

ISSN 0386—5878

土木研究所資料第2957号

土 木 研 究 所 資 料

有限要素法による 平面河床変動計算法の検討

平成 3 年 3 月

建設省土木研究所
河川部河川研究室

「Copyright © (1991) by P. W. R. I.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the Director General of P. W. R. I.

この報告書は、土木研究所長の承認を得て刊行したものである。したがって、本報告書の全部又は一部の転載、複製は、土木研究所長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。」

有限要素法による 平面河床変動計算法の検討

河川研究室 室 長 山 本 晃 一
研 究 員 渡 辺 明 英
部外研究員 山 本 信 二

要 旨

本研究では、有限要素法を用いた流れと平面河床変動の計算モデルを作成し、その適用性について検討した。本モデルは、従来の方法では不安定であった有限要素法による流れの計算方法を、風上化などの簡単な処理をすることによって、解の安定性を高めたものであり、河床変動計算はxy座標系で行われるという特徴を持つ。本文ではモデルの考え方と安定性、精度について検討した結果について述べている。

キーワード：有限要素法，平面河床変動計算，風上化，ランピング化

河道計画を行う場合には、流下能力の確保だけでなく、河床の変動、計画河道の維持の容易さや施設の安全性について検討する必要がある、多くの場合は現場の経験や簡単な解析などにより行われ、特に重要な問題については、模型実験などが行われたきた。現在では、平面流計算を行い、水衝部の算定などを行う例も見られるようになっているが、洪水時の河床変動状況が正確に与えられなければ、十分な検討はできない。平面河床変動計算は、流体と流砂の運動を数値計算を行うことにより求めて、模型実験と同様に洪水時の河床変動及び水衝部の状況などを把握する手法であり、最近種々の検討に対して用いられつつある。これにより、模型実験によらずに計画河道の問題点を把握でき、模型実験に要する労力や検討項目を減ずることができる。

なお、流体の計算においては差分法が用いられることが多い。これは、差分法の方が直感的に理解し易く、プログラミングが用意であること、高次微分を容易に表現できる、流体計算に対して実績があり種々の技法が開発されている、などの理由によると思われる。一般的には、差分法は Taylor 展開に基づき、有限要素法は重み付残差法にもとづいて離散化されるものであるとされている。実際には、本研究で示したように有限要素法の各項についてランピングを行えば、離散化を 2 次精度にとどめる限り、離散化された両者の式系はよく似た形となる。ただし、有限要素法の場合には要素の重ね合わせ時に、周囲の情報も取込むため、計算量は差分法に比べて数倍多くなる。しかし、この意味からすれば有限要素法の方が離散化手法としては優れている。また、一度プログラムが完成すれば、有限要素法の方が解法としては一般性があり、使いやすい。本研究でも、研究の初期段階からこの観点から、有限要素法を用いた流れの計算法の開発を行ってきた。しかしながら、周知のように有限要素法を用いた流れの計算は、特に自由水面と開境界を伴う場合には不安定になることが多い。この不安定性を取り除く手法として、既に種々の方法が開発されているが、簡便さ、精度といった観点からは未だ十分ではない。本文では、物理的に意味のない人工粘性を極力排除し、かつ簡便で安定な有限要素法の計算方法について検討している。

また、流砂の運動に関する研究が、流下方向に対する流砂量や横断斜面の影響と言った型式で行われているので、有限要素法や直交系 (C.G.S.) の差分で平面河床変動計算について行われた例もあまり見ない。本モデルでは、 x y 座標系で流砂の運動方向を表し、有限要素法にこれを取り込んでいる。また、河床変動計算を行うためには平均流向だけではなく、河床材料の移動に直接関与する河床付近の流速、流向を定める必要がある。これを正確に求めるには、3 次元計算を行う必要があるが、これには労力を要する。本研究では、流れの曲率を求めて二次流を計算する、もしくは、鉛直分布を考慮した計算を行うことにより、 xy 座標系で表記されたものでも、平面河床変動計算を可能とした。したがって、既に個々に開発されている二次元流れの計算モデルを改造すれば、従前のストックとノウハウを活かして平面河床変動計算を行えるようになる。ただし、今後のことを考えるならば局所座標系による方法に変えた方がよい。

本文では、流れと河床変動の基礎方程式及び離散化の考え方、その方法並びに離散化に当たって注意しなければならない事項を中心に述べており、検証計算を通じて分かったこと、気づいたことなども極力述べた。

本資料は、未だ十分なものではないが、有限要素法の諸問題の検討を通じて分かったことが多く、なる

べく早い機会に取りまとめた方が良いと思われた。これらの情報が同様の問題を抱えている方々の参考になれば幸いである。

なお、本文においては、特になじみのないものを除いて、数値計算上の概念、用語、表記法を用いて記述してある。これらのことを知らない人には分かりにくいので、有限要素法や座標変換、総和規約などについては、それぞれの教科書や基本的な文献を最後に挙げてあるので、あらかじめそちらの方を参照されたい。

目 次

まえがき

1 章 研究の目的	1
2 章 有限要素法の問題点とその改良	2
2.1 本研究で考えたこと	2
2.2 有限要素法と差分法の違い	3
2.3 従来の安定化手法とその問題点	9
2.3.1 近年の動向	10
2.3.2 有限要素法による移流方程式の不安定性と人工粘性	10
(1) 基礎式の不安定性	10
(2) 安定化に用いられる人工粘性の種類とオーダーについて	12
(3) 二段階陽解法と Lax-Wendroff 法	12
2.4 空間不安定の解消法	13
2.4.1 時間積分過程に依存する方法	13
(1) explicit な方法	13
(2) implicit な方法	14
2.4.2 空間の離散化に依存する方法	15
(1) 空間平滑化の必要性	15
(2) 風上差分と連続式の安定性	15
2.4.3 まとめ	19
2.5 要素分割依存性について	20
2.6 まとめ	23
3 章 基礎方程式及び離散化式	24
3.1 基礎方程式	24
3.1.1 流れの基礎式	24
3.1.2 水位の基礎式	26
3.1.3 河床変動の基礎式	27
(1) 流砂の連続式	27
(2) 斜面上の掃流砂量ベクトル	27
(3) 河床流速	33
(4) 非平衡性を考慮した場合	34

3.2	基礎方程式の離散化	36
3.2.1	運動方程式の離散化	36
3.2.2	連続式の離散化	41
3.2.3	河床変動式の離散化	41
3.2.4	要素の重ね合わせ	43
3.3	時間積分過程	43
3.4	計算の全体フロー	43
4 章	検証計算	45
4.1	簡易モデルの検証	45
4.1.1	弯曲水路実験との比較	45
	(1) 安定性の検討	45
	(2) 計算結果—河床高の縦断変化	46
	(3) 計算結果—流速の平面分布	47
4.1.2	砂州の計算	47
	(1) 計算結果—河床高の縦断変化	47
	(2) 計算結果—流速の平面分布	48
	(3) まとめ	48
4.1.3	簡易モデルのまとめ	48
4.2	多自由度型モデルの検証	49
4.2.1	流れの計算の検証	49
	(1) 計算の概要	49
	(2) 計算結果	49
	(3) まとめ	50
4.2.2	河床変動計算の検証	50
5 章	結論	97
	あとがき	98
	参考文献	100

1 章 研究の目的

平面河床変動計算は、洪水時の平面河床変動や水衝部の流況、すなわち、局所洗掘深の予測や河岸近傍の最大流速や偏流の状況を把握し、河道計画を検討するために用いられる。したがって、その精度や適用性、並びに精度よい計算を行うためのノウハウなどについて十分検討する必要がある。しかしながら、数値計算の場合には、安定な計算を行い、かつある程度信頼に足る解を得ることがまず第一の課題となる。

数値計算を行う微分方程式が安定な場合、線形計算などの場合には必要なことに注意すれば特に問題はないが、元々不安定な方程式を安定にするためには、数値計算上で生じる余分な乱れのエネルギーを消すものが必要であって、時空間を離散化する場合には、何等かの人工粘性を導入しなければ、安定な解を得難い。

有限要素法で最も単純な人工粘性としては、川原¹²⁾が2段階陽的解法の中で用いているランピングパラメータに基づく人工粘性があり、これは非常に大きな拡散性を持つ。したがって、緩やかな平面的な流れや一様流に近い流れを対象にする場合はよいが、河道流のように幅が狭い範囲での横断的な変化が重要である場合には、流れが必要以上に一様化されすぎるので問題がある。このため、この方法を用いて実際の河道の流れについて計算されることは少ない。また、近年その他の方法で合理的な安定化を図る手法について検討されているが、有限要素法であるために煩雑なものが多く、特に境界条件の処理などの計算が難しい。

一方、差分法に関しては、最近、清水^{3)~9)}が河道の流れに適した計算法を開発している。この計算法は、離散化方程式を解くアルゴリズムが非常に合理的で、流下方向に要素を長く取れ、アスペクト比を大きくして計算量を減らせる点が優れている。この計算法は、流れと流れの不安定の処理については風上差分で処理している。また、水位と流れの不安定には、第一に繰返し計算過程での次の流速の値を考慮し、それを前ステップの流速の値と水位の勾配で表すことによって、水位の方程式を拡散型にし、さらにADI的手法⁷⁾により収束を速めている。第二に、先の方法だけでは拡散が等方的であり、アスペクト比が大きく取れないので、準二次元的な一次元水位計算手法を用いて、横断平均水位を補正して、縦断的な水位の不安定性を取除いている。ただし、河口部など流れが1次元的に扱えないような区間を含む場合には、この方法は使えず、アスペクト比は大きく取れない。

このように、計算の安定性では差分法の方が流体の計算に関しては、一日の長がある。そこで本研究では、まず有限要素法の離散化の手法・手順はそのまま、定式化の部分を変更し、得られる離散化式系が差分法に近くなるようにし、差分法で用いている安定化の手法を取り入れることを考えた。本研究での目的は以下の3点である。

- 1) 離散化した式系が、差分型と近くなり、かつ安定で精度良い流れの計算法を開発する。
- 2) 従来の二次元流れの計算法を用いて、簡単に河床変動計算を行う方法について検討する。
- 3) 河床変動計算法の検証を行い、計算法の精度と問題点について検討する。

2章 有限要素法の問題点とその改良

2.1 本研究で考えたこと

有限要素法は、周囲の情報が取り込めるために精度が良いとされるものの、流れの計算については計算が不安定になるために不利とされている。したがって、有限要素法で計算する場合には、計算の不安定性や解の振動を取り除くことが重要な問題となる。自由水面を持つ流れの計算に関して、差分法と比べた場合の有限要素法による不安定性の原因は、

- ①離散化式の非風上化（差分法ではほとんどの場合風上化されている。ただし、流束分離を含む）^{8)~11)}
- ②水位計算の非拡散化（流体計算では、圧力をポアッソン型にして解くのが主流である。）^{12)~18)}
- ③周囲の情報の過多

また、三角要素分割では

- ④要素分割方法に依存する解の分散性

等と考えられる。

そこで、まず有限要素法の手順によって離散化した式形を、流れの風上化、水位の拡散化、情報の集中化、分割非依存性を持つ形に変形する種々の手法について、その有効性を検討した。ここでは、まず差分と有限要素法の違い、不安定性の除去方法、要素分割依存性の問題等に関して述べる。

なお、本研究では、上記の③については“有限要素方程式のランピング”という方法を用いて情報の集約化を行っている。すなわち、重み ϕ_n に対し、

$$u_m \phi_m \phi_n = u_n \phi_n$$

と見なして計算している。ただし、時間項は既にランピングされており、拡散項と水面勾配項などの部分では元々このような項は現れない。したがって、浅水流方程式を対象とした場合には非線形項と抵抗項の部分のみ変更される。すなわち、

$$\int \frac{fu}{2h} u_m \phi_m \phi_n dA \cong \int \frac{fu}{2h} u_n \phi_n dA \quad (fu/2 \text{ は要素の平均値, } n \text{ は重みの節点}) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \int u_m \phi_m \phi_n \frac{\partial u_l \phi_l}{\partial x} dA &= \int \frac{\partial}{\partial x} (u_m \phi_m \phi_n u_l \phi_l) dA - \int u_l \phi_l \frac{\partial u_m \phi_m \phi_n}{\partial x} dA \\ &\cong \int \frac{\partial}{\partial x} (u_n \phi_n u_l \phi_l) dA - \int u_l \phi_l \frac{\partial u_n \phi_n}{\partial x} dA \end{aligned} \quad (2.2)$$

f : 抵抗係数, h : 水深, u : 流速, ϕ : 補間関数

とする。詳しくは2.3で説明するが、周知の様に $\phi_m \phi_n$ は無指向性の拡散を生み出す。すなわち、このようにランピングしない場合には、浅水流方程式の抵抗項から

$$-\frac{fu \Delta x^2}{2h \cdot 6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

という負の拡散項が付加されていることになる。(注: 純三次元計算では生じない) これは、 Δx が水深の数倍あれば拡散係数が $\varepsilon = \alpha u_* h / 6$ で与えられる拡散項よりも大きくなる。また、同様に移流項から

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

という拡散項が生み出される。これは、 $\partial u / \partial x$ によって正負が変化し、かつ十分大きい値を持つ。また、この拡散は、運動量移送で考えても物理的に無意味であり、これは明らかに離散化に伴って生成されるものである。仮に移流項の移送させる流速の部分を平滑化させるのであれば、それは時間的空間的に上流側のものを平滑化したものでなければならず、これには必要以上に下流側の情報が入ってはならない。また、空間に対して1次で表されるものが、非線形項のみ二次で表されることに問題があるとして、流速の補間関数を二次にすることが考えられるが、計算が煩雑になる。これによって、多少は安定性が向上しているようである^{19)~21)}。しかし、実際には1つの点に関係する点が増え、節点位置の関係で離散化スキームがスタガードフォームになる効果の方が大きいように思われる。また、これによって、余分な拡散項が消えるわけではない。

したがって、物理的に意味がないと思われるこれらの人工的な粘性を消去し、安定性を向上させるために方程式をランピングすることにした。なお、これらの処理を行い、分割依存性が生じないように工夫すると次節で示すように、有限要素法で計算されるスキームは、差分で表されるものと大きな違いはなくなる。

また、要素分割の依存性は4角形要素ではそれほど問題にならない。そこで④については、4角形分割した後に、2本の対角線で表される2種類の3角形分割を考え、これを重ね合わせることで依存性を取り除くこととした。

2.2 有限要素法と差分法の違い

一般に有限要素法は任意の境界形状及び境界条件を容易に取入れることができ、差分法では格子分割が任意に行えないので、複雑な形状の領域について計算する場合には、有限要素法の方が有利であるといわれる。しかし、Boundary Fitted Grid Systemの概念²²⁾²³⁾の導入によって、差分法のこの欠点は既になくなっている。また、有限要素法(FEM)は差分法(FDM)と比べ必要メモリー数と計算速度の点で不利とされていることが多い。ここでは、まずこの2点について検証する。次に、FEMとFDMでの計算式の違いを検討する。最後に、FDMとFEMの違いについてまとめて述べる。ただし、FDMはBFGSのものについて比較を行う。

1) メモリー数について

ここではそれぞれの計算において、必要とされるメモリー数について考える。ただ、計算途中で便宜的に用い、一時的に作成するものは除く。すなわち、計量テンソル及び座標変換係数相当のものに限って述べる。差分法(BFGS)の場合は主に

$$x_{i,j}, x_{i,j,k} \quad (i, j, k; \text{空間次数})$$

を予じめ作成する必要がある。有限要素法では

$$\phi_{n,j} \quad (n: \text{要素内節点数}, \phi_i: \text{要素} i \text{の補間関数}, j: \text{次元数})$$

を予じめ作成する必要がある。したがって、必要なメモリーは

$$\text{FDM} \quad (D_N^2 + D_N^3) \times \text{節点数} \quad (D_N: \text{次元数})$$

$$\text{FEM} \quad D_N \times \text{要素内節点数} \times \text{要素数}$$

ここで、要素内節点数 ι は空間字数と要素形状の関数であって $\iota = 3 \sim 4$ ($D_N = 2$), $\iota = 8 \sim 20$ ($D_N = 3$) また、要素数は形状と節点数の関数である。

例えば、2次元 11×41 のノードを三角形で分割したとすると

$$\frac{FEM}{FDM} = \frac{2 \times 3 \times \{(11-1) \times (41-1) \times 2\}}{(4+8) \times (11 \times 41)} = \frac{4800}{5412}$$

となり、これだけでは FEM の方が少ない。ただし、有限要素法の場合にはこの他にリストベクトルが必要であり、また、各節点の変数を一時的に要素値に持って来ることが多いので、実際には有限要素法の方が多くなる。しかし、極めて数量が多くなることはない。むしろ、あらかじめ高次の係数行列を作成しない分、この例のように数は少なく済み、その代わりに計算量が増える。

2) 計算量について

差分法では通常、式または項 1 個につき、1 節点に対して 1 スキームを 1 回計算する。これに対して有限要素法では、通常 1 節点につき 1 スキーム $\times$ 接触要素数回計算する。(例えば 2 次元三角形では平均で 6 回) したがって、有限要素法の方が計算回数は多い。なお、1 スキームの内の計算量との関係で実際の計算量は 3 $\sim$ 4 倍になる。ただし、計算量については、1 要素内の計算について書き下してベクトライズをかければそれほど問題はない。しかしながら、要素数/節点数の値と、基本的な計算量の違いによる影響はあるものと考えられ、それでも数倍程度は遅くなるものと考えられる。

ここで、通常というのは主に有限要素法による流体計算で現在行っているアルゴリズムの計算する場合のことをいう。現在の計算は陽解法で行われることが多く、実際には大規模係数マトリクス行列を作成してから計算するという事は少ない。すなわち、近節点同士のメモリー交換しかないで、実際には使用しない配列 0 要素は作成せずに、始めから差分法及び有限要素法でそれぞれの定式化過程に対応したスキームを用いて計算を行っている。言換えれば、FDM, FEM にかかわらず、あるノードとそれに関わるノードとの情報の交換のみが問題であり、あらかじめ計算しリストベクトを用いて $\sum C(i, j) X(j)$, ($j = L(i, k)$) の形にすることができる。これを行わないのは非線形のため、 $C(i, j)$ を毎回求め直す必要があるからである。すなわち、本来ならば計算量に大きな違いはなく、計算プログラムのアルゴリズム及びこれを形成するスキームが離散化過程の手法に引きづられているために、このような差異が生じる。

3) 計算式について

先の検討によって、有限要素法の方がプログラム (アルゴリズム) 上の問題で、計算量が多少増えることがわかった。また、メモリー数をについては一時メモリーを除けば大きな違いはない。ここでは、実際に解かれる式にはどのような差があるか検討する。流れの方程式は一般に以下のように表される。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \quad (2.5)$$

例えば

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} u^2 + p/\rho \\ uv \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} uv \\ v^2 + p/\rho \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \tau_{xx}/\rho \\ \tau_{yx}/\rho \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} \tau_{xy}/\rho \\ \tau_{yy}/\rho \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

である。ここで、任意の曲線座標系 (ξ, η) に対する座標変換を考えると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

であるから、特異点以外では

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

となる。したがって、元の方程式は

$$\begin{aligned} J \frac{\partial q}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] E + \left[\left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] F \\ = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] R + \left[\left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] S \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここで、2次精度の差分近似を行うとすれば、それぞれ各係数は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

$$J = \frac{S}{4} = \frac{1}{4} \left[(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{j+1} - y_{j-1}) - (y_{i+1} - y_{i-1})(x_{j+1} - x_{j-1}) \right]$$

①有限要素法による離散化

まず、先の方程式を有限要素法で定式化して、1節点に対して、実際に行なわれるスキームを書き下す。ただし、要素分割及び節点の定義は図-2.1のように行い、補間関数には3角形要素の形状関数(図-2.2)を用いるものとし、要素分割依存性が生じないように破線と1点鎖線の2種類の要素に関して重ね合わせる。基礎式は

$$\int \frac{\partial q_m \phi_m}{\partial t} \phi_n dA + \int \frac{\partial E_m \phi_m}{\partial x} \phi_n dA + \int \frac{\partial F_m \phi_m}{\partial y} \phi_n dA = \int \frac{\partial R}{\partial x} \phi_n dA + \int \frac{\partial S}{\partial y} \phi_n dA \quad (2.10)$$

である。また、各項について計算し、ランピングを行うと

$$\int \frac{\partial q_m \phi_m}{\partial t} \phi_n dA \rightarrow \int \frac{\partial q_n}{\partial t} \phi_n dA = \frac{\partial q_n}{\partial t} \frac{A_n}{3} \quad (2.11)$$

$$\int \frac{\partial E_m \phi_m}{\partial x} \phi_n dA \rightarrow \int \frac{\partial E_m \phi_m}{\partial x} \phi_n dA = \frac{\partial E_m \phi_m}{\partial x} \frac{A_n}{3} \quad (2.12)$$

$$\int \frac{\partial R}{\partial x} \phi_n dA \rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x} (R \phi_n) dA - \int R \frac{\partial \phi_n}{\partial x} dA = \int R \phi_n dy - \int R \frac{\partial \phi_n}{\partial x} dA \quad (2.13)$$

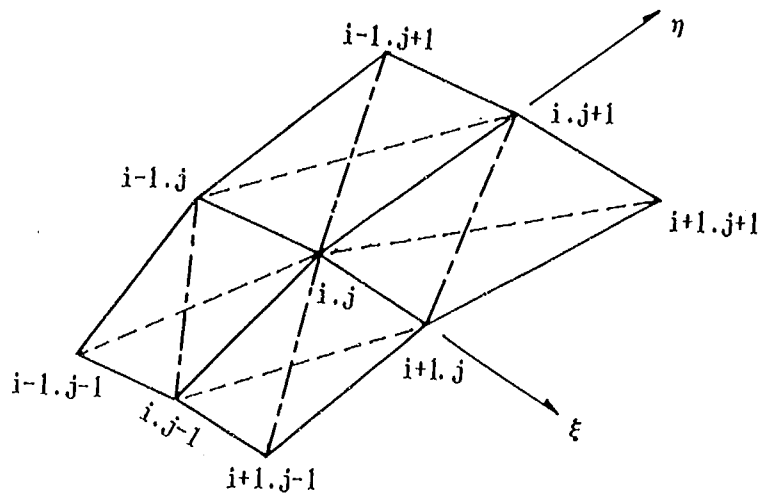


図-2.1 要素の分割と節点番号

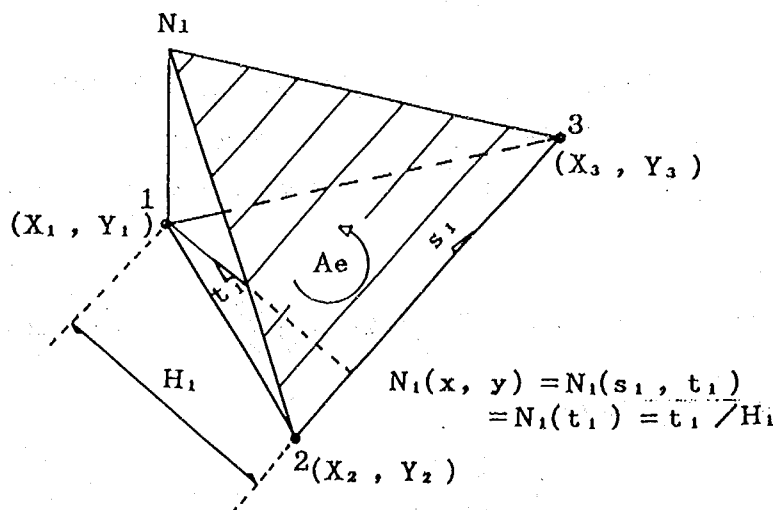


図-2.2 要素内の補間関数 N_1

となる。したがって、それぞれ

$$\frac{\partial q}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial q_0}{\partial t} \left(\frac{A_{11}}{3} + \frac{A_{12}}{3} + \frac{A_{13}}{3} \right) \quad (A: \text{各三角形の面積}) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} \rightarrow & - \left[\frac{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}}{2A_{11}} E_{i,j} + \frac{y_{i,j} - y_{i,j+1}}{2A_{11}} E_{i+1,j} + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2A_{11}} E_{i,j+1} \right] \frac{A_{11}}{3} \\ & - \left[\frac{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}}{2A_{12}} E_{i,j} + \frac{y_{i,j} - y_{i,j+1}}{2A_{12}} E_{i+1,j} + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2A_{12}} E_{i,j+1} \right] \frac{A_{12}}{3} \\ & - \left[\frac{y_{i,j+1} - y_{i+1,j}}{2A_{13}} E_{i,j} + \frac{y_{i,j} - y_{i,j+1}}{2A_{13}} E_{i+1,j} + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2A_{13}} E_{i,j+1} \right] \frac{A_{13}}{3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。ここで、

$$\frac{A_{11}}{3} + \frac{A_{12}}{3} + \frac{A_{13}}{3} = \frac{S_{i+1/2, j+1/2}}{2} \quad (S_{i+1/2, j+1/2} \text{ は右上四角形の面積})$$

とき、各係数について中心ノードを通る2線分を ξ, η 軸として先に述べた座標変換を導入すると

$$\frac{\partial q}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial q_0}{\partial t} \frac{S_{i+1/2, j+1/2}}{2} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} \rightarrow & -\frac{1}{6} \left\{ - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j+1} E_{i,j} - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} E_{i+1, j+1} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j+1} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right] E_{i, j+1} \right. \\ & + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} E_{i,j} - \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} \right] E_{i+1, j} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} E_{i+1, j+1} \\ & \left. + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] E_{i,j} - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} E_{i+1, j} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} E_{i, j+1} \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} \rightarrow & -\frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j+1} - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

である。これをさらに周囲の4つの四角形要素について重ね合わせると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} = & - \left\{ \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j+1} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} \right. \\ & + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j+1} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i-1, j+1/2} \\ & + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j-1} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i+1, j-1/2} \\ & \left. + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j-1} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)_{i-1, j-1/2} \right\} / 6 \\ & + \left\{ \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i+1, j+1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j+1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i+1, j-1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i+1/2, j-1} \\
& + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i-1, j+1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j+1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j+1} \\
& + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i-1, j-1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{i, j-1/2} \right] \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)_{i-1/2, j-1} \} / 6 \\
& = -2 \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right\} \\
& + 2 \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。また、 $\partial q / \partial t$ について

$$\frac{\partial q}{\partial t} [S_{i+1/2, j+1/2} + S_{i-1/2, j+1/2} + S_{i+1/2, j-1/2} + S_{i-1/2, j-1/2}] / 2 \tag{2.20}$$

である。

②差分法による離散化

次に差分法について、周辺の情報を取り入れる場合の式を書表す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial x} &= \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \\
&= \frac{1}{4 \Delta \xi \Delta \eta} \int_{-\Delta \xi}^{\Delta \xi} \int_{-\Delta \eta}^{\Delta \eta} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \xi' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \eta' + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\eta'^2}{2} \right] \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \eta' + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \xi' + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\xi'^2}{2} \right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \eta' + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \xi' + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\xi'^2}{2} \right] \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \xi' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \eta' + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\eta'^2}{2} \right] d\xi' d\eta' \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \xi^2}{6} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \xi^2}{3} \\
&\quad + \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\Delta \eta^2}{6} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \frac{\Delta \eta^2}{3} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \xi^2 \Delta \eta^2}{36} \\
&\quad - \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \xi^2}{6} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \xi^2}{3} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\Delta \eta^2}{6} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \frac{\Delta \eta^2}{3} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{\Delta \xi^2 \Delta \eta^2}{36} \right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで、 $\Delta\xi, \Delta\eta=1/2$ として、先の①の場合と比較すると、有限要素法の場合は周囲の情報が2～4倍多く入っていることになる。また、通常差分法では、要素内平均値を二次精度で表し、かつ $\Delta\xi, \Delta\eta=0$ として情報を集約化して計算することが多い。

③離散化式の違い

①②の計算式の比較から、要素分割が構造的で差分に変換表示できる場合においては、計算式自体に大きな違いはなく、周辺情報の重み配分が異なっているのみである。 $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ で重み付けされている)ここでは示していないが拡散項についても部分積分を行えば、最終的には差分とほぼ同様な形式で表される。このように有限要素法は1節点に対し、周辺の情報が入って来る分だけ計算量が余分に多くなる。

④FEMとFDMの差異

以上のように、離散化の原理及び過程は異なっても、2次精度に限れば結果として得られる離散化式には周辺情報の重みの違いはあれども、本質的な差はない。これはどちらの場合もデカルト座標系から要素辺を軸とした局所座標系への座標変換に他ならず、この座標変換を陽的に行うか、陰的に補間関数の導入の形で行うかが異なるだけだからである。ただし、実際の計算を行うに当たって、差分の場合は座標変換や計量テンソルなどの概念が必要であるが、有限要素法では機械的に行うことができる。また、差分法では流速を局所座標系の共変ベクトル成分で解くことが容易であるが、有限要素法では通常、元のデカルト座標系の成分について解かれる。

したがって、FEMとFDMの本質的な差は、要素分割が構造的でなければならないか、非構造であっても良いかという所にある。この制約がある差分法は、この制約があるがゆえに、格子分割に多少工夫を要するが、高次の微分を簡単に求めることができ、かつノードのナンバーリングが規則的であるため、ADI法などを用いることにより計算を効率良く行える。これに対して、有限要素法の場合は、分割に制約がないので任意かつ容易にこれを行える。しかし、高次の微分については、煩雑な計算が必要で求めにくいという問題がある。

表-2.1 差分法と有限要素法との違い

要素分割	微分	解法	
FDM	構造	高次	任意
FEM	非構造	低次	制約有

表-2.2 計算法の有利不利の通説と実際

	要素分割	メモリー数	計算量
通説	FEMの有利	差分法有利	差分法有利
実際	FEMが多少有利	それほど差はない(BFGSの場合)	周辺情報の計算分FEMの方が多い

2.3 従来の安定化手法とその問題点

有限要素法は流れの計算に対して不安定であり、何等かの方法を用いて安定化させる必要がある。これは、先のように差分型に近いスキームでも同様であり、移流項と水位の不安定性は他の方法でなくては除去できない。有限要素法が流れの計算に多く用いられるようになったのは、1970年代頃からのことと思われるが、特に河道の流れが解かれるようになったのは比較的最近のことであり、初期の段階では、有限要素法では差分の風上法に対応する簡便な手段を持っていなかったために、何等かの人工粘性、例えば以下

で説明されているランピングパラメータに基づく人工粘性が導入されていた。しかし、これは非常に強力かつ無指向の拡散性を持つために、河道のように狭い幅の中での流れを一様化してしまい、平均水位の計算などにはともかく水衝部の算定などには用いるのには適しない。同様に、流速の変動で結果が決まる河床変動計算にも向かない。現在では、ランピングパラメータに基づく人工粘性が用いられることは少ないが、これを用いないために解が振動している事例も多くみられる。

ここでは、有限要素法による離散化の問題及び従来の安定化手法の問題点について述べる。

2.3.1 近年の動向

有限要素法による流れの計算の安定化を図る方法として、多くの方法が考案されている。近年の論文の中では、以下の3つの方法が見られることが多い。

①上流型^{26)~28)}

上流型は、差分法の風上有限要素法版として考案されたものであり、流れの向きに応じて重み関数を変えて、拡散性を導入するものである。しかし、要素を通過する流れの向きやそのパス等に応じて、係数やマトリクス要素を変えるなどする必要があり、条件判断を伴う分、使いづらく煩雑である。

②テイラーガラキン法^{29)~32)}

テイラーガラキン法は、重み関数の変更や条件判断を特に行わずに、時間積分過程を高次化することで計算を安定にしようとする方法であって、Lax-Wendorff法の有限要素法版である。これは、通常の2段階法の拡散が飛び飛びでしか作用しないのに対し、2段階の時間積分を一過程で行うために拡散が近接節点で行われるという利点を持つ。しかし、計算量が非常に多くなり、特に境界での計算が極めて煩雑になる割には、得られる安定性はそれほど高くないようである。

③BTD法³³⁾³⁴⁾

BTD法は、不安定性の要因となる移流項の部分のみをLax-Wendorff型(時間に対して2次)にしたものであって、テイラーガラキン法などのように他の項が入り込むことによる不安定性の増大をCutしたものである。すなわち、時間間隔 dt で重み付けされた風上差分であり、計算は単純で安定条件に注意すれば比較的安定した解が得られる。ただし、河道流れに適用した事例はなく常に安定した解が得られる保証はない。

これらの方法は簡易性と安定性の両面から見ると未だ十分でない。

本モデルでは、後に述べるように、流れについてはこのBTD法を空間スケールを用いて重み付けた方法で風上化を行っており、水位については、流速成分のみをテイラーガラキン型で表している。

2.3.2 有限要素法による移流方程式の不安定性と人工粘性

(1) 基礎式の不安定性

検討に用いる基礎方程式は移流による性質を簡単に表す以下のものとする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.22)$$

式(2.22)を有限要素法(線一次補間でカラーキン法を用いる)で離散化すると、

$$\left(\frac{1}{6}\dot{\rho}_i + \frac{2}{3}\dot{\rho}_i + \frac{1}{6}\dot{\rho}_{i-1}\right) = -u \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.23)$$

となる。 $\dot{\cdot}$ は時間微分を示す。ここで、マスマトリクスの集中化を行うと

$$\dot{\rho}_i = -u \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.24)$$

となる。式(2.23)(2.24)を比較すれば、この差は右辺に移項して

$$-\frac{1}{6}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \Delta x^2 = -\frac{1}{6}\frac{\partial^2 \rho^i}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{dt} - \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \rho^{i+1}}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{dt}$$

となり、拡散項である。すなわち、式(2.23)のままでは式(2.24)に陰形式で負の拡散項が付加されていることになり、式(2.24)の式形よりもさらに不安定になる。したがって、通常ではマスマトリクスを Full ランピングしてこれを取り除く。しかし、式(2.24)の形でさえも、解が分散性を持つので、不安定（詳しくは Neumann 解析などの結果^{35)~37)}となる。すなわち、これに拡散項が付随した形でなければ解は得られない。したがって、差分法では例えば風上差分などが用いられ、この場合式(2.22)は以下のように離散化される。

$$\dot{\rho}_i = -u \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\Delta x} \quad (u > 0) \quad (2.25)$$

この風上差分の式形は実際には式(2.24)に対して

$$\text{abs.}(u) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \Delta x / 2 \quad (2.26)$$

という拡散項が付加されており、この式をみればわかるように拡散係数が u に比例するので、安定性が増している。流れを解く場合には、拡散係数が流速の絶対値に比例するので発散を抑えるのに便利な手法である。

以上に示したように、有限要素法は基本的に中心差分形となるので、そのままの形では本来不安定である。上流型有限要素法を陰解法で解く方法なども行われているが、非常に労力を要する。

現実的には、陽解法を用いる場合以下のようなランピングパラメータ e というものを導入した数値拡散を与えることがある。この場合、

$$-\frac{1}{6}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}(1-e)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

という拡散項が導入されることになる。これは、先の陰の負の拡散項を取り除き、正の陽の拡散項のみを絶対値を調整して残したものである。しかし、これは、物理的に意味のない人工粘性である。これを用いると解は滑らかに計算されるが、2次元計算の場合ではこの拡散は指向性のない強力な数値拡散となり、メッシュの切り方によっては、横断方向に解が平滑化され過ぎる。すなわち、横断方向の拡散性を軽減するには、メッシュの縦横比をかなり大きくする必要がある。しかし、一般的には境界の幾何形状を十分表現できるように、メッシュを作成する必要がある。そのためには横断方向にかなり細かくしなければならないので、計算量が増えて有限要素法のメリットがなくなる。また、アスペクト比が大きいと水位を同時に計算する場合は不安定になりやすい。したがって、他の何等かの方法によって、計算を安定化させる方法を用いた方が良い。

(2) 安定化に用いられる人口粘性の種類とオーダーについて

現在用いられている3種類の人口粘性について検討を行う。ここで取扱う人口粘性は、1) 風上差分、2) Lax-Wendroff 法(BTD法)、3) ランピングパラメータによるものとする。これらの拡散係数は、それぞれ

$$1) \text{abs.}(u)\Delta x/2, \text{abs.}(v)\Delta y/2 \quad (2.28)$$

$$2) u^2\Delta t/2, v^2\Delta t/2 \quad (2.29)$$

$$3) \Delta x^2/\Delta t/6 \cdot (1-e), \Delta y^2/\Delta t/6 \cdot (1-e): (e: 0.9 \sim 0.95) \quad (2.30)$$

のように表される。ここで、Courant 条件から、 dt の最大値として $dt=ds/u$ であるとすれば、1) と 2) は同じ拡散係数となる。しかし、一般には dt はこれよりも小さい値が採られるので、拡散係数は通常 1) の方が大きい。また 3) は、逆に dt が小さくなるほど拡散が大きくなり、この拡散項を用いる場合の dt は一般的に、Courant 条件の $1/20 \sim 1/10$ 程度の値が採られ、3) の値は 1) のものと同 order のものとなる。したがって、流下方向の数値拡散としては、それぞれ同程度のものとなる。しかし、流れに対して横断方向には、1) 2) が横断方向流速が無ければ拡散が働かないのに対して、3) は無条件に大きな拡散が働くことになる。以上の様に、2) の方法は 1) よりも拡散は小さく、3) の方法による場合、安定した解を得るためには、 dt をかなり小さく採る必要があり、その場合には精度が向上するのではなくて横断方向に不要な拡散が働くことになる。

(3) 二段階陽解法と Lax-Wendroff 法

差分では Lax-Wendroff 法を用いることにより、陽解法でもある程度安定性を増すことができる。ただし、場合によって空間振動は生じる。これに対して有限要素法などでは、Lax-Wendroff に似た方法として二段階陽解法などにより、計算の安定性を図っている。これらは、どちらも時間積分の過程を2段階にわけける計算方法であり、実質的には時間刻みに依存する拡散項を導入するものである。しかしながら、差分法の場合は、段階別にコントロールボリュームの取り方が変化するのに対して、有限要素法の場合は通常を取り方(空間を離散化した後に時間を離散化する)だとこれが変化しないので、拡散が飛び飛びに行われる。すなわち、差分法(Lax-Wendroff 法)では、

$$u^2 \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{\Delta x^2} \Delta t/2 \quad (2.31)$$

という拡散項が付加される。これに対し、有限要素法では通常このような拡散項は付加されず、二段階過程において、

$$u^2 \frac{\rho_{i+2} - 2\rho_{i+1} + \rho_i}{4\Delta x^2} \Delta t/2 \quad (2.32)$$

という拡散項が付加されるだけである。したがって、差分法では、隣り合うノードが連続するようになるが、有限要素法では飛び飛びのノードで連続的になって安定する。すなわち、有限要素法では、隣り合う要素内の平均値はある程度連続的になるが、隣り合う節点同士では値が連続的にならない可能性がある。実際には境界条件のところでは、飛び飛びにならないので、振動はある程度抑制されるはずなのであるが、不安定性はいずれにしても残る。したがって、有限要素法でこの手法を用いて安定にするためには、先に時間について離散化した後に空間を離散化する必要がある。すなわち、空間の離散化が時間積分過程において2段階に分れて行われるのではなく、実質的に一段解で行われる必要がある。具体的には、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^{i+1/2} = -u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^i - u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^i \Delta t / 2 \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^i = -u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^i \quad (2.34)$$

と表して、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^{i+1/2} = -u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^i + u\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^i\right)\Delta t / 2 \quad (2.35)$$

と変形した後に空間の離散化を行えば、移流項については Lax-Wendroff のスキームと基本的に同じになり、隣り合うノードが連続的になるので多少安定性が增大する。このような形で移流項のみを表すのが BTD 法である。同様に、式中の全ての従属変数に付いて要素内の時間積分値を導入する Taylor-Galerkin 法などが考案されている。

なお、川原の 2 段階陽的解法は、時間過程を 2 段階に分けている式 (2.32) で表されるものである。これが安定しているのは、先に示した主にランピングパラメータによる人口粘性が作用しているためであって、2 段階にしたことによる効果が顕著に表れているわけではない。

2.4 空間不安定の解消法

ここでは、通常考えられる安定化の手法について、その難易度や有効性を含めて述べる。

まず、時間積分過程に依存する方法について説明する。

しかしながら、ここで述べる方法だけでは他の何等かの工夫を行わなければ陰解法の場合に関しても流れの方程式が、流れの非線形項の部分である程度分散性を持つ。したがって、風上化が必要とされる。この場合、風上差分型または Lax-Wendroff 型 (BTD 型) の方法がよい。ただし、Lax-Wendroff (BTD) 型の場合には Δt が小さい場合には拡散は相対的に小さくなるので、計算には注意を要する。

