓越(狭帯域)波：樽水波の場合の応答は第1次の応力モードに、(B)高周波数卓越(狭帯域)波：三保波の場合の応答は第2次の応力モードにそれぞれよく似ている。これは、各入力地震動の卓越周波数が、(A)の場合にはダム堤体の第1次固有振動数に、(B)の場合には第2次固有振動数に近接しており、その基準振動が他の次数の基準振動に比べて卓越するためである。また(C)広帯域波：四十四田波の場合は、地震動の卓越周波数が特になく、広い帯域にまたがっているため、その応答は第1次と第2次の応力モードの重ね合わせのようになっている。したがって、第3章でも述べたように、地震動の周波数特性から卓越す



(A) 樽水波

図 4.4 (1) 入力地震動波形の変位応答スペクトル (h : 減衰定数)



(B) 三保波

図 4.4 (2) 入力地震動波形の変位応答スペクトル(h :減衰定数)

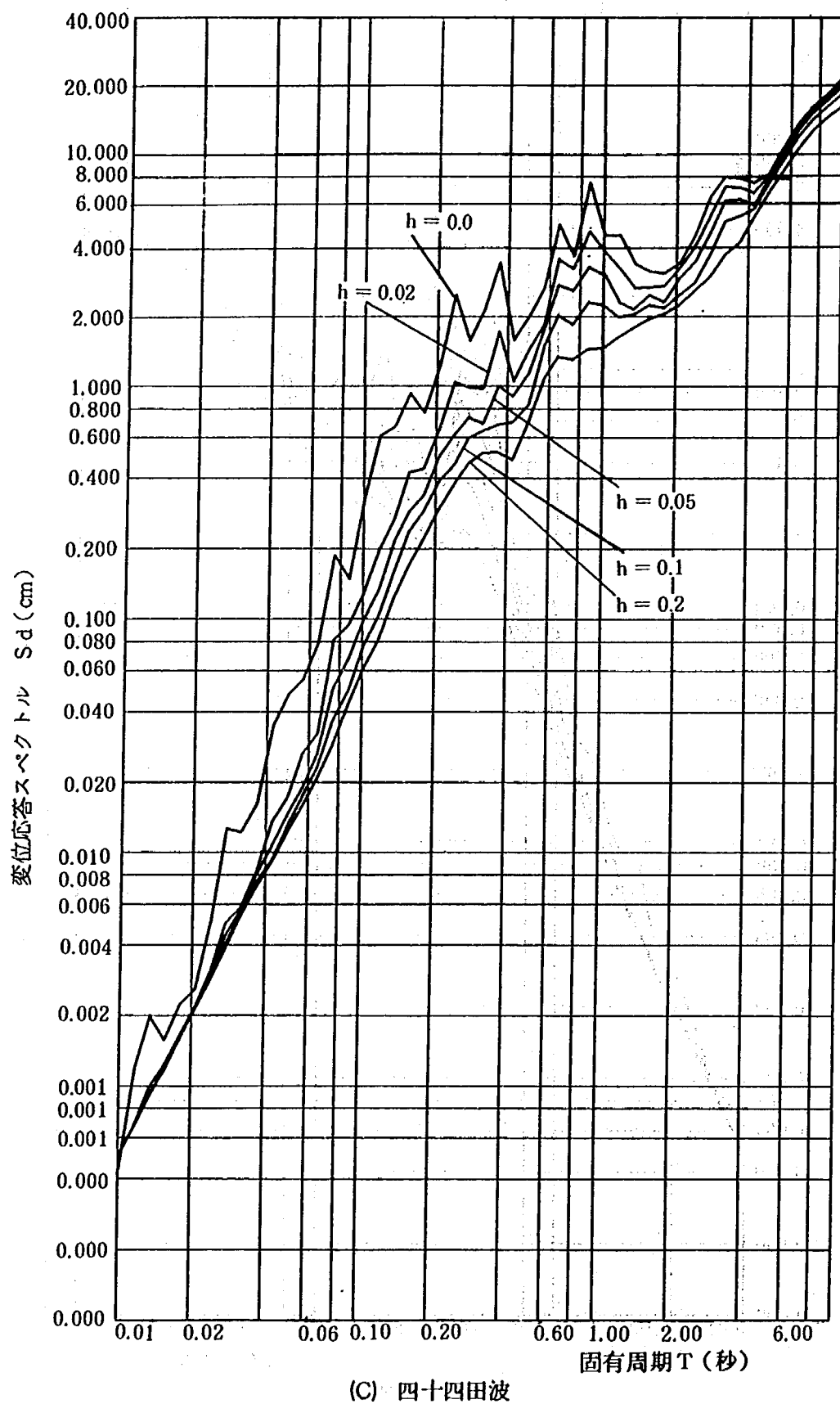


図 4.4 (3) 入力地震動波形の変位応答スペクトル (h : 減衰定数)

表 4.2 応力モードによる応力の最大応答の算出

(A) 樽水波

次数 i	固有振動数 ω_i (rad/sec)	刺激係数 β_{ix} (1/m)	応力モード $\{\sigma_i\}^e$ (tf/m ²)	変位応答スペクトル $S_d(\omega_i, h_i)$ (m)	$\{\sigma_i\}^e \beta_{ix} S_d$ (tf/m ²)	応力の最大応答 σ_{max} (tf/m ²)
1	13.97	-38.28	417.7	1.767×10^{-2}	-282.5	285.0
2	31.45	29.09	-535.5	2.255×10^{-3}	-35.1	
3	47.81	10.94	1,032.0	1.019×10^{-3}	11.5	
4	51.75	16.46	-566.6	8.243×10^{-4}	-7.7	
5	72.41	-11.34	-123.8	4.393×10^{-4}	0.6	
6	88.22	5.22	74.5	2.836×10^{-4}	0.1	

(B) 三保波

次数 i	固有振動数 ω_i (rad/sec)	刺激係数 β_{ix} (1/m)	応力モード $\{\sigma_i\}^e$ (tf/m ²)	変位応答スペクトル $S_d(\omega_i, h_i)$ (m)	$\{\sigma_i\}^e \beta_{ix} S_d$ (tf/m ²)	応力の最大応答 σ_{max} (tf/m ²)
1	13.97	-38.28	417.7	4.005×10^{-3}	-64.0	80.7
2	31.45	29.09	-535.5	1.898×10^{-3}	-29.6	
3	47.81	10.94	1,032.0	2.928×10^{-3}	33.1	
4	51.75	16.46	-566.6	2.271×10^{-3}	-21.2	
5	72.41	-11.34	-123.8	7.901×10^{-4}	1.1	
6	88.22	5.22	74.5	4.903×10^{-4}	0.2	

(C) 四十四田波

次数 i	固有振動数 ω_i (rad/sec)	刺激係数 β_{ix} (1/m)	応力モード $\{\sigma_i\}^e$ (tf/m ²)	変位応答スペクトル $S_d(\omega_i, h_i)$ (m)	$\{\sigma_i\}^e \beta_{ix} S_d$ (tf/m ²)	応力の最大応答 σ_{max} (tf/m ²)
1	13.97	-38.28	417.7	7.716×10^{-3}	-123.4	138.6
2	31.45	29.09	-535.5	3.822×10^{-3}	-59.5	
3	47.81	10.94	1,032.0	1.577×10^{-3}	17.8	
4	51.75	16.46	-566.6	1.175×10^{-3}	-11.0	
5	72.41	-11.34	-123.8	4.953×10^{-4}	0.7	
6	88.22	5.22	74.5	3.218×10^{-4}	0.1	