そこで、次に空間の離散化に依存する方法として風上型を例に取って説明する。

2.4.1 時間積分過程に依存する方法

(1) explicit な方法

解くべき方程式を以下の様に表す。また、非線形項は時間に対して線形化されて表されているものとする。

$$\dot{u} + f_1 = 0, \quad f_1 = Lu + gM_x \xi \quad (2.36)$$

$$\dot{v} + f_2 = 0, \quad f_2 = Lv + gM_y \xi \quad (2.37)$$

$$\dot{\xi} + f_3 = 0, \quad f_3 = M_x(uh) + M_y(vh) \quad (2.38)$$

これについて、安定性を増すようにする必要がある。先に述べた方法を用いると、

$$f_1' = f_1 + \{Lf_1 + gM_x f_3\}\Delta t / 2 \quad (2.39)$$

$$f_2' = f_2 + \{Lf_2 + gM_y f_3\}\Delta t / 2 \quad (2.40)$$

$$f_3' = f_3 + \{M_x(f_1h + uf_3) + M_y(f_2h + vf_3)\}\Delta t / 2 \quad (2.41)$$

として、基礎式の f と f' を書換えることができる。なお、式の L の中の u についても同様なことを行ったものをテイラーガラキン法という。

ここで、定常の場合で $f_1, f_2, f_3 = 0$ ならば、 $f_1', f_2', f_3' = 0$ であるが、その逆が成立するためには Δt にかかわらず $f_1', f_2', f_3' = 0$ である必要がある。また、 f_1', f_2' に関する u, v の境界条件は、与えにくい。そこで、 f_1', f_2', f_3' を連立するものとする、 $f_3' = 0$ ならば、 Δt にかかわらずに $f_3 = 0$ となる。すなわち、この Δt は時間刻みに関係無くなり、基礎方程式に対する単なる重みと見なすことができる。したがって、時間依存の問題でない場合（定常解のみが必要な場合）には、この重みを収束過程で換える事によって安定化を図る事もできる。

ここで、時間依存の場合について連続式の変形のみを行い、従来のプログラムをそのまま利用する方法の具体的に説明する。ただし、境界条件の与え方を変更する必要がある。連続式を以下の様に表す。

$$\dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (2.42)$$

ただし、

$$u = u^t + u^*, \quad v = v^t + v^*, \quad h = h^t \quad (2.43)$$

$$u^* = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial x} - f/2\sqrt{u^2 + v^2} \cdot u/h \right) dt \quad (2.44)$$

$$v^* = \left(-u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial y} - f/2\sqrt{u^2 + v^2} \cdot v/h \right) dt \quad (2.45)$$

である。 h を流速と同様にしないのは、水位の変動は流速のものと比べて元々小さいこと、また余分な水位の変動は流速を不安定にするためである。連続式について有限要素法で離散化を行うと、

$$\begin{aligned} & \int N_k \frac{\partial}{\partial x} \{ (u + u^*) h_i N_i \} dA + \int N_k \frac{\partial}{\partial y} \{ (v + v^*) h_i N_i \} dA \\ &= \int q N_k ds - \int \frac{\partial N_k}{\partial x} (q_x + u^* h) dA - \int \frac{\partial N_k}{\partial y} (q_y + v^* h) dA \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる。マスマトリクスをランピングして表すと

$$A_e/3\xi_{ei} = \Delta q_{ei} + b_{ei}(q_{xe} + u^*_{e} h_e) 2A_e + c_{ei}(q_{ye} + v^*_{e} h_e) 2A_e$$

となる。ただし、 $q_{xe}, q_{ye}, u^*_e, v^*_e$ は、要素平均値であり、 Δq_{ei} は要素 e で節点 i に関するフラックスを示し、開境界以外では 0 である。これにより、水位がポアソン型で表現される。

(2) implicit な方法

陰型式の場合、時間積分に関して以下の様に表される。ただし、ここでは、移流項及び拡散項は既知(t)のものから外挿した値を用いても良い。

$$(\dot{u})^{t+1/2} + (L'u)^{t+1/2} = -(gM_x \xi)^{t+1} - (fu)^{t+1} \quad (2.48)$$

$$(\dot{v})^{t+1/2} + (L'v)^{t+1/2} = -(gM_y \xi)^{t+1} - (fv)^{t+1} \quad (2.49)$$

$$(\dot{\xi})^{t+1/2} = -M_x(uh)^{t+1} - M_y(vh)^{t+1} \quad (2.50)$$

ここで、 u^{t+1}, u^{t+1} は、 u^t, v^t, ξ^{t+1} で与えられる。これを連続式に代入することによって、 ξ^{t+1} は、 u^t, v^t, ξ^t のみで与えられることになる。ただし、連続式は ξ^{t+1} に関する拡散方程式の形となるように離散化する必要がある。 h について線形化 ($h = h^t$) すれば各種の方法で自動的に解くことができる。また、 h について線形化しない ($h = h^{t+1}$) 場合は、 u も含めて繰返し計算になる。したがって、最終的には線形化しない

いことを考えれば、マトリクスを解く場合に繰返し計算によって解く手法を用いた方がよいと思われる。また、その場合フルマトリクスを作成するものよりは、部分マトリクスのみを用いて計算する（転置行列や逆行列を用いない、例えば初歩的なものでSOR法、多少高度でなものでCR(1)法などで解く）方法を用いれば、メモリーを要せずすむ。uとvの時間項及び抵抗項についてランピングを行うと、L'の部分すなわち移流項と拡散項が前時間のものから与えられている場合には、uとvは繰返し計算をしないで求められ、計算量の節約が図れる。また、移流項及び拡散項をt+1であらわすと、完全陰解法になるが、繰返し計算が必要となる。ただし、水位について既に定まったものとする、線形化された状態になる（移流項に関して線形化を行う）ので、そのままマトリクスを解けばよい。

2.4.2 空間の離散化に依存する方法

(1) 空間平滑化の必要性

通常の有限要素法（2次の中心差分相当）で、解が分散性が持つのは、要素内で平均的な重み付き誤差が最小となるように計算されるからである。すなわち、式 $f=0$ において、 $\int f dx_i = 0$ となるような解を計算しているのであって、連続した空間で $f=0$ となる解が求められるわけではない。例えば、 $f=a \sin(kx)$ とすると、全空間で0となるためには、 $a=0$ である必要が有るが、 $k=2\pi/dx$ であれば、任意のaについて $\int f_i = 0$ を満たす。この場合、解は分散する。したがって、解の分散を防ぐためには、要素ではなく節点で $f=0$ となるように離散化すれば良い。Taylor-Galerkin法などはこれを時間積分過程で一部組入れた方法である。また、さらに直接的には解くべき式を、離散化する時に要素に対してノードが位置がずれる（シフトさせる）ように書換えてしまうことである。ただし、境界条件などには工夫を要する。

また、これを行ったとしても必ずしも安定になるわけではない。すなわち、収束させるためには何等かの工夫や条件が必要となる。この安定条件については以下の風上差分の所で述べる。

(2) 風上差分と連続式の安定性

これまで述べてきたように、風上差分は流れの式の移流項についてのみ先の操作を施したものである。ここで、

①先の操作を方程式系全体に作用させた場合

②風上差分の場合

③風上差分化して、連続式に流速の時間変動量を導入した場合

の3つの場合のじょう乱の発達性について検討する。また、2成分であるので、Nuemannの安定解析ではなくて簡便な方法で検討を行った。方程式系を線形化した場合のじょう乱の発達方程式は1) 2) 3)でそれぞれ示す通りである。ただし、初期じょう乱として、

$$u_j = -u_{j-1} = -u_{j+1}, \quad \xi_j = -\xi_{j-1} = -\xi_{j+1}$$

を仮定した。また、河床抵抗項に起因する不安定性は移流項によるものと比べて小さいので省略する。

1) 式系を全体にシフトさせた場合

要素残差ではなくて、節点残差を0とするように、解くべき方程式をシフトさせた場合の残差の発達方程式は、

$$u^{t+1} = u^t - 2a \left(\frac{1}{Fr^2} \xi^t + u^t \right), \quad a = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (2.51)$$

$$\xi^{t+1} = \xi^t - 2a(u^t + \xi^t) \quad (2.52)$$

となる。したがって、この残差は行列

$$\begin{bmatrix} 1 - 2a & -2a/Fr^2 \\ -2a & 1 - 2a \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

のべき乗で発達する。これを対角化すると

$$D = \begin{bmatrix} 1 - 2a - 2a/Fr & 0 \\ 0 & 1 - 2a + 2a/Fr \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

となり、常流の場合には a に関わらず収束しない。これは、収束条件の中にフルード数を変な形で入り込むからである。したがって、運動方程式系全体にこの操作を行うのは得策ではない。これを防ぐには水面勾配項をこの操作から外せばよい。この場合実質的にスタガードフォームになり、安定になる可能性があるが、この場合はほとんど風上化と同じである。次に、移流項のみを風上化した場合について述べる。

2) 風上差分のみ行った場合

風上化だけを行った場合の残差の発達方程式は

$$u^{t+1} = u^t - 2a(u^t) \quad (2.55)$$

$$\xi^{t+1} = \xi^t \quad (2.56)$$

ここで、上2式を見れば分かるように、風上差分の場合には $0 \leq a \leq 1$ であれば、流速のじょう乱は収束するが、水位のじょう乱は減衰しない。

ただし、風上差分の場合で連続式に1)で用いたものにすると $a \leq 1/2$ で収束する可能性がある。しかし、この水位変動の位置をシフトする方法の場合には、明確な物理的な意味を持たない。また、1次元の場合は良いが、2次元になると空間シフトをかける向きや大きさを合理的に定められないので、この方法は望ましくない。なお、この場合の残差は、残差の発達率から

$$(1 - 2a)^{n-1} 2a \quad (n: \text{繰り返し数})$$

に比例して図-2.3のように減少する。ただし、これは線形化した場合であって、非線形振動する場合もあるので a はなるべく小さくすれば小さい方がよく、大きいとあまりよくない。

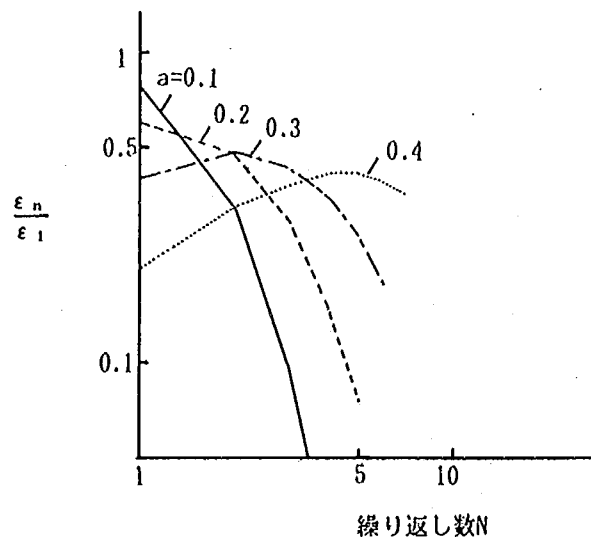


図-2.3 繰り返し数と誤差の減衰

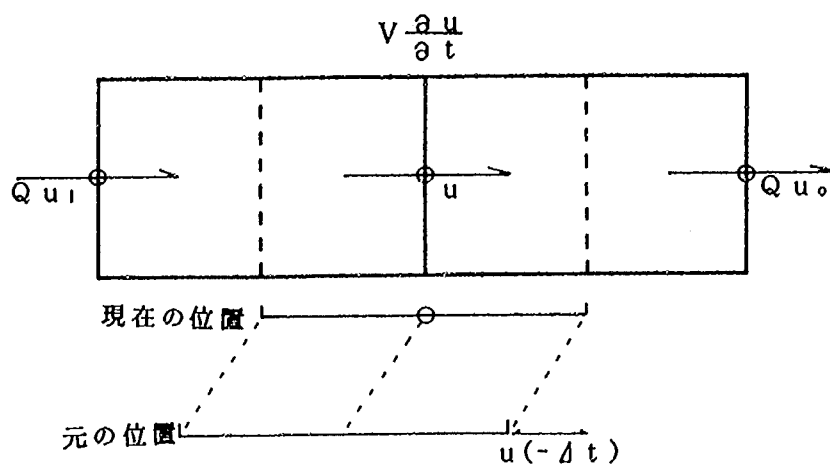


図-2.4 運動量の釣り合い

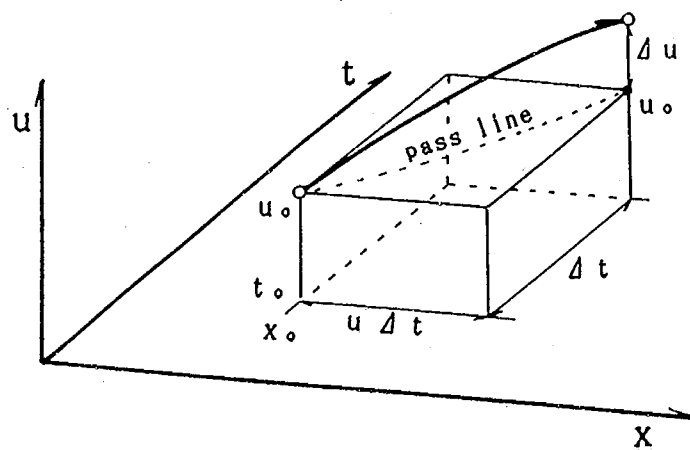


図-2.5 流下に対する運動量変化

一方、風上差分は以下のように物理的な意味を伴う。本来、流体の運動量の釣合は、オイラー的には図-2.4に示されるようにコントロールボリュームを出入りする運動量の差がその内部の運動量の時間変化として表される。しかし、実際には運動量が増加するべき流体はその内部を移動している。言い替えれば、すなわちラグランジュ的にみれば図-2.5のようにある流体粒子の移動に伴う流体の運動量の変化を表すのであるから、移流項については風上化の方が物理的には正しい。ただし、これが物理的に正確なのは常に $a = 1$ を満たす連続した空間であり、任意に時空間を分割した場合には重み付けを行う必要がある。通常、風上化を BTD 法で行う場合は重みが小さく、風上化の場合は重みが大きい。この重みをある程度正確にするためには、TVD 法^{40,41)} (Total Variation Diminishing: 必要以上の拡散を与えず、かつ不安定にならない様に風上化の拡散の大きさを調整する方法) などの原理によって重み付けする必要があるが、これは煩雑である。

また、時間で重み付けされたものの方が一見正しそうであるが、実際にはこの他にも時空間の離散化に伴い、元の微分方程式に対して高次微分項で表される負の人工粘性³⁹⁾などが数多く入る。すなわち、近似した離散化式は元の微分方程式を意味しなくなる。したがって、これだけでは粘性が弱いために多少不安定であり、通常は拡散性が若干大きい“要素長/2u”で重み付けされた風上差分が用いられている。

3) 連続式に運動方程式を導入した場合

風上化を行うことにより、運動方程式の安定化は図れるものの、連続式は安定にはならない。そこで、連続式の解法について検討を行う。まず、連続式を単独で解くのではなく、先に2.4.1で示した方法を用いて以下の様に運動方程式と組合せ、水位の基礎式において拡散化 (Poisson 型化) を図る。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} - w h \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0 \quad (2.57)$$

ここで、 w は 1 以下の重みであり、 u^* は運動量の時間変動量である。したがって、大きな連続式には人口粘性は導入されていない。このとき、連続式に関するじょう乱の発達式は、

$$\xi^{t+1} = \xi^t - a^2 w \left(4u^t + 4 \frac{\xi^t}{Fr^2} \right) \quad (2.58)$$

と表される。ただし、流量の一階勾配は中心差分型で表してある。これは流量の勾配を風上差分型で表すと拘束条件が厳しくなって安定性を得難くなるからである。(これは実際に計算プログラムを動かして確かめた。) 式を変形すると

$$\xi^{t+1} = \left(1 - a^2 w \frac{4}{Fr^2} \right) \xi^t - a^2 w 4u^t \quad (2.59)$$

を得る。したがって、残差は

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2a & 0 \\ -4a^2 w & 1 - 4a^2 w / Fr^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

となる。これは対角化できないが、 M のべき乗は、帰納的に

$$M^n = \begin{bmatrix} (1 - 2a)^n & 0 \\ c_n & (1 - 4a^2 w / Fr^2)^n \end{bmatrix} \cdot \left(c_n = -4a^2 w \frac{(1 - 2a)^n - (1 - 4a^2 w / Fr^2)^n}{(1 - 2a) - (1 - 4a^2 w / Fr^2)} \right) \quad (2.61)$$

のように与えられる。したがって、解が収束するための条件は

$$-1 < (1-2a) < 1 \quad (2.62)$$

$$-1 < (1-4a^2w/Fr^2) < 1 \quad (2.63)$$

$$-1 < c_n < 1 \quad (2.64)$$

である。ただし、これらが負になるような場合には、じょう乱が正負を繰り返しながら減衰するので、これをなるべくさけるために左辺を0とすると

$$a < 1/2 \quad (2.65)$$

$$4a^2w/Fr^2 < 1 \quad (2.66)$$

である。この場合、流れが常流で

$$(1-2a) > (1-4a^2w/Fr^2) \quad (2.67)$$

であるとする、

$$c_n < -4a^2w(1-2a)^{n \cdot n} \quad (2.68)$$

となる。これは $a < 1/2$, $w \leq 1$ であれば、先の2)で示した方法よりも収束性が良い。

また、 a について水位のじょう乱が伝わる速度の関係(C.F.L.条件：元の方程式を波動方程式に変形した時の安定条件)から

$$a = \frac{u dt}{dx} \leq \frac{1}{1+c/u} = \frac{1}{1+1/Fr} \quad (2.69)$$

である必要がある。常流である場合には、 $a < 1/2$ よりもこちらの方が優先する。ここで、

$$4a^2wFr^2 = \left(\frac{cdt}{dx}\right)^2 4w \quad (2.70)$$

であるから、

$$\frac{cdt}{dx} = \frac{u dt}{dx} \frac{1}{Fr} < \frac{1}{2\sqrt{w}} \quad (2.71)$$

となり、 dt に対する重み w の取り方が重要になる。水位の安定性から考えれば、 w はある程度大きい方がよい。しかし、陽解法の場合には拡散係数が大きい場合には時間刻みを小さくする必要がある、時間刻みからすれば w は小さい値(Fr^2 よりは小さくない方がよい)を持つ方がよい。実際には、 Fr 数などに関連させて決めれば合理的であると思われる。ただし、本研究のテストランでは、 $w = 1$ として $a(dt)$ を小さくしている。

(4.1.1では、 $a \cong 0.2$, $dt = (dt_{\max}(\text{at init. cond.}) * 0.75$ 程度としている。注：河床変動が生じて水深と流速が変化すると場所によってフルード数が変化するため、初期の限界値よりも小さく設定する。)

2.4.3 まとめ

以上述べてきたように、計算の安定化については種々の解決法と問題点がある。

本モデルでは、最後に述べた“流れについては移流項のみ風上差分型を用いて、連続式を運動方程式と組合せて解く方法”を用いることにする。ただし、非線形の影響があるので必ずしも効率良くじょう乱が減衰しない可能性があることを考慮して、時間刻みを小さく取る。

なお、本解析法においては、風上差分型は以下の式で表される。

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{ds}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.72)$$

すなわち、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{ds}{2} \frac{u_k}{U} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.73)$$

$$ds = \sum |dx_k \cdot u_k| / U, \quad U = \sqrt{\sum u_k^2}$$

という型式で表して、計算を行っている。

2.5 要素分割依存性について

三角形要素で分割する場合、分割方法が悪いと、解が振動し易い。これは1つの節点に影響する他の節点の関わり方と1節点に関する面積が分割方法に依存するためである。ここでは、簡単に以下の1次元の方程式を2次元的に解く場合を例にして示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.74)$$

これを、有限要素法に基づいて離散化し、ランピングを行うと

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} N_j dA = \int \left(a u + b \frac{\partial u}{\partial x} \right) N_j dy - \int a \frac{\partial N_j}{\partial x} u_a dA - \int b \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dA \quad (u_a : u \text{ の要素平均値}) \quad (2.75)$$

となるが、実際に重ね合わされたときに作成されるスキームが要素分割によって変化する。図-2.6に代表的な4種類の分割パターンとその場合の状況を表す。(各要素の値が $\partial N_j / \partial x$ で重み付けられる。)

1階微分の項については、関係する要素のx軸の辺の和であり、2階微分の項についてはその節点を通るx軸上の辺で示されるだけである。今、重みの面積は各三角形が同一であるので、あらかじめこれで除して各項について表すと、

$$\frac{(\text{接触要素数})}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(\text{接触要素数})}{3} a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e + 2b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_e \quad (2.76)$$

の形で表される。すなわち、1階微分については、大きさは違ってはいないが取り込む周辺情報が分割方法に依存する。拡散項については、その絶対値が接触要素数(4, 6, 8)によって変化し、正しい値になるのは6の場合のみであり、(4, 8)で分割する場合には拡散係数が隣合うノードで見かけ上それぞれ3/2, 4/3倍になったのと同じことになる。これらの影響による不安定現象は特に境界で顕著である。

また、周辺積分値に対する面積の関係も同様であり、フラックスが1節点に対し2辺(重みは1/2)で与えられるのに対し、割る面積は(2/3, 3/3, 4/3)であり、3/3の時のみ正しい大きさを持つ。(図-2.7)しかし、分割が等間隔でない場合などには解は正しくならない。

また、通常の三角形分割の場合には、要素の回転に弱い。湖海や貯水池など空間が広くて、境界の部分のみが複雑な形状をしている場合には、要素の向きが回転しないように分割するのは比較的容易であるが、河道の様に領域自身が曲がる場合には、要素を座標系に対して回転させる必要がある。この場合の離散化スキームを図-2.8に示す。ただし、任意の方向では計算が複雑になるので、分かりやすい様に45°回転させた場合のものを示してある。これを見れば分かるように、2種の要素を重ね合わせない場合には、2階

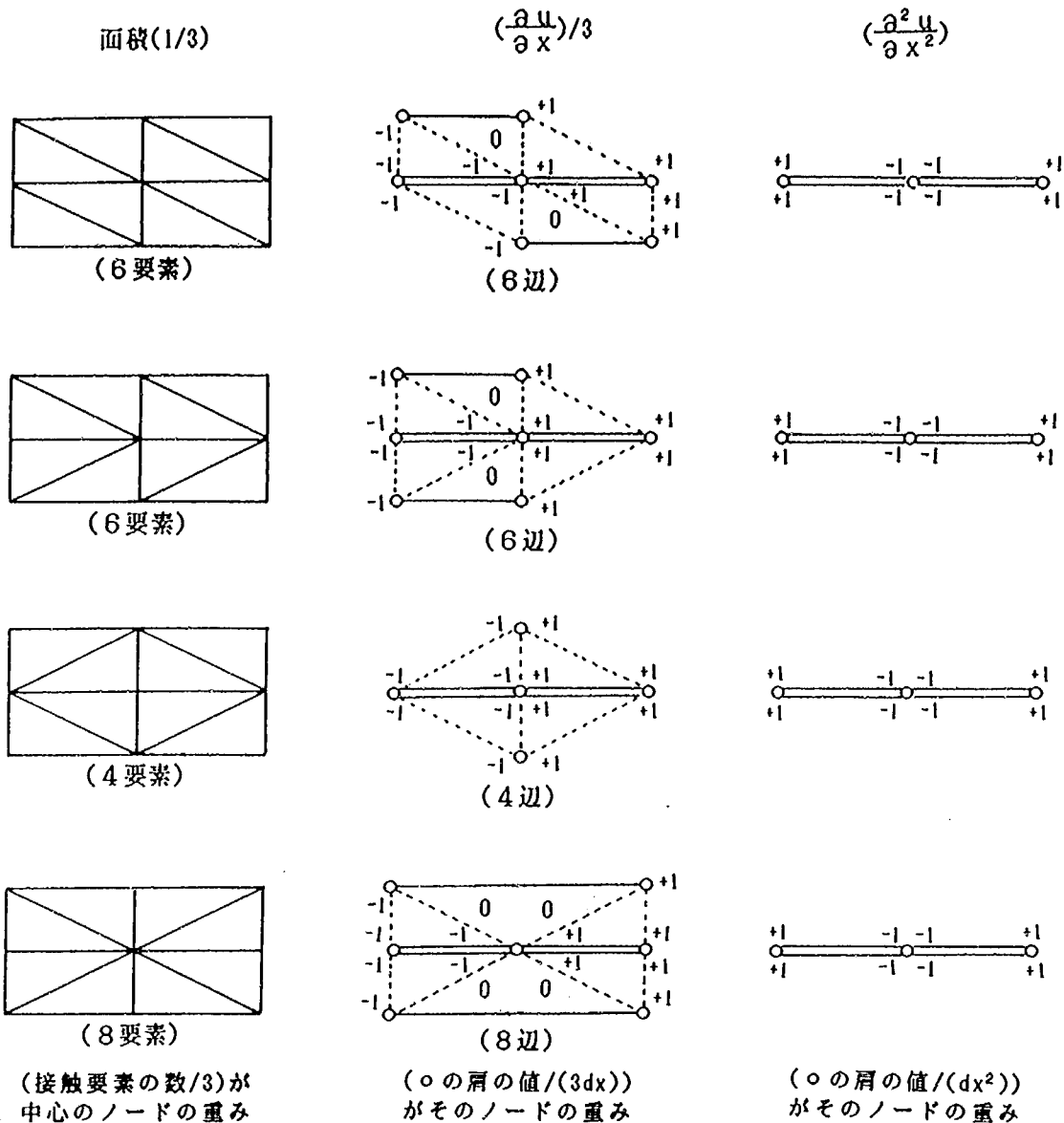
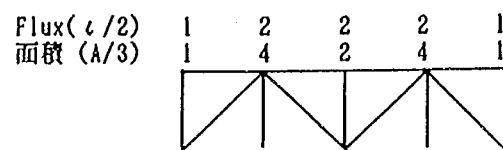
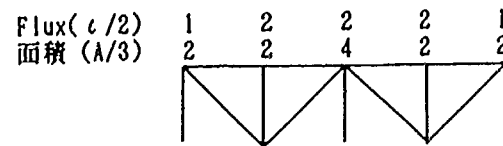
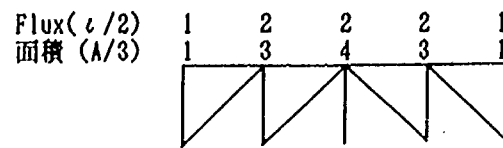
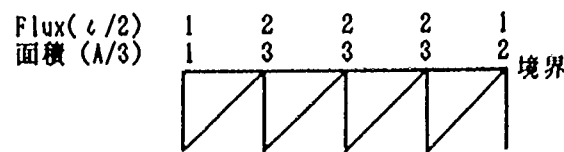


図-2.6 要素分割と離散化スキーム

微分項は方向と値を正しく与えられない。すなわち、風上差分の様に拡散係数がテンソル量である場合には、分割方法と要素の向きによっては、計算が正しく行われない。したがって、この分割方法はラプラシアン計算（拡散係数が2次のテンソル量でない場合の等方性の拡散問題など）にしか適用できない。

このような問題が生じるのは以下の理由による。本来、2階微分の値を正確に表すためには、任意の一次独立な局所座標系に対して $\partial^2 f / (\partial \xi_1 \partial \xi_2)$ の値を正しく求められなければならない。しかし、1つの節点に係わる他の節点の数が4点の場合には $\partial^2 f / \partial^2 \xi_1$ しか定められず、座標系を回転を表さない。要素の計量テンソルを2次精度で表すためには、周りに8点必要であり、5～7点では精度が下がる。なお、同じ8点でも重ね合わせしないと正確でなくなるのは、四角形を3角形に分けた時点でもう一つの対角線のノードのつながりが分断され、座標系がつながりをなくし、正しい計算ができなくなるためである。すなわち、2階微分を通常の方法で正確に表すためには、四角形としての性質を保つように分割する必要がある。



重ねた場合						
Flux($u/2$)	2	4	4	4	2	(1/2)
面積 ($A/3$)	3	6	6	6	3	(1/2)

内部量とフラックスの量は整合するが、重ねないと節点に対するフラックスの相対的な重みが、一様にならない。

図-2.7 境界での節点の重みとフラックスの関係

以上の様に、単純に3角形要素で分割して一次補間するとすると、周辺の情報の入り方が要素分割に依存するだけでなく、実際の流れの計算においては正しくない計算を行うことになり、場合によっては負の拡散と正の拡散が隣合う節点で混入することにもなる。割る面積の問題は、要素の分割方法を工夫すれば良いが、それでも解が要素分割に依存することとなる。

したがって、本研究では初めに述べたように、1つの4角形要素に対して2種類の3角形分割を行い、2種類の分割に対する構成方程式を同時に重ね合わせることによって、解の要素分割依存性をなくすように心がけている。4章で示すように実際にこれを行うことによってのみ、境界付近の河床変動のじょう乱を消去することが可能であった。また、この重ね合わせによって実質的な補間は四角形要素分割の補間を折れ線近似した様なものになる。しかし、重み付は個々の三角形要素に対して行われるので、原理的には四角形分割での重ね合わせではなくて、あくまでも2種類の三角形の重ね合わせである。

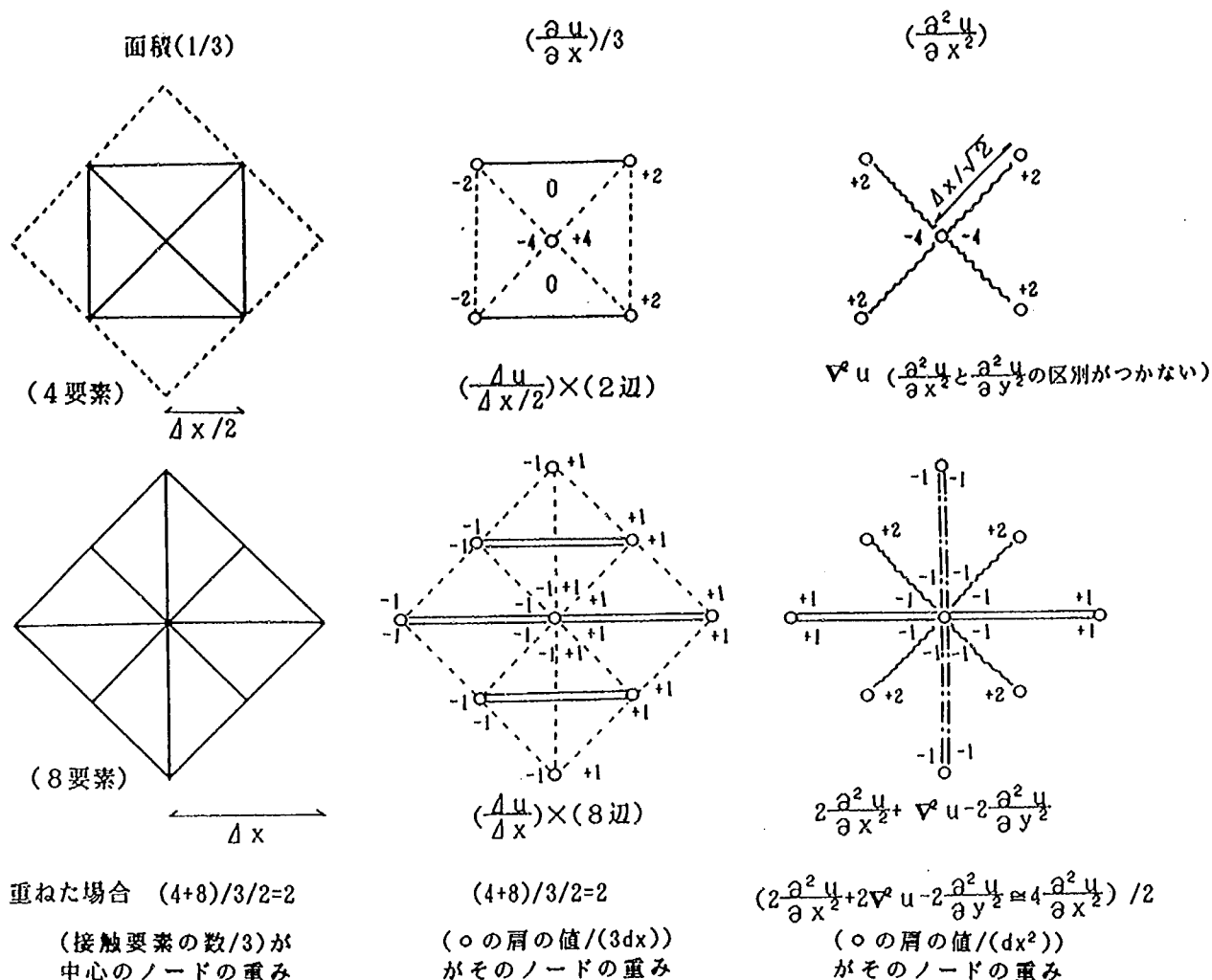


図-2.8 要素の回転によるスキームの変化

2.6 まとめ

本研究で計算の安定化に用いたモデルの特徴をここでまとめる。

- ① 2種類の要素分割による構成方程式を重ね合わせることによって分割法への解の依存性をなくした。
- ② 有限要素法を適用した方程式を全体的にランピングさせて不用な拡散項を排除した。
- ③ 流れの基礎式の移流項を風上化して安定化を図っている。
- ④ 水位の計算について、流速項のみ単位時間内の変動を考慮して拡散型化を図った。

これらは、基本的に物理的に意味のない人工粘性は含んでおらず、かつ実際に計算した条件の範囲内で安定であった。構造的に要素を分割して①②の作用を施すことによって得られるスキームは差分型と似た形となり厳密な意味での有限要素法ではなくなっているが、解くための基本的な手続きがおなじであるので、有限要素法とみなしている。なお、ランピングにより計算量はかなり減り、安定性を向上させているために dt を大きくでき計算の効率化が図れた。ただし、2重要素を重ね合わせると、必要メモリーと計算量は増える。

3 章 基礎方程式及び離散化式

本研究で用いている流れの計算モデルは、鉛直方向に流速分布をモードで与えて重み付き積分によって各成分を分離して解く、1節点鉛直方向多自由度型の平面2次元計算モデルである。この考え方は、基本的には地盤の振動解析などに用いられているものと同じのものである。流れの計算については富所ら⁴³⁾によって既に示されている。ただし、富所式の計算方法では計算量が多く、時間がかかる。また、本研究では河床変動計算を目的としているため、流れの計算はかなり繰り返すことになり時間がかかる方法は望ましくない。試しに富所タイプ⁴³⁾のモデルを作成して、ベクトライズを掛けれるようにしてみたが、各モード絡み合いや水面変動と移流項、拡散項との絡み合いが複雑なため4～5倍程度しか高速化できなかった。

そこで、本研究では計算量を減らすために離散化式の簡略化を行っている。簡略化は試みとして、2通り行った。1つめは、

①ベクトライズによる計算の高速化の妨げとなる移流項及び拡散項の計算式の簡略化

(計算量が1/5程度に軽減され、計算式がかなり簡単になる。)

である。2つめは

②通常の浅水流モデル(1モードのみの計算となる)で鉛直流速分布型を固定し、河床変動に影響する二次流は平均流向の曲率と水深から与える。

(1次モードのみの計算で、モード間干渉がなく、かなり高速化される。)

である。実際には②のモデルの方がかなり速いので、こちらを主に用いて2章で述べた安定性の検討を行った。以下、本文で②のモデルのものを簡易モデルと呼ぶ。

また、平面河床変動計算は、横断流砂量式に従来はs-n系で表される長谷川式⁴⁴⁾⁴⁵⁾が用いられるために、有限要素法などx-y系で表される計算はあまり行われていない。澤井ら⁴⁶⁾は、流れ方向をs軸に取って長谷川式を回転させて用いている。しかし、長谷川式が横断河床勾配を持つ斜面での流れ方向への近似式であり、流れ方向の勾配は考慮されていないので、解を回転させて用いると、正しくない場合も有り得る。本研究では、長谷川の基礎式を流れ方向優先の近似を行わずに解き、流砂量ベクトル式を導き、x-y系での河床変動計算を可能にしている。

3.1 基礎方程式

3.1.1 流れの基礎式

流れの方程式はナビエ-ストークスの式をブーシネスク近似した以下のものを用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (i, j = 1, 2, 3, u_1=u, u_2=v, u_3=w) \quad (3.1)$$

ただし、圧力分布に関しては静水圧を仮定し、与える分布形のモードが2次以上の場合は連続式から求めた鉛直流速を与える。このとき、式(3.1)は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \epsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここで、鉛直分布形を直交関数系で表すこととする。モード1の分布を $\phi_1((z-\xi)/(\xi-z_b))$ で表して、代入すると、たとえば $u=u_1$ について、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_1 + u_m \phi_m \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi_1 + v_m \phi_m \frac{\partial u_1}{\partial y} \phi_1 - \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \phi_m u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ & + u_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u_m \phi_m \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + v_m \phi_m \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \int \left(u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) dz' u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} u_1 \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial x} u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial y} u_1 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る。ここで、1行目は移流に伴う流速の変化を表す。2行目は移流に伴う流速分布形の変化、実際には河床高の流下方向の変化が鉛直分布形の縦断的な変化を表すものである。実際には、

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\frac{\phi_1'}{h} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{z-\xi}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

であって、この部分の離散化が非常に煩雑であり、かつ計算量が多い。また、1要素内における河床高の流下方向の変化量は、特別な場合を除いて小さいとして2行目、4行目を近似的に省略している。なお、2行目の第一項は、重み付き積分過程で消去され、4行目の影響は小さいものと考えられる。したがって、実際には2行目の2項目以降のみを省略した形になるが、この影響がどの程度結果に影響しているかは、未だよく分からない。ただし、厳密な計算を行いたい場合には、残す必要もあると思われる。また、0次モード（平均流）では、

$$\phi_0 = 1$$

であるので、元々この部分はない。 (3.6)

本モデルの流れの計算では、以下の式を離散化して解くべき方程式としている。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_1 + u_m \phi_m \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi_1 - \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \phi_m u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} u_1 \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1}{\partial t} \phi_1 + u_m \phi_m \frac{\partial v_1}{\partial x} \phi_1 + v_m \phi_m \frac{\partial v_1}{\partial y} \phi_1 - \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \phi_m v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial v_1}{\partial x} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial v_1}{\partial y} \phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} v_1 \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし、0次モードでは安定性を増大させるために風上化を行い、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \underbrace{\frac{|u|dx| + |v|dy|}{2(u^2 + v^2)} \left(u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{\text{wind-up term}}$$

$$= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{|u||dx| + |v||dy|}{2(u^2 + v^2)} \left(u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

を用いて計算している。風上化の重みには、 ds を正確に定義する必要があるが、とりあえず

$$\sqrt{u^2 + v^2} ds = |u||dx| + |v||dy|$$

とおくことにした。ただし、平均流速 u 及び平均分割縦断距離 ds で表して、実際に計算を行ってみたが明瞭な違いは見られなかった。 dx, dy の採り方に問題がある場合には、この方法でも支障はないと思われる。なお、底面抵抗はマニング則を用いて

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{gn}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} u \quad (3.11)$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \frac{gn}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} v \quad (3.12)$$

とし、拡散係数には

$$\epsilon = \frac{\kappa u_* h}{6} \quad (3.13)$$

を用いた。 n は粗度係数である。

3.1.2 水位の基礎式

水位を解くための基礎方程式は、連続式を積分して境界条件を導入して得られる

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

である。しかし、2章で述べたようにこのままではうまく計算できない。

そこで、先に示したように

$$h = h^l \quad (3.15)$$

$$u = u^l + u^* \quad (3.16)$$

$$v = v^l + v^* \quad (3.17)$$

$$u^* = \left(-u_a \frac{\partial u}{\partial x} - v_a \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \tau_{xa} \right) dt \times \text{重み} \quad (0 \sim 1) \quad (3.18)$$

$$v^* = \left(-u_a \frac{\partial v}{\partial x} - v_a \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \tau_{ya} \right) dt \times \text{重み} \quad (0 \sim 1) \quad (3.19)$$

として、連続式に代入した、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (u^l + u^*) h^l}{\partial x} + \frac{\partial (v^l + v^*) h^l}{\partial y} = 0 \quad (3.20)$$

を解析に用いた。これを用いることにより、特別な人工粘性なしに安定な解を得ることができる。

ただし、水位についてはある程度平滑化されてもかまわないとして、ランピングパラメータによる人工粘性を多少加えて計算することも考えられるが、この場合には本モデルのように時間刻みは大きく取れない。

3.1.3 河床変動の基礎式

(1) 流砂の連続式

河床変動は、以下の流砂の連続式⁴⁷⁾によって記述される。

$$(1 - \lambda) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

ここで、 z_b : 河床高、 λ : 土砂の間隙率、 q_{bx} : x 方向の掃流砂量、 q_{by} : y 方向の掃流砂量である。また、

$$q_{bx} = q_b \cos \gamma \quad (3.22)$$

$$q_{by} = q_b \sin \gamma \quad (3.23)$$

で表され、 γ は流砂の運動方向が x 軸となす角度である。

したがって、河床変動を求めるためには、 q_b 及び γ を求める必要がある。この求め方を以下に示す。なお、浮遊砂を考慮する場合には、浮遊砂の移流拡散方程式を流速と同様に求め、底面でのフラックスを式(3.21)に加える。

(2) 斜面上の掃流砂量ベクトル

ここでは、一般的に用いることのできる斜面上の流砂方向の求め方について説明する。

1) 斜面上の流砂量の考え方

流砂量は、一般的には運動する砂粒子の量と粒子の速度の積で表される。ここで、粒子を動かす有効な力を次式で表す。(図-3.1)

$$\vec{\tau}_{og} = \vec{\tau}_e + \Delta \vec{\tau} - \vec{\tau}_c \quad (3.24)$$

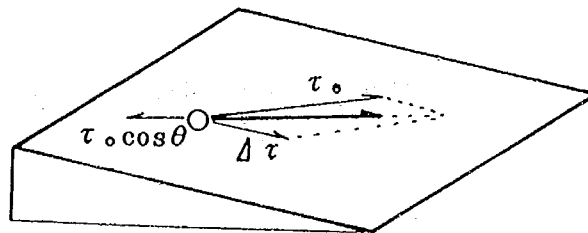


図-3.1 各せん断力の釣り合い

ここで、 τ_e : 有効掃流力、 $\Delta \tau$: 付加掃流力⁴⁸⁾⁴⁹⁾、 τ_c : 限界掃流力である。また、 τ_c の作用する向きは τ_{og} の作用する方向の逆向きである。芦田・道上⁵⁰⁾によると、運動する粒子の量 v_t と流砂量 q_b は、斜面の勾配を θ として以下の様に表される。

$$\tau_{og} = V_t (\rho_s - \rho) g \cos \theta \mu_t \quad (3.25)$$

$$q_b = V_t u_s, \quad u_s = (u_d^2 + v_d^2)^{1/2} \quad (3.26)$$

したがって、流砂量は

$$q_B = \frac{(|\vec{\tau}_e + \vec{\Delta\tau}| - \tau_c) \beta}{(\rho_s - \rho) g \cos \theta \mu_t} u_* \frac{u_s}{u} \quad (3.27)$$

μ : 摩擦係数, β : u/u_* ,

u_s : 砂の移動速度, u_d : 砂の x 方向の移動速度, u_d : 砂の y 方向の移動速度

と表される。ここで、

$$\vec{\tau}_e = \rho \left(u_*^2 \frac{u_b}{u}, u_*^2 \frac{v_b}{u} \right), \quad u = (u_b^2 + v_b^2)^{1/2}, \quad (u_b, v_b) : \text{底面流速ベクトル} \quad (3.28)$$

$$\vec{\Delta\tau} = \frac{\tau_{co}}{\mu_s} (\sin \theta_x, \sin \theta_y) \quad (3.29)$$

$$\tau_c = \tau_{co} \cos \theta \quad (3.30)$$

である。したがって、各方向の流砂量は、定義より

$$q_{Bx} = q_B \cos \gamma = q_B \frac{u_d}{u_s} \quad (3.31)$$

$$q_{By} = q_B \sin \gamma = q_B \frac{v_d}{u_s} \quad (3.32)$$

となる。 q_B に式 (3.27) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{q_{Bx}}{\sqrt{sgd}} &= \frac{\beta}{\mu_t} \frac{(|\vec{\tau}_{*e} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c})}{\cos \theta} \frac{u_s}{u} \frac{u_d}{u_s} u_{*c} \\ &\cong K (|\vec{\tau}_{*e} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c}) u_{*c} \frac{u_s}{u} \frac{u_d}{u_s} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_{By}}{\sqrt{sgd}} &= \frac{\beta}{\mu_t} \frac{(|\vec{\tau}_{*e} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c})}{\cos \theta} \frac{u_s}{u} \frac{v_d}{u_s} u_{*c} \\ &\cong K (|\vec{\tau}_{*e} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c}) u_{*c} \frac{u_s}{u} \frac{v_d}{u_s} \end{aligned} \quad (3.34)$$

が得られる。したがって、砂の相対移動速度 u_s/u 及び砂の流向 u_d/u_s , v_d/u_s が与えられれば、斜面上の流砂量ベクトルが定まることになる。

2) 砂粒子にかかる力の釣り合い

砂粒子の移動速度と移動方向を砂粒子に関する運動方程式から求める。砂粒子に、流体力として抗力及び揚力、また重力並びに摩擦力が作用するものとして、運動方程式を立て、定常運動を仮定すると次式が得られる。⁵¹⁾⁵²⁾

$$D \cos \delta - \mu_k (W \cos \theta - L) \cos \gamma - W \sin \theta_x = 0 \quad (3.35)$$

$$D \sin \delta - \mu_k (W \cos \theta - L) \sin \gamma - W \sin \theta_y = 0 \quad (3.36)$$

なお、各変数は図-3.2で定義している様に δ : 流体力の作用する角度, γ : 砂粒子の移動方向角, θ : 斜面の最急勾配であり、座標軸は直交座標系である。ここで、実際には抗力係数や揚力係数また摩擦係数などは、運動の形態、すなわちそれを決定する τ_* によって変わるべきものであるが、一般的には一定値を取る

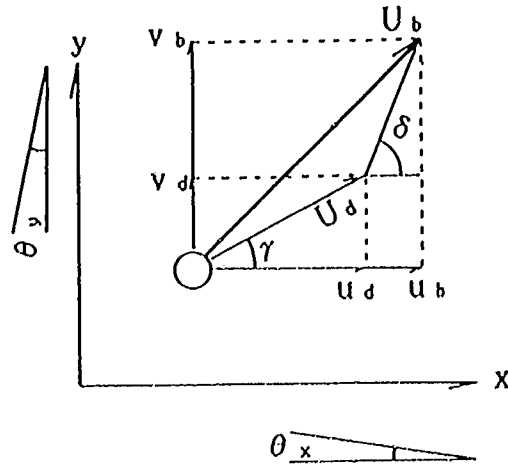


図-3.2 流れと粒子の運動方向の定義

ものと仮定をして議論を進める場合が多い。上式の抗力項 D 及び重力項 W は次式で与えられる。

$$D = \frac{\pi}{4} d^2 \epsilon c_D \frac{\rho}{2} [(u_b - u_d)^2 + (v_b - v_d)^2]^{1/2}, \quad \epsilon: \text{遮蔽係数} \quad (3.37)$$

$$W = \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_s - \rho) d, \quad d: \text{粒子の直径} \quad (3.38)$$

ここで、 $\delta \cong \gamma$ とすれば、流体力についてまとめて表すことができ、

$$D' = \frac{\pi}{4} d^2 \epsilon' \left(1 + \frac{\mu_k c_L}{c_D} \right) c_D \frac{\rho}{2} [(u_b - u_d)^2 + (v_b - v_d)^2]^{1/2} \quad (3.39)$$

とにおいて、

$$\epsilon' = \epsilon \left(1 + \frac{\mu_k c_L}{c_D} \right), \quad c_D, c_L: \text{抗力係数, 揚力係数} \quad (3.40)$$

と書き改めれば、

$$D' = \frac{\pi}{4} d^2 \epsilon' c_D \frac{\rho}{2} [(u_b - u_d)^2 + (v_b - v_d)^2]^{1/2} \quad (3.41)$$

の形で表される。ここで、 $\theta = 0$, $u_s = 0$ の場合、すなわち、平坦床上で限界掃流力が砂粒子の作用する場合、

$$D' = \mu W \quad (3.42)$$

でなければならないので、

$$\frac{\rho}{2} \frac{\pi}{4} d^2 \epsilon' c_D u^2 = \mu_s \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_s - \rho) d \quad (3.43)$$

となる。これより、

$$u^2 = \frac{\mu_s}{\epsilon' c_D} \text{sgd} \quad (3.44)$$

である。このとき、 u は限界掃流力時の流速であり、掃流力は定面近傍の流速 u 及び底面流速に対する流速係数 ϕ_b をもちいて、

$$\tau_c = \frac{u^2}{\phi_b^2} \quad (3.45)$$

と表されるので、限界掃流力が

$$\tau_{*c} = \frac{4}{3} \frac{\mu_s / \epsilon' C_D}{\phi_b^2} \quad (3.46)$$

と定義される。(平野⁵¹⁾ここで、運動方程式を $(\rho/8)\pi d^3 \phi_b^2 s g$ で除すと

$$\begin{aligned} \frac{D'}{(\rho/8)\pi d^3 \phi_b^2 s g} &= \frac{1}{\phi_b^2 s g d} ((u_b - u_d)^2 + (v_b - v_d)^2) \\ &= \tau_* \left(\left(\frac{u_b}{u} - \frac{u_d}{u} \right)^2 + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{v_d}{u} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\frac{W'}{(\rho/8)\pi d^3 \phi_b^2 s g} = \frac{1}{\mu_s} \frac{4}{3} \frac{\mu_s / \epsilon' C_D}{\phi_b^2} \quad (3.48)$$

と表され、平野⁵¹⁾や長谷川⁵²⁾と同様に

$$T_* = \tau_* / (\tau_{*c} \cos \theta) \quad , \quad \mu_* = \frac{\mu_s}{\mu_k} \quad (3.49)$$

とおくと、式(3.35)(3.36)は、以下の様に表される。

$$\mu_* T_* \left[\left(\frac{u_b}{u} - \frac{u_d}{u} \right)^2 + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{v_d}{u} \right)^2 \right] \cos \delta - \cos \gamma - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_x = 0 \quad (3.50)$$

$$\mu_* T_* \left[\left(\frac{u_b}{u} - \frac{u_d}{u} \right)^2 + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{v_d}{u} \right)^2 \right] \sin \delta - \sin \gamma - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_y = 0 \quad (3.51)$$

ここで、定義よりそれぞれの角度は次式で表される。

$$\cos \gamma = \frac{u_d}{u_s} \quad , \quad \cos \delta = \frac{u_b/u - u_d/u}{\sqrt{(u_b/u - u_d/u)^2 + (v_b/u - v_d/u)^2}} \quad (3.52)$$

$$\sin \gamma = \frac{v_d}{u_s} \quad , \quad \sin \delta = \frac{v_b/u - v_d/u}{\sqrt{(u_b/u - u_d/u)^2 + (v_b/u - v_d/u)^2}} \quad (3.53)$$

また、先と同様に流体力が作用する方向と粒子の移動方向が近いとして、 $\beta \cong \gamma$ と仮定すると

$$\sqrt{(u_b/u - u_d/u)^2 + (v_b/u - v_d/u)^2} \cong \left(1 - \frac{u_s}{u} \right) \quad (3.54)$$

と近似することができる。したがって、

$$\mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u} \right) \left(\frac{u_b}{u} - \frac{u_d}{u} \right) - \frac{u_d}{u_s} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_x = 0 \quad (3.55)$$

$$\mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u} \right) \left(\frac{v_b}{u} - \frac{v_d}{u} \right) - \frac{v_d}{u_s} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_y = 0 \quad (3.56)$$

を得る。

3) 砂粒子の移動速度及び移動方向

次に、 $u_d/u = (u_s/u)(u_d/u_s)$ 、 $v_d/u = (u_s/u)(v_d/u_s)$ と変形して、砂粒子の移動速度を求めると、

$$\cos \gamma = \frac{u_d}{u_s} = \frac{\mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u}\right) \frac{u_b}{u} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_x}{1 + \mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u}\right) \frac{u_s}{u}} \quad (3.57)$$

$$\sin \gamma = \frac{v_d}{u_s} = \frac{\mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u}\right) \frac{v_b}{u} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_y}{1 + \mu_* T_* \left(1 - \frac{u_s}{u}\right) \frac{u_s}{u}} \quad (3.58)$$

となる。また、 u_s/u は、

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1 \quad (3.59)$$

を満足するように定められる。ここで、

$$V = \sqrt{\mu_* T_*} \left(1 - \frac{u_s}{u}\right) \quad (3.60)$$

とにおいて、式(3.52)、(3.53)を整理すると

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{\mu_* T_*} V \frac{u_b}{u} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_x}{1 - V^2 + \sqrt{\mu_* T_*} V} = \frac{\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\mu_* T_*} \mu_k} / V}{1 + (1 - V^2) / V / \sqrt{\mu_* T_*}} \quad (3.61)$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{\mu_* T_*} V \frac{v_b}{u} - \frac{1}{\mu_k} \tan \theta_y}{1 - V^2 + \sqrt{\mu_* T_*} V} = \frac{\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\mu_* T_*} \mu_k} / V}{1 + (1 - V^2) / V / \sqrt{\mu_* T_*}} \quad (3.62)$$

となる。長谷川⁵²⁾によれば、 $V \cong 1$ である。しかし、これは1つの特別な条件下の解であり、流砂の運動方向は斜面と直角に近いとして、 $u_d/u_s \cong 1$ という条件を定めることによって求めたものである。したがって、一般的に表記した場合には、斜面の影響や移動方向と座標軸とのずれなどによる誤差が含まれることになる。しかし、式(3.59)は、 V に対しての無意な解を含む4次方程式になっており、一般的な形で解を表記しにくい。そこで、

$$V = 1 + \Delta V$$

として、偏差量 ΔV を求めるものとする。これにより、 V の4次方程式から有意な解を含む ΔV に関する2次方程式に変形することができる。上式を式(3.61)、(3.62)に代入して、整理すると以下ようになる。

$$\cos \gamma = \frac{\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} (1 - \Delta V)}{1 - 2 \Delta V / \sqrt{\mu_* T_*}} \quad (3.63)$$

$$\sin \gamma = \frac{\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} (1 - \Delta V)}{1 - 2 \Delta V / \sqrt{\mu_* T_*}} \quad (3.64)$$

式(3.63)、(3.64)を式(3.59)に代入すると、 ΔV について

$$\left(\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right)^2 + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[\left(\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right) \frac{\tan \theta_x}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right) \frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right] \Delta V \\
& + \left[\left(\frac{\tan \theta_x}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right)^2 + \left(\frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* T_*}} \right)^2 \right] \Delta V^2 = 1 - \frac{4}{\sqrt{\mu_* T_*}} \Delta V + \frac{4}{\mu_* T_*} \Delta V^2
\end{aligned} \quad (3.65)$$

を得る。したがって、 ΔV は

$$\Delta V = \frac{1}{4A^2 - E} (B \pm \sqrt{B^2 - (4A^2 - E)(1 - (C^2 + D^2))}) \quad (3.66)$$

である。ここに、

$$A^2 = \frac{1}{\mu_* T_*}, \quad C = \frac{u_b}{u} - \frac{A}{\mu_k} \tan \theta_x, \quad D = \frac{v_b}{u} - \frac{A}{\mu_k} \tan \theta_y, \quad E = \frac{A^2}{\mu_k^2} \tan^2 \theta_x + \frac{A^2}{\mu_k^2} \tan^2 \theta_y$$

$$B = 2A + \frac{A}{\mu_k} (C \tan \theta_x + D \tan \theta_y)$$

である。式(3.66)の2つの解の内、有意な解は符号が負の方であるから、

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{B}{4A^2 - E} (1 - \sqrt{1 - (4A^2 - E)(1 - (C^2 + D^2))}) / B^2 \\
&\cong -\frac{1 - (C^2 + D^2)}{2B}
\end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
&\cong -\frac{\frac{u_b}{u} \tan \theta_x + \frac{v_b}{u} \tan \theta_y - \frac{A}{2\mu_k} (\tan^2 \theta_x + \tan^2 \theta_y)}{2\mu_k + \left(\frac{u_b}{u} - \frac{A}{\mu_k} \tan \theta_x \right) \tan \theta_x + \left(\frac{v_b}{u} - \frac{A}{\mu_k} \tan \theta_y \right) \tan \theta_y}
\end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。ここで斜面が緩やかな場合には、 $\tan \theta_x, \tan \theta_y \ll 1$ であり、その2乗に関する項は小さくなるので、

$$\Delta V \cong -\frac{\frac{u_b}{u} \tan \theta_x + \frac{v_b}{u} \tan \theta_y}{2\mu_k + \frac{u_b}{u} \tan \theta_x + \frac{v_b}{u} \tan \theta_y} \quad (3.69)$$

と近似することができる。また、 V 及び ΔV は次式

$$V = \sqrt{\mu_* T_*} \left(1 - \frac{u_s}{u} \right) = 1 + \Delta V \quad (3.70)$$

で定義されている。したがって、斜面上の砂粒子の移動速度は、先に求めた ΔV を用いて

$$\frac{u_s}{u} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu_* T_*}} (1 + \Delta V), \quad (\text{ただし, } u_s < 0 \text{ ならば } u_s = 0) \quad (3.71)$$

と表すことができる。

4) まとめ

以上より、斜面上の流砂量は以下の様に与えられる。

$$\frac{q_{Bx}}{\sqrt{sgd}} \cong K(|\vec{\tau}_{e*} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c} \cos \theta) u_* \left(1 - \frac{1 + \Delta V}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}} \right) \frac{\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\mu_k} \frac{(1 - \Delta V)}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}}}{1 - \frac{2 \Delta V}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}}} \quad (3.72)$$

$$\frac{q_{By}}{\sqrt{sgd}} \cong K(|\vec{\tau}_{e*} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c} \cos \theta) u_* \left(1 - \frac{1 + \Delta V}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}} \right) \frac{\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\mu_k \sqrt{\mu_* \Gamma_*}} \frac{(1 - \Delta V)}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}}}{1 - \frac{2 \Delta V}{\sqrt{\mu_* \Gamma_*}}} \quad (3.73)$$

$$\Delta V \cong \frac{\frac{u_b}{u} \tan \theta_x + \frac{v_b}{u} \tan \theta_y}{2 \mu_k + \frac{u_b}{u} \tan \theta_x + \frac{v_b}{u} \tan \theta_y} \quad (3.74)$$

ここで、 $\tan \theta_x, \tan \theta_y \ll 1$ ならば $\Delta V \cong 0$ であり、 $\cos \theta \cong 1$ であるので、

$$\frac{q_{Bx}}{\sqrt{sgd}} \cong K(|\vec{\tau}_{e*} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c} \cos \theta) u_* \left(1 - \sqrt{\mu_k / \mu_s} \frac{u_{*c}}{u_*} \right) \left(\frac{u_b}{u} - \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \frac{u_{*c}}{u_*} \right) \quad (3.75)$$

$$\frac{q_{By}}{\sqrt{sgd}} \cong K(|\vec{\tau}_{e*} + \vec{\Delta\tau}_*| - \tau_{*c} \cos \theta) u_* \left(1 - \sqrt{\mu_k / \mu_s} \frac{u_{*c}}{u_*} \right) \left(\frac{v_b}{u} - \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \frac{u_{*c}}{u_*} \right) \quad (3.76)$$

と表すことができる。また、流砂量式を変更する場合には、上式と同様の形式となるように

$$q_{Bx} = q_B \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \frac{u_b}{u} - \frac{u_{*c}}{u_*} \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \quad (3.77)$$

$$q_{By} = q_B \sin \gamma, \quad \sin \gamma = \frac{v_b}{u} - \frac{u_{*c}}{u_*} \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \quad (3.78)$$

と表記する。ただし、流砂量を

$$q_B = q_B(\vec{\tau}_{e*} + \vec{\Delta\tau}_*, \tau_{*c} \cos \theta) \quad (3.79)$$

と表した場合に流砂量の算定に用いる掃流力 τ は、平均流速ではなく、あくまで河床面流速を用いて

$$\vec{\tau} = \left(u_*^2 \frac{u_b}{u}, u_*^2 \frac{v_b}{u} \right), \quad u_*^2 = \frac{1}{\phi_b^2} (u_b^2 + v_b^2) \quad (3.80)$$

で表す。また、この方法で粒子の運動方向を表す場合では、砂粒子の運動方程式において、 $C_D, C_L, \mu_k, \epsilon$ が、運動形態すなわちそれを定める τ_* の値によらずに変化しないことを仮定している。したがって、常にこの式が成立するわけではなく、実際の使用に当たっては適用範囲があり、係数などは条件によって異なる場合があることに注意する必要がある。

(3) 河床流速

(2) で示したように、流砂の運動方向を定めるためには、河床面近傍の流速ベクトルを定義する必要がある。本計算モデルで流速の鉛直分布をモード解析で解く場合には、これは解として

$$u_b = u_0 - u_1 + u_2 - \dots \quad (3.81)$$

$$v_b = v_0 - v_1 + v_2 - \dots \quad (3.82)$$

与えられる。

しかし、簡易モデルの場合には、鉛直流速分布を与えても主流（平均流）の底面流速しか求められない。そこで、簡易モデルでは、流線の曲率 $1/r$ を求めて、これと水深 h の積の形で

$$\frac{\Delta U_b}{U_b} = -N_* \frac{h}{r} \quad (3.83)$$

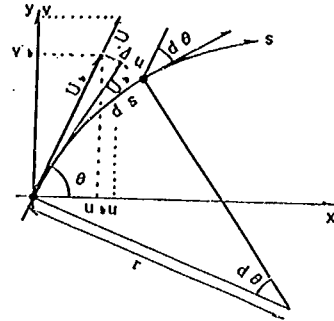
のように表す。ここで、 U_b は主流の底面流速で

$$U_b = \left(1 - \frac{2.3}{x\phi}\right)u \quad (3.84)$$

のように与え、 ΔU_b は主流に直交する向きの二次流であり、 N_* は一様彎曲平衡状態での二次流強度を表す係数であり、この値は研究者^{53)~57)}によって異なる。本モデルのテストランでは Englund⁵⁴⁾の $N_* = 7$ を用いている。

流線の曲率は、平均流向 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (\theta: \text{平均流向が } x \text{ 軸となす角度}) \\ &= \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.85)$$



で表される。この両辺に $1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ を乗じて、整理すると

二次流の定義

$$\frac{1}{r} = -\sin \theta \cos \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} - \sin \theta \sin \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial y} - \cos \theta \cos \theta \frac{\partial \sin \theta}{\partial x} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \sin \theta}{\partial y} \quad (3.86)$$

となるので、平均流速ベクトル (u, v) を用いて

$$\cos \theta = \frac{u}{(u^2 + v^2)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{v}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \quad (3.87)$$

として、式(3.86)を解くことによって $1/r$ 及び二次流流速をもとめ、底面流速ベクトル (u_b', v_b') を

$$u_b' = u_b + \Delta u \sin \theta, \quad v_b' = v_b - \Delta u \cos \theta \quad (3.88)$$

のように与える。曲率及び二次流は、簡易モデルで平均流速の計算後に重み付き積分で節点での曲率を求めて、節点毎に与える。

(4) 非平衡性を考慮した場合

掃流砂は場所的な水理条件の変化や境界条件の影響を受け、実際には非平衡状態で運動する。非平衡性が境界条件によって特に影響するような特殊な場合を除けば、平衡流砂量を用いて計算されることが多く、本モデルでも通常は平衡状態で解いている。

ここでは、非平衡状態を考慮した場合の取扱いについて述べる。定常で非平衡状態の場合、非平衡流砂量は、

$$q_{bx} = q_{bex} - \Lambda \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial y} \right) \quad (3.89)$$

$$q_{by} = q_{bey} - \Lambda \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \quad (3.90)$$

と表される。⁵⁸⁾ここで、 q_{bx} , q_{by} は実際の流砂量, q_{bex} , q_{bey} は平衡流砂量, Δ はステップレングスである。もしくは、 q_{bx} , q_{by} を微分の中に代入すると

$$\begin{aligned} q_{bx} = q_{bex} - \Delta \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bex}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bex}}{\partial y} \right) \\ + \Delta^2 \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bx}}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} q_{by} = q_{bey} - \Delta \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bey}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{bey}}{\partial y} \right) \\ + \Delta^2 \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_{bx}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial x} + \frac{q_{by}}{(q_{bx}^2 + q_{by}^2)^{1/2}} \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

となる。これは、ある点の非平衡流砂量は、平衡流砂量に対しステップレングス遅れて、非平衡流砂量に対して流下方向に拡散されるとみなすこともできる。これを解けば、非平衡流砂量を求めることができるがそのためには、流砂量について二次元計算を行う必要があり、これを行う場合には計算量が多くなる。

拡散項の部分を無視して解くということも考えられるが、物理的な意味が若干曖昧になる。また、流砂量の中には河床勾配が含まれることになるが、流砂の連続式に代入したときに z の 3 階勾配が現れ、1 次補間の有限要素法では正確な解を求められない。

そこで、Kennedy⁵⁹⁾や林ら⁶⁰⁾⁶¹⁾が砂州の発達と安定計算に用いたときのように、流速(もしくはせん断力)とその向きをステップレングスの距離で位相を遅らせ、河床流速を

$$u_b'' = u_b' - \Delta \left(\frac{u_b' \partial u_b'}{\partial x} + \frac{v_b' \partial u_b'}{\partial y} \right) \quad (3.93)$$

$$v_b'' = v_b' - \Delta \left(\frac{u_b' \partial v_b'}{\partial x} + \frac{v_b' \partial v_b'}{\partial y} \right) \quad (3.94)$$

として、便宜上非平衡性を表すこととし、その影響について検証した。結果は 4 章で示す。なお、テストランでのステップレングスは、要素長よりも短いため、遠くの節点の影響は及ばない条件となっている。

なお、これを風上化すると

$$u_b'' = u_b' - \Delta \left(\frac{u_b' \partial u_b'}{\partial x} + \frac{v_b' \partial u_b'}{\partial y} - \frac{U_b' ds}{2U_b'} \left(\frac{u_b'^2 \partial^2 u_b'}{\partial x^2} + 2 \frac{u_b' v_b' \partial^2 u_b'}{\partial x \partial y} + \frac{v_b'^2 \partial^2 u_b'}{\partial y^2} \right) \right) \quad (3.95)$$

$$v_b'' = v_b' - \Delta \left(\frac{u_b' \partial v_b'}{\partial x} + \frac{v_b' \partial v_b'}{\partial y} - \frac{U_b' ds}{2U_b'} \left(\frac{u_b'^2 \partial^2 v_b'}{\partial x^2} + 2 \frac{u_b' v_b' \partial^2 v_b'}{\partial x \partial y} + \frac{v_b'^2 \partial^2 v_b'}{\partial y^2} \right) \right) \quad (3.96)$$

となるが、あまり効果はないようであった。普通に位相遅れを考慮すれば良いようである。

3.2 基礎方程式の離散化

3.2.1 運動方程式の離散化

先に示したように本モデルでは、流れの計算に以下の式を用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_t}{\partial t} \phi_t + u_m \phi_m \frac{\partial u_t}{\partial x} \phi_t + v_m \phi_m \frac{\partial u_t}{\partial y} \phi_t - \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \phi_m u_t \frac{\partial \phi_t}{\partial z} \\ &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u_t}{\partial x} \phi_t \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_t}{\partial y} \phi_t \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_t}{\partial z} u_t \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_t}{\partial t} \phi_t + u_m \phi_m \frac{\partial v_t}{\partial x} \phi_t + v_m \phi_m \frac{\partial v_t}{\partial y} \phi_t - \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \phi_m v_t \frac{\partial \phi_t}{\partial z} \\ &= -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial v_t}{\partial x} \phi_t \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial v_t}{\partial y} \phi_t \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \phi_t}{\partial z} v_t \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

ここで、平面的には三角形一次要素の補間関数 N_i を用いて

$$u_t = \sum u_{ti} N_i, \quad v_t = \sum v_{ti} N_i, \quad \xi = \sum \xi_i N_i \quad (3.99)$$

として表し、 $\phi_n N_k$ を重みとしてかけて、水深方向及び平面について要素内で積分する。 v についても同様なので u のみについて表すと、

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial u_{ti}}{\partial t} N_i N_k \int \phi_t \phi_n dz dA \\ &+ \int u_{mj} N_j \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial x} N_k \int \phi_m \phi_t \phi_n dz dA + \int v_{mj} N_j \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial y} N_k \int \phi_m \phi_t \phi_n dz dA \\ &- \int \left(\frac{\partial u_{mi} N_i}{\partial x} + \frac{\partial v_{mi} N_i}{\partial y} \right) u_{ti} N_i N_k \int \frac{\partial \phi_t}{\partial z} \phi_m \phi_n dz dA \\ &= - \int g \frac{\partial \xi_i N_i}{\partial x} N_k \int \phi_n dz dA \\ &+ \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial x} N_k \right) \int \phi_t \phi_n dz dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \int \phi_t \phi_n dz dA \\ &+ \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial y} N_k \right) \int \phi_t \phi_n dz dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{ti} N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \int \phi_t \phi_n dz dA \\ &+ \int N_i N_k \left[\tau_{xz} \phi_n \right] dA - \int N_i N_k \int \left(\epsilon u_{ti} \frac{\partial \phi_t}{\partial z} - \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right) dz dA \end{aligned} \quad (3.100)$$

となる。ここで、流速の鉛直分布形のモードを例えば

$$\phi_0 = 1 \quad (3.101)$$

$$\phi_n = \cos \left(2n\pi \frac{z - \xi}{h} \right) \quad (3.102)$$

とすると、鉛直積分については

$$a) \int \phi_0 dz = h$$

$$\int \phi_n dz = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$[\phi_0] = 1$$

$$[\phi_n] = (-1)^n$$

$$b) \int \phi_0 \phi_0 dz = h$$

$$\int \phi_n \phi_n dz = h/2 \quad (n \geq 1)$$

$$\int \phi_1 \phi_n dz = 0 \quad (1 \neq n)$$

$$\int \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial \phi_n}{\partial z} dz = 0$$

$$\int \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \frac{\partial \phi_n}{\partial z} dz = (n\pi)^2/2h \quad (n \geq 1)$$

$$\int \frac{\partial \phi_\ell}{\partial z} \frac{\partial \phi_n}{\partial z} dz = 0 \quad (1 \neq n)$$

$$c) \int \phi_m \phi_1 \phi_n dz$$

$\ell, m, n = 0$ の場合 (a) b) 参照)

$n = 1$

$m \backslash \ell$	1	2
1	0	$h/2$
2	$h/2$	0

$n = 2$

$m \backslash \ell$	1	2
1	$h/4$	0
2	0	0

$$d) \int \frac{\partial \phi_\ell}{\partial z} \phi_m \phi_n dz$$

($\ell, m = 0$ ならば 0)

$n = 0$

$m \backslash \ell$	1	2
1	$-h/2$	0
2	0	$-h/2$

$n = 1$

$m \backslash \ell$	1	2
1	0	$-h/2$
2	$-h/8$	0

$n = 2$

$m \backslash \ell$	1	2
1	$+h/4$	0
2	0	—

である。

平面積分については、ランピングを考慮して

$$a) \int \frac{\partial u_{\ell i}}{\partial t} N_i N_k dA \cong \int \frac{\partial u_{\ell k}}{\partial t} N_k dA = \frac{\partial u_{\ell k}}{\partial t} \frac{A}{3} \quad (3.103)$$

$$b) \int u_{mj} N_j \frac{\partial u_{\ell i} N_i}{\partial x} N_k dA + \int v_{mj} N_j \frac{\partial u_{\ell i} N_i}{\partial y} N_k dA$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x} (u_{mj} N_j u_{\ell i} N_i N_k) dA - \int u_{\ell i} N_i \frac{\partial u_{mj} N_j N_k}{\partial x} dA$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial y} (v_{mj} N_j u_{\ell i} N_i N_k) dA - \int v_{\ell i} N_i \frac{\partial u_{mj} N_j N_k}{\partial y} dA$$

$$\begin{aligned}
& \cong \int \frac{\partial}{\partial x} (u_{mk} N_k u_{li} N_i) dA - \int u_{li} N_i \frac{\partial u_{mk} N_k}{\partial x} dA \\
& + \int \frac{\partial}{\partial y} (v_{mk} N_k u_{li} N_i) dA - \int v_{li} N_i \frac{\partial u_{mk} N_k}{\partial y} dA \\
& = \int \frac{\partial}{\partial x} (u_{mk} N_k u_{lakl}) dA - \int u_{la} \frac{\partial u_{mk} N_k}{\partial x} dA \quad (u_{la} : u \text{ の } l \text{ モードの要素内平均値}) \\
& + \int \frac{\partial}{\partial y} (v_{mk} N_k u_{lakl}) dA - \int v_{la} \frac{\partial u_{mk} N_k}{\partial y} dA \quad (u_{lakl} : u \text{ の } l \text{ モードの境界辺 } i \text{ での } k \text{ への重み付平均値}) \\
& = u_{lakl} (u_{mk} \cos \theta_{lx} + v_{mk} \sin \theta_{lx}) \ell_i / 2 \quad (\ell_i : \text{節点 } k \text{ を通る境界辺 } i \text{ の長さ}) \\
& - u_{la} (b_k u_k + c_k u_k) \frac{A}{3} \quad \left(b_k = \frac{\partial N_k}{\partial x}, c_k = \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \quad (3.104)
\end{aligned}$$

ただし, $\cos \theta_{lx}, \sin \theta_{lx}$ は境界辺 i の領域外向きにとった単位法線の向きを x 軸との角度で表したものである。 $(u_{mk} \cos \theta_{lx} + v_{mk} \sin \theta_{lx}) \ell_i / 2$ は, 境界 i を出る流速フラックスを表す。

また, $u_{lakl} = 2/3 u_{lk} + 1/3 u_{li}$ である。

$$\begin{aligned}
c) \quad & \int \left(\frac{\partial u_{ml} N_l}{\partial x} + \frac{\partial v_{ml} N_l}{\partial y} \right) u_{li} N_i N_k dA \\
& = (u_{m,x} + v_{m,y}) u_{lk} \frac{A}{3} \quad (3.105)
\end{aligned}$$

ここで,

$$u_{m,x} = b_1 u_{m1} + b_2 u_{m2} + b_3 u_{m3}$$

$$v_{m,x} = c_1 v_{m1} + c_2 v_{m2} + c_3 v_{m3}$$

である。

$$\begin{aligned}
d) \quad & \int g \frac{\partial \xi_i N_i}{\partial x} N_k dA \\
& = g \xi_{i,x} \frac{A}{3} \quad (3.106)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\xi_{i,x} = b_1 \xi_i + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3$$

である。

$$\begin{aligned}
e) \quad & \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial x} N_k \right) dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) dA \\
& + \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial y} N_k \right) dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) dA \\
& = \int \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} N_k) dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) dA \\
& + \int \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} N_k) dA - \int \left(\epsilon \frac{\partial u_{li} N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) dA
\end{aligned}$$

$$= -(\tau_{xxk} \cos \theta_{ix} + \tau_{ixy} \sin \theta_{ix}) \ell_i / 2 - \epsilon(u_{\ell,x} b_k + u_{\ell,y} c_k) \frac{\Lambda}{3}$$

$$= -(\tau_{xxk}) \ell_i / 2 - \epsilon(u_{\ell,x} b_k + u_{\ell,y} c_k) \frac{\Lambda}{3}$$

ここで、 τ_{xxk} は流速1モードに対し境界iに作用するせん断力のx方向成分であり、通常は0次モードの場合のみ存在し、スリップコンディションの場合には0である。

$$f) \quad \int N_i N_k \tau_{xzi} dA \cong \int N_k \tau_{xzk} dA = \tau_{xzk} \frac{\Lambda}{3} \quad (3.108)$$

$$g) \quad \int N_i N_k \epsilon u_{\ell i} dA \cong \int N_k \epsilon u_{\ell k} dA = \epsilon u_{\ell k} \frac{\Lambda}{3} \quad (3.109)$$

である。これを各モード各節点について重ね合わせると、全体方程式となる。

なお、先に述べたように0次モードでは、移流項を以下のように風上化を行っている。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{|u||dx| + |v||dy|}{2(u^2 + v^2)} \left(u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.110)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{|u||dx| + |v||dy|}{2(u^2 + v^2)} \left(u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.111)$$

この風上化部分の離散化をuを例にとって示す。まず、

$$\frac{|u||dx| + |v||dy|}{2(u^2 + v^2)} = dt^*_k \quad (3.112)$$

とする。これは風上化の重みであり、要素の代表平均流下距離dsを定義する必要がある。この定義の方法はいろいろ考えられるが、本モデルでは

$$\sqrt{u^2 + v^2} ds = |u_k| dx_k + |v_k| dy_k \quad (3.113)$$

と定義して

$$dx_k = 1 / \sqrt{\sum_e b_{ek}^2 (A_e / 3) / \sum (A_e / 3)} \quad (3.114)$$

$$dy_k = 1 / \sqrt{\sum_e c_{ek}^2 (A_e / 3) / \sum (A_e / 3)} \quad (3.115)$$

と与えた。

$$\begin{aligned} & \int dt^*_k N_k \left(u_j^2 N_j \frac{\partial^2 u_i N_i}{\partial x^2} + 2u_j v_j N_j \frac{\partial^2 u_i N_i}{\partial x \partial y} + v_j^2 N_j \frac{\partial^2 u_i N_i}{\partial y^2} \right) dA \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} \left(dt^*_k N_k \left(u_j^2 N_j \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + u_j v_j N_j \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) \right) dA \\ & \quad - \int \left(\frac{\partial dt^*_k N_k u_j^2 N_j}{\partial x} \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + \frac{\partial dt^*_k N_k u_j v_j N_j}{\partial x} \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) dA \\ & \quad + \int \frac{\partial}{\partial y} \left(dt^*_k N_k \left(u_j v_j N_j \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + v_j^2 N_j \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) \right) dA \\ & \quad - \int \left(\frac{\partial dt^*_k N_k u_j v_j N_j}{\partial y} \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + \frac{\partial dt^*_k N_k v_j^2 N_j}{\partial y} \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \int \frac{\partial}{\partial x} \left(dt^*_k N_k \left(u_k^2 \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + u_k v_k \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) \right) dA \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial dt^*_k N_k u_k^2}{\partial x} \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + \frac{\partial dt^*_k N_k u_k v_k}{\partial x} \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) dA \\
&\quad + \int \frac{\partial}{\partial y} \left(dt^*_k N_k \left(u_k v_k \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + v_k^2 \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) \right) dA \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial dt^*_k N_k u_k v_k}{\partial y} \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + \frac{\partial dt^*_k N_k v_k^2}{\partial y} \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) dA \\
&\cong \int dt^*_k N_k (u_k \cos \theta_{ix} + v_k \sin \theta_{ix}) (u_k (u_{,x})_i + v_k (u_{,y})_i) dl \\
&\quad - \int dt^*_k (b_k u_k + c_k v_k) \left(u_k \frac{\partial u_i N_i}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_i N_i}{\partial y} \right) dA \\
&= dt^*_k (u_k \cos \theta_{ix} + v_k \sin \theta_{ix}) (u_k (u_{,x})_i + v_k (u_{,y})_i) \ell_i / 2 \quad ((u_{,x})_i : \text{境界辺 } i \text{ 上での } u_{,x} \text{ の値}) \\
&\quad - dt^*_k (b_k u_k + c_k v_k) (u_k (u_{,x})_a + v_k (u_{,y})_a) A \quad ((u_{,x})_a : \text{要素内の } u_{,x} \text{ の値}) \quad (3.116)
\end{aligned}$$

である。ここで、境界条件として流速のシアが与えられる場合は、その値を与える。本モデルでは、上下流端で周辺値にも要素内値と同じものを与え、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(U \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0 \quad (3.117)$$

となるようにした。また、 $u_{nk} = (u_k \cos \theta_{ix} + v_k \sin \theta_{ix}) \ell_i$ は節点 k を通る流速のフラックスである。開境界では、これは節点値から求めたものではなく、水位に関する境界条件及び連続条件(3.2.2節)を満足するように逆算したもの、水位固定の流出部では、

$$u_{nk} = \frac{q_{nn}}{h_k} \quad (3.118)$$

を与えべきであると考えられたが、実際に計算するとこれは不安定になる傾向があり、本モデルでは、この部分の計算には、節点値 u_k, v_k もしくは要素平均値 u_a, v_a (流量/hに近い)を用いることで対応した。しかし、要素平均値を用いる場合には上下流の境界で相反する符号を持つ正負の人工粘性による拡散が入ることになる。負の人工粘性が入る場合には節点値とすることで対応できるが、節点値で計算してもなお何等かの原因によって境界部分で計算が不安定になる場合には、リストベクトルを作り境界の辺上で適宜人工粘性を与えて平滑化する。また、上流端においては流速分布形を固定し、流量と水深に応じて流速を定めるものとする。側壁においては側壁で通過するフラックスが0となるように修正を行う。