注) 対象とする応力は、堤体上流面基礎部における σ_y 成分とした。

(A) 樽水波入力

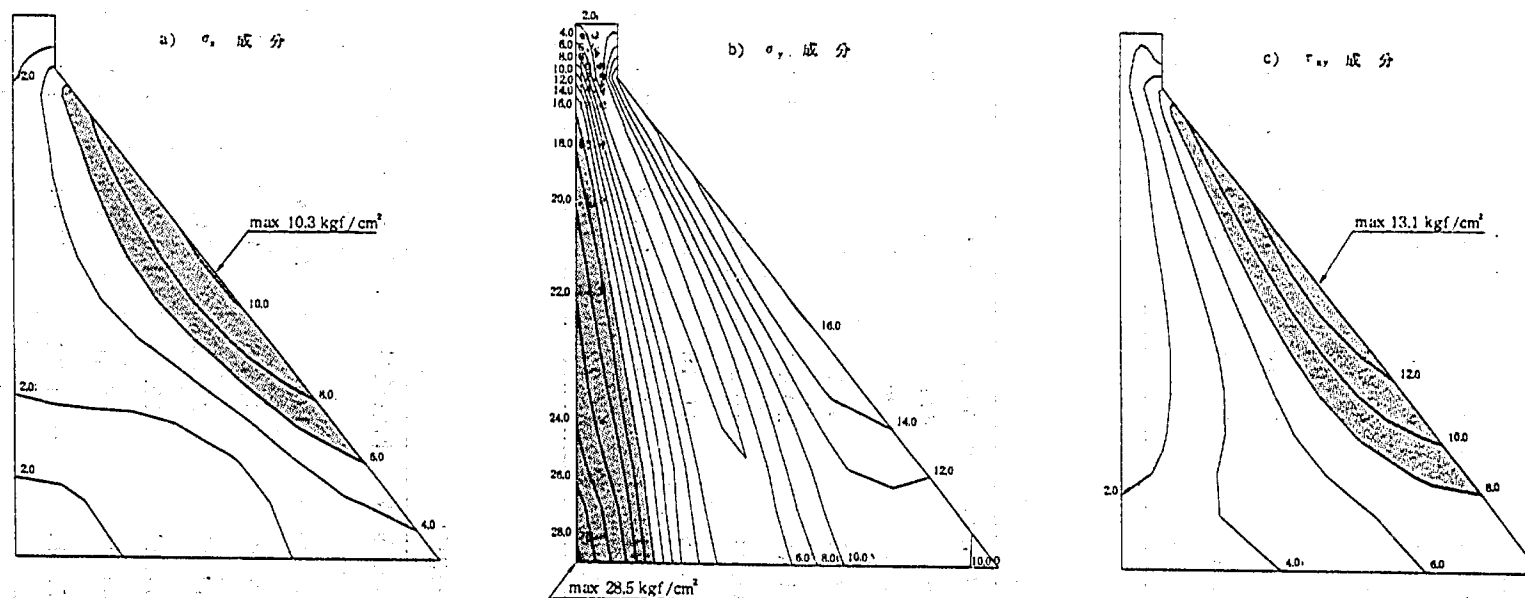


図 4.5 (1) 応答スペクトル理論より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

(B) 三保波入力

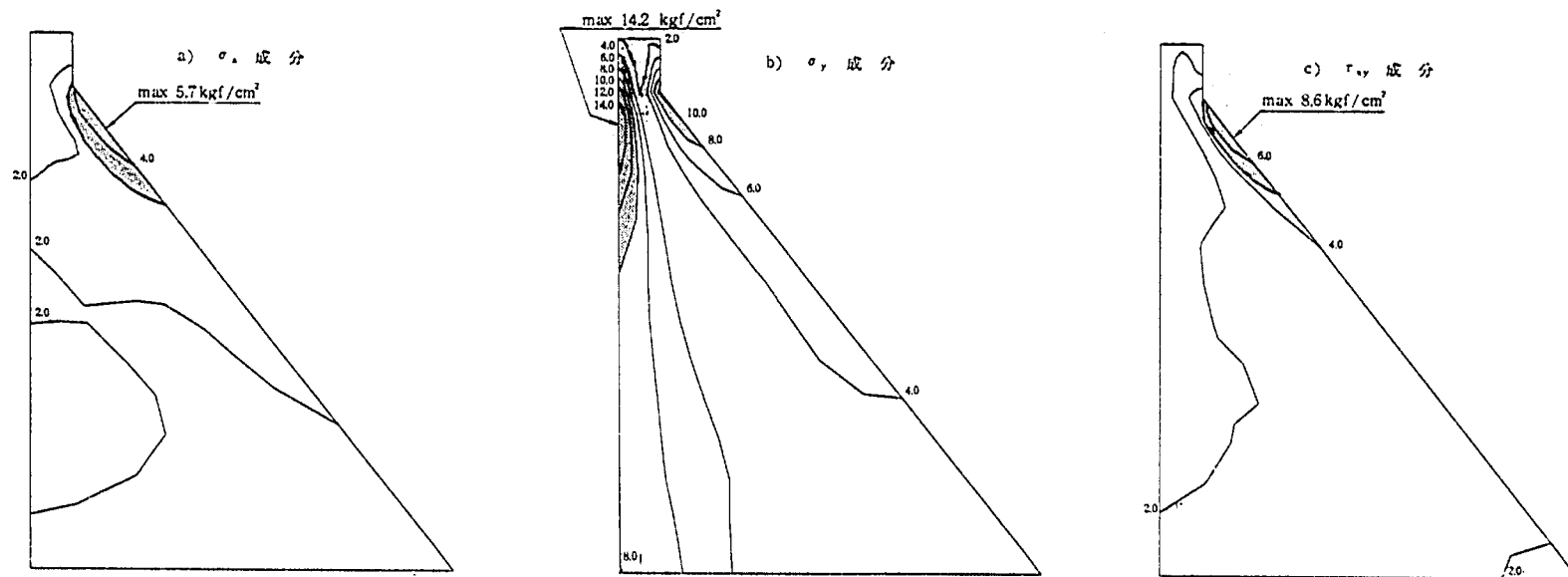


図 4.5 (2) 応答スペクトル理論より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

(C) 四十四田波入力

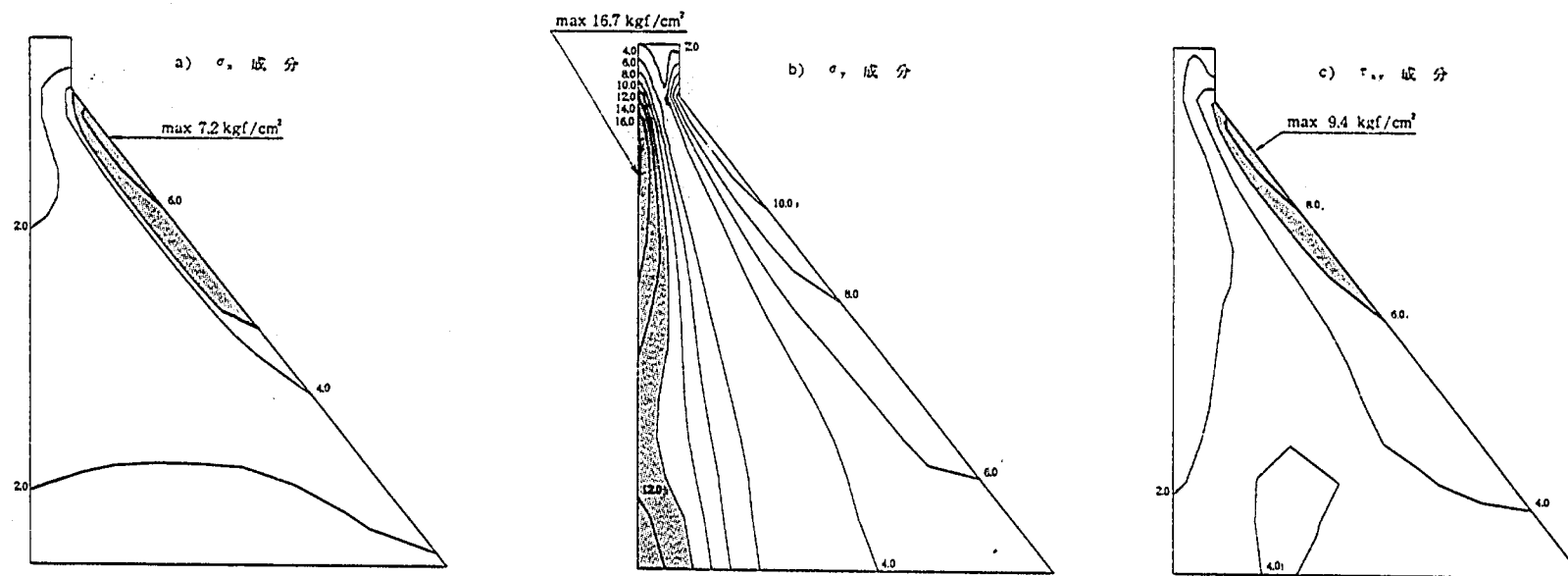