なお、計算に当たっては、解析対象区間のみを計算するのではなく、境界条件を与える断面は模型実験と同様に十分外側にとり、境界の変動が直接内部に影響するのではなく、流れが滑らかに接続するようにすると安定性が良いようである。

4章で示す砂州の計算の場合には、数波長の距離で周期境界条件を与えている。この場合は流速については、下流端と上流端を同一の辺と見なして重ね合わせることでフリーとなり、水位のみ1つの設定断面で、横断平均水深が時間変化しないように更正することで境界条件を与えている。

3.2.2 連続式の離散化

水位計算に用いる連続式は、0次モードの時刻 t の流速を用いて

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (u^i + u^*)}{\partial x} h + \frac{\partial (v^i + v^*)}{\partial y} h = 0 \quad (3.119)$$

と表される。ここで、 u^* 、 v^* は要素内での流速の単位時間内の変動を表すもので

$$u^* = \left(-u_n \frac{\partial u}{\partial x} - v_n \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \tau_{xn} \right) dt \times w \quad (w: 0 \sim 1) \quad (3.120)$$

$$v^* = \left(-u_n \frac{\partial v}{\partial x} - v_n \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \tau_{yn} \right) dt \times w \quad (3.121)$$

であり、これは全て要素内平均値で表される。これに重み N_k を掛けて平面積分して離散化すると

$$a) \quad \int \frac{\partial \xi_i N_i}{\partial t} N_k dA \cong \int \frac{\partial \xi_k}{\partial t} N_k dA = \frac{\partial \xi_k}{\partial t} \frac{A}{3} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \int \frac{\partial (u^i + u^*)}{\partial x} h_i N_i N_k dA + \int \frac{\partial (v^i + v^*)}{\partial y} h_i N_i N_k dA \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} ((u^i + u^*) h_i N_i N_k) dA + \int \frac{\partial}{\partial y} ((v^i + v^*) h_i N_i N_k) dA \\ &\quad - \int (u^i + u^*) h_i N_i \frac{\partial N_k}{\partial x} dA - \int (v^i + v^*) h_i N_i \frac{\partial N_k}{\partial y} dA \\ &= \int ((q_{xi} \cos \theta_{xi} + q_{yi} \sin \theta_{xi}) N_i N_k) dl \\ &\quad - \int ((q_{xn} + u^* h_n) b_k + (q_{yn} + v^* h_n) c_k) dA \\ &\cong (q_{xki} \cos \theta_{xi} + q_{yki} \sin \theta_{xi}) \ell_i / 2 \\ &\quad - ((q_{xn} + u^* h_n) b_k + (q_{yn} + v^* h_n) c_k) A \end{aligned} \quad (3.123)$$

となる。ここで、

$$(q_{xki} \cos \theta_{xi} + q_{yki} \sin \theta_{xi}) = q_n \quad (3.124)$$

であり、これは節点 k を中心とする境界辺 i を通る流量を表し、通常上流端では境界条件として与えられる。

また、下流端の水位固定点では、 ξ は直接与えられ、通過流量は $\partial \xi / \partial t = 0$ から式(3.123) (3.124)を用いて求められる。

3.2.3 河床変動式の離散化

河床変動は、流砂の連続条件から、

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_b \cos \gamma}{\partial x} + \frac{\partial q_b \sin \gamma}{\partial y} + (q_{su} - w_o c_b) \right) = 0 \quad (3.125)$$

である。これに重み N_k を掛けて平面積分して離散化すると

$$a) \quad \int \frac{\partial z_{bi} N_i}{\partial t} N_k dA \cong \int \frac{\partial z_{bk}}{\partial t} N_k dA = \frac{\partial z_{bk}}{\partial t} \frac{A}{3} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & \int \frac{\partial q_{bi} \cos \gamma_i N_i}{\partial x} N_k d\Lambda + \int \frac{\partial q_{bi} \sin \gamma_i N_i}{\partial y} N_k d\Lambda \\
&= \int \frac{\partial}{\partial x} (q_{bi} \cos \gamma_i N_i N_k) d\Lambda + \int \frac{\partial}{\partial y} (q_{bi} \sin \gamma_i N_i N_k) d\Lambda \\
&\quad - \int \left(q_{bi} \cos \gamma_i N_i \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) d\Lambda - \int \left(q_{bi} \sin \gamma_i N_i \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Lambda \\
&= \int (q_{bxi} \cos \theta_{xi} + q_{byi} \sin \theta_{xi}) N_i N_k d\Lambda \\
&\quad - \int (q_{bi} \cos \gamma_i b_k + q_{bi} \sin \gamma_i c_k) d\Lambda \\
&= (q_{bxxi} \cos \theta_{xi} + q_{byxi} \sin \theta_{xi}) l_i / 2 \\
&\quad - (q_{bi} \cos \gamma_i b_k + q_{bi} \sin \gamma_i c_k) \Lambda
\end{aligned} \tag{3.127}$$

である。ここで、

$$(q_{bxxi} \cos \theta_{xi} + q_{byxi} \sin \theta_{xi}) = q_{bnk} \tag{3.128}$$

は、節点 k を中心とする境界辺を通過する流砂量であり、開境界で河床高を固定しない場合には、これを与える必要がある。上流端などでは節点流速ベクトルに応じた平衡流砂量ベクトルを与える。また、河床高を固定した場合には、流出流砂量は $\partial z_b / \partial t = 0$ より、逆算して求められる。

また、浮遊砂を考慮した場合には、

$$c) \quad \int (q_{su} - w_o c_b)_i N_i N_k d\Lambda \cong \int (q_{su} - w_o c_b)_k N_k d\Lambda = (q_{su} - w_o c_b)_k \frac{\Lambda}{3} \tag{3.129}$$

を加える。

なお、流砂の運動方向は式(3.77) (3.78) (3.88) (3.93) (3.94)を用いて

$$\cos \gamma = \frac{u_b''}{u''} - \frac{u_{*c}}{u_*} \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \tag{3.130}$$

$$\sin \gamma = \frac{v_b''}{u''} - \frac{u_{*c}}{u_*} \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\mu_s / \mu_k}} \tag{3.131}$$

$$q_b = q_b (\vec{\tau}_{*c} + \Delta \vec{\tau}_*, \tau_{*c} \cos \theta) \tag{3.132}$$

と表す。ただし、 $\tan \theta_x, \tan \theta_y \ll 1$ の場合である。掃流力 τ_c は、平均流速ではなくてあくまで河床面流速を用いて

$$\vec{\tau}_c = \left(u_*^2 \frac{u_b''}{u''}, u_*^2 \frac{v_b''}{u''} \right), \quad u_*^2 = \frac{1}{\phi_b^2} (u_b''^2 + v_b''^2) \tag{3.133}$$

である。

なお、三角形要素の節点 i の座標 (x, y, z) から辺ベクトルを求めて、これから要素の面積ベクトル S を

$$S(S_x, S_y, S_z) = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_{21} & \Delta y_{21} & \Delta z_{21} \\ \Delta x_{31} & \Delta y_{31} & \Delta z_{31} \end{vmatrix} \tag{3.134}$$

のように定めると、斜面の最急勾配 θ 、 Δr を定める $\sin \theta_x, \sin \theta_y$ などは、

$$\cos \theta = \frac{S_z}{(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)^{1/2}} \quad (3.135)$$

$$\sin \theta_x = \frac{S_x}{(S_x^2 + S_z^2)^{1/2}} \quad (3.136)$$

$$\sin \theta_y = \frac{S_y}{(S_y^2 + S_z^2)^{1/2}} \quad (3.137)$$

のように与えられる。

3.2.3 要素の重ね合わせ

以上のように、離散化して求めた各要素 ie に対する節点 1, 2, 3 での時間変動量 $(\Delta f)_e$ を、各要素 ie で節点ごとに重ね合わせて全体方程式を作成する。全体方程式は、

Loop $ie = 1 \sim ie_{\max}$

$j_1 = \text{IN}(ie, 1)$ (j_1 : 要素 ie の第 1 節点の全体節点番号)

$j_2 = \text{IN}(ie, 2)$

$j_3 = \text{IN}(ie, 3)$

$\Delta f_{j1} = \Delta f_{j1} + (\Delta f_1)_{ie}$

$\Delta f_{j2} = \Delta f_{j2} + (\Delta f_2)_{ie}$

$\Delta f_{j3} = \Delta f_{j3} + (\Delta f_3)_{ie}$

で作成される。 $\sum \Delta f_j$ は各節点での体積によって重み付けられた変動量であるので、これを同様に求められた体積 $\sum (A_{ie}/3) h_j f_i^2$ (水深はランピングされている) または $\sum (A_{ie}/3)$ (水位、河床変動の場合) で除して、各節点 j の時間変動量が、

$$\dot{f}_j = \sum \Delta f_j / \sum (A_{ie}/3) h_j \quad (3.138)$$

で与えられる。

3.3 時間積分過程

時間積分はランピングパラメータに基づく人工粘性を含まない 2 段階陽解法で行っている。

通常の 2 段階陽解法は、ランピングパラメータ e を用いて、マスマトリクスを

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M \quad (3.139)$$

($\bar{M}$: ランプドマスマトリクス, $\bar{M}_{ij} = \sum (A_{ie}/3) h_j f_i^2 \sum (A_{ie}/3)$, $\bar{M}_{ij} = 0$ ($i \neq j$))

と表して、

$$\bar{M} f^{n+1/2} = \tilde{M} f^n + (\sum \Delta f_j) \Delta t / 2 \quad (3.140)$$

$$\bar{M} f^{n+1} = \tilde{M} f^n + (\sum \Delta f_j) \Delta t^{n+1/2} \quad (3.141)$$

で、 $f(u, v, \xi, z_b)$ の時間変化を求める。しかし、この場合には $\bar{M}$ と $\tilde{M}$ の違いから無指向性の拡散が入る。本モデルではこれをなくするために $e = 1$ (0% 粘性) として計算を行う。この時、

$$f^{n+1/2} = f^n + (\sum \Delta f_j) \Delta t / \bar{M} \quad (3.142)$$

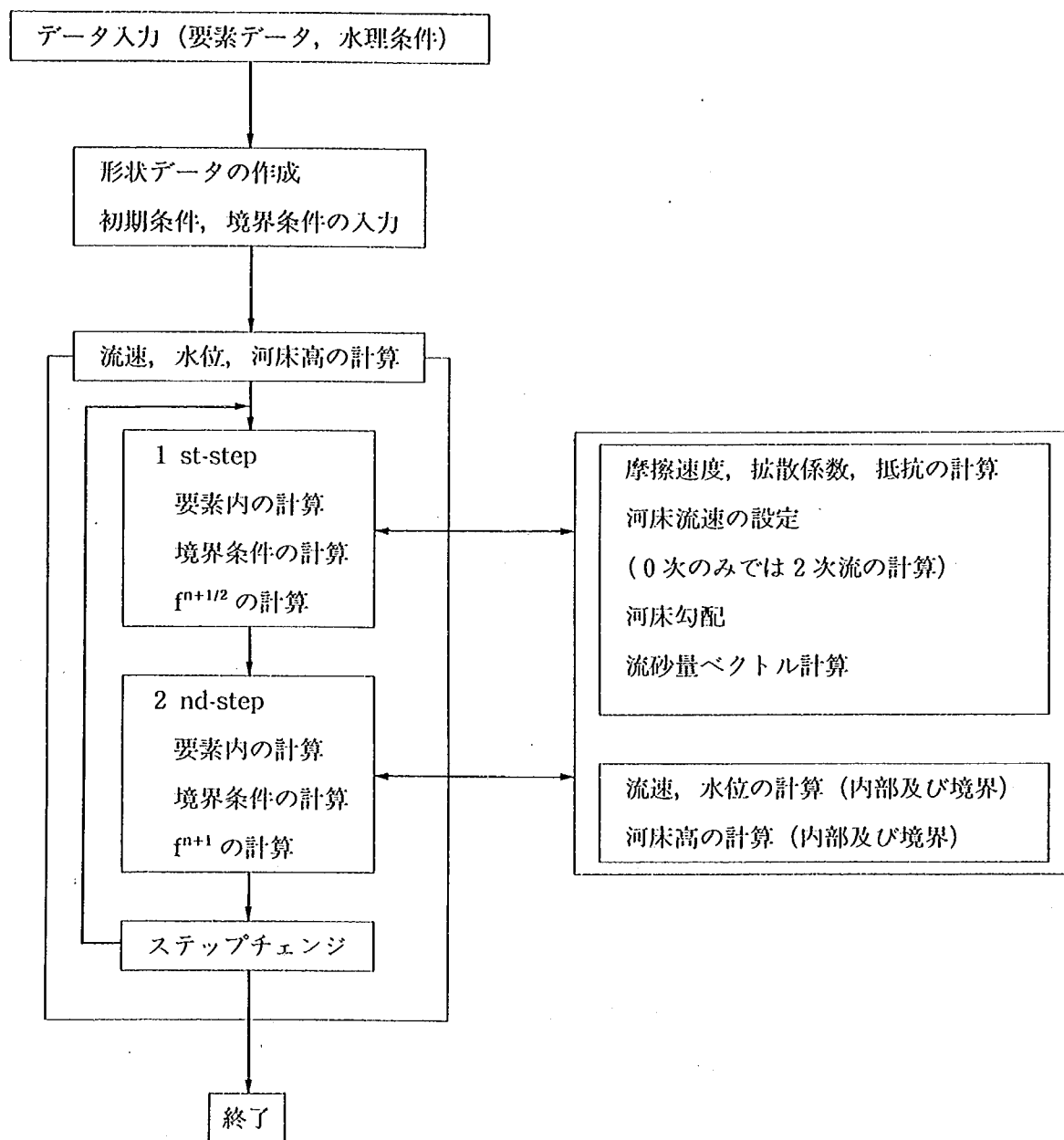
$$f^{n+1} = f^n + (\sum \Delta f_j) \Delta t^{n+1/2} / \bar{M} \quad (3.143)$$

となり、2次のオイラー法になる。本モデルでは、安定性を十分考慮してモデルを作成しているので、 dt が収束条件を満たせばこの2次の陽解法で、安定に解を求めることができた。

時間積分の精度をより高めたい場合には、3次、4次のRunge-Kutta(Gill)法などを用いれば良い。

3.4 計算の全体フロー

計算は、以下のフローに従って行われる。



なお、本モデルでの要素データ以外の調整パラメータは dt 、重み w (水位計算)、 Δ (ステップレングス) の3つのみであり、通常は $w = (1/2 \sim 1)$ 、 $\Delta = (0 \sim 300)d$ (粒径) として計算した。

その他のパラメータは、 N_* 、抵抗係数もしくは粗度係数だけであり、物理的に意味のない調整パラメータはない。

4 章 検証計算

本研究では、流れの計算の部分で準3次元（多自由度）型のモデルと平面計算（1自由度）型の簡易モデルを作成している。ただし、多自由度型は計算に時間がかかったため、河床変動モデル、安定性の検討は主に簡易モデルで行った。以下にその概要を述べる。

4.1 簡易モデルの検証

簡易モデルでは、まず弯曲水路での実験結果⁶²⁾と比較を行い、安定性やパラメータの選び方、解の精度などについて検討した。次に、直線河道に初期じょう乱を与え、砂州の発生、非発生の条件で計算を行い、砂州計算の有効性について検討した。

4.1.1 弯曲水路実験との比較

図-4.1に示す水路で、以下の表-4.1, 4.2に示す条件で河床変動計算を行い、解の精度について検討した。なお、要素分割は図-4.1とこれと逆の対角線による三角形分割のものをを用いており、単一の分割では、河床高が壁面で振動し、安定した解が得られなかった。

なお、計算時間間隔は初期状態においては、 $dt=0.15$ （横断平均的に安定な最大値）で安定であったが、河床変動とともに Fr が横断的に変化して安定条件が変化して不安定となったため、 $dt=0.12$ として計算を行っている。

(1) 安定性の検討

ここでは、まず本モデルで導入した安定化手法の効果について述べる。

図-4.1.2~4.1.5は、風上化処理など本モデルで導入した流れと水位の安定化手法を用いずに、ランピングパラメーターによる人工粘性を用いて計算した結果を示している。流速は、全体的に平滑化され、横断流速分布はほとんど持たず、縦断的な変化も小さい。そのため、河床変動は二次流にのみよって生じ、その二次流も流速が側壁に沿った形で決まり、曲率が変化せず、弯曲部全体で同様な変化を起こし、弯曲部の上下流端で多少異なるのみで、実際の河床変動とは異なっている。また、河床変動に人工粘性を導入すると何を計算しているのか分からなくなるため、河床高の計算には人工粘性を入れてないので、振動が生じており、これは境界で特に大きい。流速の計算の方法や流砂量ベクトルの評価方法など種々の方法について検討したが、この要素分割のパターンではついに解が安定して得られることはなかった。（何等かの工夫をしないと河床のじょう乱によって流速が発散する。）また、この人工粘性をいれないで、拡散を拡散係数 $\epsilon(xu_*h/6)$ のものだけにすると解は定まらない。要素分割を変更した場合の結果は図-4.1.6(a) (b)のようになる。この場合、図に示されるように河床高の乱れが要素分割パターンに依存していることがわかる。

図-4.7(a) (b)は、2重要素重ね合わせて解いた結果を示す。このように解いたときのみ、河床が乱れ変動せずに計算を行うことができた。要素分割の仕方によってはこのようにしなくても良い可能性があるが、それは解が要素の分割方法に依ることになるので、一般的ではなく望ましくない。

さらに、安定化手法を導入したことにより、 dt を大きくできる様になり、安定性が向上した。なお、同

一の dt では人工粘性によるものは計算できなかった。これは、人工粘性が $1/dt$ に比例するためであり、ランピングパラメータによる人工粘性によるものは dt を小さくしても解の精度は上がらない。

(2) 計算結果—河床高の縦断変化

粗度係数、ステップレングスの違い、河床流速の風上化の有無の影響について検討するために種々の条件で計算した河床変動結果を実験結果と共にそれぞれ図-4.1.8～4.1.13に示す。

図-4.1.8-4.1.13から分かるように、粗度やステップレングスを変化させると洗掘位置や堆積位置が若干異なる。ただし、ステップレングスの影響はそれほど大きくはない。これは、実験条件がそれほど非平衡的でないことや非平衡性の取り込み方が近似的であることによるとと思われる。いずれにしても、実験条件に応じた値を用いると弯曲部の河床変動状況は、概ね実験結果に近い様子を示す。しかし、内岸側の堆積高は計算の方が高く、洗掘深は25%ほど計算の方が小さい。実験では河床波ができて、そこで最大洗掘となるため、平均洗掘で計算するとこの程度違う。ただし、この計算結果は平衡状態のものではなく途中段階のものであり、洗掘深の比較は正確ではない。この後、平衡になるまで計算を続けようとする洗掘は増大するが、内岸の河床が高くなりすぎて計算不能となった。すなわち、堆積が生じる位置が平面的には実際のものとは異なり、その結果として河床高も異なることになる。

実験では、流砂は必ずしも内岸の側壁に沿って動かず、また水深の低下に伴う流速の低下も小さいため多くの流砂は、堆積域の下流に堆積して堆積域を拡大させていた。したがって、この堆積位置の違いには、以下の原因が考えられる。

1) 側壁流速の境界条件の影響

この計算では、横断方向の要素分割が非常に粗い。計算では壁面とノーマルな流速を0としているため、壁面近くの要素内の流向は、壁面の影響を大きく受け、流砂量ベクトルの向きが歪む。そのため、本来ならば外岸へ回り込もうとする流砂が、境界条件に引かれて余分に内岸側へ来てしまい、堆積高、堆積位置が異なる。

2) 水深の縦断変化に伴う鉛直流速分布の変化

縦断方向に河床高が急変化する場合には、鉛直流速分布は縦断的に変化する。流下に従い河床が高くなる場合には、底面流速が速くなり、掃流力が増大するために堆積せずに河床の高い所を流下して、その下流に堆積することが可能である。しかし、このモデルでは鉛直流速分布形を固定しているために、この掃流力の歪は再現できていない。

3) 二次流の与え方

本モデルでは曲率と水深に比例させて、二次流を与えているが2)のような場合には、主流の鉛直流速分布が変化して、二次流の強度も異なる。

この内、1)については要素分割を細かくすれば対応可能であるが、2)である場合には流速分布の変化を取り入れていないこの簡易モデル(1自由度)では対処できない。河床高が縦断的に変化する場合もしくは河床高が極めて高い場合にはその部分で抵抗則及び流砂量を実験と合うように変えることが考えられるが、抵抗則を厳密にしないと、条件判別や特殊な計算を要し、モデルとしての一貫性や安定性を損ねることになる。

この実験条件は、掃流力が限界掃流力に近く非常に厳しい条件であるので特に違いが目立った。すなわ

ち、最大堆積位置付近で限界掃流力となって堆積が進行し、堆積位置がことなる。実験条件や計算条件、実際に起きている現象によっては、鉛直流速分布の変化などを考慮しなくても良い場合も多い（複断面などで水深が全体的に十分大きい場合など）。厳密性を高めるならば鉛直分布の変化を考慮した方が良い。しかし、これには流速分布が変化する場合や河床高が急変化する場合の局所的な抵抗則が絡んでいるので、流速分布を考慮しさえすれば良いわけではない。特に河床変動が激しく、内岸の河床が高くなる場合には注意が必要である。

また、この堆積高と流砂量の違いのため、下流の河床変動の位相が実験と多少ずれているようである。また、下流端で河床高を固定したため、多少乱れが見られるが、内部に影響は及ばなかった。

(3) 計算結果－流速の平面分布

図-4.1.15～4.1.18に計算結果の流速ベクトル及び河床コンターを、図-4.1.19に実験結果を示す。流速の計算結果は横断方向に分布を持ち、かつ安定しているが、内岸部において河床が高い部分では実験結果に比べて小さくなりすぎていることが分かる。なお、先に示したように人工粘性を入れて計算すると解は求められるが、流速は横断方向に平滑化され、二次流の影響だけで洗掘が進行し、かなり違った解になるので、これは避けなければならない。

4.1.2 砂州の計算

ここでは、本モデルでの砂州計算の有効性について検討した。計算条件は、山坂らの実験条件⁶³⁾を参考にして表-4.3のように定め、発生、非発生領域での有限振幅砂州の発達、減衰状況について調べた。ただし、原文には水理条件や実験データが詳しくは書かれていなかったもので、粗度などは著者らが定めた。水路と要素分割は、図-4.1.22, 4.1.23の様であり、これも2重にして用いている。なお、水路の長さは実験の波長の2倍にして周期境界条件を用いて計算している。

なお、計算したケースは表-4.4のようであり、ケース①②が発生条件、ケース③④が非発生の条件であり、それぞれじょう乱の初期波高を変えてある。なお、ケース⑤では二次流の影響について調べた。

(1) 計算結果－河床高の縦断変化

図-4.1.24, 4.1.25に示すようにケース①②では、じょう乱の初期の波高に関わらず、平衡波高約2.2cmで移動する交互砂州ができた。また、図-4.1.26に示すように初期波高の小さいケース③では砂州が減衰し、初期波高の大きいケース④では、初め減衰を始めるがある程度小さくなったところで、波長の異なるじょう乱が生じてこれが発達し平衡状態となった。(図-4.1.27, 4.1.28)

なお、この砂州の計算においては、先の4.1.1で述べたように水深がある一定値((平均水深－平衡波高)/2)より少し大きい程度の値)を越えた場合には河床抵抗の計算に用いる水深をその値に固定する(流速が大きくなり、掃流力が大きくなる)という方法を用いて抵抗則を変化させている。これを行わない場合には、平衡状態は得られなかった。

一方、実験結果は山坂ら⁶³⁾によると、ケース①②の場合には平衡波高2.4cmの砂州ができており、ケース③では、砂州が減衰している。これらの結果は計算結果と良く一致している。ただし、計算の平衡波高は抵抗則の影響を受けている。ケース④では、波高は減衰しない結果となっている。また、ケース④では河床に短対角州が見られたと記述されている。(詳しくは書かれていない) 計算で見られた砂州は、

$$l/B=0.9/0.3=3 \leq 3$$

$$\Delta z/B=0.022/0.3=0.7 \geq 0.04$$

となり、村本、藤田の中期模河床形態分類⁶⁰⁾でみると短対角州の領域に入る。したがって、これは短対角州であるとも考えられるが、厳密には分からない。従来の研究によれば、砂州の発達領域で交互砂州は発生することになっている。しかし、短対角州の領域区分上で解析的に短対角州が発達することを示している例は、著者がみた範囲ではなかった。そこで、本モデルと従来のモデル(岸、黒木⁶⁵⁾福岡、山坂⁴⁹⁾)との違いについて考察し、検討した。

林ら⁶⁰⁾⁶¹⁾は、流砂の移動に伴う掃流力のステップレングス分の位相のずれが、河床波の発達に大きな影響を及ぼすとしている。そこで、ステップレングスを0～300dで変化させて計算してみた結果、砂州の発達状況に大きな変化を見いだすことはできなかった。本モデルでは直線河道でも流線が曲がっていれば、流れの曲率に合わせて二次流が加えられている。次に、二次流強度を表す N_* を0にして計算を行った。ただし、初期条件にはケース④で波長の短いものが現れ始めた時のものを用いた。図-4.1.29を見れば分かるように二次流を除去した場合には、河床波は減衰した。

したがって、この河床波が短対角州であるかないかに関わらず、二次流を考慮したことによってこれが生じていることが分かる。図からわかるようにこの河床波が発達した場合の流線の曲率は大きい。流線の曲率が B/l^2 で評価され、二次流が h と曲率によって定まるとして、二次流は $Bh/l^2 = (h/B)(B/l)^2$ に比例するとすれば、短対角州の条件④と交互砂州の条件②では、これは $(1.5) \times (3)^2 \cong 14$ となり、この影響は1 order 高くなっている。すなわち、波長が極めて短く、 B/h が小さい場合には、従来のモデルでは考慮していない現象が起こり、このような河床波が発生していることがわかった。ただし、計算ではケース④の初期じょう乱は、減衰しており、実験結果とは異なるようである。

(2) 計算結果—流速の平面分布

図-4.1.30～4.1.35に流速分布を示す。

ケース①②の流速はかなり滑らかであり、また二次流の影響はかなり小さく、交互砂州領域では二次流の有無は関係ないようである。ケース③④では、流速は河床波に応じて変化してかなり乱れているように見えるがこれで安定しており、縦断間隔を細かくすればかなり滑らかな解になると思われる。また、図から明らかなようにケース④では二次流の影響は大きい。

(3) まとめ

また、河床波の縦断的な前のめりは多少見られるが、計算で得られる河床波は(1,1)モードが中心であり、解析解で得られる(2,0)モード、(3,1)モード⁴⁴⁾⁴⁵⁾は河床コンターからは、計算できてないように思える。また、計算では明確な前縁線はみられない。解析では、兩岸の土砂が対岸に移動する際に中央部で土砂を落として、(2,0)モードが発達することになっている様であるが、河道中央部で土砂がたまり始めるきっかけがないためか河道中央部の堆積はない。これは、要素の横断分割が粗いためであるかもしれないが、同様な現象は清水の差分計算でも見られ、原因はよく分からない。

4.1.3 簡易モデルのまとめ

弯曲水路及び交互砂州の計算から、堆積位置、洗掘位置、洗掘深、砂州の発達の状況などについては、

平面二次元の計算で、かなり粗く要素分割しても、種々の現象をある程度まで定量的に表せることが分かった。

また、解は流れ、水位、河床高共に人工粘性なしでも十分安定した解が得られており、安定化手法の有効性が示された。

しかし、平面二次元計算では鉛直流速分布の変化に伴う現象、河床抵抗の問題などが残っており、これらの現象が大きく影響する場合には適用性が下がり、このように定量的な判断を行う場合には問題がある条件を明確にする必要がある。そのためには、種々の条件で計算を行い、個々の条件に対するモデルの適用性について検討する必要がある。

また、安定性については、河床変動を伴う場合には二重要素の重ね合わせを行わないと、安定性を確保できない。また、風上化などの安定化手法により、拡散性が大きくなって安定性は増大するが、2章でも述べたように、風上化は2次のテンソル量で表される拡散であるために、2重要素の重ね合わせをしないと正しい計算ができない。すなわち、三角形要素一次補間で表すならば、安定化に関与している拡散の現象が正しく計算できないので、2重要素重ね合わせを行う必要がある。

4.2 多自由度型モデルの検証

ここでは、鉛直方向多自由度型のモデルの精度について、流れに対しては現地の洪水流を対象に、河床変動については簡易モデルと同じ弯曲水路の実験を対象に検討を行う。

本研究に先駆けて作成した有限要素法による洪水流計算モデルは、初めに述べたように計算に時間がかかるという問題があった。そこで、まず水位の初期値に1次元不等流計算の値を与えて収束計算過程を短縮するように変更した。次にモデル本体の計算プログラムについて、ベクトルチューニングを行い、計算実行速度の向上を図った。この改良モデル（ベクタライズ）の計算の実行時間は約1/5程度に短縮された。しかし、なお、それでも簡易モデルに比べて非常に遅い。ここで、示す検証結果は簡略化しない場合のものである。

4.2.1 流れ計算の検証

(1) 計算の概要

計算モデルを実河川に適用し、洪水流計算モデルの検証を行った。計算対象河道は図-4.2.1に示す実河道モデルものである。この河道の堤間幅は約700m、低水路幅は約250mである。なお、粗度は低水路で0.016、高水敷で0.03~0.05、また河岸沿いの樹木群では0.1~1.0を与えた。また、流量には7500~8000m³/sを与えている。この時、水深は低水路で7~8m、水面勾配は1/3000程度、低水路流速は4~5m/sとなる。なお、検証データには航測写真による測定値を用いている。

(2) 計算結果

まず、図-4.2.1に示した解析対象域のみについて計算を行った。その結果、図-4.2.3、4.2.4に示す。これより、下流部では流況や横断的な流速分布は良く一致している。しかし、上流部、特に上流端付近においては、上流端での流速分布が現地のものとかかなり異なっているためにその影響がしばらく残り、異なる流速分布となっている。すなわち、上流端での高水敷と低水路の流量配分に問題がある。

そこで、上流端で部分での流速分布をある程度正確に与えるため、上流端の断面形をした、堤間幅の2倍程度の長さを持つ導流部を上流端に接続して、上流端部で河積と粗度に応じた流速分布となるようにして、再度計算を行った。(図-4.2.2) 結果を図-4.2.5~4.2.8に示す。(4.2.8は粗度分布を変化させたものである。) これらの図は、航測写真による流速分布に、計算結果(黒丸)を重ねて表したものである。これより、上流部(No.129.5)から下流部(No.126.5)まで、流下方向の流速の横断分布は、比較的良好一致をしている事が分かる。ただし、高水敷上では計算結果の方がやや速くなる傾向があり、No.126.5の右岸などでは特に顕著に見える。この下流部での表面流速ベクトルについて、航測結果と計算結果を比較して、図-4.2.10に表す。これを見ると、全体的に流向流速は良く一致しており、先に述べた右岸での違いもそれほど表れていない。この部分には、河岸に大きな樹木群(影部)あり、流れが乱れるために、比較する条件、例えば位置やタイミングなどの微妙な違いによってこのような差異が生じたとも考えられるが、明確な理由は不明である。

また、水位については計算結果において、低水路が縮小し、かつ低水路の流れが右岸に乗り上げる断面No.127.5~No.127.0の区間において、かなりせき上げが起こっている。これについては、粗度分布の与え方が十分でないなどの原因が考えられるが、実測値の信頼性も含めてさらに詳細な検討が必要である。(図-4.2.11)

(3) まとめ

洪水流計算法の検証を行い、比較的精度良く流れの状況を再現する事ができた。しかしながら、粗度分布の与え方によって流れの状況が変ることなどが考えられ、また検証データの方が必ずしも正しくない可能性も有る。したがって、種々の模型実験結果などと比較計算を行い、検証データの積上げ、ノウハウの向上などを図ることが望まれる。

4.2.2 河床変動計算の検証

4.1.1と同一の条件で、多自由度型モデルにより計算を行った。図-4.2.12に実験結果を、図-4.2.13(a)(b)には計算結果を示す。ここで、(a)(b)はそれぞれ反転メッシュ重ね合わせなしの場合の、(a)多自由度型モデル、(b)簡易モデル(人工粘性なし)の結果である。ただし、実験結果が平衡状態のものであるのに対し、計算結果は計算に時間を要し、長時間計算すると(a)(b)では河床変動が乱れたために、ここでは(a)750s後、(b)1200s後のものを表している。

また、(a)(b)では要素の切り方、人工粘性の形態、計算方法などが異なる。要素分割は図-4.2.15のようである。これら条件の違いのため、定量的な評価はできない。ここでは河床変動状況の定性的な比較を行い、計算法の問題点を検討する。

計算結果では、どちらも通水時間が短く、河床の変化が小さいため上流で堆積、下流で洗掘するように見えるが、変動の横断的な差をとれば中央部で洗掘、堆積が生じていることがわかる。流れの計算に準3次元モデルを使用した場合には、洗掘位置などの変動状況は実験結果をある程度満足する。しかし、この富所タイプのモデルでは、式全体にランピングをかけ、かつ計算式の簡略化を行っていないために計算に時間がかかること、また要素の二重重ね合わせや風上化などの安定化処理をしていないために計算が不安定になりやすい。これに対し、平面流計算に二次流を付与する簡易モデルの場合は、計算が早い。しかし、

計算を安定にするためにランピングに起因する人工粘性を導入して安易に解を求めると流れが平滑化されすぎたため、洗掘形状のパターンは、実験値及び人工粘性なしの場合に比べて異なっている。

また、図-4.2.14に多自由度型モデルで計算された二次流成分の横断面内分布を示す。横断面内で二次流の発生が認められるが、これの発達には簡易モデルと異なり時間がかかり、また多少分布が乱れている。流れの状況を見ると、0次モードで輸送されるものは全成分については、風上化处理を行い、安定化を図った方が良い。

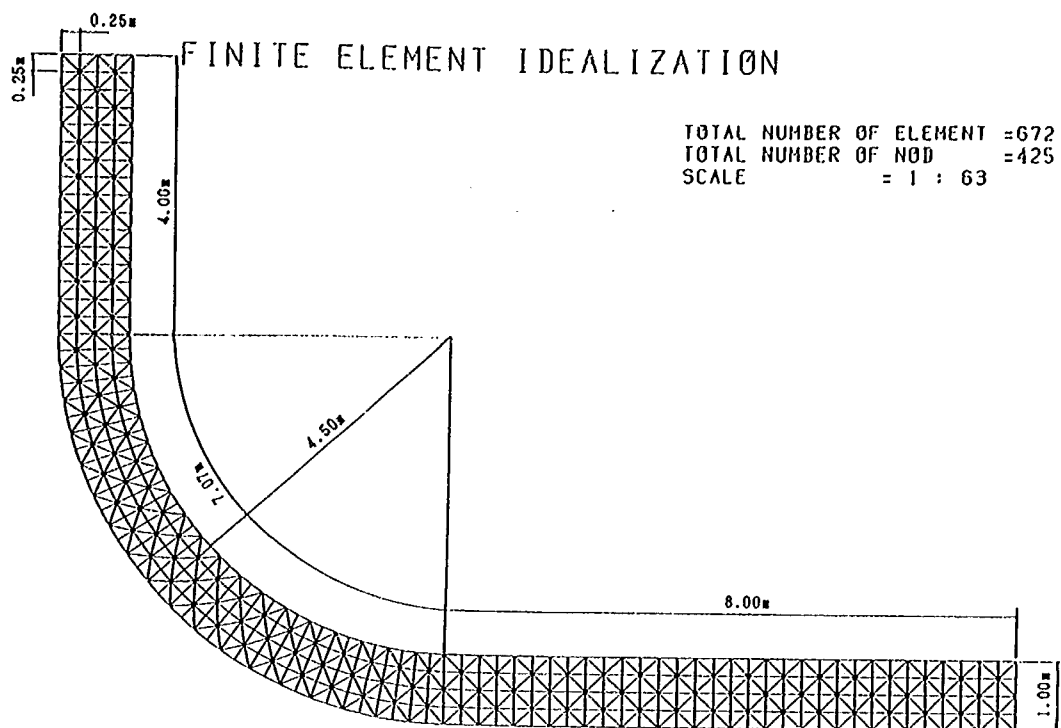


図-4.1 要素分割例 (彎曲水路)

表 4 - 1 計算諸元

計 算 時 間 々 隔	0.05	sec
粗 度 係 数	0.0125	
平 均 粒 径	0.001	m
タイムファクター	10.0	

表 4 - 2 境界条件

上流端境界	水 位 変 動	固定 0.003m
	河 床 変 動	固定 0.000m
上流端境界	水 位 変 動	固定 0.003m
	河 床 変 動	固定 0.000m
側 壁 境 界	二 次 流	考 慮 せ ず
	抵 抗	考 慮 せ ず

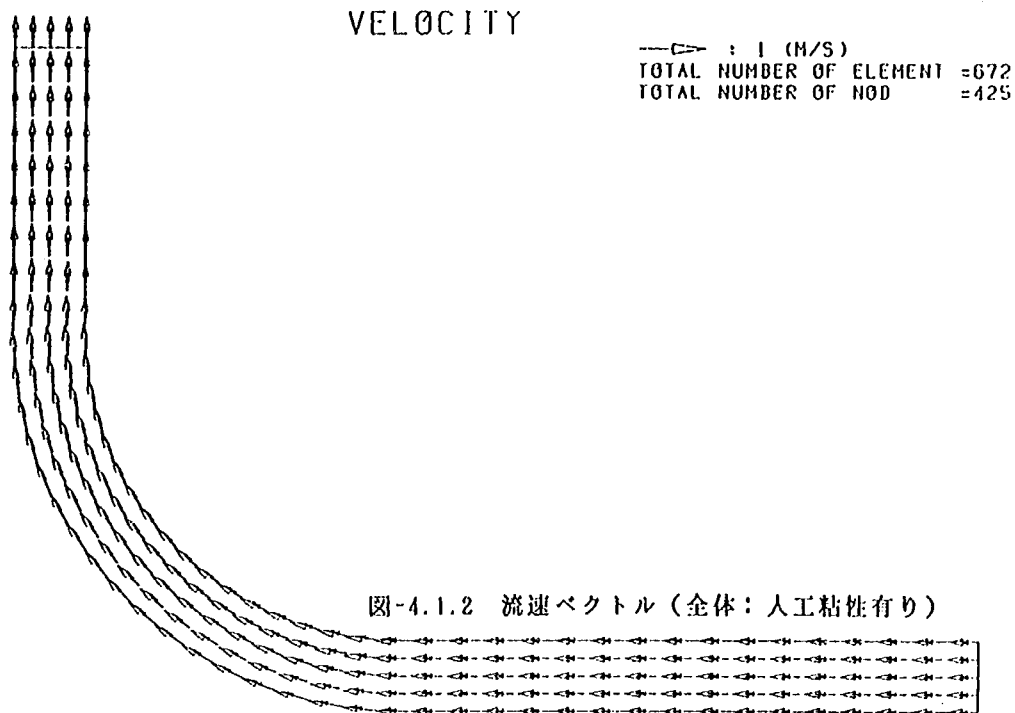
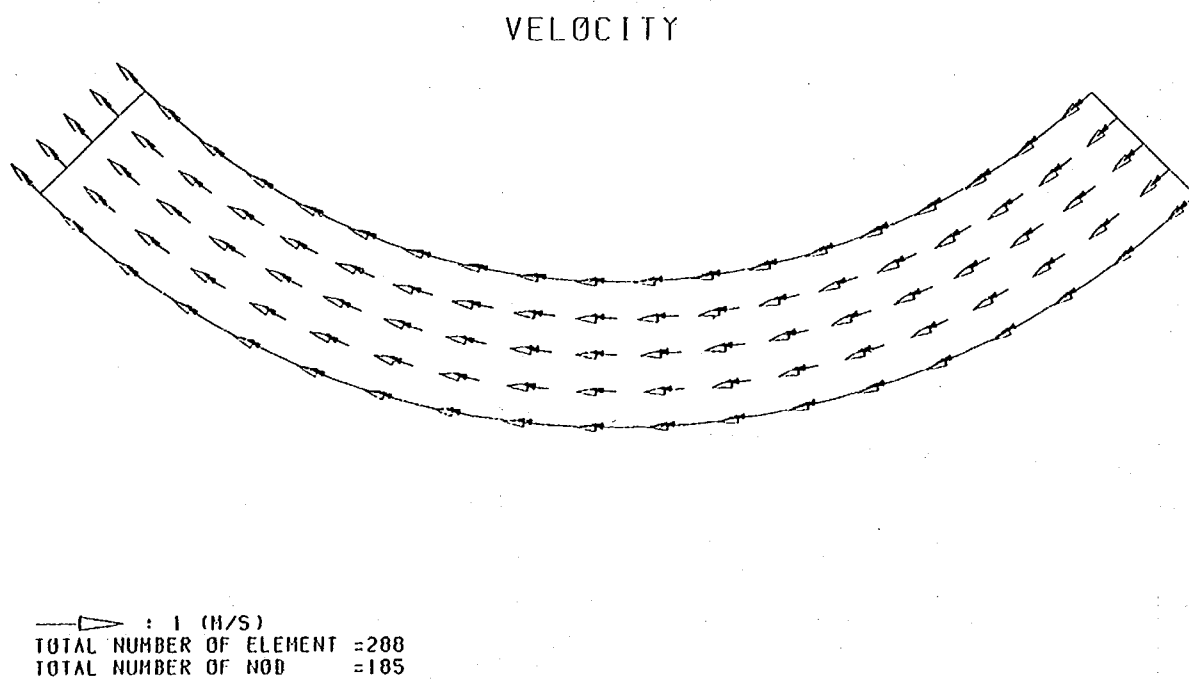