図 4.5 (3) 応答スペクトル理論より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

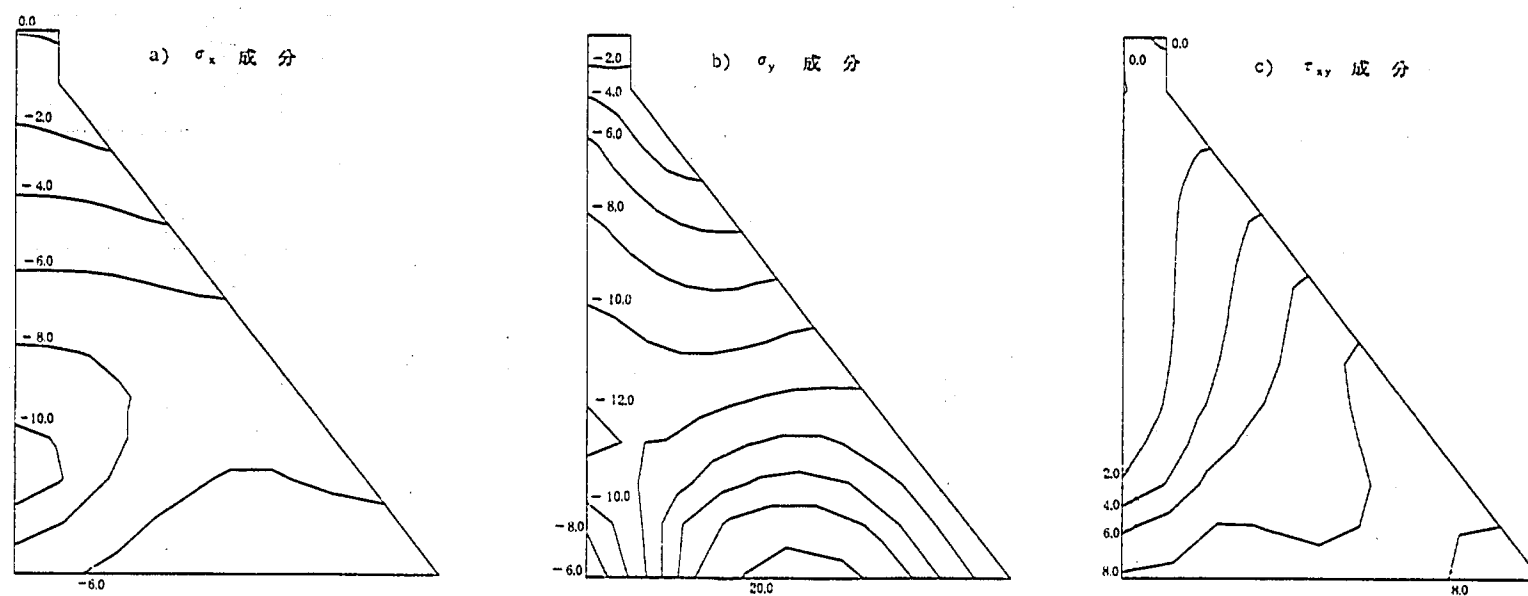
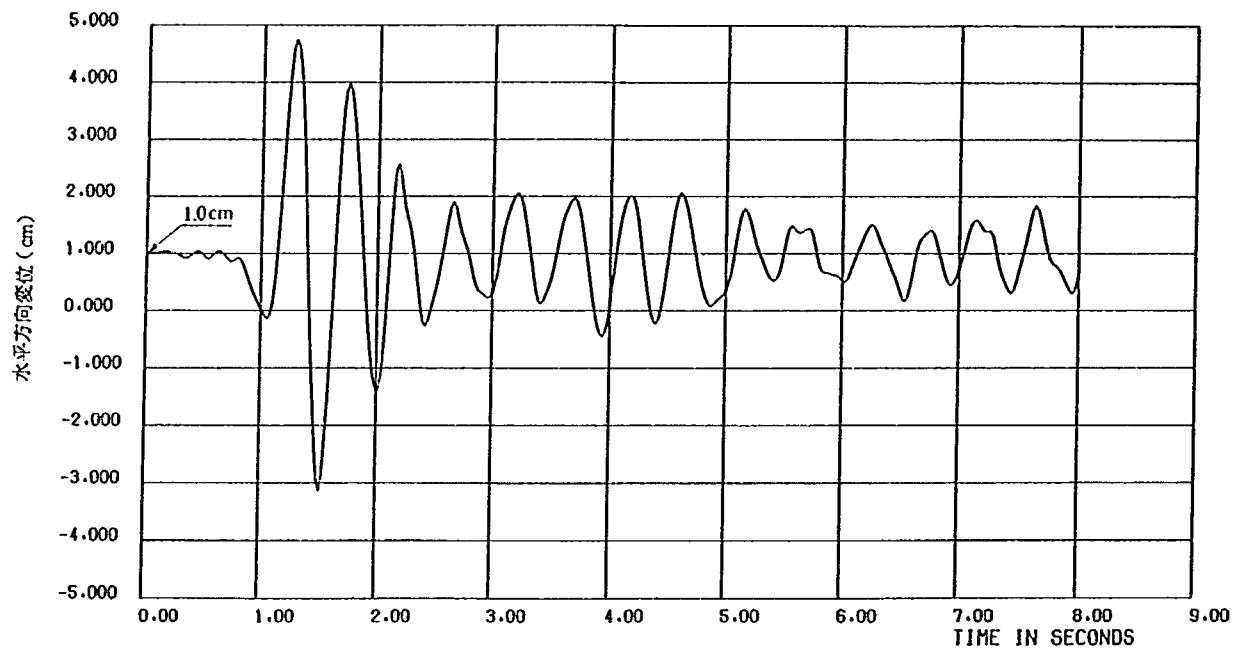
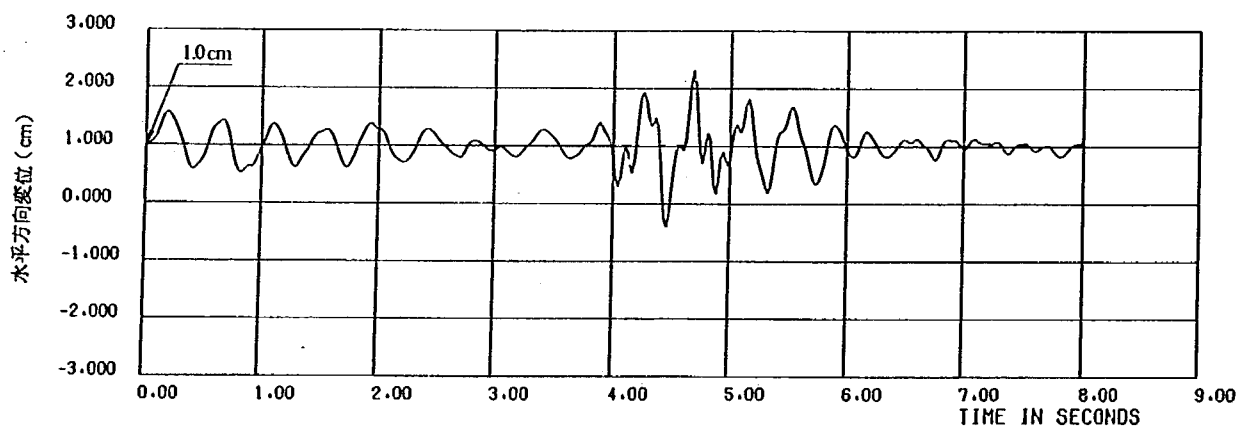


図 4.6 静的応力 (kgf/cm²: 正值は引張応力を示す)

(A) 樽水波入力



(B) 三保波入力



(C) 四十四田波入力

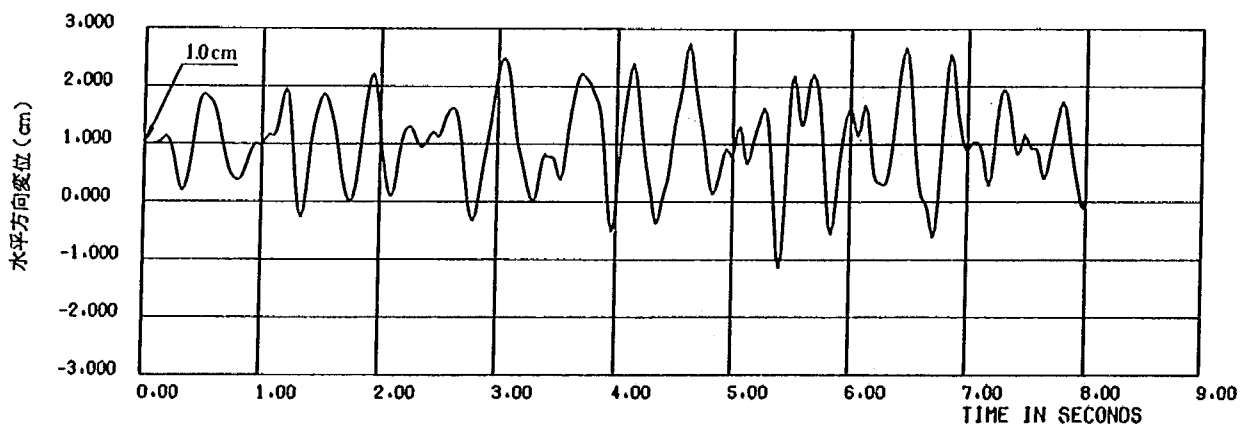
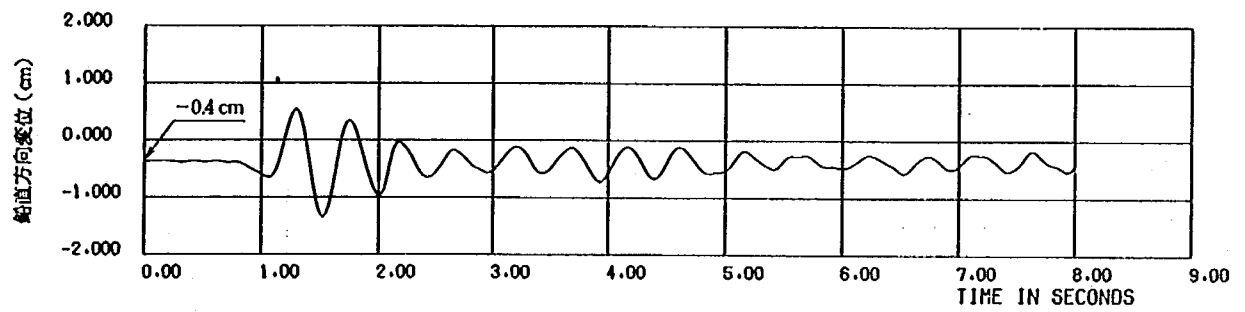
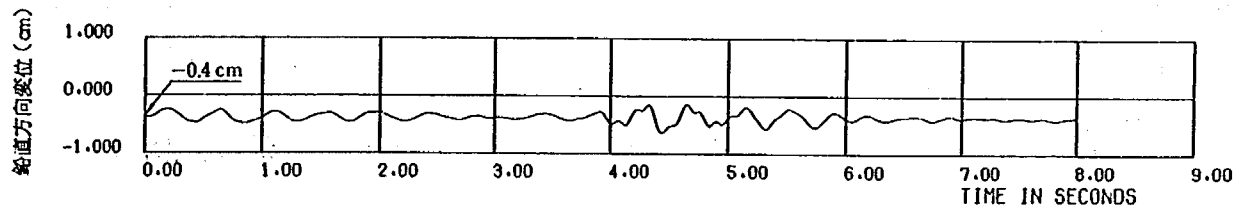


図 4.7 堤体天端の変位応答時刻歴（水平方向変位，下流向きを正）

(A) 樽水波入力



(B) 三保波入力



(C) 四十四田波入力

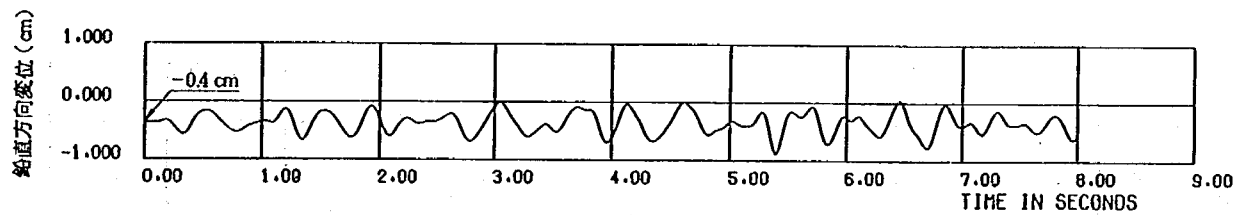
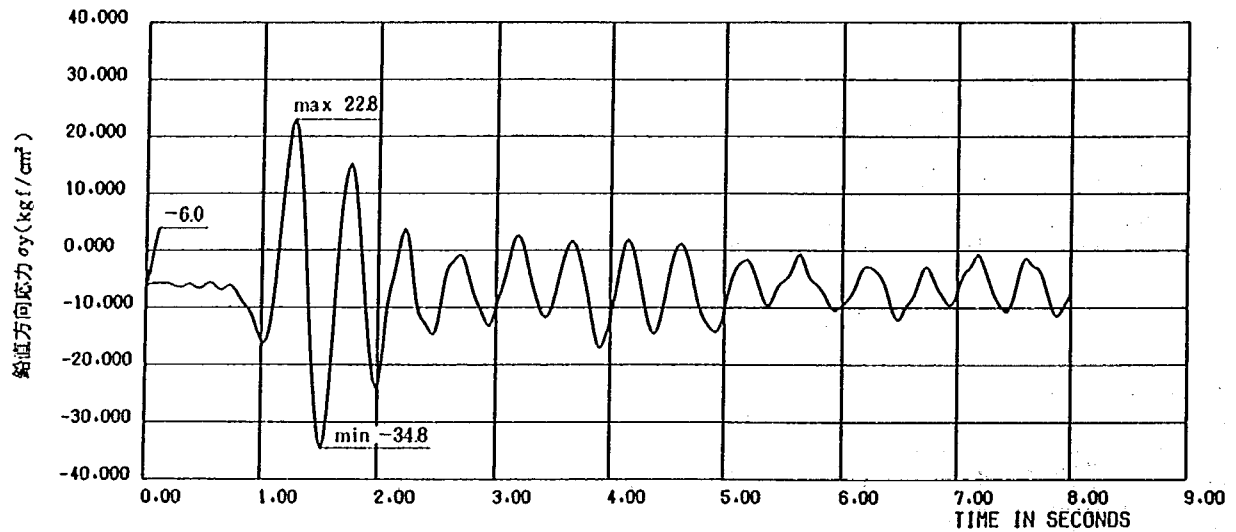
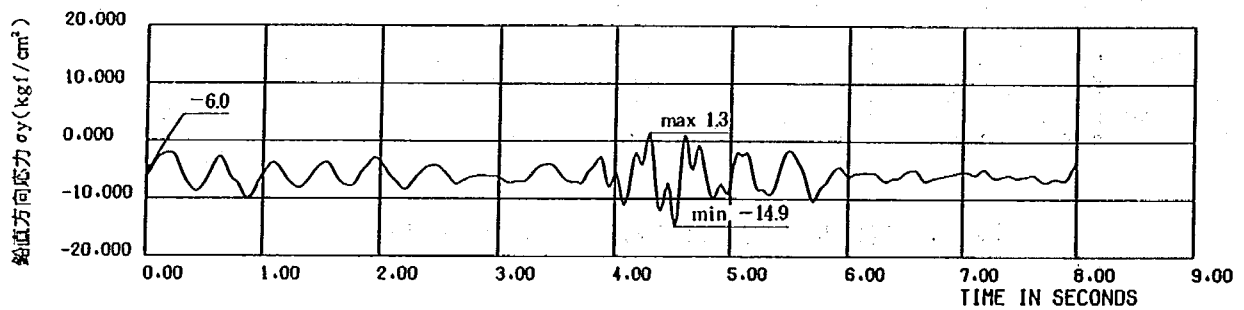


図 4.7 堤体天端の変位応答時刻歴 (鉛直方向変位, 上向きを正)

(A) 樽水波入力 (最大変動分 $\pm 28.8 \text{ kgf/cm}^2$)



(B) 三保波入力 (最大変動分 $\pm 8.9 \text{ kgf/cm}^2$)



(C) 四十四田波入力 (最大変動分 $\pm 13.6 \text{ kgf/cm}^2$)

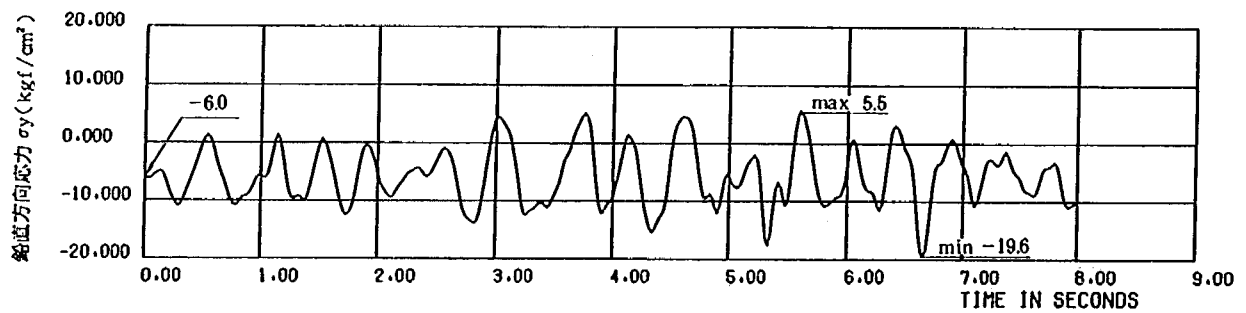


図 4.8 堤体上流面基礎部の応力応答時刻歴 (σ_y 成分, 引張応力を正)