図-4.1.1 流速ベクトル (全体: 人工粘性有り)



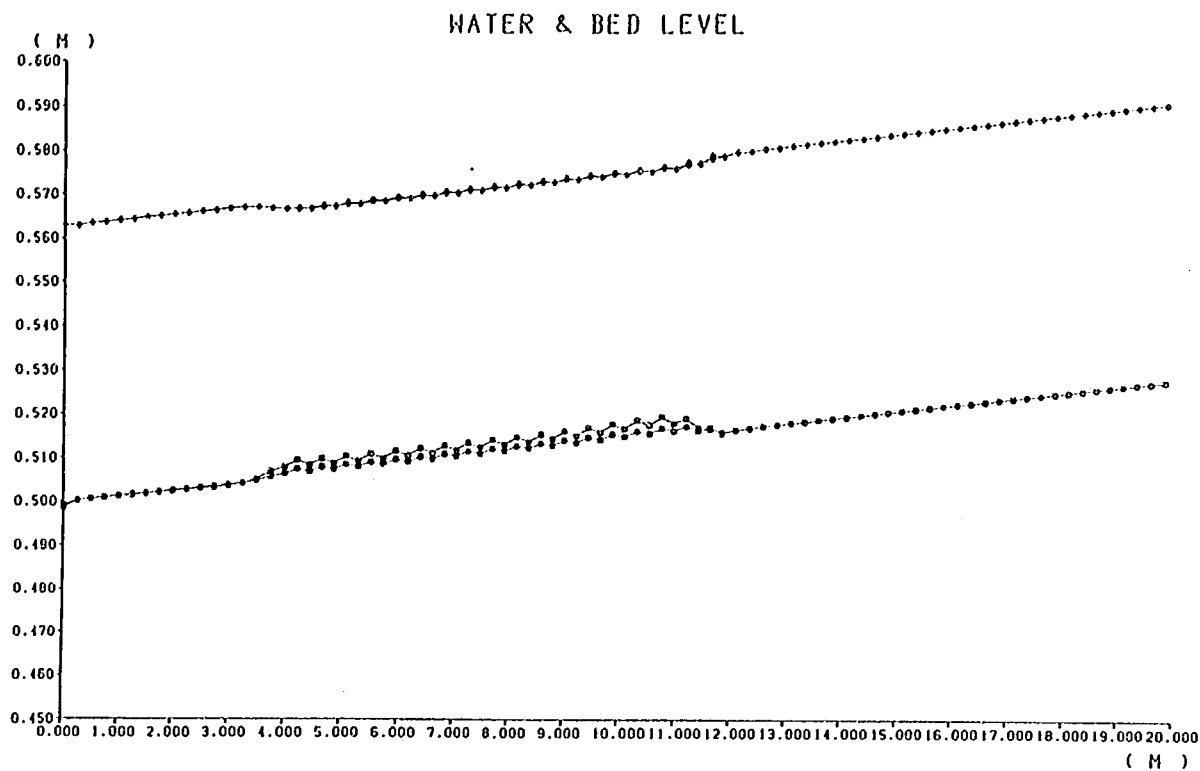


図-4.1.3 わん曲水路計算水位(移動床, 内岸側)

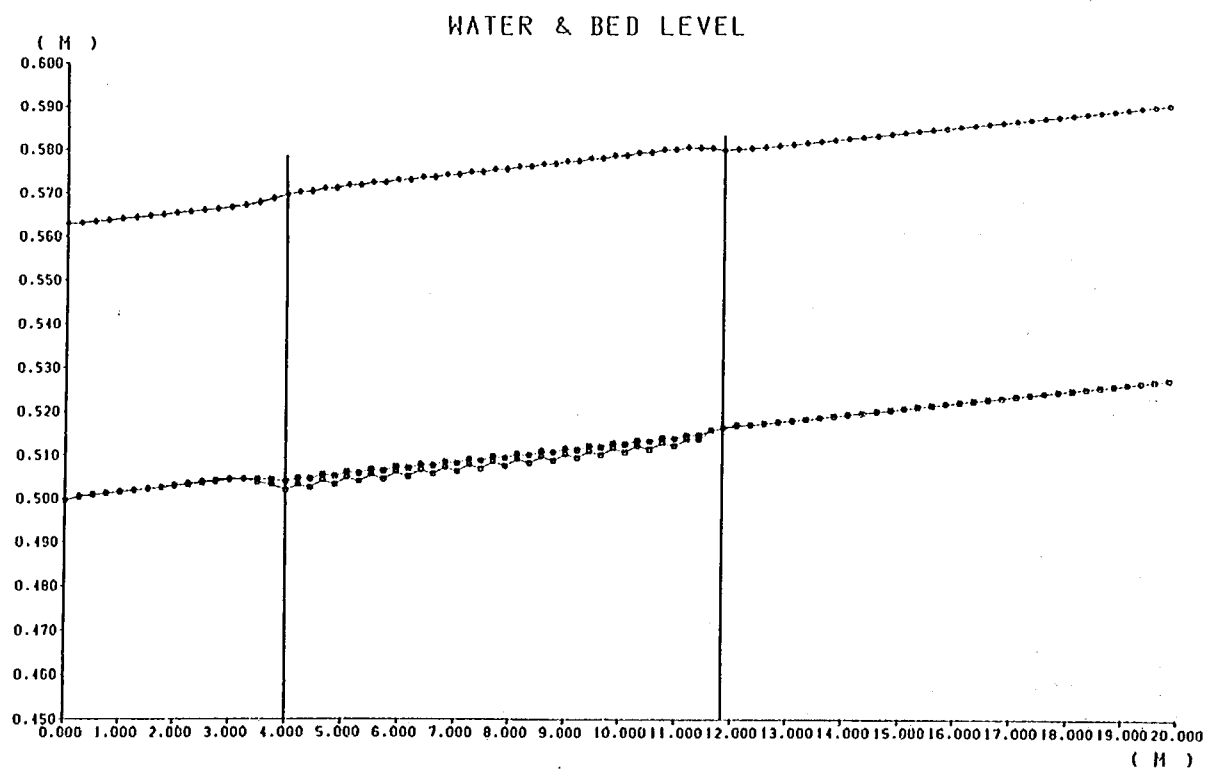


図-4.1.4 わん曲水路計算水位(移動床, 外岸側)

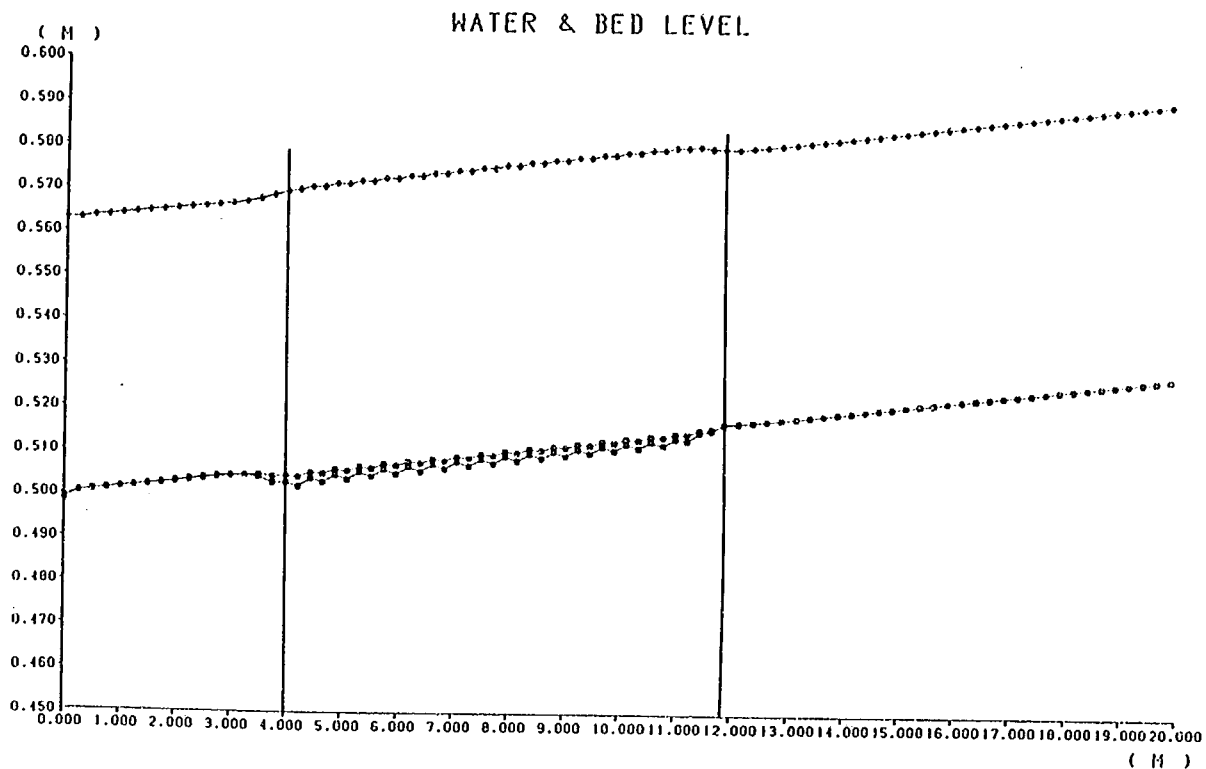


図-4.1.5 外岸側の水位, 河床高の縦断変化 (重ね合わせ無し: 分割2)

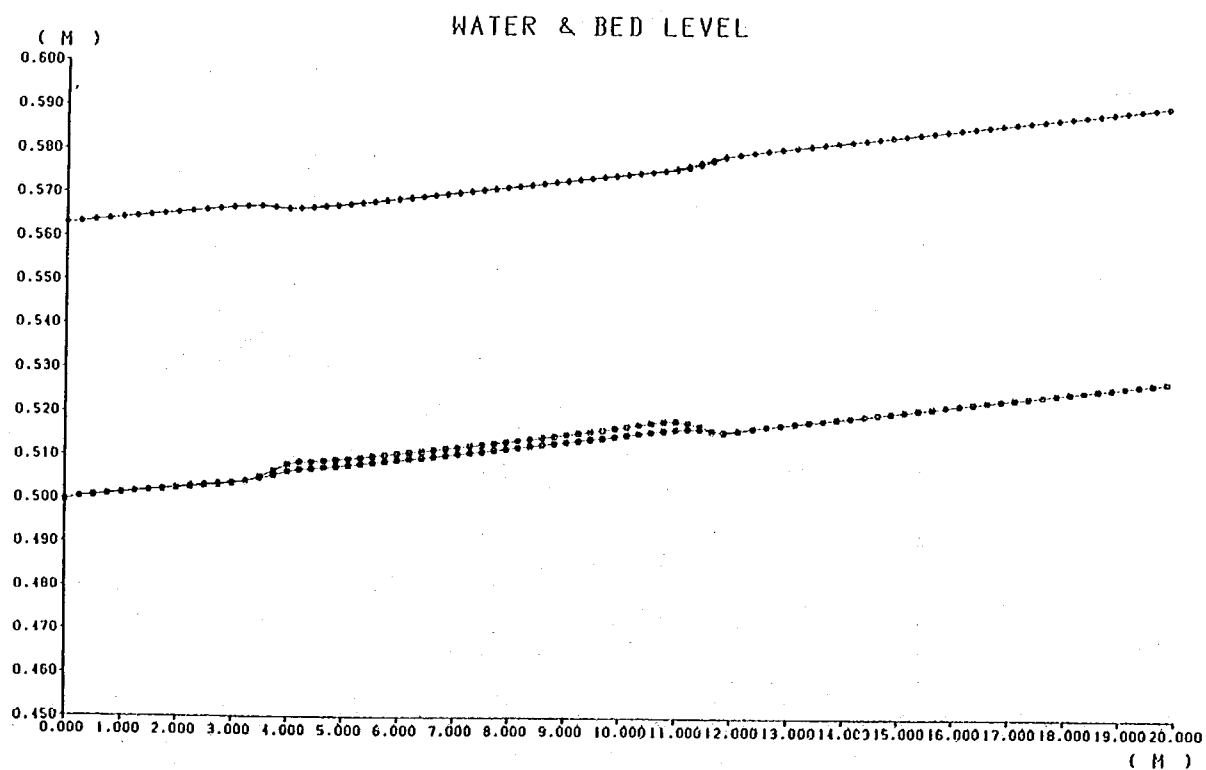


図-4.1.6(a) 外岸側の水位, 河床高の縦断変化 (重ね合わせあり)

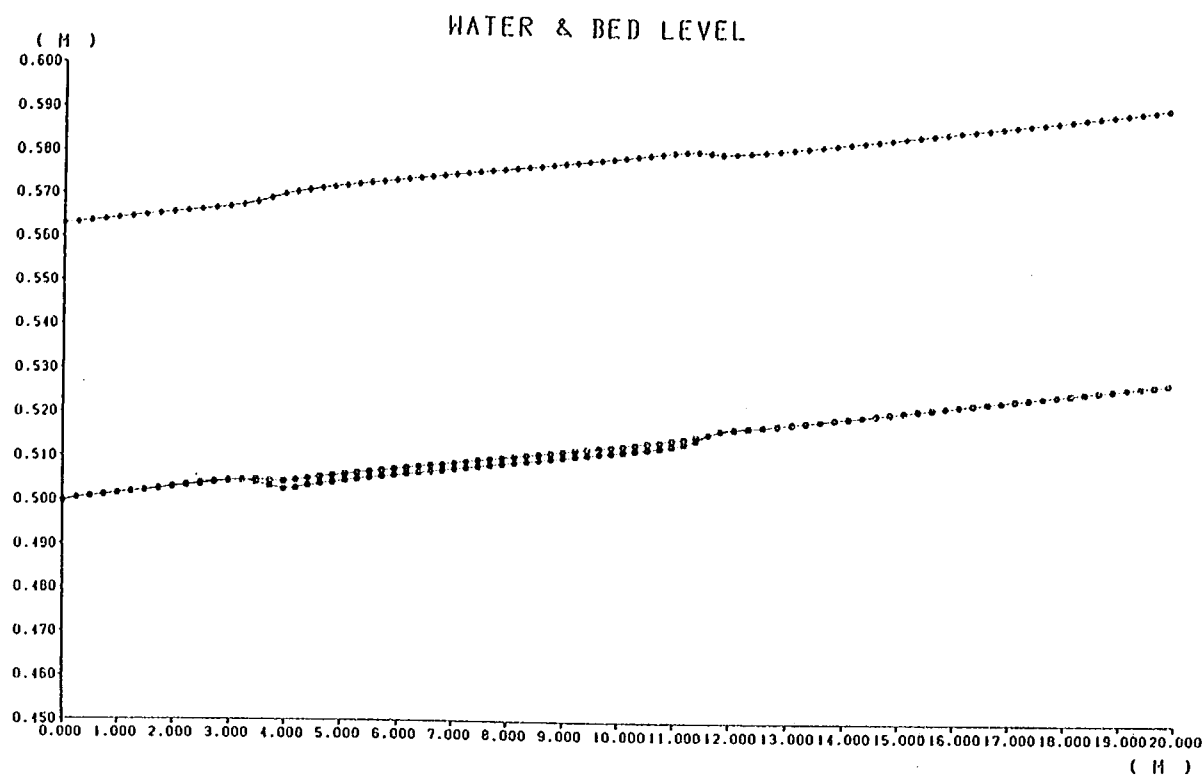


図-4.1.6(b) 内岸側の水位、河床高の縦断変化 (重ね合わせあり)

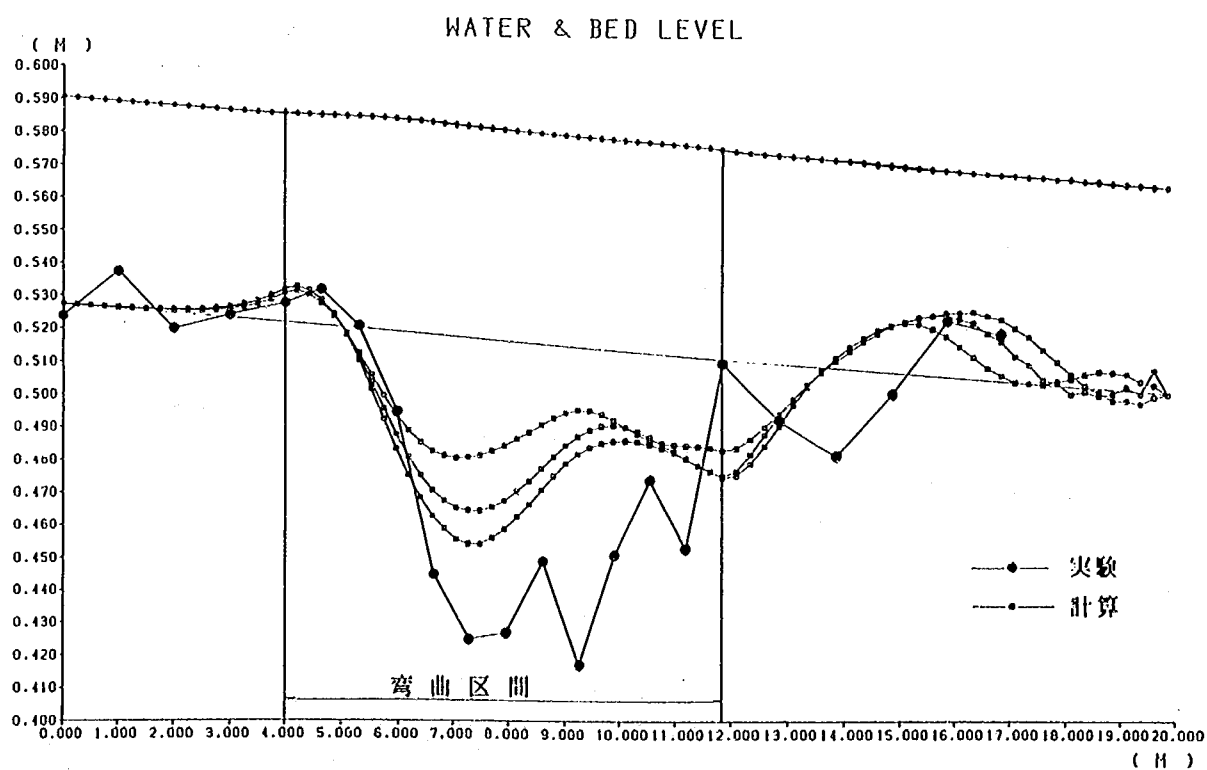


図-4.1.7 水位、河床高縦断変化--外岸側 (S.L.=100, $n=0.014$)

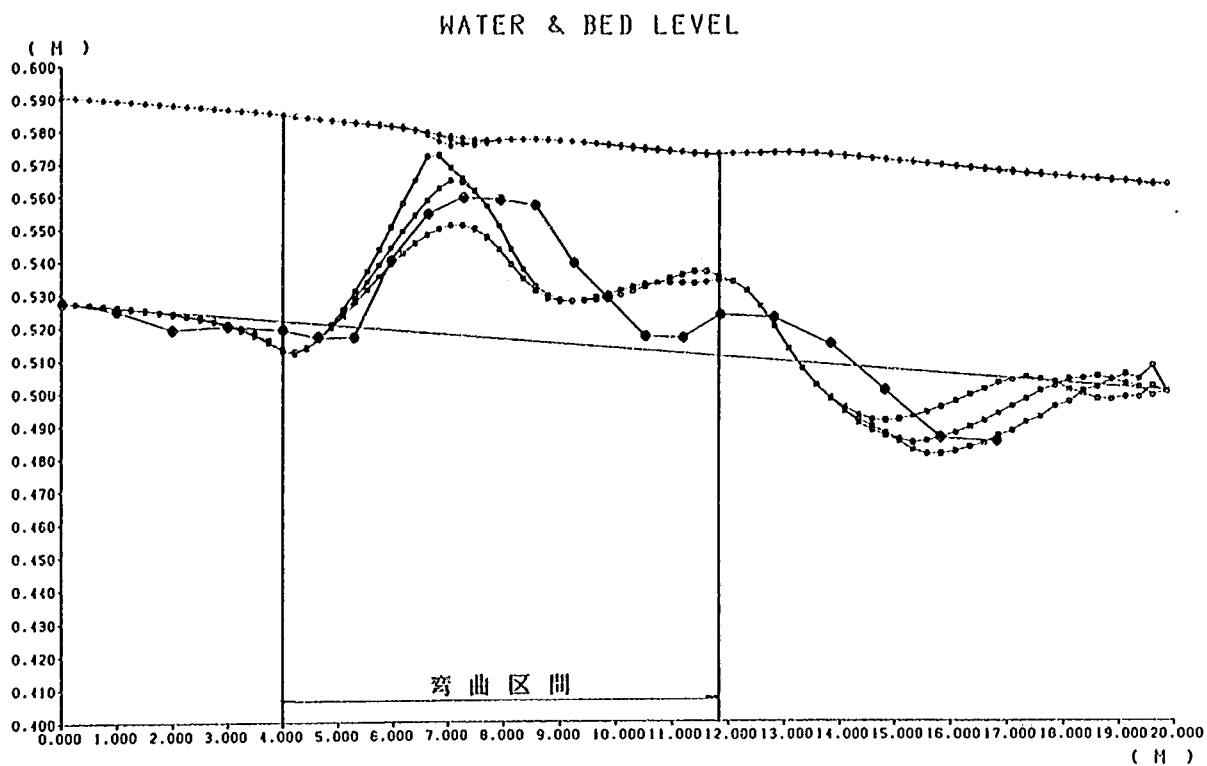


图-4.1.8 水位, 河床高綫折变化-内岸側 (S.L.=100, $n=0.014$)

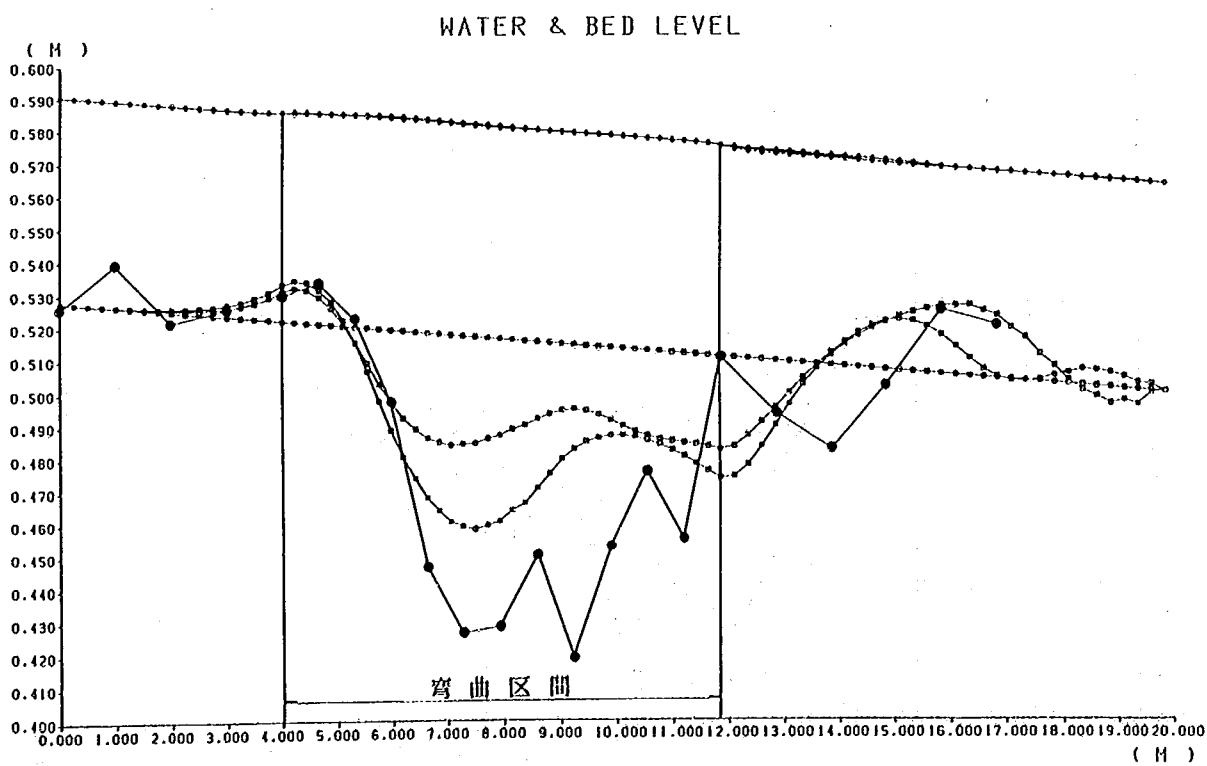


图-4.1.9 水位, 河床高綫折变化-外岸側 (S.L.=300, $n=0.014$)

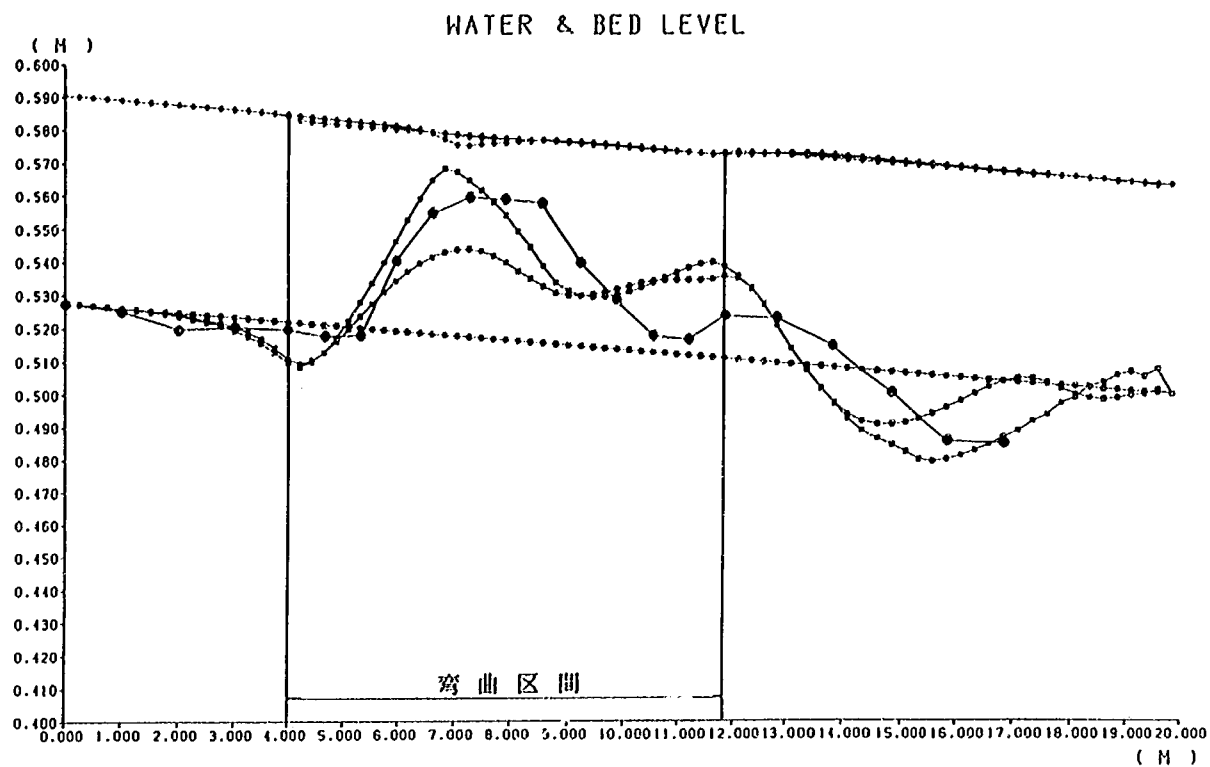


圖-4.1.10 水位, 河床高縱断变化—内岸側 (S.L.=300, $n=0.014$)

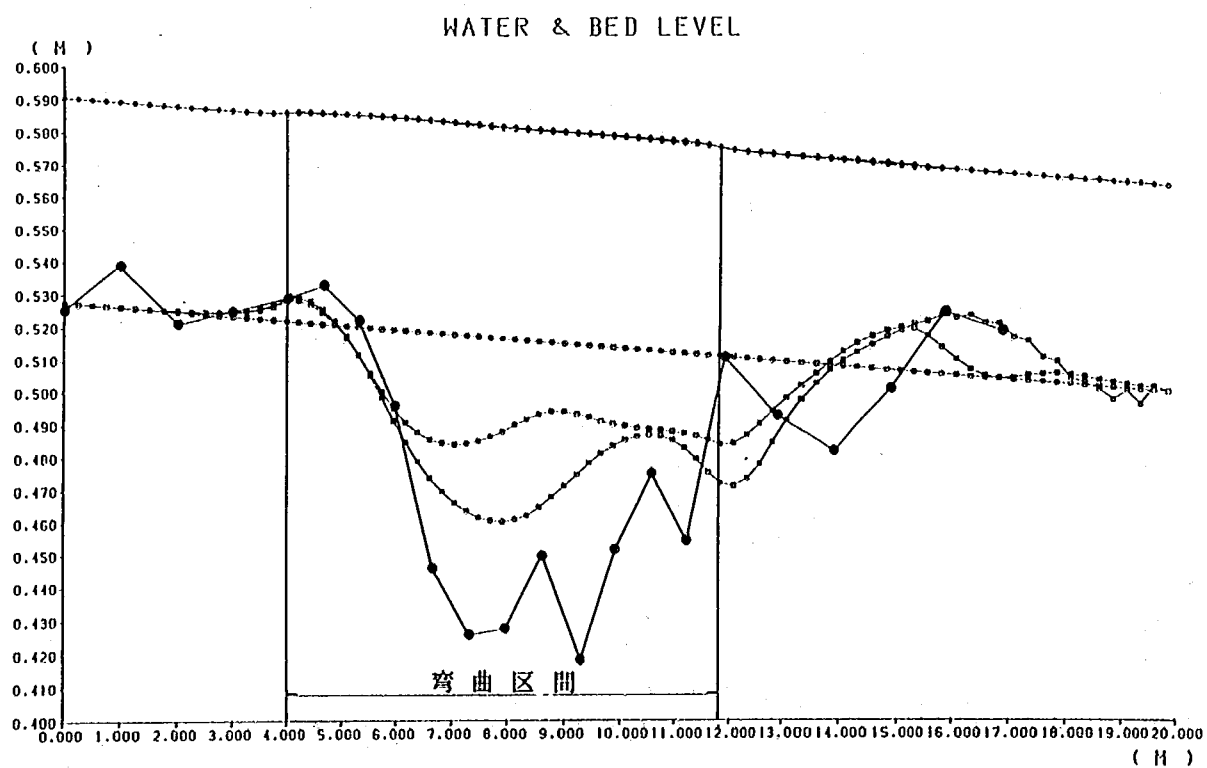


圖-4.1.11 水位, 河床高縱断变化—外岸側 (S.L.=100, $n=0.013$)

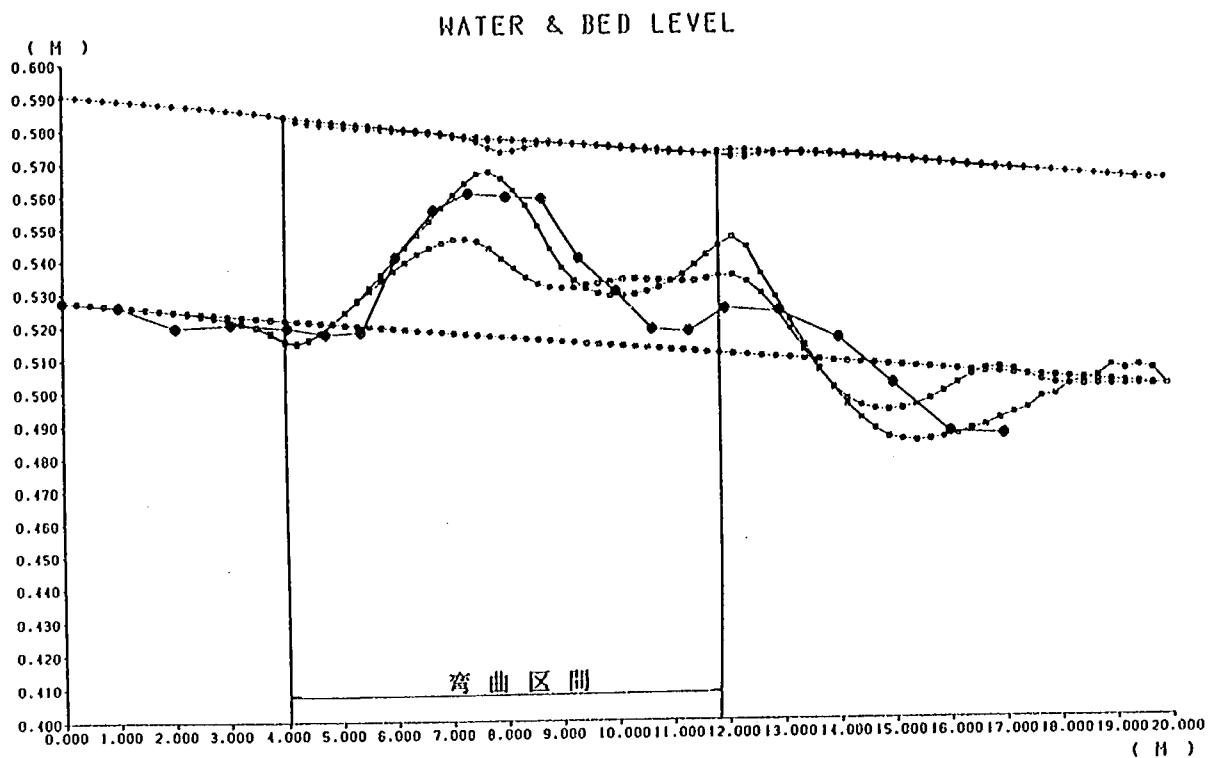


图-4.1.12 水位, 河床高綫断变化—内岸側 (S.L.=100, $n=0.013$)