(A) 樽水波入力

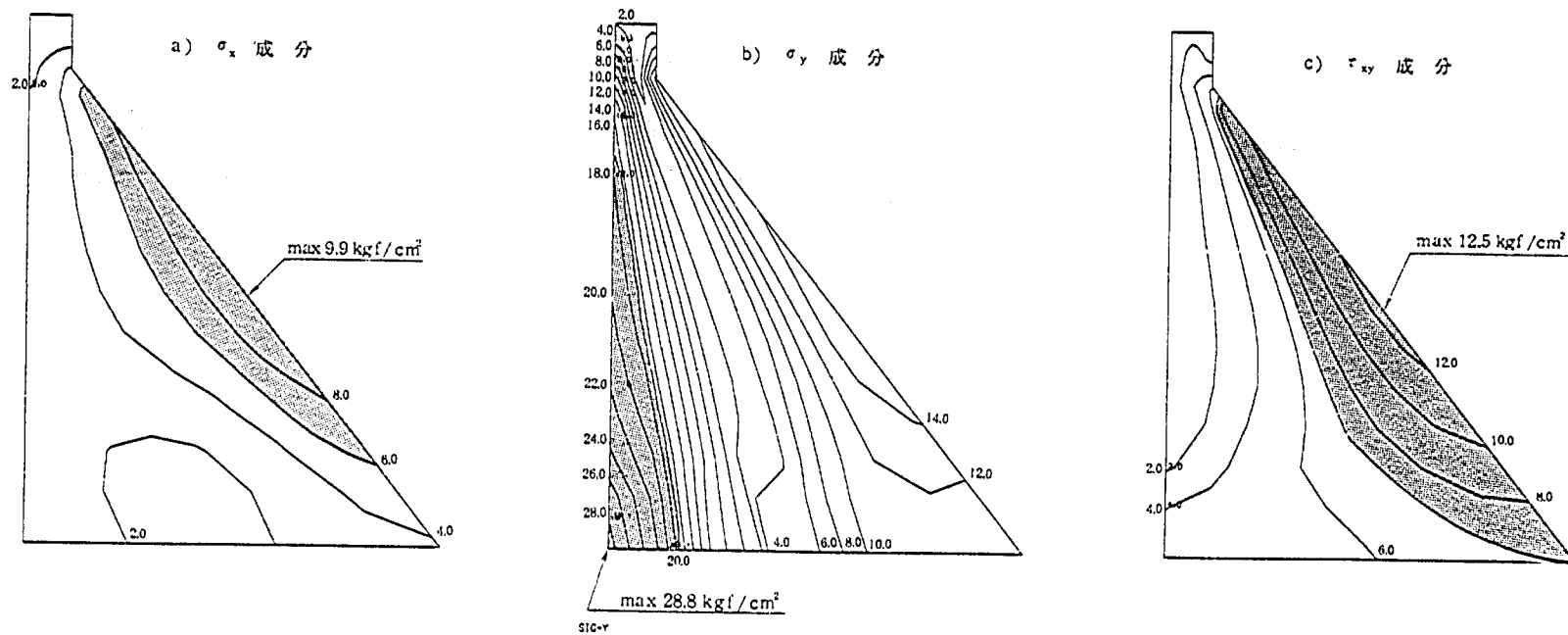


図 4.9 (1) 時刻歴応答解析より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

(B) 三保波入力

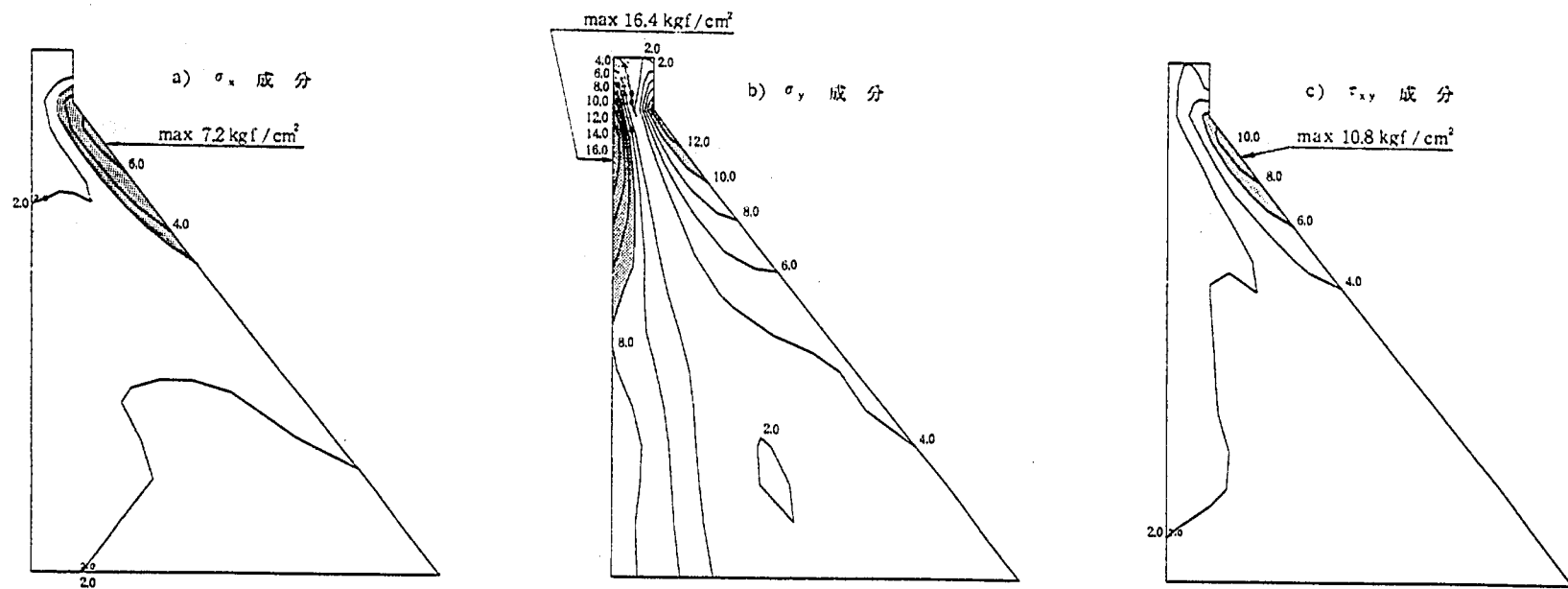


図 4.9 (2) 時刻歴応答解析より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

(C) 四十四田波入力

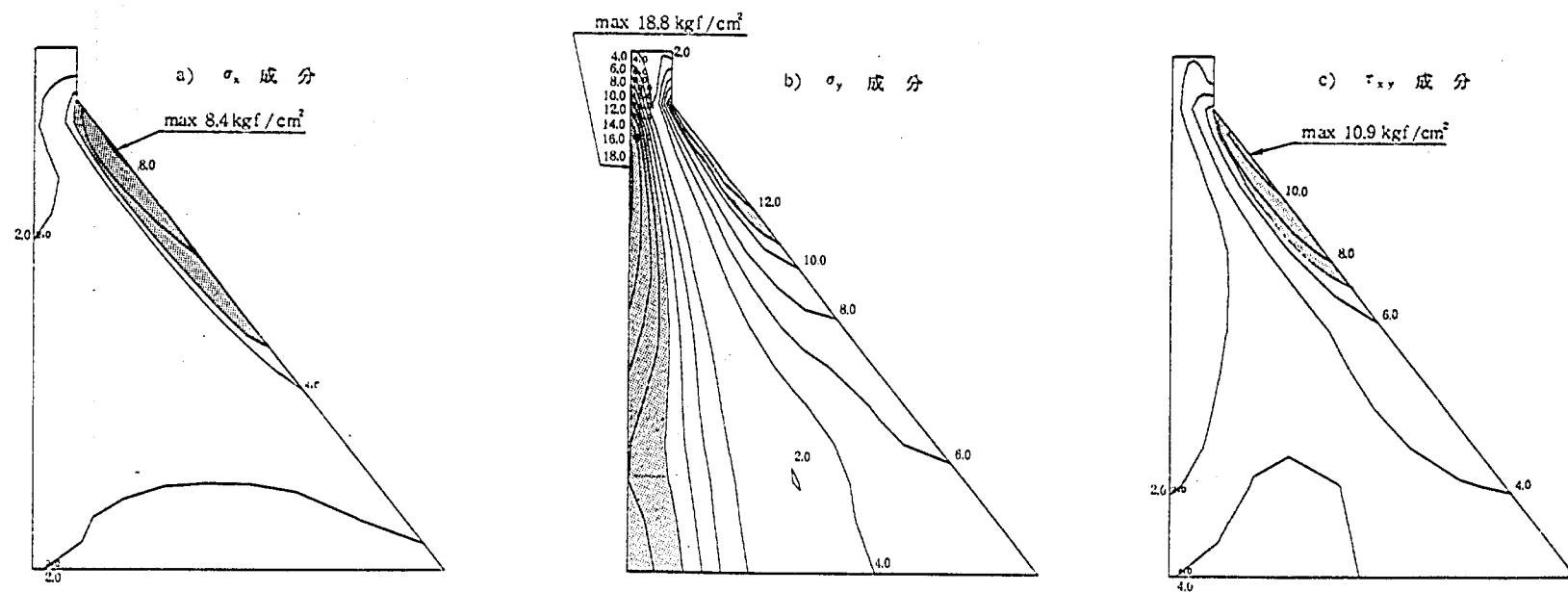


図 4.9 (3) 時刻歴応答解析より得られた応力の最大応答 (影の部分は最大値の60%以上)

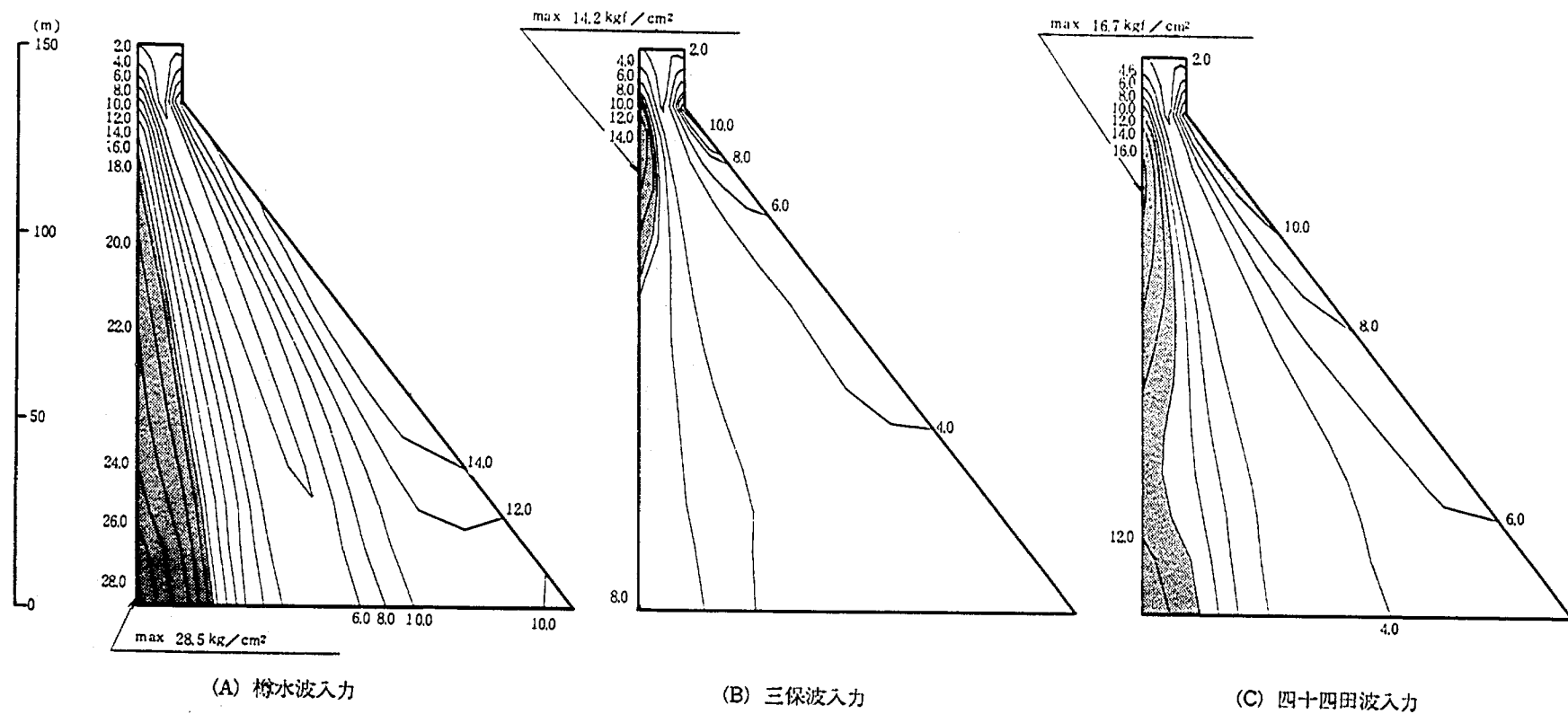


図 4. 10(1) 応答スペクトル理論より得られた応力の最大応答 (σ_y 成分) (影の部分は最大値の 60%以上)

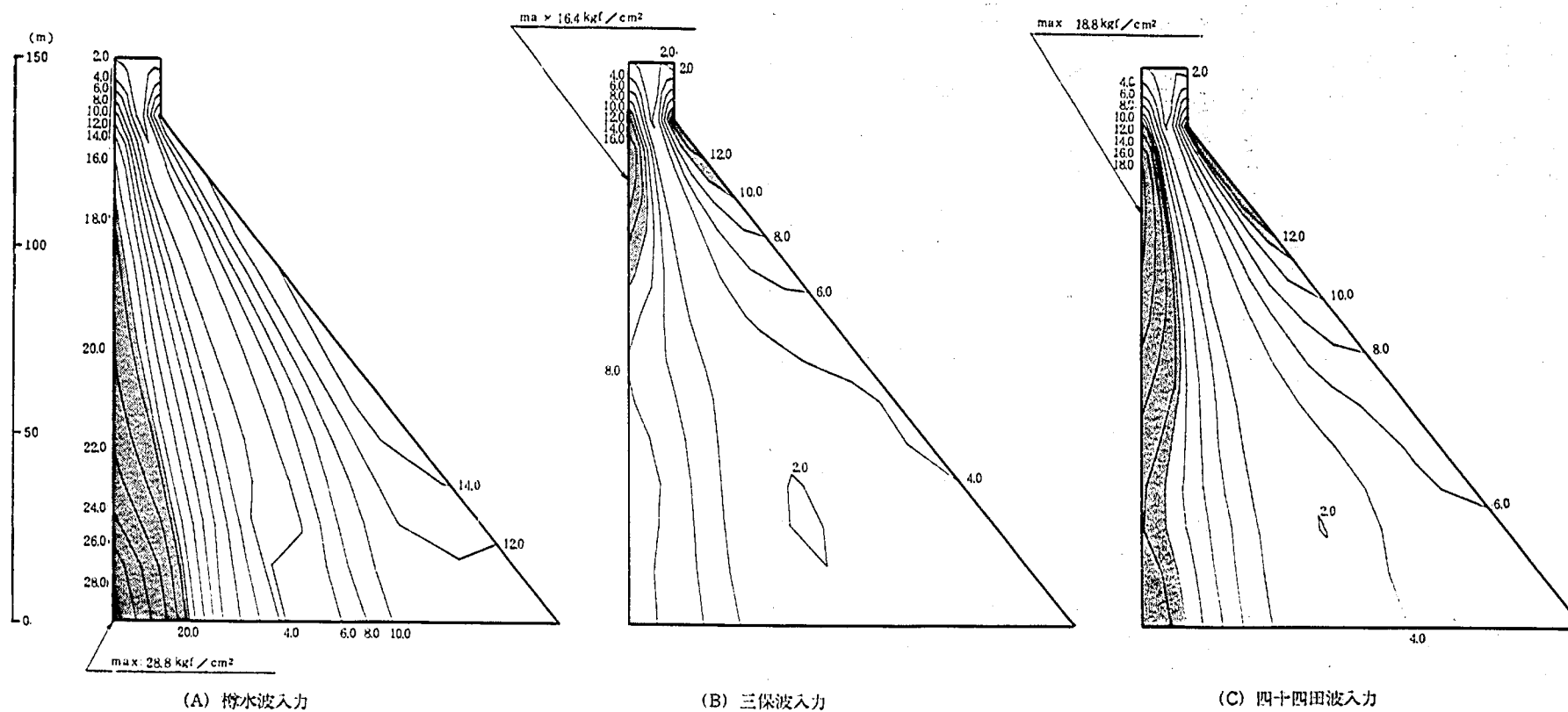


図 4. 10 (2) 時刻歴応答解析より得られた応力の最大応答 (σ_y 成分) (影の部分は最大値の 60% 以上)

と思われる次数の応力モードを参照すれば、動的応力集中部分の指摘が可能となる。

さて、最後に、応力モードを用いた応答スペクトルの理論による解析と時刻歴応答解析の優劣について比較してみる。まず、解析に用いる入力条件が正しいと仮定すれば、時刻歴応答解析は振動系に生じる最大応答を正しく計算できる。一方、応答スペクトル理論による解析は、地震動の応答スペクトルから統計的处理を施して得られた最大応答の期待値を算出するものであって、この値は与えられた地震動波形によって生じる最大応答とは一致しない。したがって、入力地震動波形が与えられた場合には時刻歴応答解析が適切であるといえる。しかし、第1章で述べたように、地震動は本来再現性のない振動であるから、特定の地震動に対して安全であれば設計上安全と見なせるものではない。むしろ、入力条件として用いられるのは、当該サイトの地震動特性を代表する設計応答スペクトル（またはパワースペクトル等）であり、そのような応答スペクトルを持つ任意の入力地震動に対する応答がより重要となる。その応答の最大値は、例えば応力については(4.11)式を参照して

$$|\sigma(t)|_{\max} = \sum_s |\sigma_s \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s)| \quad (5.1)$$

で与えられ、その値は地震動によってそれぞれ異なるが、その統計的な期待値は4.3.1節で示したように

$$|\sigma(t)|_{\max} = \sqrt{\sum_s \{ \sigma_s \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s) \}^2} \quad (4.13)$$

で表わされる。この値は統計的な期待値であるから、時刻歴応答解析の結果よりも普遍的な値を示していると考えられ、したがって応答スペクトル理論による解析手法は、時刻歴応答解析よりも、より優れた解析手法といえる。勿論、この結果得られる応力の最大応答は統計的な期待値であって、入力地震動によってはこれよりも大きな最大応答を生じることがあり、したがって、応力の最大応答と材料の動的強度の間には適当な安全率が見込まれる必要があることはいうまでもない。

5. ま と め

本研究によって得られた主な成果は次のとおりである。

- ① 変位，速度，加速度応答における基準振動モード，周波数応答関数と同様に，応力場においても，応力のモード，応力の周波数応答関数が得られた。
- ② 応力モードは，系の基準振動時におけるダム堤体内の応力分布形状を示しており，これによって地震時に応力が集中しやすい堤体部分の指摘が可能になった。
- ③ 応力の周波数応答関数は，系に調和振動が入力された時に発生する動的応力応答を示しており，これによって応力上検討すべき入力地震動の周波数特性の指摘が可能となった。
- ④ 応力モードと応答スペクトル理論を用いることにより，ダム堤体内に発生する動的応力の最大応答が得られることがわかった。これは，時刻歴応答解析結果ともよく一致し，また耐震設計上，時刻歴応答解析よりもより普遍的な値を示すものと考えられる。

以上のように，応力モード，応力の周波数応答関数等の応力場における振動系の周波数応答特性は，耐震設計上の問題点（着目すべき堤体部分，検討すべき入力地震動の周波数特性）を明確にできるほか，応答スペクトル理論を利用することにより，より普遍的な応力の最大応答値を算出することを可能とした。また，本手法はコンクリートダムの簡易的な動的解析法を展開する上で有力な手段となるものと思われる。

なお，このような考え方は，応力のみならず他の物理量の応答，たとえばモーメント，せん断力等々に対しても適用可能であることを付記しておく。これについては機を改めて報告するつもりである。