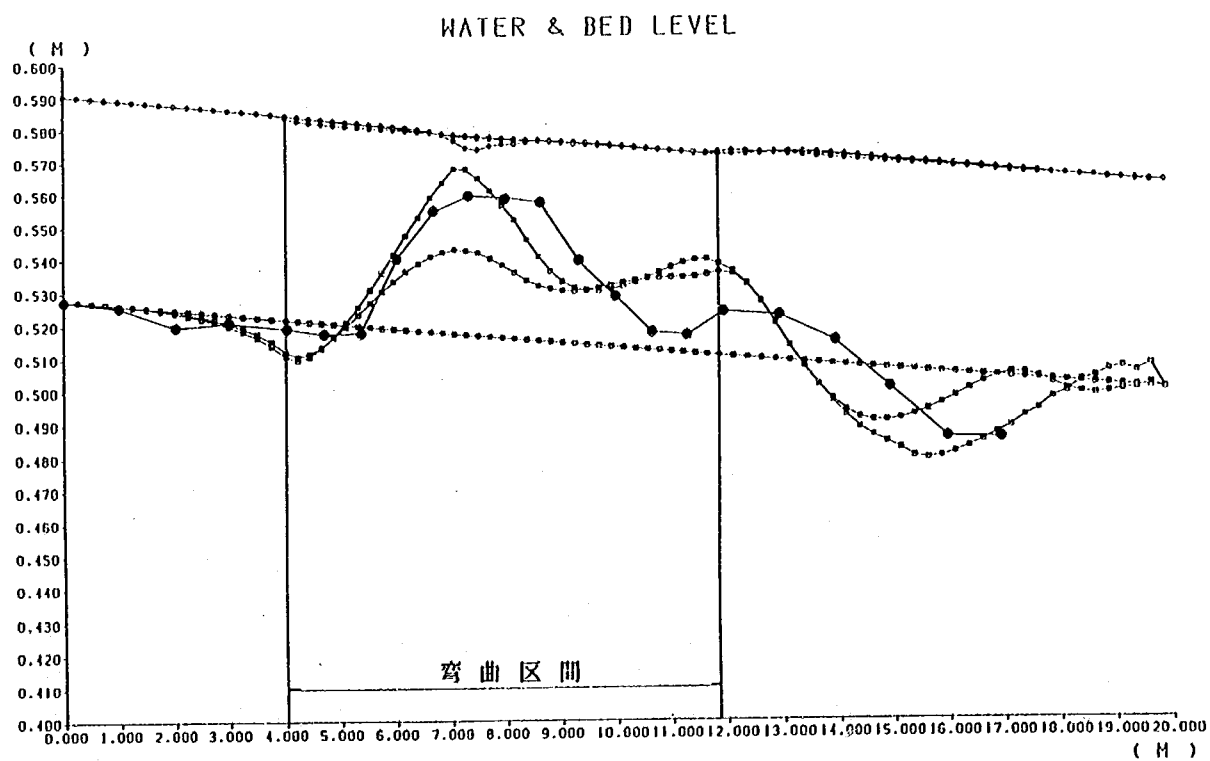


图-4.1.13 水位, 河床高綫断变化—外岸側 (S.L.=300, $n=0.014$) 河床流速風上化

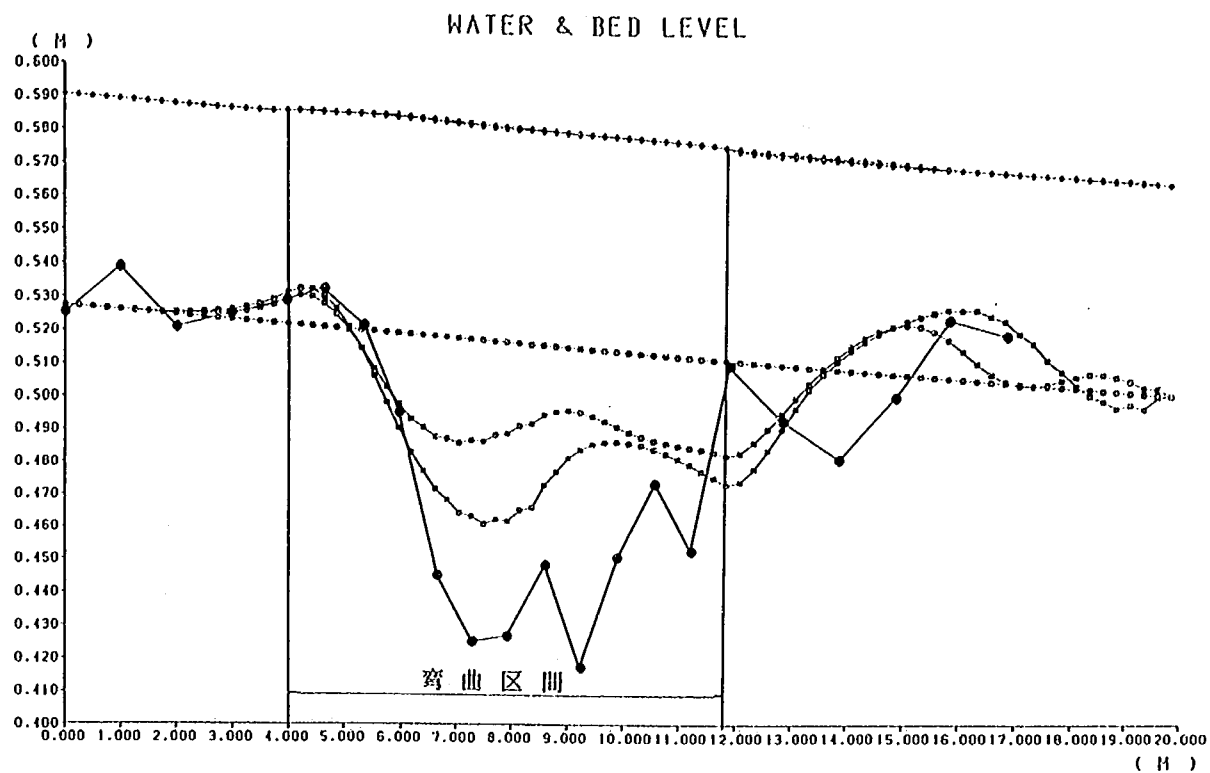


图-4.1.14 水位、河床高程断变化—内岸侧 (S.L.=300, $n=0.014$) 河床流速随上化

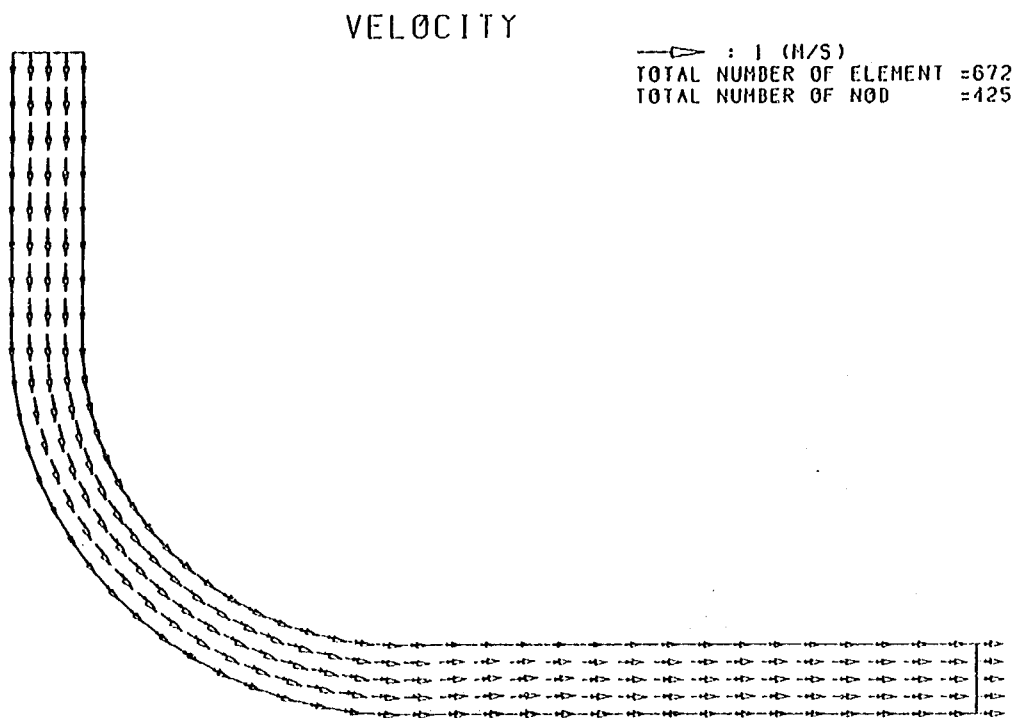


図-4.1.15(a) 流速ベクトル(S.L.=100, $n=0.014$) 600step

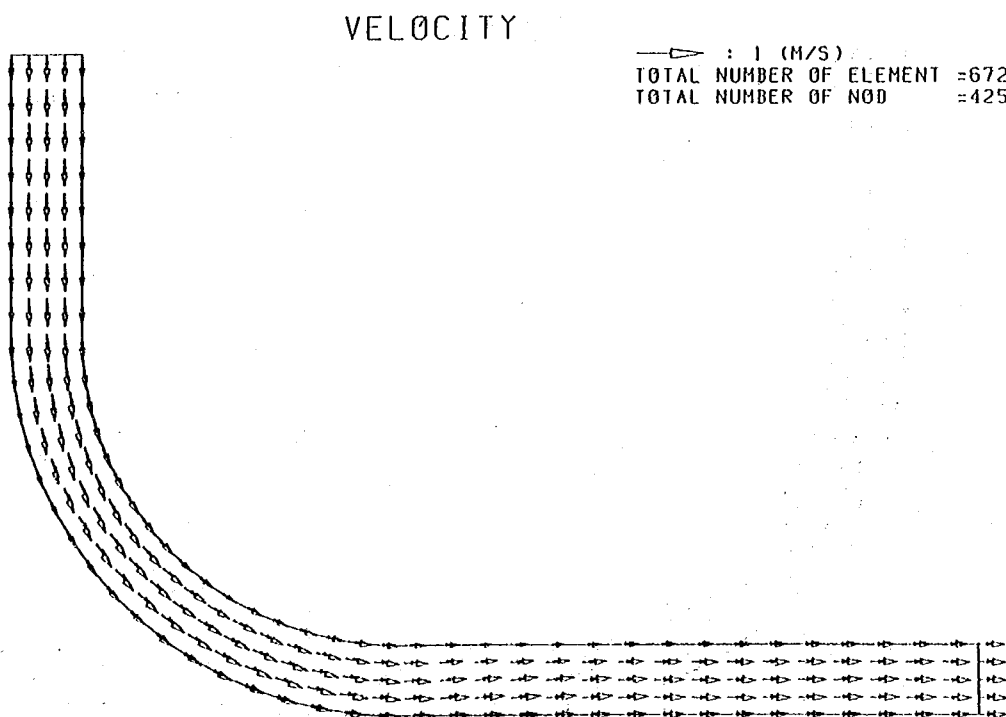


図-4.1.15(b) 流速ベクトル(S.L.=100, $n=0.014$) 1200step

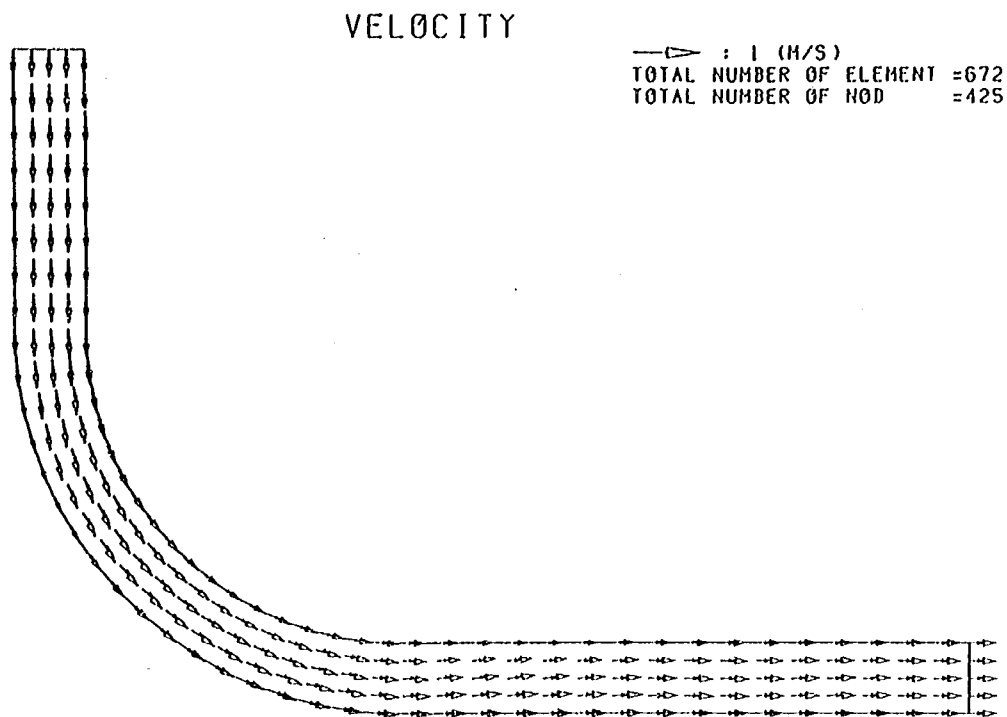


図-4.1.16(a) 流速ベクトル(S.L.=300, $n=0.014$) 600step

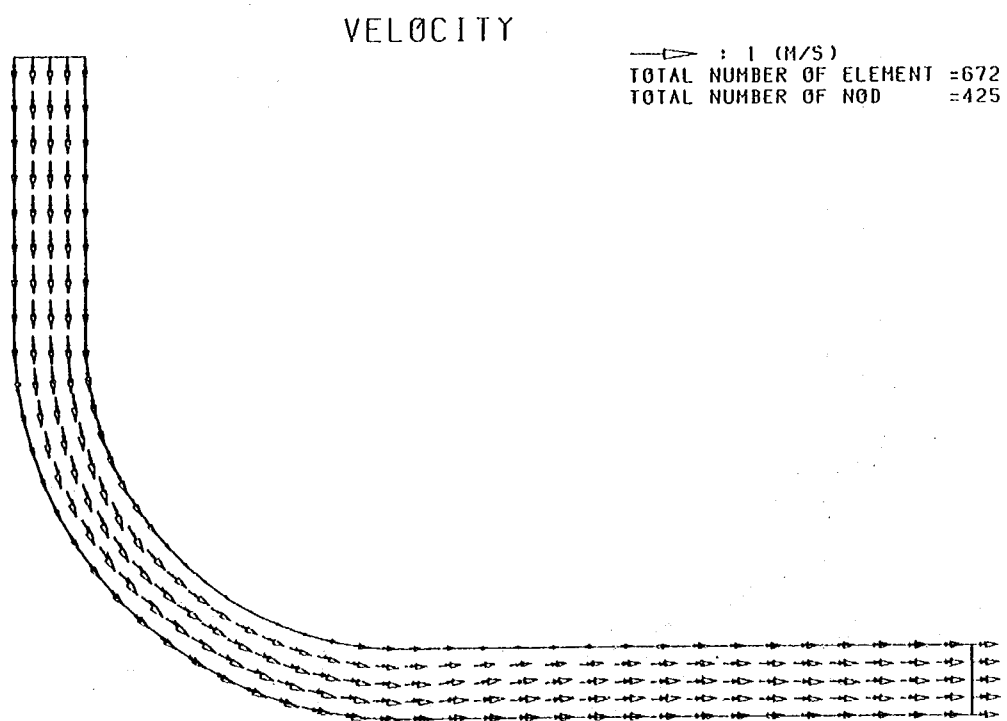


図-4.1.16(b) 流速ベクトル(S.L.=300, $n=0.014$) 1200step

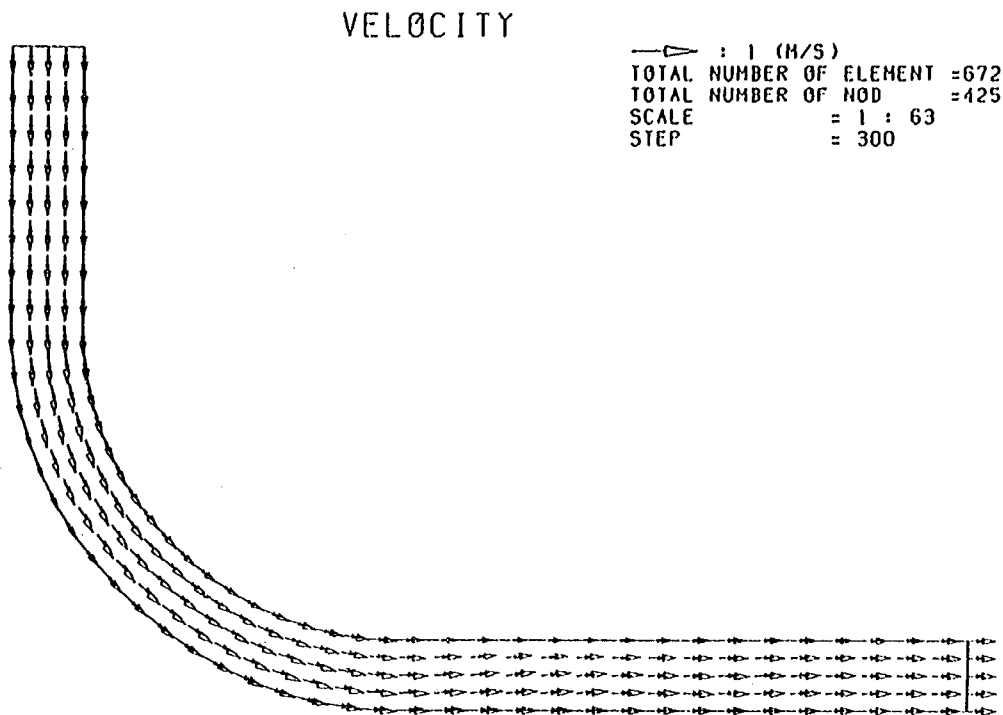


図-4.1.17(a) 流速ベクトル(S.L.=100, $n=0.013$) 600step

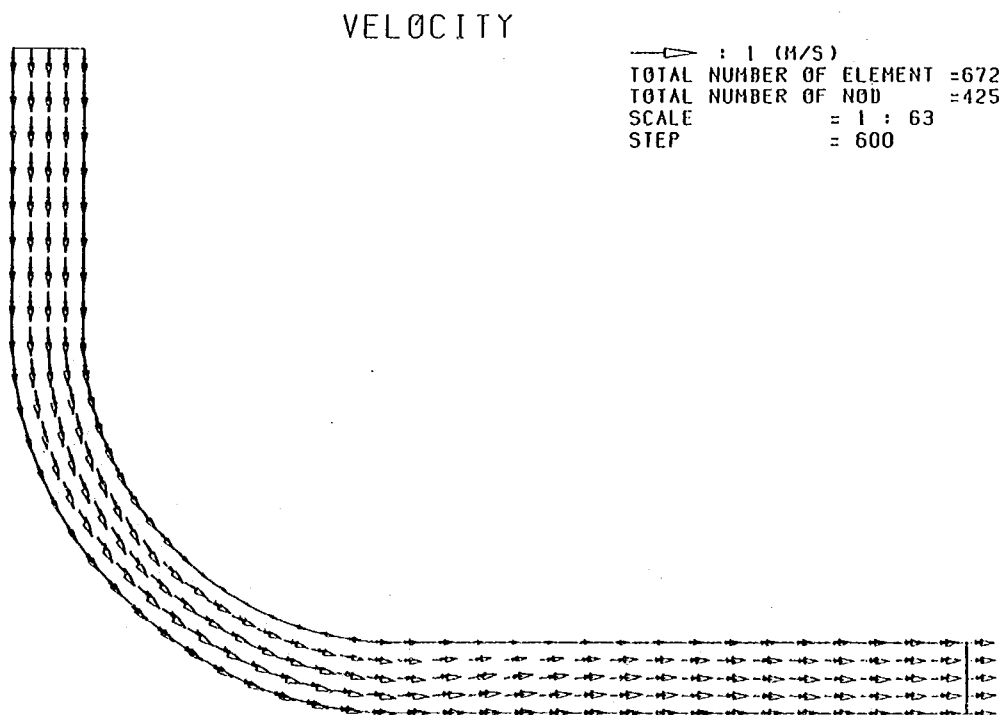


図-4.1.17(b) 流速ベクトル(S.L.=100, $n=0.013$) 1200step

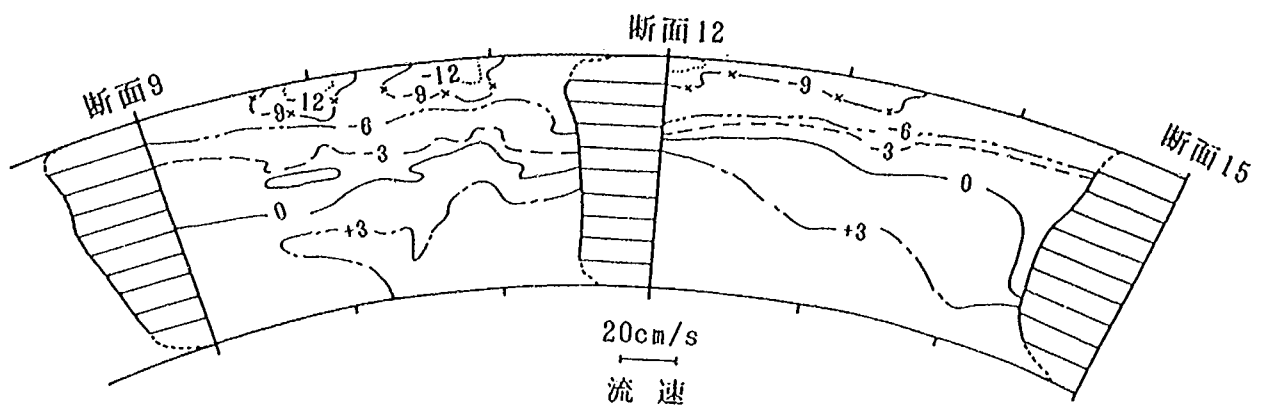


図-4.1.18 流速分布及び河床高のコンター

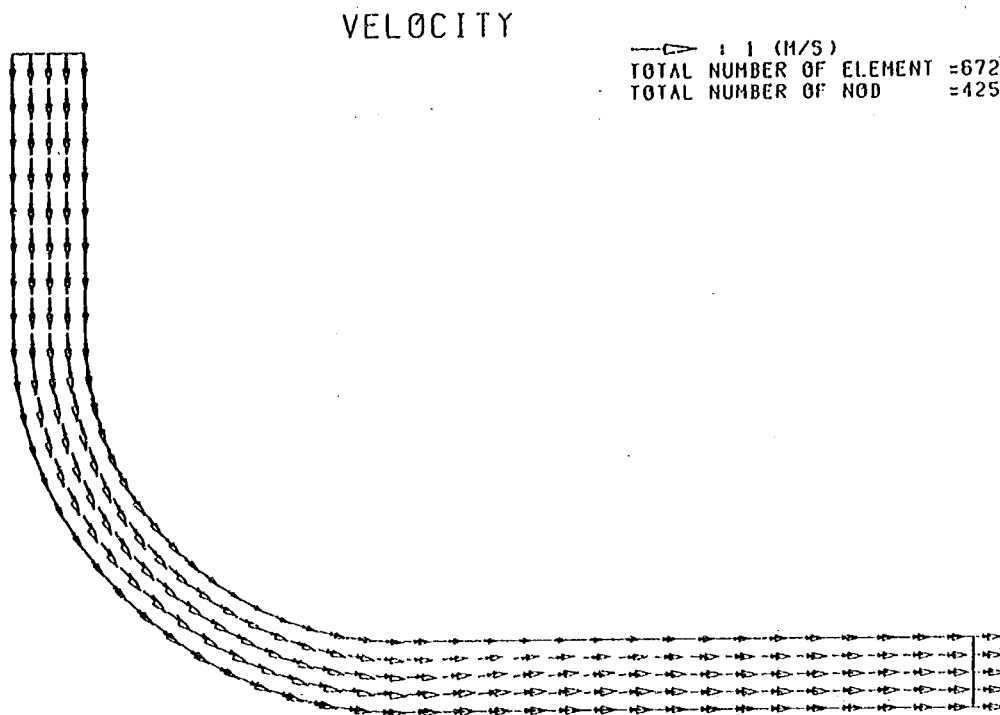


図-4.1.19(a) 流速ベクトル (下流端河床フリー, $n=0.014$) 600step

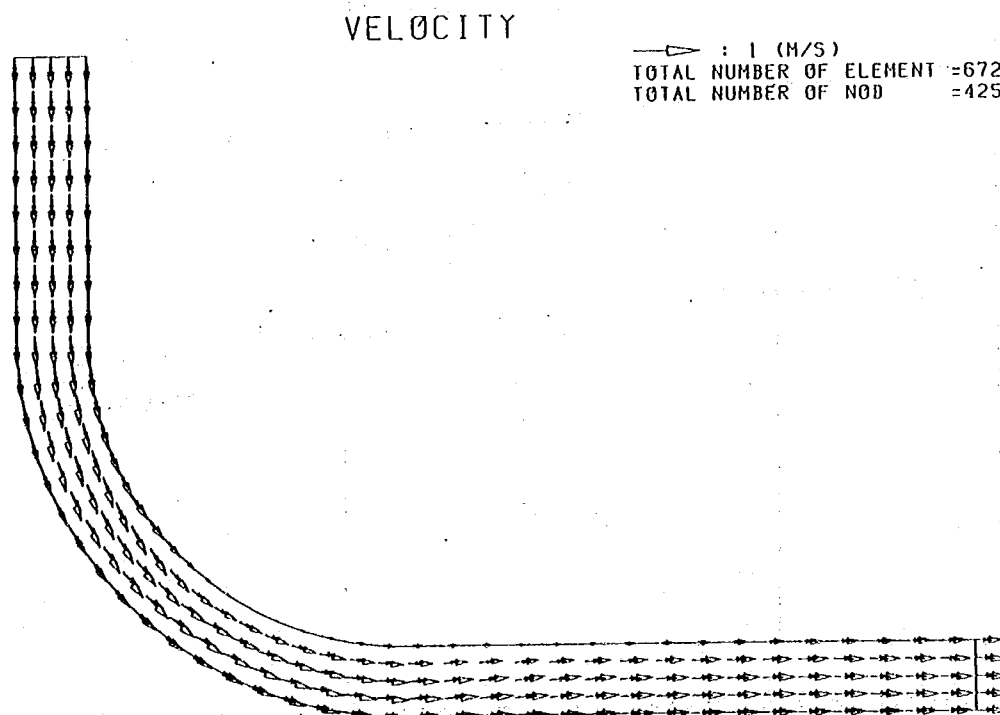


図-4.1.19(b) 流速ベクトル (下流端河床フリー, $n=0.014$) 1200step

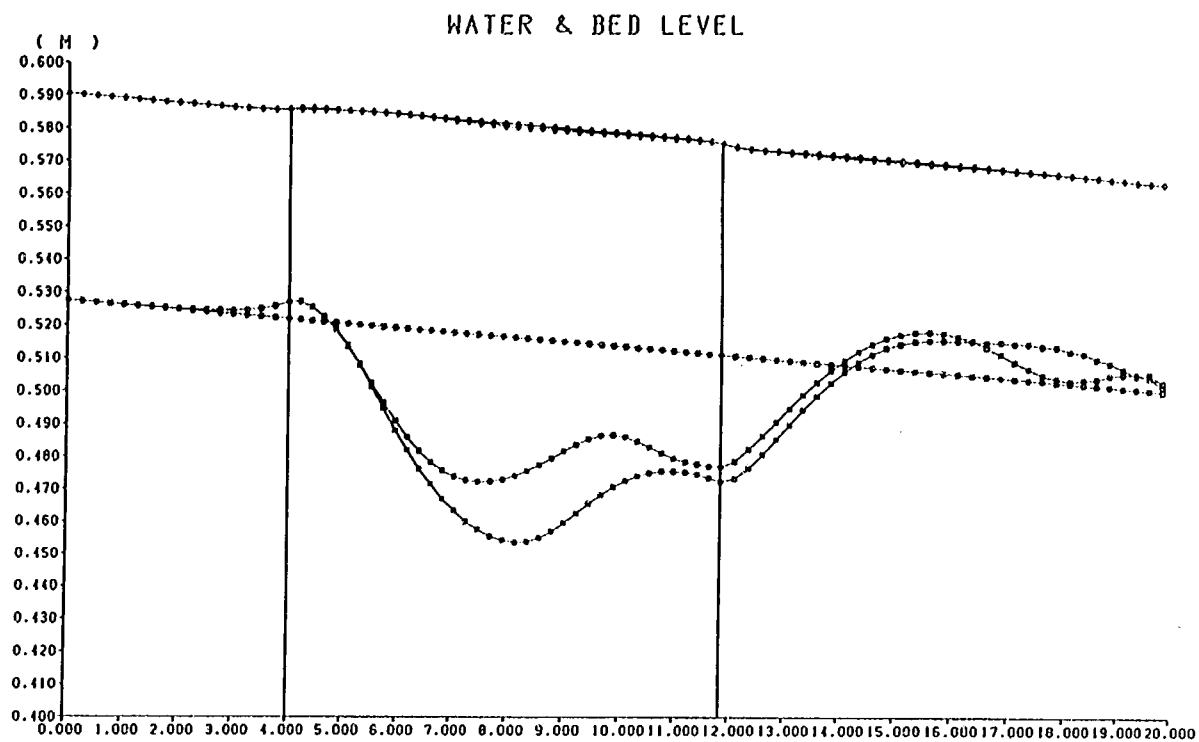


図-4.1.20(a) 水位、河床高縦断変化-外岸側 (下流端河床フリー, $n=0.014$)

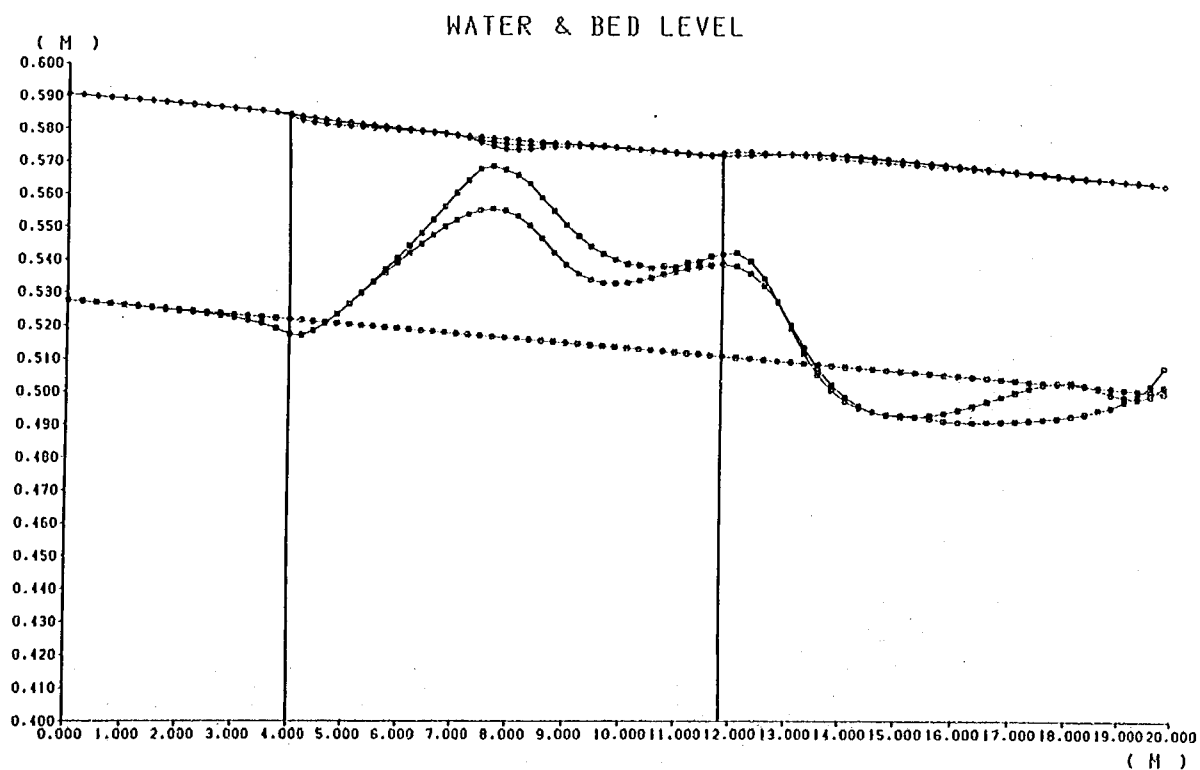


図-4.1.20(b) 水位、河床高縦断変化-内岸側 (下流端河床フリー, $n=0.014$)

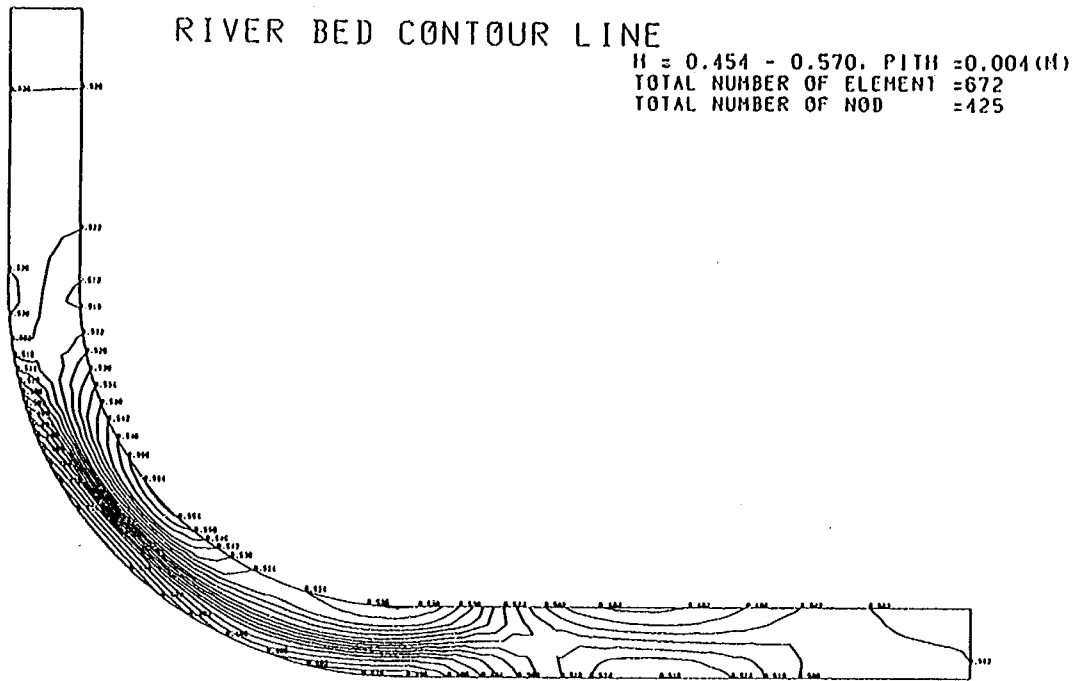


図-4.1.21(a) 河床高コンター (下流端河床フリー, $n=0.014$) 600step

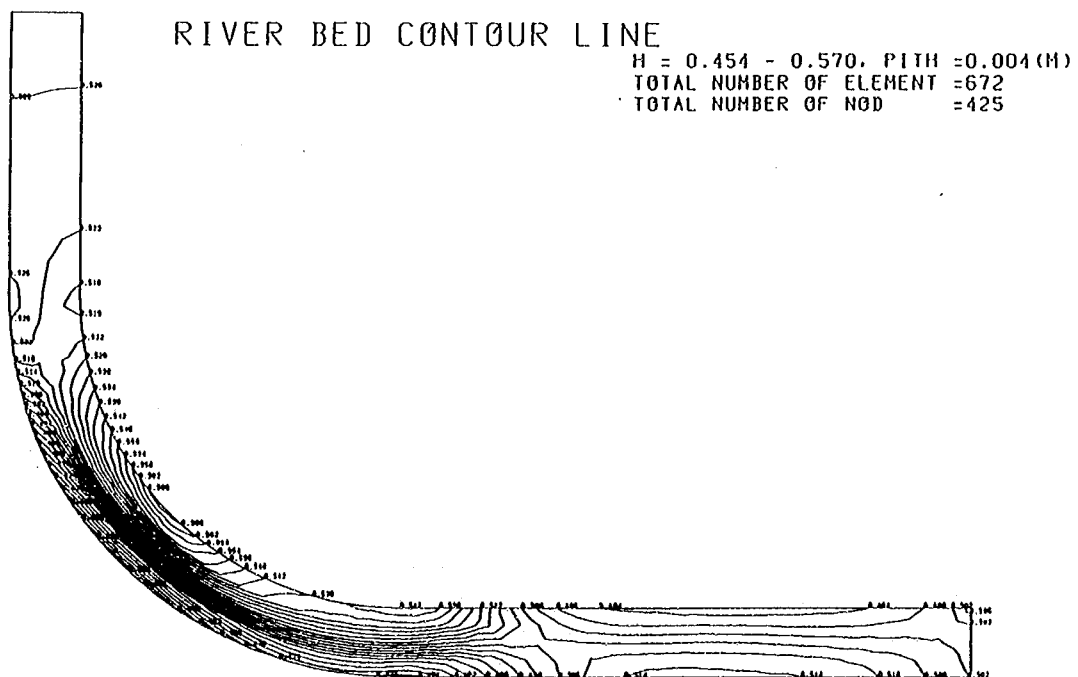


図-4.1.21(b) 河床高コンター (下流端河床フリー, $n=0.014$) 1200step

表 4-3 計算条件

計算時間々隔	0.02	sec
粗度係数	0.012	
土砂の平均粒径	0.00114	m
平均水深	0.0168, 0.0256	m
水路勾配	1/115, 1/160	
ステップレングス	100~200	
タイムファクター	50~100	

表 4-4 境界条件

上流端境界	水位変動	領域中央の計算値
	河床変動	"
上流端境界	水位変動	"
	河床変動	"
側壁境界	二次流	考慮せず
	抵抗	考慮せず

表 4-5 計算ケース

ケース	河床勾配	平均水深	初期河床		砂州の条件	その他
			振幅 (m)	波長 (m)		
①	1/115	0.0168	0.0015	2.6	発生	
②	1/115	0.0168	0.0060	2.6	発生	
③	1/160	0.0256	0.0020	2.7	非発生	
④	1/160	0.0256	0.0100	2.7	非発生	
⑤	1/160	0.0256	0.0100	2.7	非発生	N*=0.0

FINITE ELEMENT IDEALIZATION

TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
TOTAL NUMBER OF NOD = 205

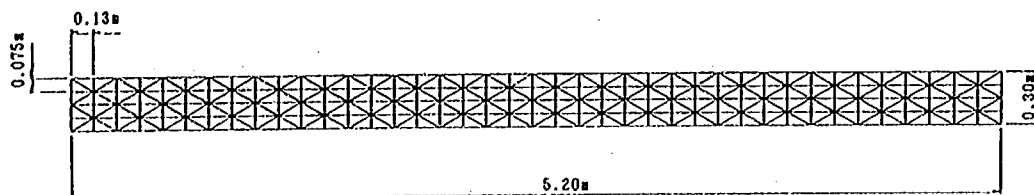


図-4.1.22 要素分割 (ケース1, 2)

FINITE ELEMENT IDEALIZATION

TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
TOTAL NUMBER OF NOD = 205

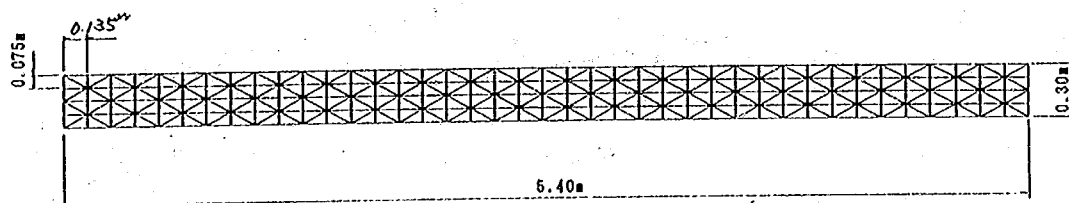


図-4.1.23 要素分割 (ケース3, 4, 5)

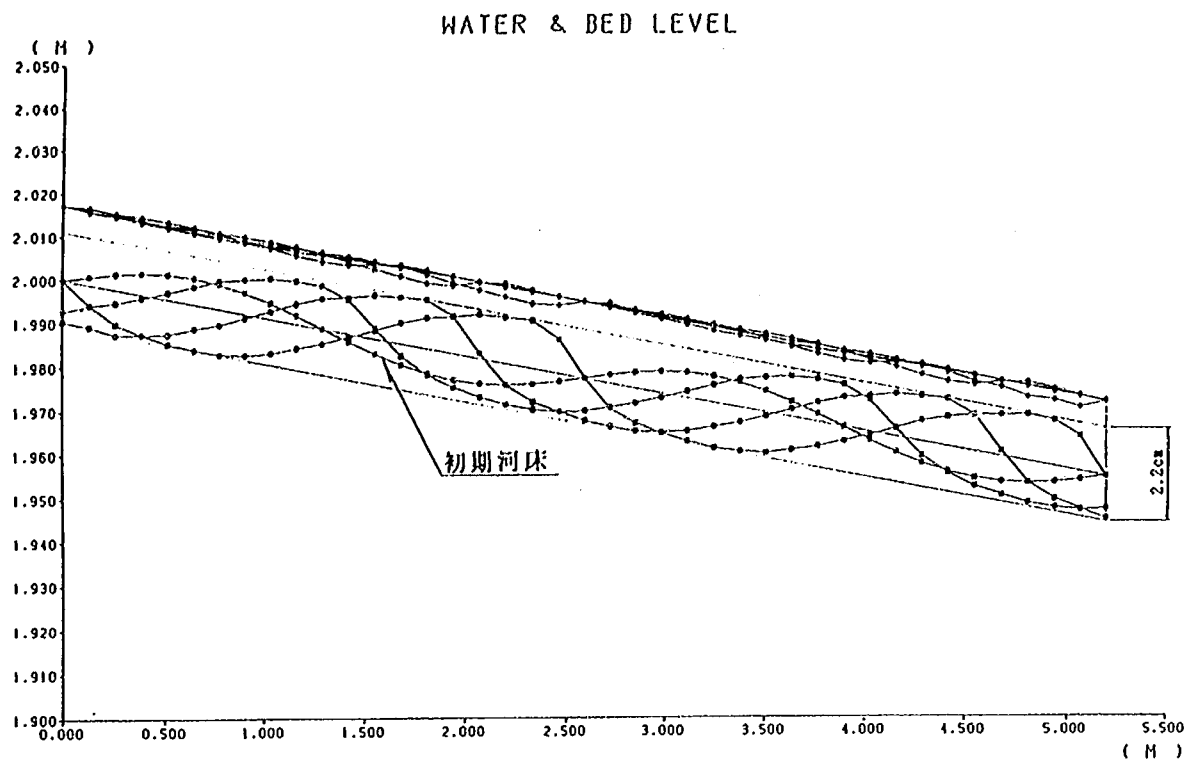


図-4.1.24 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース1)

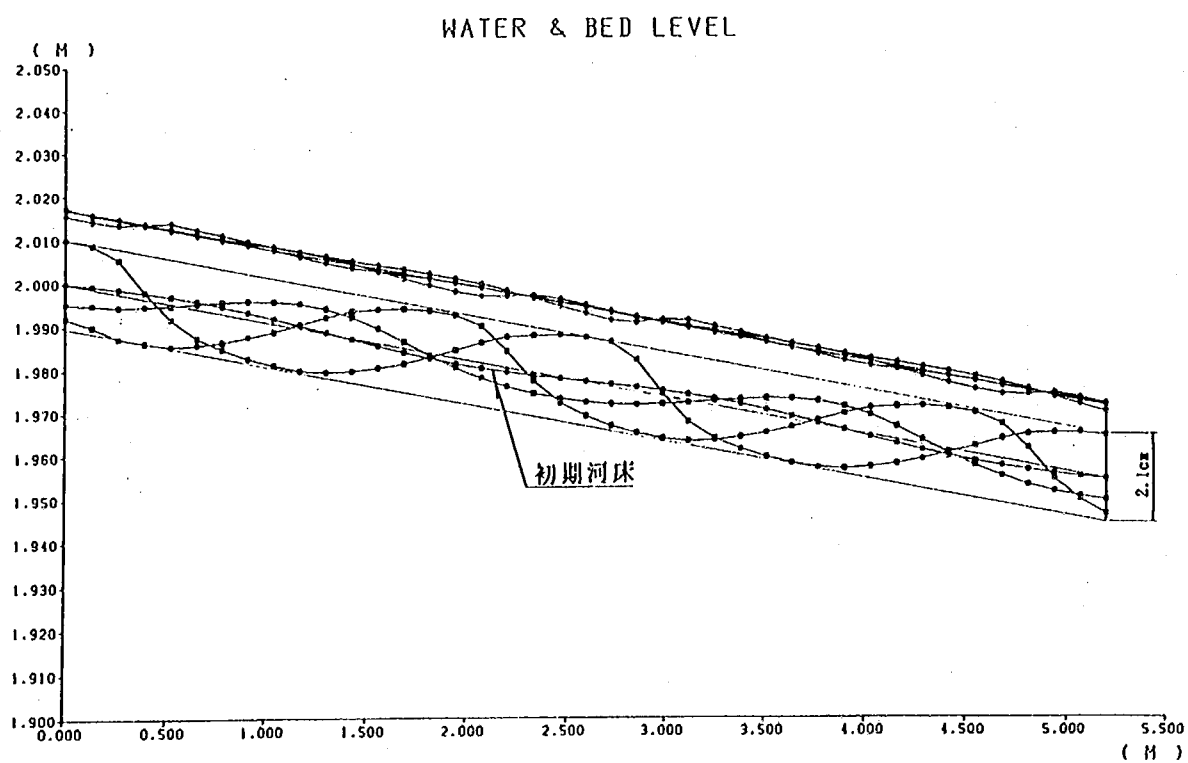


図-4.1.25 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース2)

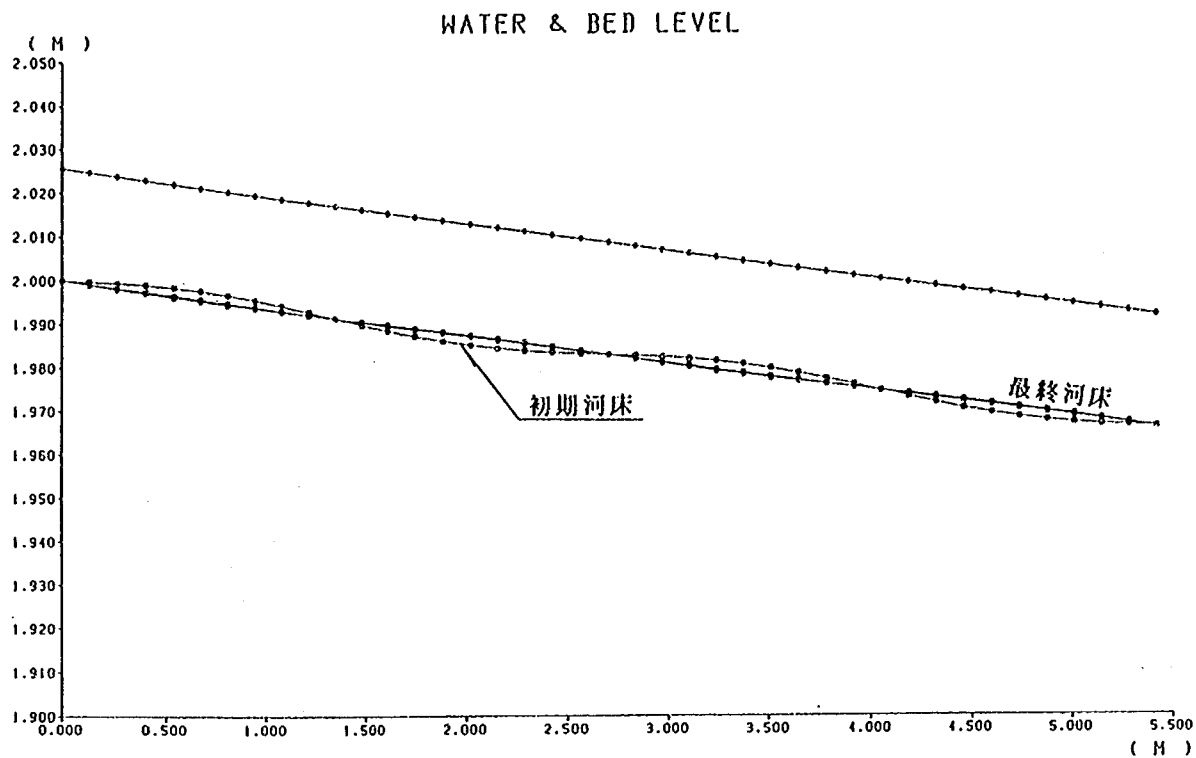


図-4.1.26 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース3)

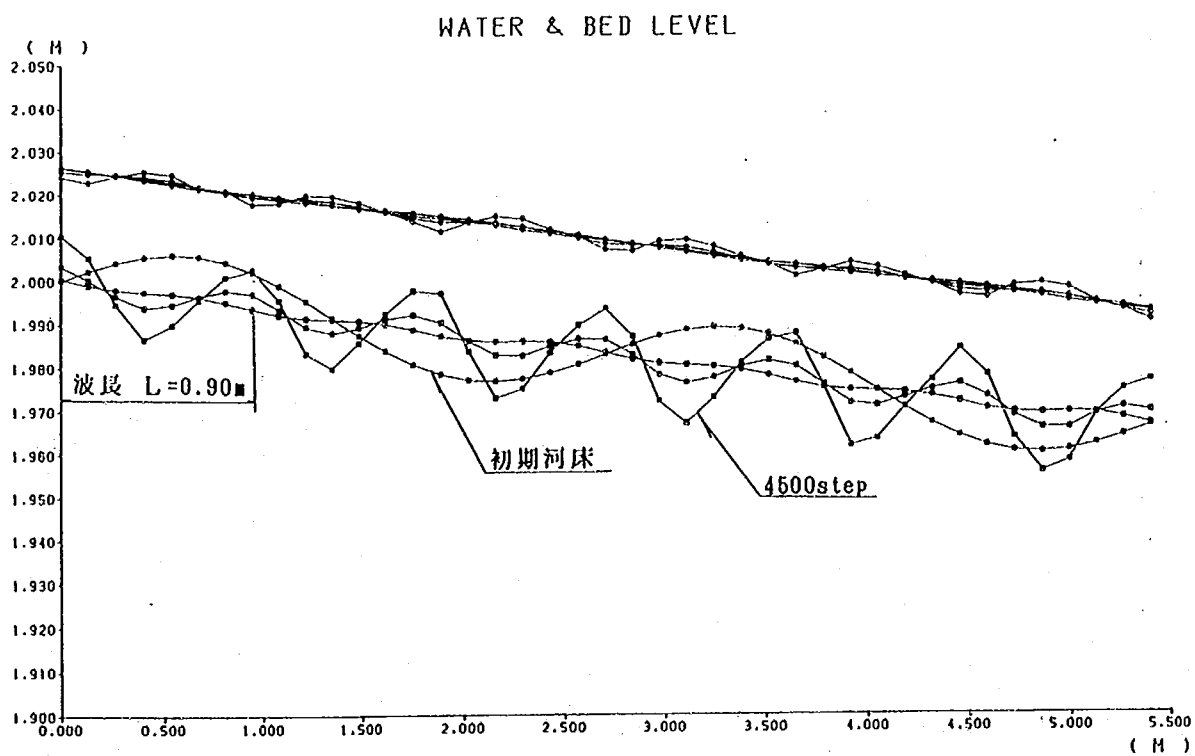


図-4.1.27 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース4)

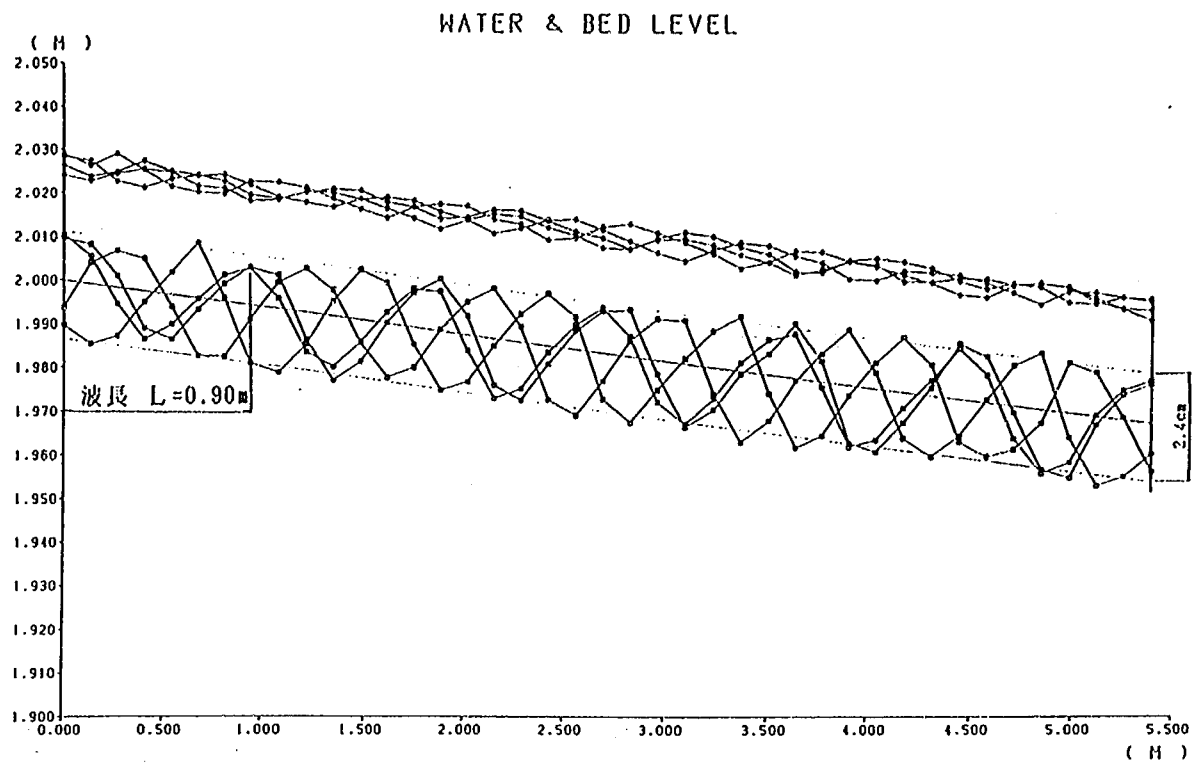


図-4.1.28 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース4, 4500step~9000step)

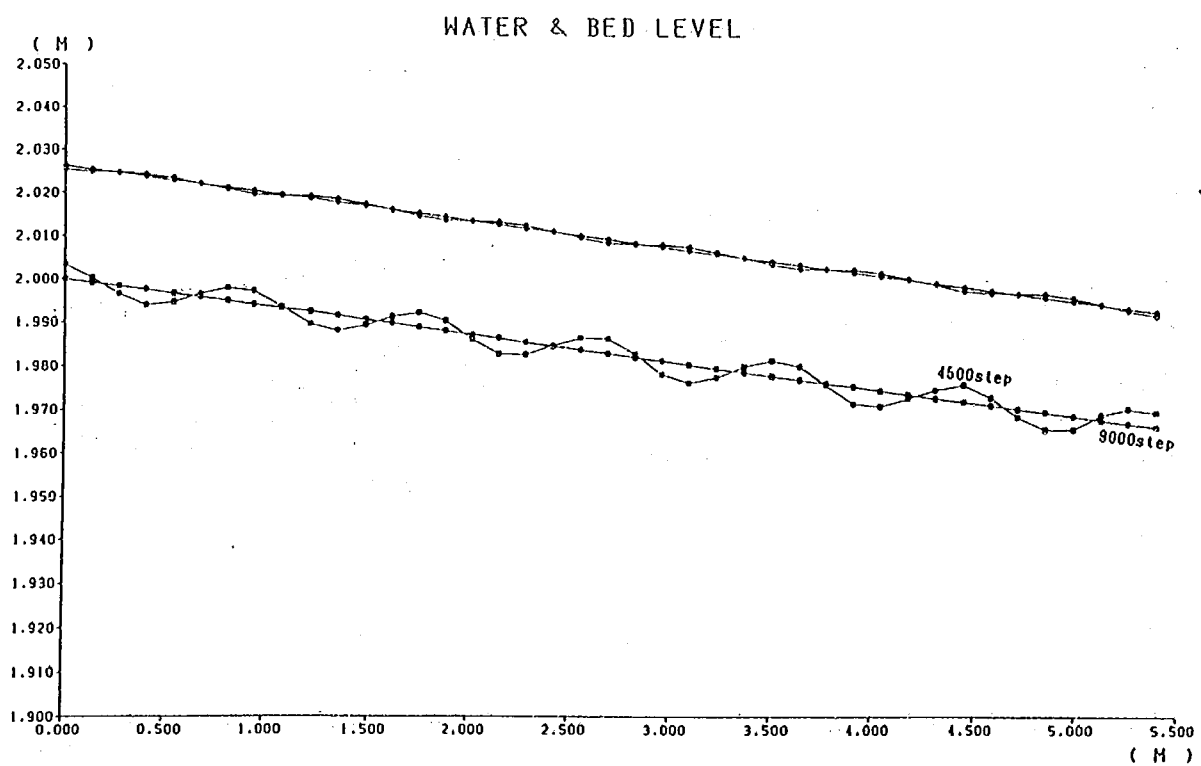


図-4.1.29 水位、河床高縦断形の時間変化 (ケース5, 4500step~9000step)

VELOCITY

$\rightarrow$: 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 3000

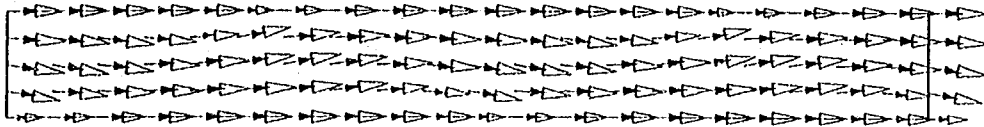


図-4.1.30 平面流速ベクトル (ケース1) 砂州発生 $A=0.0015$ (7500s)

VELOCITY

$\rightarrow$: 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 3000

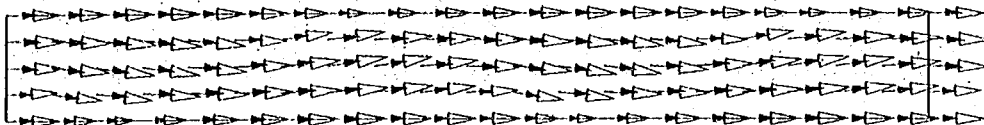


図-4.1.31 平面流速ベクトル (ケース2) 砂州発生 $A=0.0006$ (6000s)

VELOCITY

$\rightarrow$: 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 3000

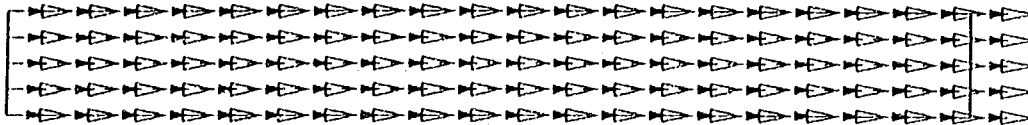


図-4.1.32 平面流速ベクトル (ケース3) 砂州非発生 $A=0.0020$ (6000s)

VELOCITY

$\rightarrow$: 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 4500

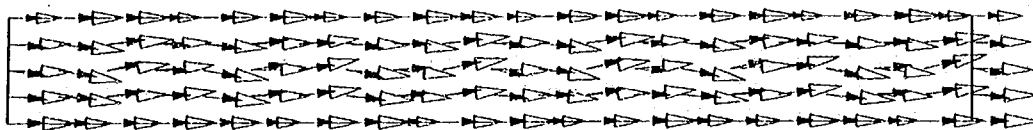


図-4.1.33a) 平面流速ベクトル (ケース4) 砂州非発生 $A=0.0200$ (9000s)

VELOCITY

→ : 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 9000

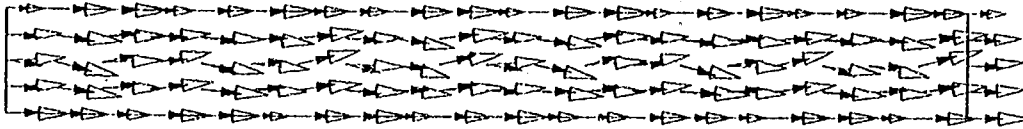


図-4.1.33(b) 平面流速ベクトル (ケース4) 砂州非発生 $A=0.0200$ (18000s) $N=7.0$

VELOCITY

→ : 1 (M/S)
 TOTAL NUMBER OF ELEMENT = 320
 TOTAL NUMBER OF NOD = 205

STEP = 6000

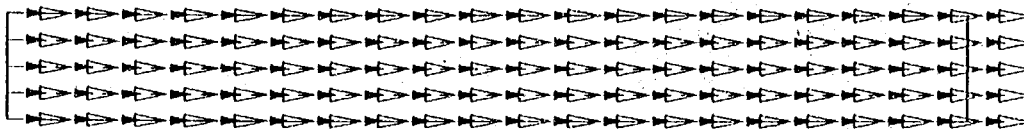


図-4.1.34 平面流速ベクトル (ケース5) 砂州非発生 $A=0.0200$ (18000s) $N=0.0$

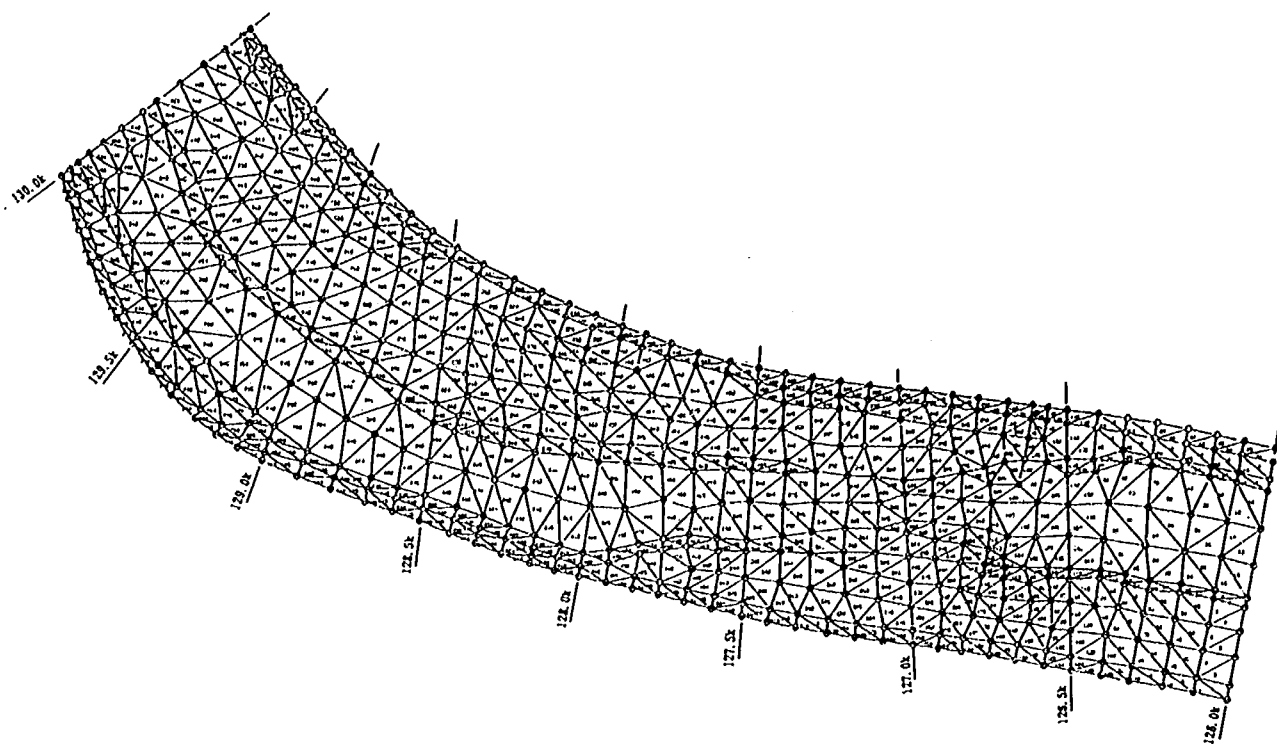


図-4.2.1 要素分割 (解析範囲のみ)

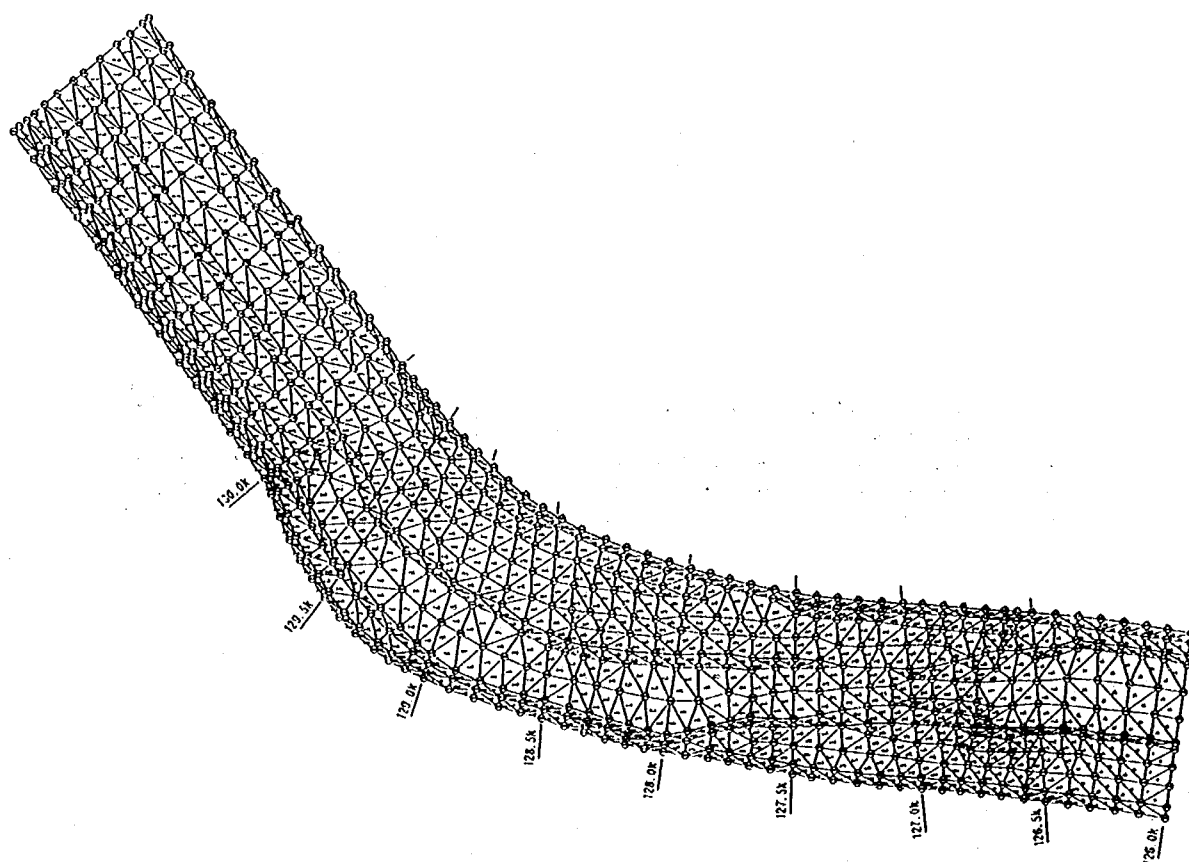


図-4.2.2 要素分割 (助走区間あり)

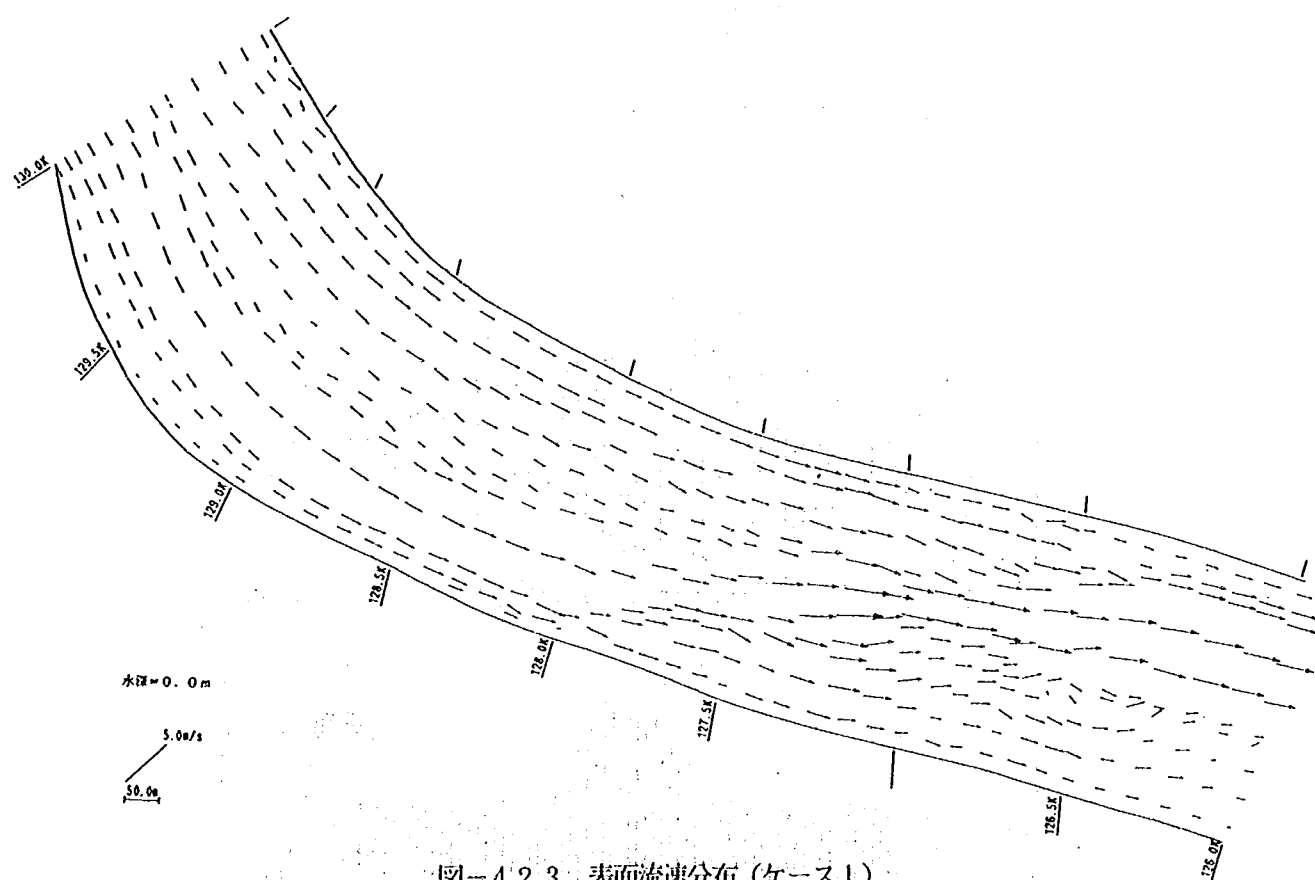
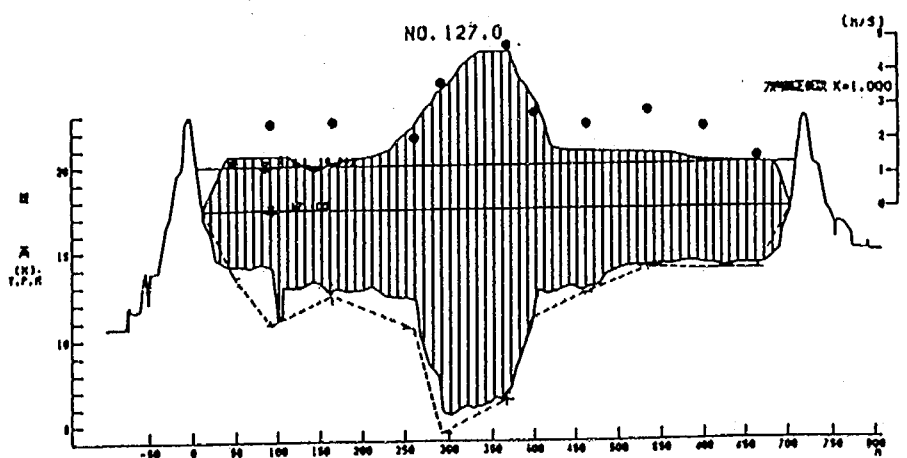
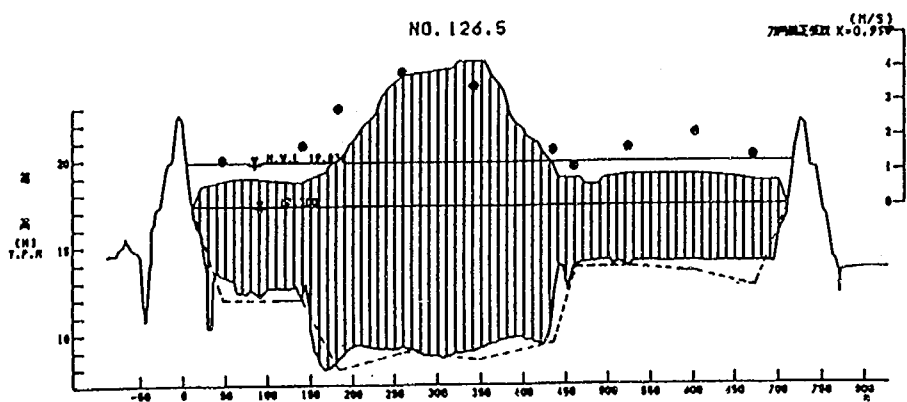
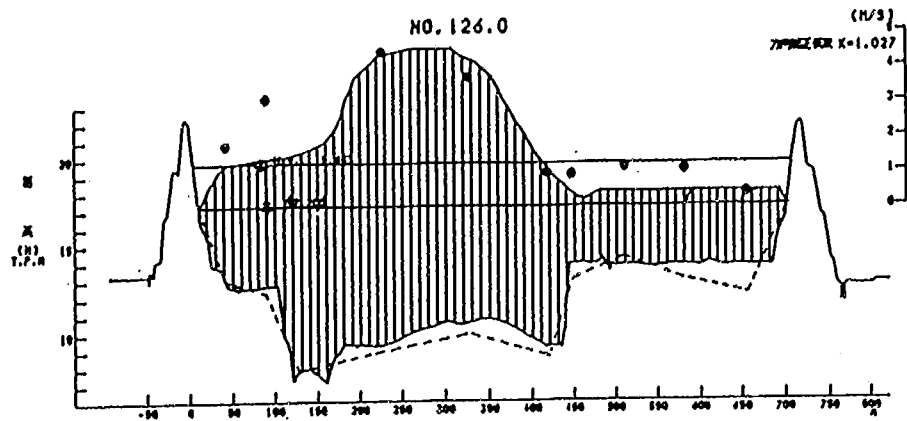


図-4.2.3 表面流速分布 (ケース1)



● : 計算値

図-4.2.4(a) 流速横断分布 (ケース1)

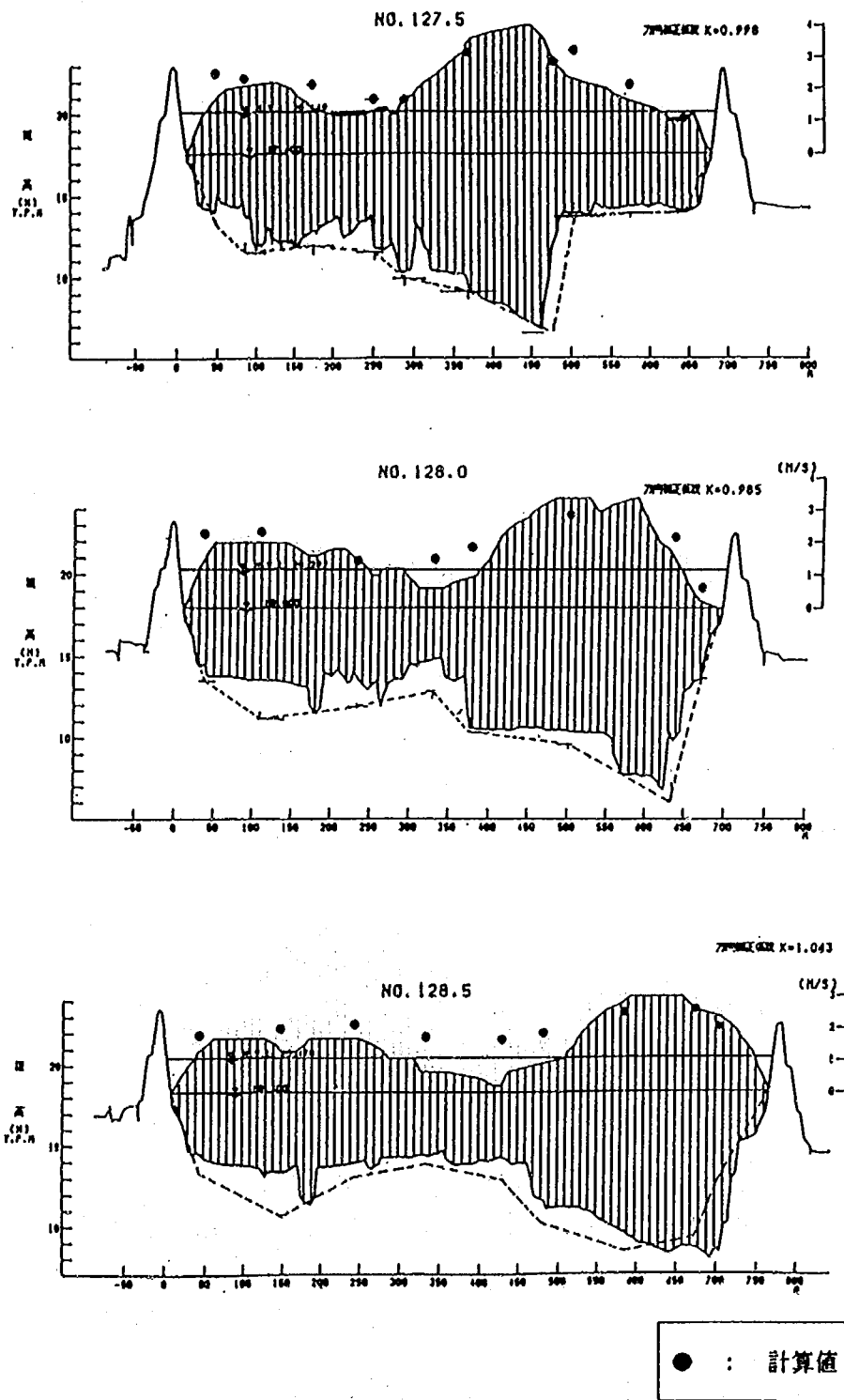
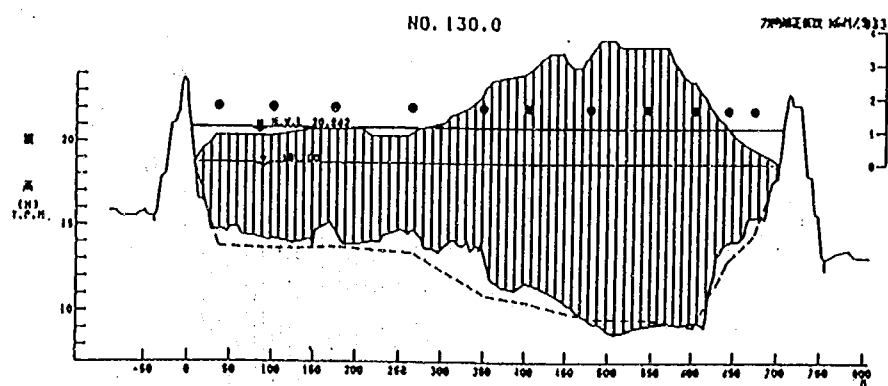
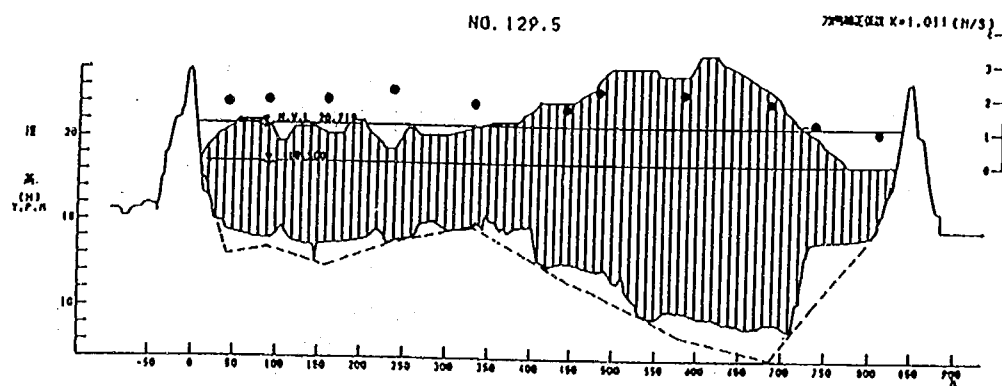
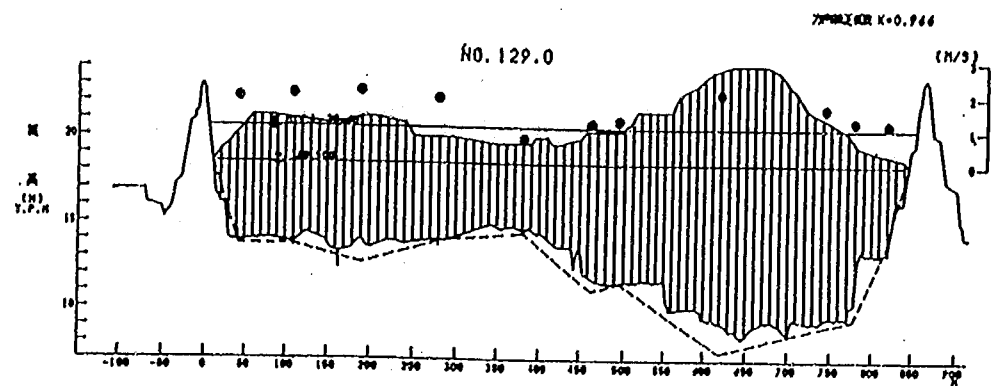


図-4.2.4(b) 流速横断分布 (ケース1)



● : 計算値

図-4.2.4(c) 流速横断分布 (ケース1)

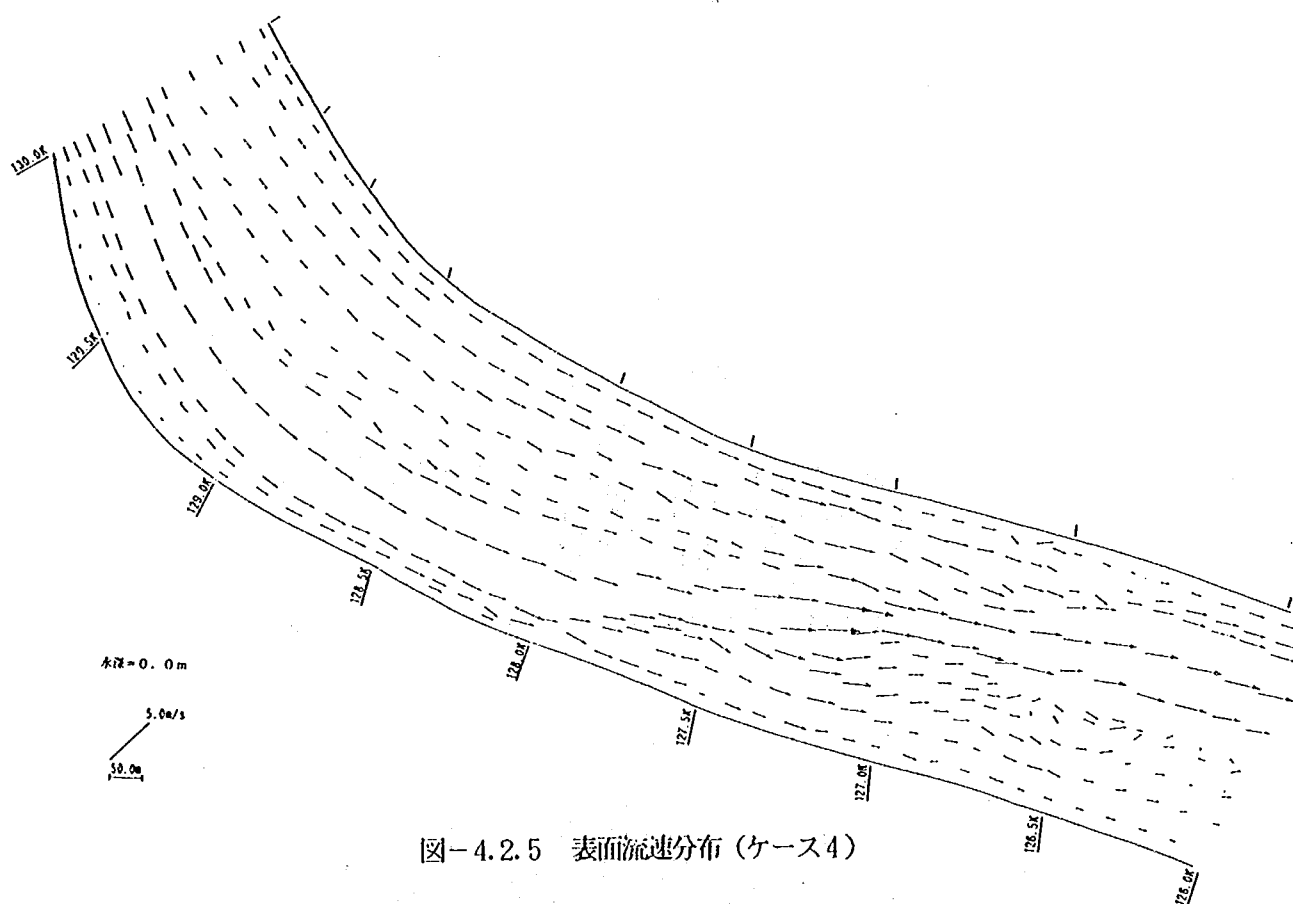


図-4.2.5 表面流速分布 (ケース4)