付 録

A 動的解析における力学的相似について

一般に、重力ダムは、その規模の大小はあっても、その断面形状は幾学的に概ね相似であるという特徴を有している。一方、堤体材料としてのコンクリートの材料特性もダムの規模によらず概ね一定である。

そこで、ここでは幾何学的に全く相似な断面形状を有し、しかも堤体材料の物性が互いに等しい重力ダムの動的応答特性について述べることにする。

ここで、動的応答を支配する運動方程式は本文第2章で述べたとおり

$$\begin{aligned} [M] \{ \ddot{\delta}(t) \} + [C] \{ \dot{\delta}(t) \} + [K] \{ \delta(t) \} \\ = - [M] \{ \ddot{x}_g(t) \} \end{aligned} \quad (A.1)$$

で表わされる。この場合、幾何学的に相似な2つの重力ダムの有限要素化の方法はこれも互いに相似性が保たれているものとする。

(1) 幾何学的相似

2つのダムをそれぞれ a , b と呼び、それぞれの大きさを代表的長さ L をとって表わすものとする。その幾何学的相似比 μ_{ab} は次式で表わされる。

$$\frac{L_a}{L_b} = \mu_{ab} \quad (A.2)$$

(2) 固有振動数

固有振動数は、本文(2.8)式にあるとおり、次式の解で与えられる。

$$\det (-\omega^2 [M] + [K]) = 0 \quad (A.3)$$

ここで質量マトリクス $[M]$ は、堤体材料の密度を ρ とすると、2次元問題では次の関係を有する。

$$\frac{[M]_a}{[M]_b} = \frac{L_a^2 \rho}{L_b^2 \rho} = \mu_{ab}^2 \quad (A.4)$$

ここに、上式のマトリクスの除算は

$$[M]_a = \mu_{ab}^2 [M]_b \quad (A.4)'$$

を意味する。一方、剛性マトリクス $[K]$ は次式で表わされる。

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (A.5)$$

ここに、 $[B]$ および $[D]$ はそれぞれひずみ変位変換マトリクス、弾性マトリクスである。ここで、弾性マトリクスは、堤体材料の物性(弾性係数、ポアソン比)が同一であるから次の関係を有する。

$$\frac{[D]_a}{[D]_b} = 1 \quad (A.6)$$

一方、ひずみ変位変換マトリクス $[B]$ は、空間微分の演算子マトリクスであることから、

$$\frac{[B]_a}{[B]_b} = \frac{L_b}{L_a} = \frac{1}{\mu_{ab}} \quad (A.7)$$

となる。また体積積分は、2次元問題では面積比となり

$$\frac{d(vol)_a}{d(vol)_b} = \frac{L_a^2}{L_b^2} = \mu_{ab}^2 \quad (A.8)$$

となる。したがって剛性マトリクス $[K]$ は (A.5) ~ (A.8) 式より、

$$\frac{[K]_a}{[K]_b} = 1 \quad (A.9)$$

で与えられる。

(A.3), (A.4), (A.9) 式より、固有振動数の相似比は、

$$\frac{\omega_{sa}}{\omega_{sb}} = \left(\frac{[K]_a}{[K]_b} \right)^{1/2} \left(\frac{[M]_b}{[M]_a} \right)^{1/2} = \frac{1}{\mu_{ab}} \quad (A.10)$$

となる。

(3) 基準振動モード

基準振動モードは、

$$\omega_s^2 [M] \{u_s\} = [K] \{u_s\} \quad (A.11)$$

の解で求められる。マトリクス $[M]$, $[K]$ は (A.4), (A.9) 式のように相似関係にあるから、基準振動モード $\{u_s\}$ も相似性を保つ。いま $\{u_s\}$ として正規化された基準振動モードを考えると

$$\{u_s\}^T [M] \{u_s\} = 1$$

であるから、(A.4) 式より、基準振動モードの相似比は

$$\frac{\{u_s\}_a}{\{u_s\}_b} = \left(\frac{[M]_b}{[M]_a} \right)^{1/2} = \frac{1}{\mu_{ab}} \quad (A.13)$$

となる。

(4) 周波数応答関数

変位の周波数応答関数は、本文 (2.23) 式で示されたとおり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_s(\omega) &= \frac{-\beta_{sx}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i h_s \omega_s \omega} \\ &= \frac{-\beta_{sx}}{\omega_s^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 + 2i h_s \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right) \right\}} \end{aligned} \quad (A.14)$$

ここに、 β_{sx} は刺激係数で、本文 (2.19) 式より

$$\beta_{sx} = \{u_s\}^T [M] \{i_x\} \quad (A.15)$$

である。したがって、(A.4), (A.13) 式より、刺激係数 β_{sx} に関する相似比は

$$\frac{\beta_{sxa}}{\beta_{sxb}} = \left(\frac{\{u_s\}_a}{\{u_s\}_b} \right) \left(\frac{[M]_a}{[M]_b} \right) = \mu_{ab} \quad (A.15)$$

となる。また、減衰定数 h_s の値はグムの規模にかかわらず同一とすると、

$$\frac{h_{sa}}{h_{sb}} = 1 \quad (A.16)$$

となり、(A.14) 式で表わされる周波数応答関数 $\bar{\psi}_s(\omega)$ に関する相似比は、(A.10), (A.14), (A.15) 式より

$$\frac{\bar{\psi}_s(\omega)_a}{\bar{\psi}_s(\omega)_b} = \frac{\beta_{sxa} \omega_{sb}^2}{\beta_{sxb} \omega_{sa}^2} = \mu_{ab}^3 \quad (\text{A.17})$$

となる。ただし、ここで ω/ω_s の値は 2 つのダム a, b で互いに等しい必要があり、したがって振動数のスケールを $1/\mu_{ab}$ 倍する必要がある。

(5) 応力モード，応力の周波数応答関数

応力モードおよび応力の周波数応答関数は本文 (2.35)，(2.38) 式で定義したようにそれぞれ、

$$\{ \sigma_s \} = [D] [B] \{ u_s \} \quad (\text{A.18})$$

$$\{ \bar{R}_{sx}(\omega) \} = \{ \sigma_s \} \bar{\psi}_{sx}(\omega) \quad (\text{A.19})$$

で与えられる。したがって、(A.6)，(A.7)，(A.13) 式および (A.17) 式よりそれぞれの相似比は次式で与えられる。

$$\frac{\{ \sigma_s \}_a}{\{ \sigma_s \}_b} = \left(\frac{[D]_a}{[D]_b} \right) \left(\frac{[B]_a}{[B]_b} \right) \left(\frac{\{ u_s \}_a}{\{ u_s \}_b} \right) = \frac{1}{\mu_{ab}^2} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\{ \bar{R}_{sx}(\omega) \}_a}{\{ \bar{R}_{sx}(\omega) \}_b} = \left(\frac{\{ \sigma_s \}_a}{\{ \sigma_s \}_b} \right) \left(\frac{\bar{\psi}_{sx}(\omega)_a}{\bar{\psi}_{sx}(\omega)_b} \right) = \mu_{ab} \quad (\text{A.21})$$

(6) 変位，応力の応答

変位，応力の最大応答は (4.12)，(4.13) 式を参照して

$$\{ \delta_s(t) \}_{max} = \{ u_s \} \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s) \quad (\text{A.22})$$

$$\{ \sigma_s(t) \}_{max} = \{ \sigma_s \} \beta_{sx} S_d(\omega_s, h_s) \quad (\text{A.23})$$

で与えられる。

ここに、 $\{ \delta_s(t) \}$ ， $\{ \sigma_s(t) \}$ は第 s 次の基準振動モードに関する変位，応力の応答である。

したがって、変位応答スペクトルの比を

$$\frac{S_d(\omega_{sb}, h_{sa})}{S_d(\omega_{sa}, h_{sb})} = \lambda_{ab} \quad (\text{A.24})$$

で定義するものとすれば、(A.13)，(A.15)，(A.20) 式より、変位，応力の最大応答の比はそれぞれ、

$$\frac{\{ \delta_s(t) \}_{max a}}{\{ \delta_s(t) \}_{max b}} = \left(\frac{\{ u_s \}_a}{\{ u_s \}_b} \right) \left(\frac{\beta_{sxa}}{\beta_{sxb}} \right) \left(\frac{S_d(\omega_{sa}, h_{sa})}{S_d(\omega_{sb}, h_{sb})} \right) = \lambda_{ab} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\{ \sigma_s(t) \}_{max a}}{\{ \sigma_s(t) \}_{max b}} = \left(\frac{\{ \sigma_s \}_a}{\{ \sigma_s \}_b} \right) \left(\frac{\beta_{sxa}}{\beta_{sxb}} \right) \left(\frac{S_d(\omega_{sa}, h_{sa})}{S_d(\omega_{sb}, h_{sb})} \right) = \frac{\lambda_{ab}}{\mu_{ab}}$$

となる。

したがって $\lambda_{ab} > \mu_{ab}$ ならば、 μ_{ab} の大きさの如何にかかわらず、ダム a の方が大きな応力が発生することになる。

B 動水圧と応力モード

本文においては、動水圧の効果を Westergaard の付加質量の概念を用いて表現し、応力のモード

を算出した。したがって応力モードの中には動水圧の効果が含まれ、この結果、応答スペクトル理論を用いて地震時にダム堤体内に生じる応力の最大応答を算出することができた。このように応答スペクトル理論を利用するためには動水圧の効果が応力モードの中に入入れられることが必要であり、これには動水圧が付加質量の形で振動方程式の中に組込まれる必要がある。

動水圧にはWestergaard によって求められた剛体動水圧,²⁾すなわちダム堤体の振動によって生じる動水圧と、ダム堤体の変形によって生じる変形動水圧があり、それぞれが付加質量として表現されなければならない。

本文では、剛体動水圧を表わすWestergaard の付加質量を考慮したが、ここではまずこの付加質量が振動方程式において演じる役割を考察する。振動方程式は本文(2.4)式で示すように、

$$[M] \{ \ddot{\delta}(t) \} + [C] \{ \dot{\delta}(t) \} + [K] \{ \delta(t) \} = - [M] \ddot{\phi}_x(t) \{ i_x \} \quad (B.1)$$

で表わされる。ここで質量マトリクス $[M]$ の中には、ダム堤体自重によるもの $[M]_D$ と Westergaard の付加質量によるもの $[M]_W$ が含まれているから、これを区別して表わすと、

$$([M]_D + [M]_W) \{ \ddot{\delta}(t) \} + [C] \{ \dot{\delta}(t) \} + [K] \{ \delta(t) \} \\ = - ([M]_D + [M]_W) \ddot{\phi}(t) \{ i_x \}$$

または

$$[M]_D \{ \ddot{\delta}(t) \} + [C] \{ \dot{\delta}(t) \} + [K] \{ \delta(t) \} \\ = - [M]_D \ddot{\phi}(t) \{ i_x \} - [M]_W \ddot{\phi}(t) \{ i_x \} - [M]_W \{ \ddot{\delta}(t) \} \quad (B.2)$$

となる。ここで(B.2)式を検討してみると、その右辺第一項は地震動によって入力されるダム堤体の慣性力、第二項はWestergaard の付加質量によって表わされる剛体動水圧である。そして第三項はダム堤体の変形によって生じる動水圧、すなわち変形動水圧を表わしている。したがって、元来剛体動水圧として導入されたはずのWestergaard の付加質量の概念が、振動方程式(B.1)上では、変形動水圧まで考慮した形になっている。付加質量 $[M]_W$ の値が剛体動水圧と変形動水圧とで同じ値をとるかどうかはここまでの議論では明らかではないが、少なくともWestergaard の付加質量を用いて、剛体動水圧だけでなく、変形動水圧の影響も考慮できることがわかった。

次に変形動水圧を正しく評価するため、貯水池の振動方程式を考えてみる。振動方程式は一般に次の波動方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (B.3)$$

ここに、 p は貯水池各点の水圧であり、 C は水中における音速である。またダム堤体の振動による入力条件は次式で表わされる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{r}{g} (\ddot{\phi}_n(t) + \ddot{\delta}_n(x, y, z, t)) \quad (B.4)$$

ここに、 n は貯水池からみたダム堤体上流面における境界面の外向き法線方向であり、 r は水の単位体積重量、 g は重力加速度、 $\ddot{\phi}_n(t)$ 、 $\ddot{\delta}_n(x, y, z, t)$ は $\ddot{\phi}(t)$ 、 $\ddot{\delta}(x, y, z, t)$ の n 方向成分である。

(B.3)、(B.5)式を有限要素法を用いて定式化すると次のようになる。⁵⁾ただし、貯水池系とダム堤体系との接触面において、両者の節点位置は互いに等しいとする。

$$[H] \{ p(t) \} + [G] \{ \dot{p}(t) \} = [A] (\ddot{\phi}(t) \{ i \} + \{ \ddot{\delta}(t) \}) \quad (B.5)$$

ここに、 $\{N\}^T$ を形状関数として、

$$p(x, y, z, t) = \{N\}^T \{p(t)\} \quad (B.6)$$

と表わすものとする、

$$\{H\} = \iiint_V \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (B.7)$$

$$\{G\} = \frac{1}{C^2} \iiint_V \{N\} \{N\}^T dx dy dz \quad (B.8)$$

$$\{A\} = \frac{r}{g} \iint_S \{N\} \{N\}^T dS \quad (B.9)$$

である。

いま貯水の非圧縮性を仮定すると $\{G\} = 0$ となるから

$$\{H\} \{p(t)\} = \{A\} (\ddot{\phi}(t)\{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\})$$

したがって

$$\{p(t)\} = \{H\}^{-1} \{A\} (\ddot{\phi}(t)\{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\}) \quad (B.10)$$

を得る。ここで、ダム堤体に作用する $\{p(t)\}$ と等価な節点力 $\{f(t)\}$ は、形状関数を用いて、

$$\{f(t)\} = \iint_S \{N\} \{N\}^T \{p(t)\} dS \quad (B.11)$$

で表わされるから

$$\begin{aligned} \{f(t)\} &= \iint_S \{N\} \{N\}^T dS \{H\}^{-1} \{A\} (\ddot{\phi}(t)\{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\}) \\ &= \frac{g}{r} \{A\} \{H\}^{-1} \{A\} (\ddot{\phi}(t)\{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\}) \end{aligned} \quad (B.12)$$

を得る。すなわち、動水圧の大きさは加速度 $\ddot{\phi}(t)\{i\}$, $\{\ddot{\delta}(t)\}$ に比例することになり、付加質量の概念が適用できることがわかった。すなわち、付加質量の大きさは、

$$\{M\}_w = \frac{g}{r} \{A\} \{H\}^{-1} \{A\} \quad (B.13)$$

で与えられる。ここで、(B.12) 式の積分はダム堤体と貯水池の接触面で行われるから、 $\{M\}_w$ はダム上流面の節点に関する成分のみが非ゼロとなるマトリクスである。たとえば、ダム上流面の節点数が n であれば、 $\{M\}_w$ は実質的に $n \times n$ 次マトリクスとなる。また (B.13) 式より、

$$\{f(t)\} = \{M\}_w \ddot{\phi}(t)\{i\} + \{M\}_w \{\ddot{\delta}(t)\} \quad (B.14)$$

であるから、剛体動水圧による付加質量と変形動水圧による付加質量は同じ形をとることがわかった。ただし、 $\{M\}_w$ は対角マトリクスではないから、ダム堤体上流面の節点における加速度の影響は互いに連成し合うことになり、Westergaard の付加質量のようにスカラー量としては取扱えないことに注意が必要である。

次に、貯水の圧縮性を考慮した場合を考える。いま簡易のため、入力地震動の加速度 $\ddot{\phi}(t)$ が調和振動である場合を考える。この場合、堤体の相対変位 $\{\delta(t)\}$ 、動水圧 $\{p(t)\}$ も同様に調和振動を行うと考えられるから、

$$\{p(t)\} = \{p\} e^{i\omega t} \quad (B.15)$$

と表わされる。したがって (B.15) 式を (B.6) 式に代入すれば、

$$\{H\} \{p(t)\} - \omega^2 \{G\} \{p(t)\} = \{A\} (\ddot{\phi}(t)\{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\})$$

または,

$$\{p(t)\} = ([H] - \omega^2 [G])^{-1} [A] (\ddot{\phi}(t) \{i\} + \{\ddot{\delta}(t)\}) \quad (B.16)$$

となる。ここで、付加質量を表わす部分

$$[M]_w = ([H] - \omega^2 [G])^{-1} [A] \quad (B.17)$$

は入力加速度の振動数 ω に依存することになるから、付加質量の概念は適用できないことになる。

参 考 文 献

- 1) P. Chakrabarti & A. K. Chopra : A Computer Program for Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Hydrodynamic Interaction, E. E. R. C. Report No 73 - 7, 1973
- 2) H. M. Westergaard : Water Pressures on Dams During Earthquakes, Trans. of ASCE, vol. 98, 1933
- 3) 松本, 近藤, 片平, 志賀 : ダムサイト岩盤における地震動, 土木研究所資料, No 1789, 1982
- 4) 小平清真 : 土木振動学, 森北出版, 1973
- 5) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw - Hill, 1971

応力の周波数応答特性を用いた
コンクリートダムの動的解析
手法に関する考察

ISSN 0386-5878
土木研究所資料第2287号
昭和60年12月(1985)
ダム構造研究室 藤沢侃彦
永山 功
白閑茂治

要 旨 本報告は、コンクリートダムの耐震設計における応力の動的応答の重要性に着目し、応力のモード、応力の周波数応答関数等の応力の周波数応答特性の概念を開発したものである。また、これに応答スペクトル理論を導入し、与えられた地震動のスペクトルに対して、最大応力応答を推定できることを示したものである。

キーワード：コンクリートダム、耐震設計、振動形解析法、応力のモード、応力の周波数応答関数、応答スペクトル。

郵便はがき

いは40
円切
手
を
さ

3 0 5 - □ □

建設省土木研究所
ダム構造研究室 行

茨城県筑波郡豊里町大字旭一

No. _____

No. _____

配布先氏名

配布先住所



土木研究所資料第2287号 部
応力の周波数応答特性を用いた
コンクリートダムの動的解析手
法に関する考察

上記のとおり受領しました。

所 属（住所）

氏 名

印