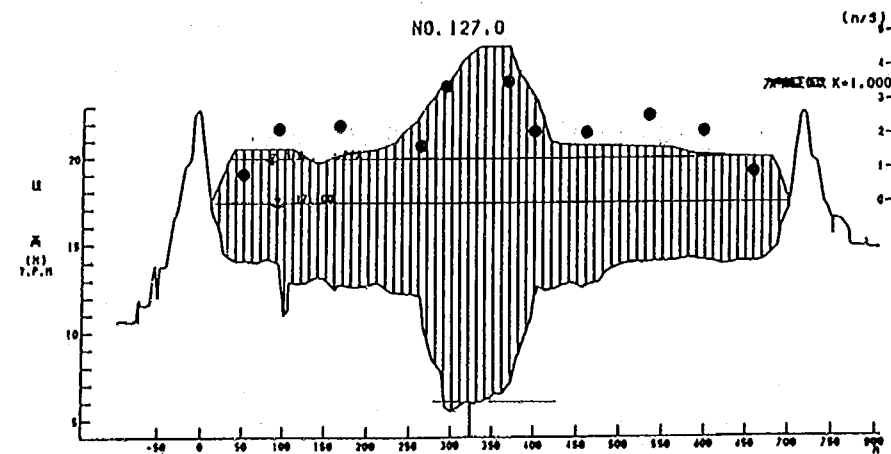
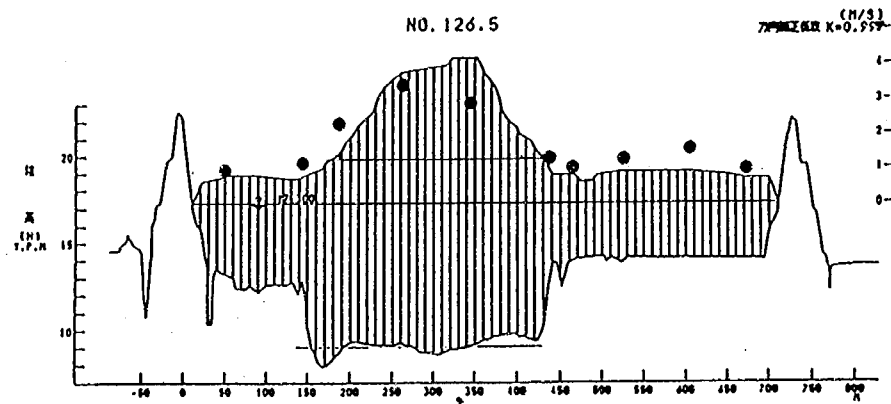
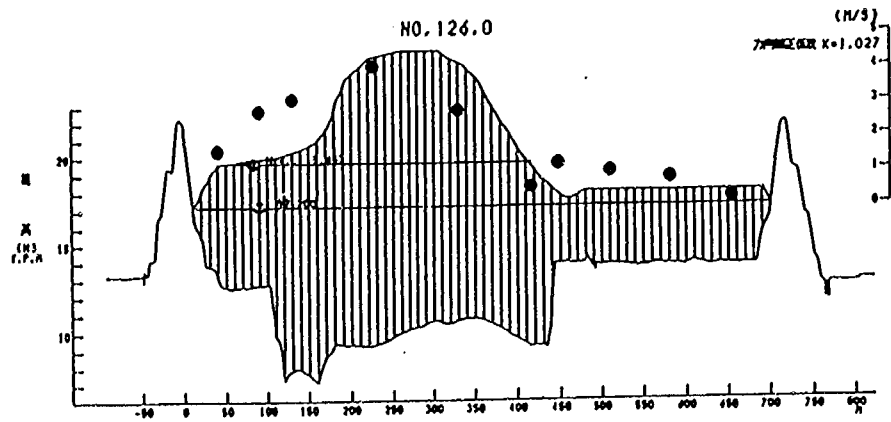


図-4.2.6(a) 流速横断分布 (ケース4)

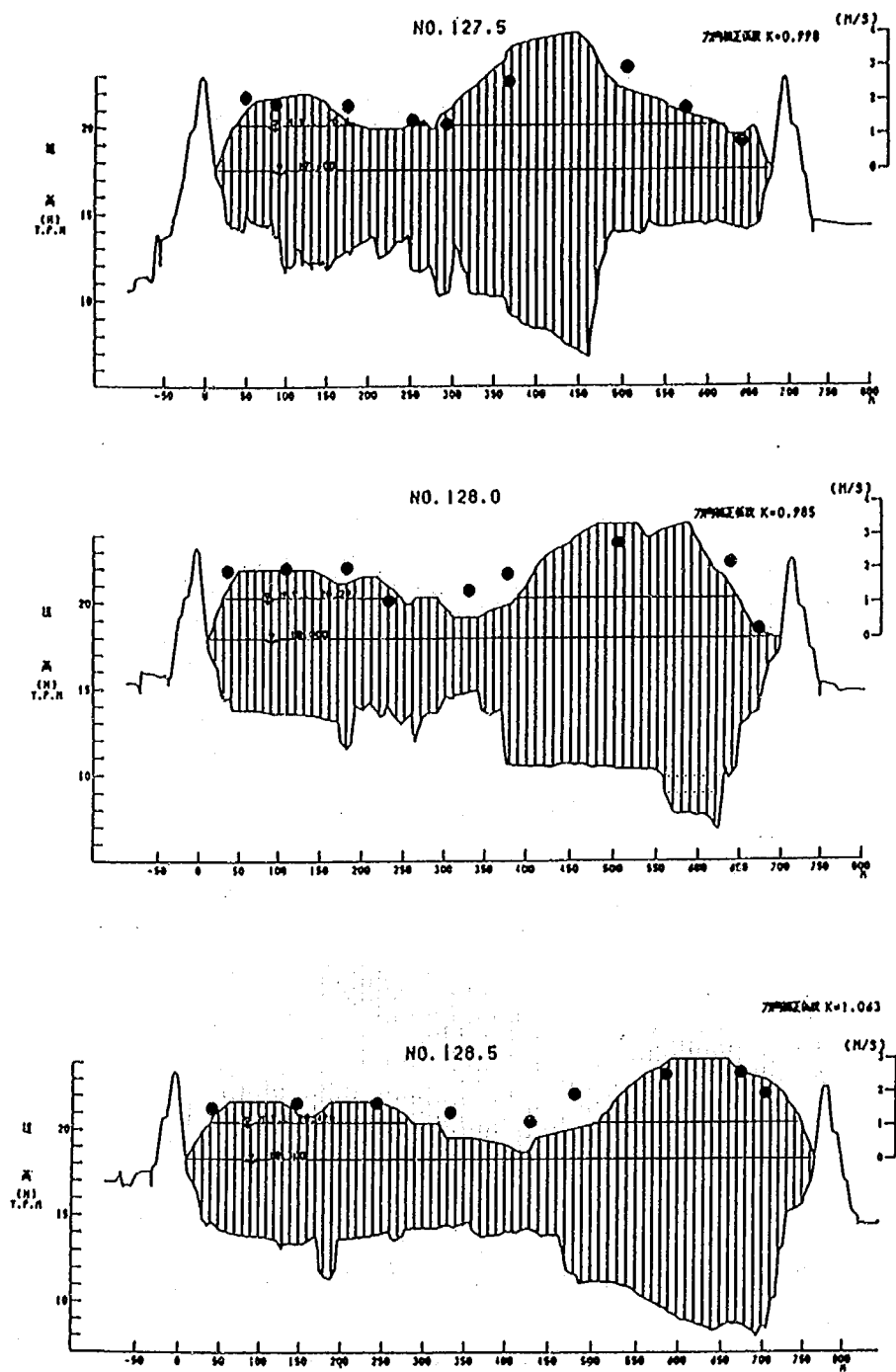


図-4.2.6(b) 流速横断分布 (ケース4)

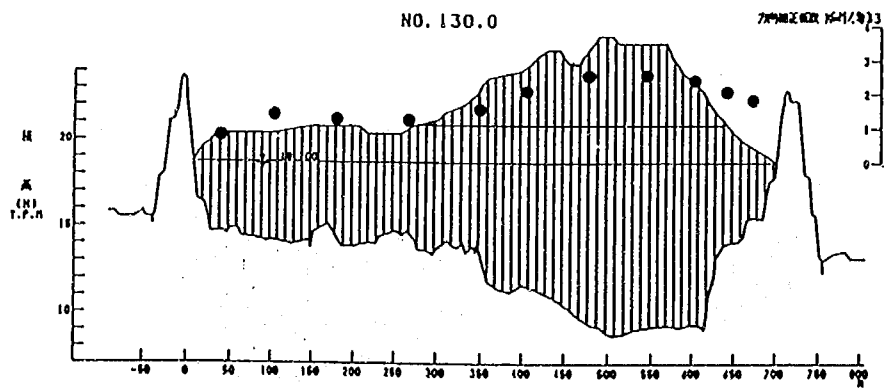
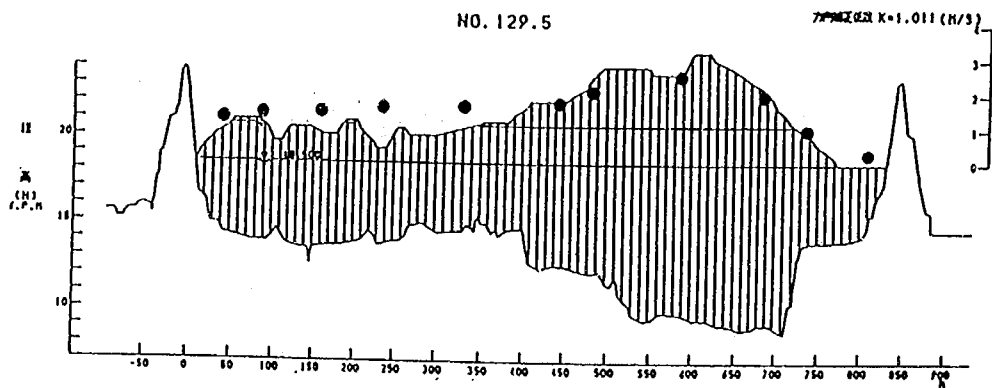
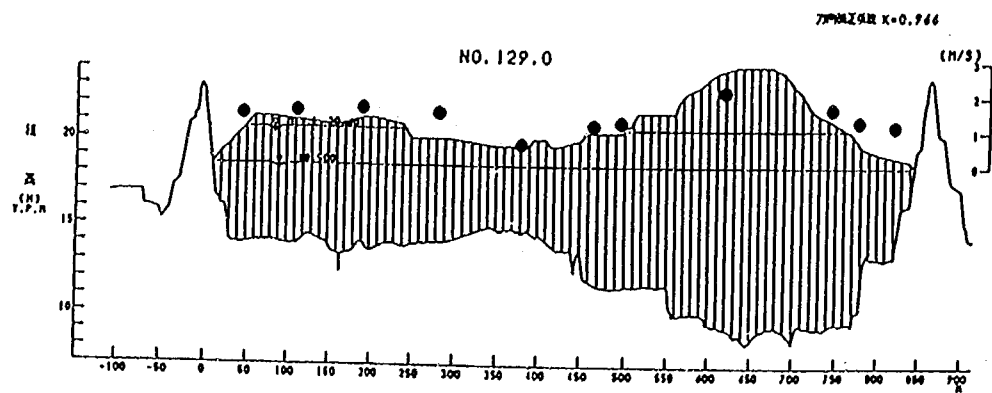


図-4.2.6(c) 流速横断分布 (ケース4)

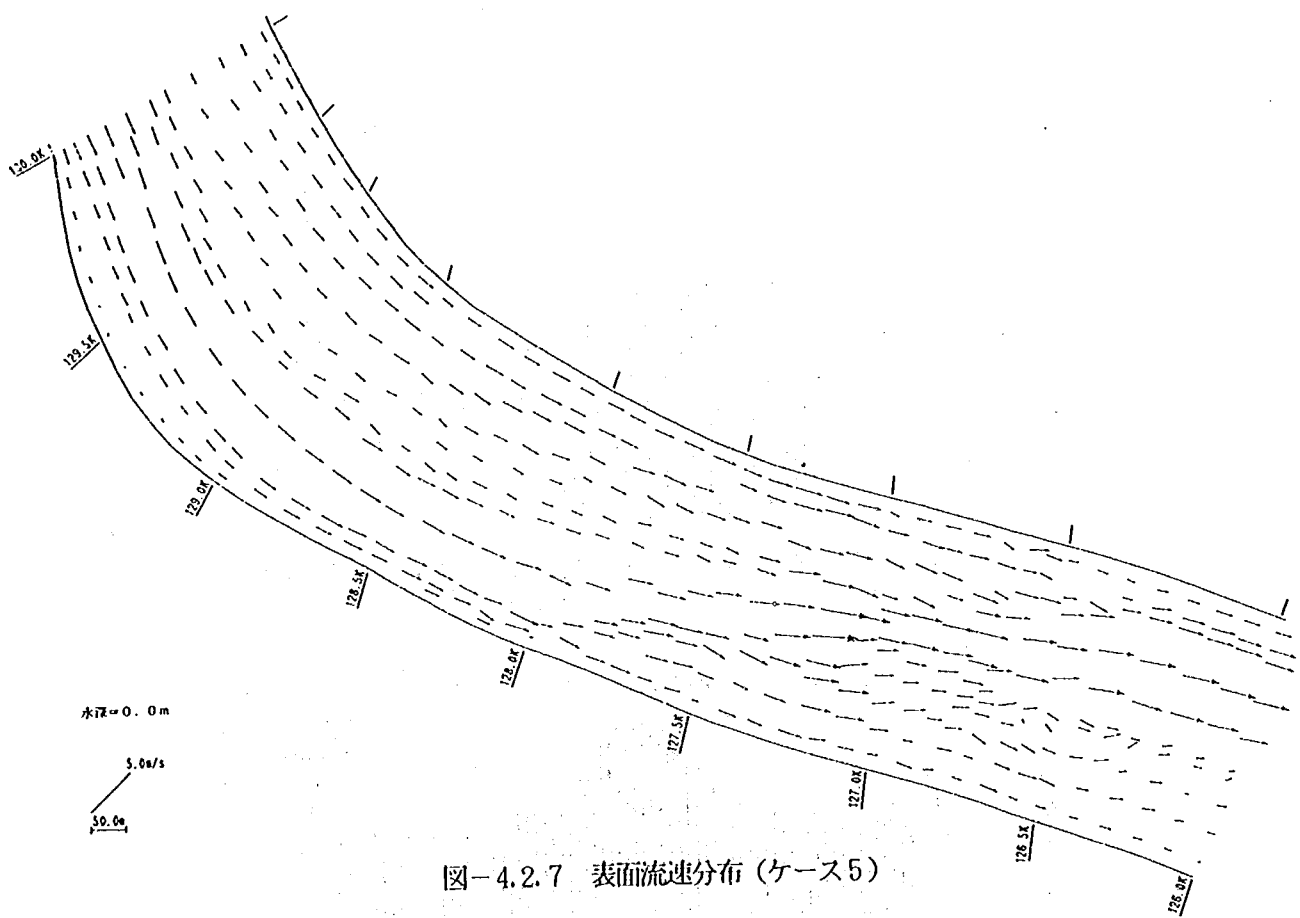


図-4.2.7 表面流速分布 (ケース5)

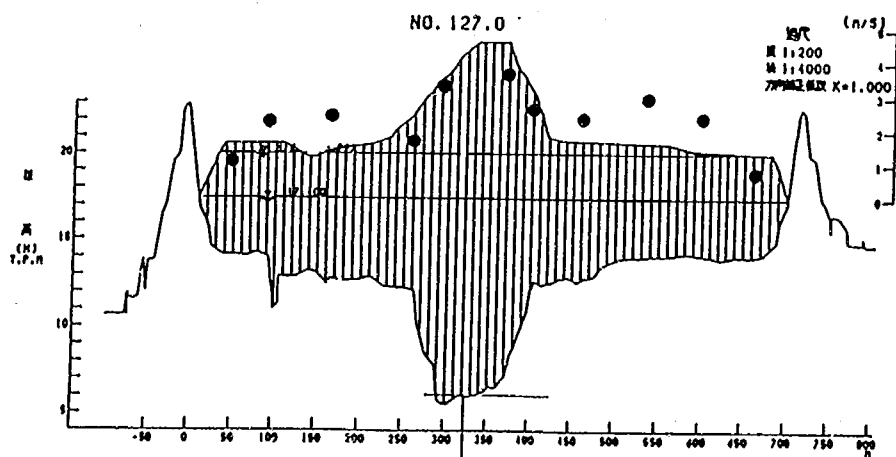
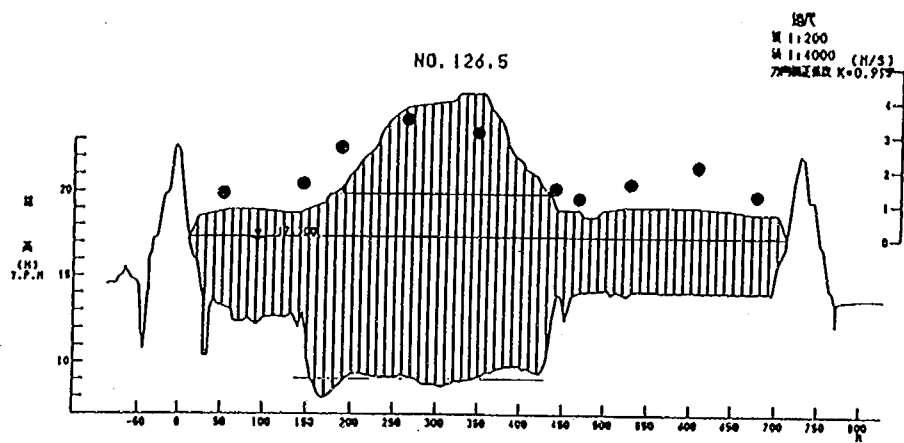
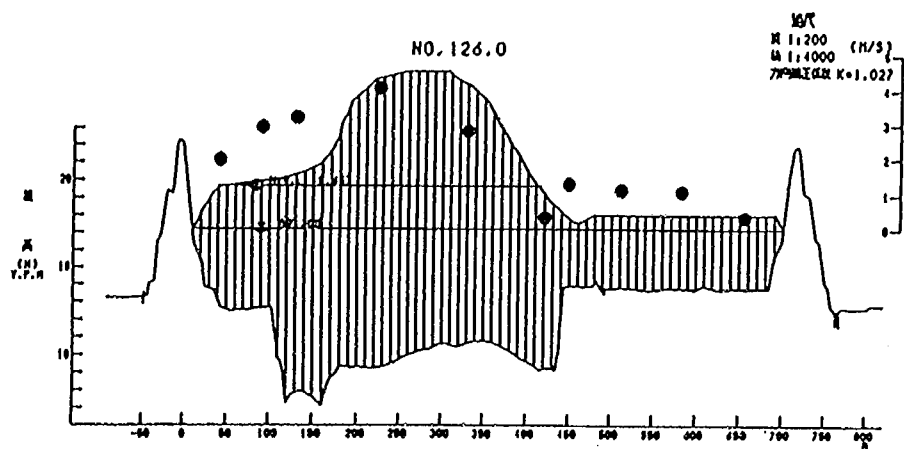


図-4.2.8(a) 流速横断分布 (ケース5)

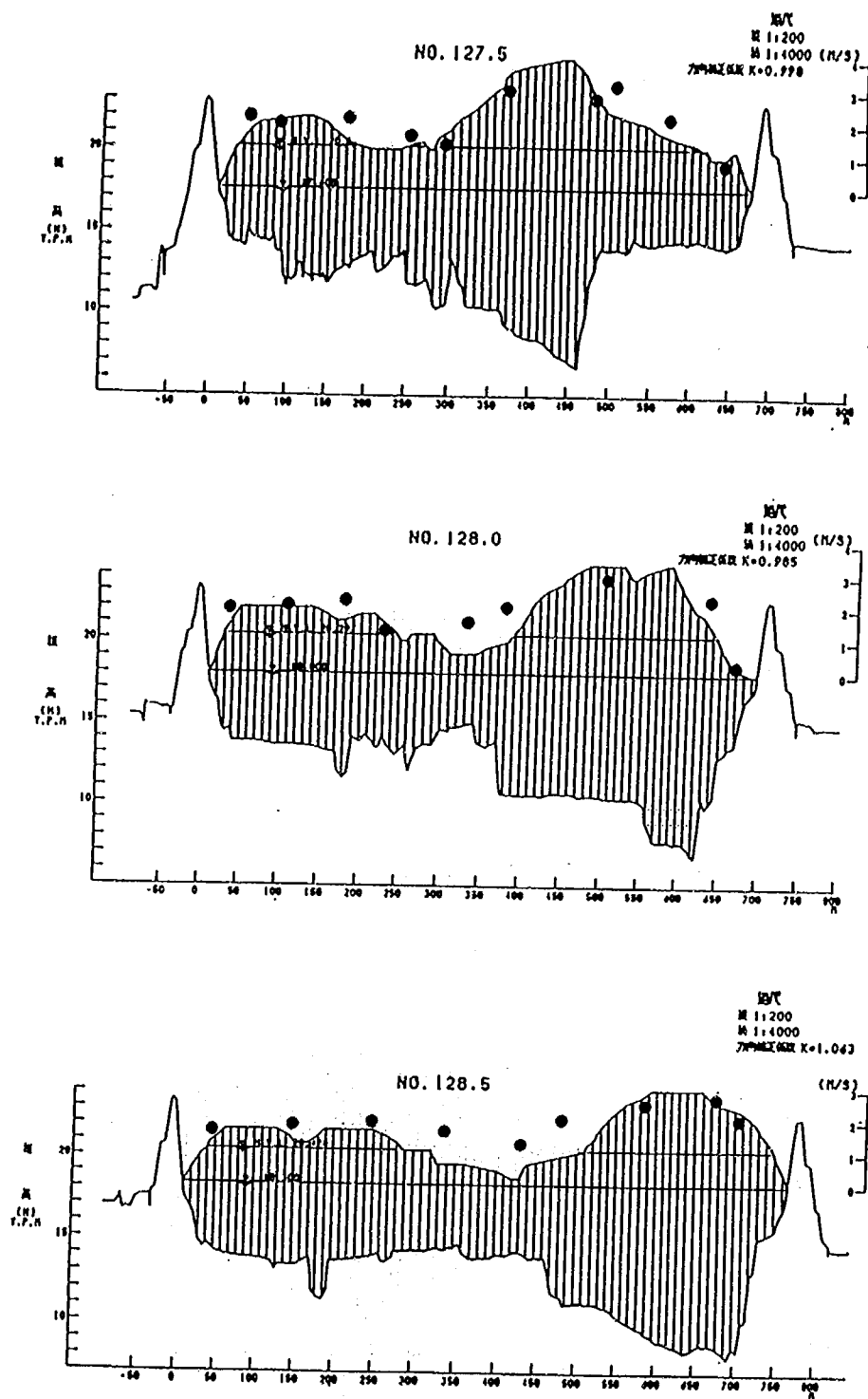


図-4.2.8(b). 流速横断分布 (ケース5)

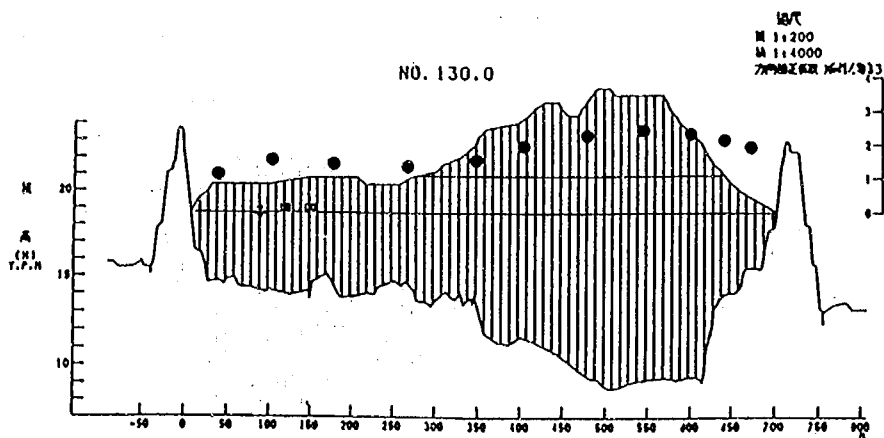
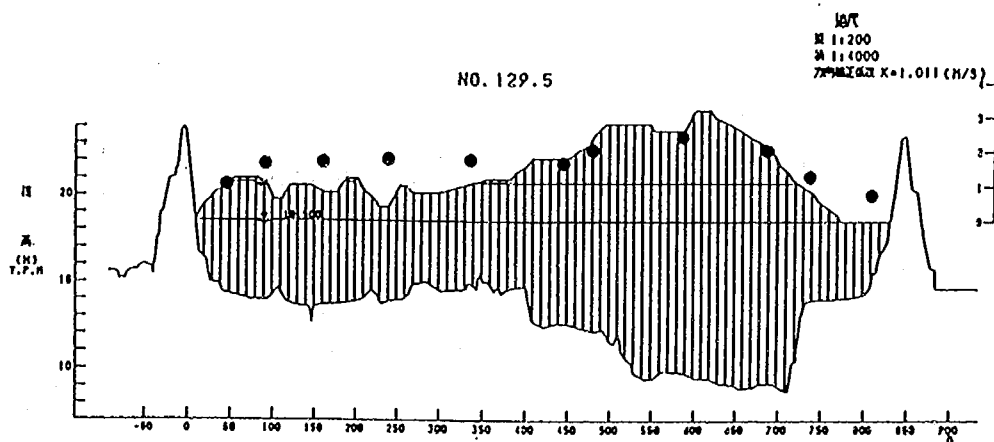
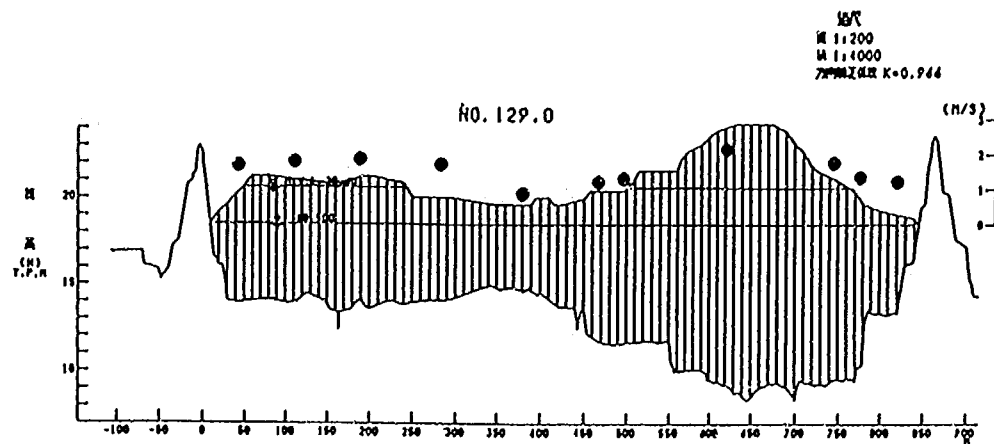
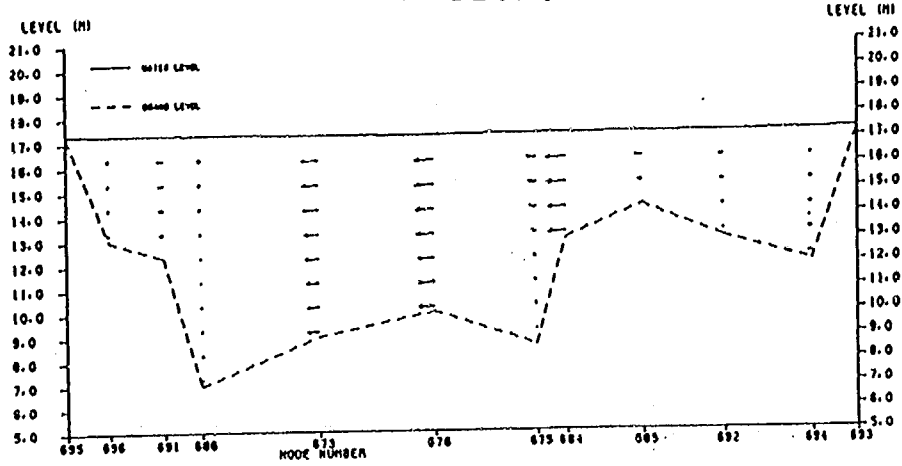
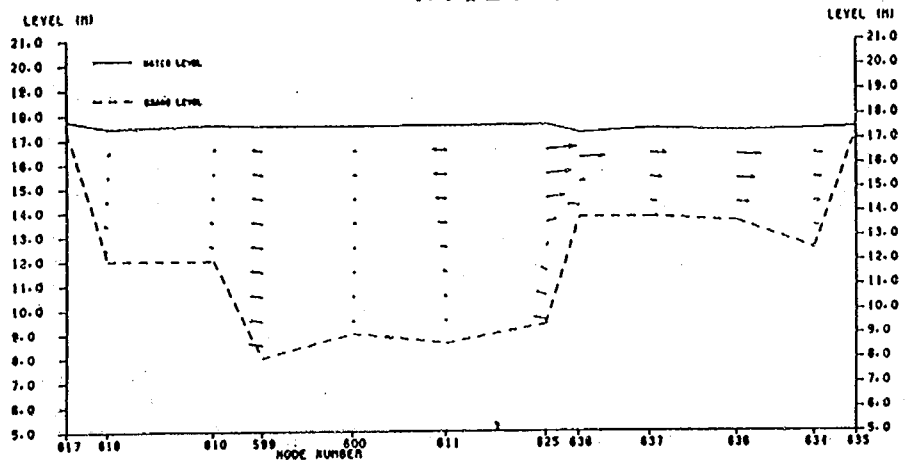


図-4.2.8(c) 流速横断分布 (ケース5)

No126.0



No126.5



No127.0

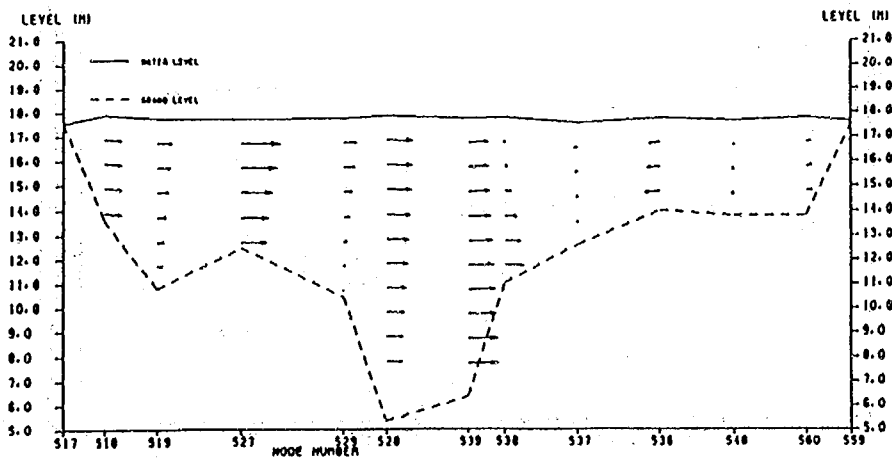
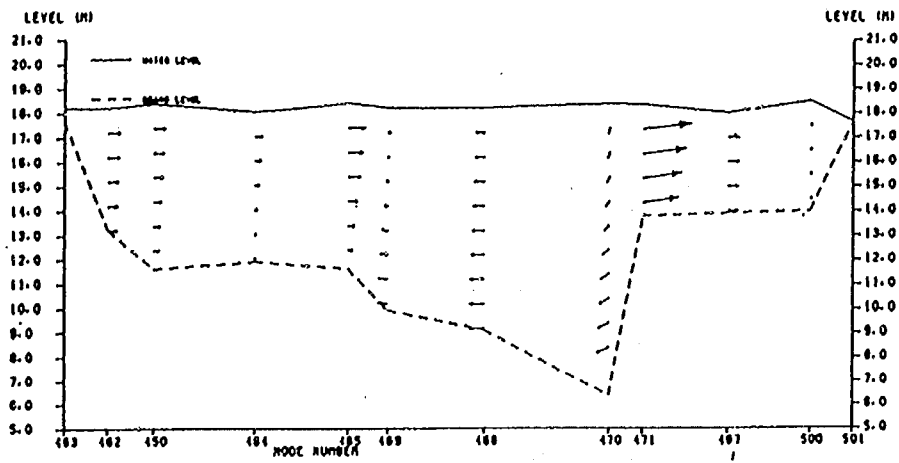
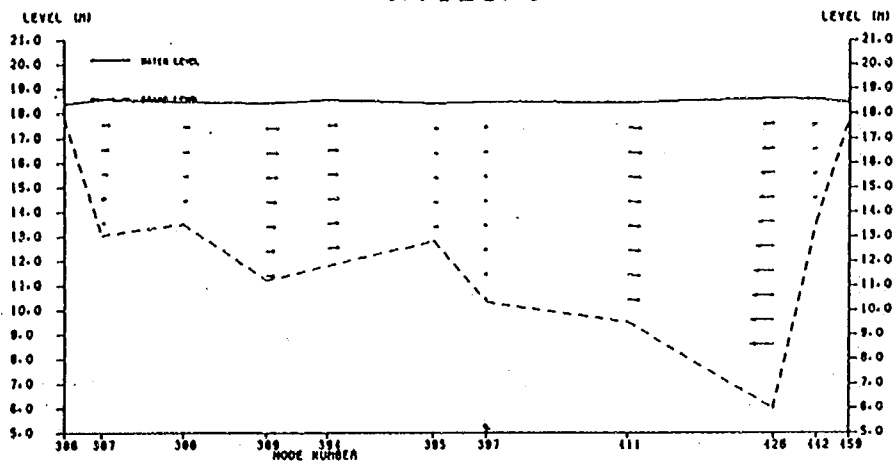


図-4.2.9(a) 水位横断変化及び二次流分布

No127. 5



No128. 0



No128. 5

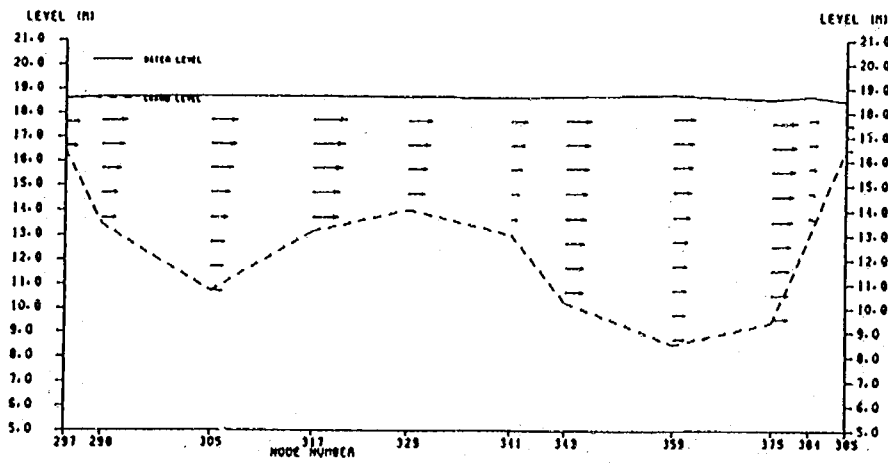
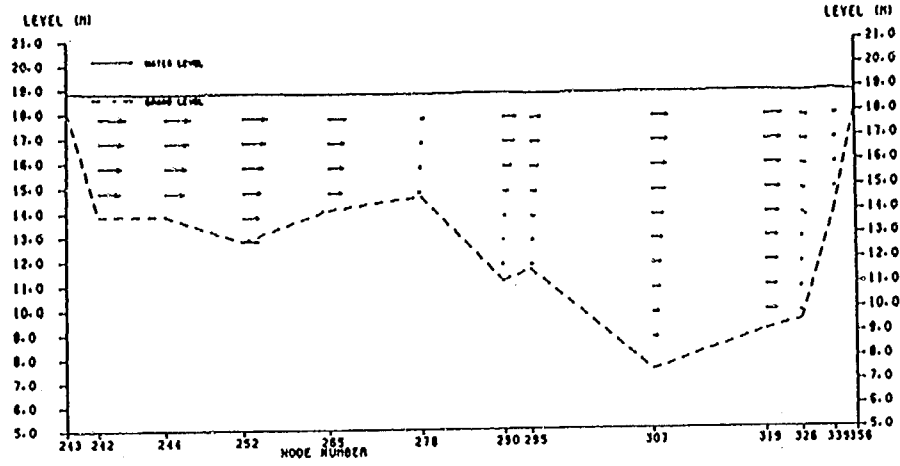
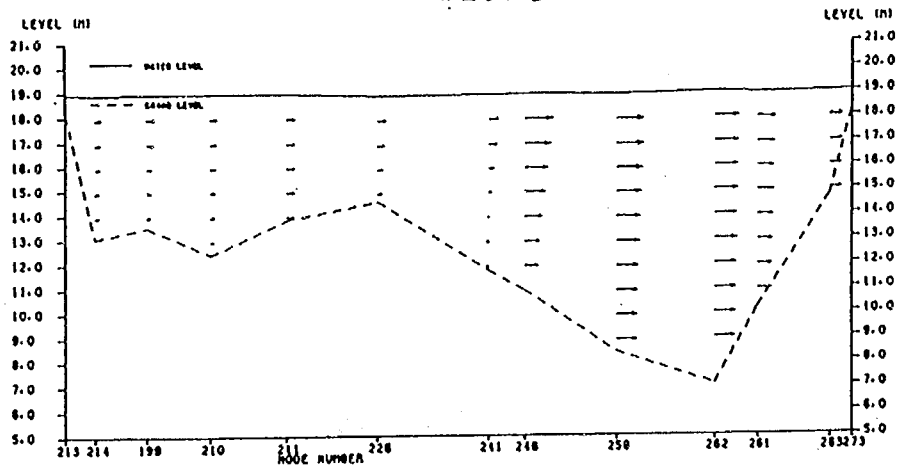


図-4.2.9(b) 水位横断変化及び二次流分布

No129.0



No129.5



No130.0

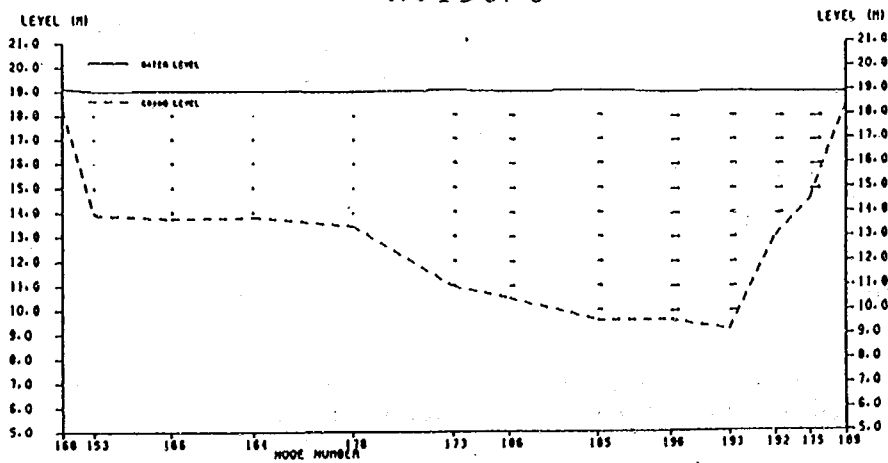


図-4.2.9(c) 水位横断変化及び二次流分布

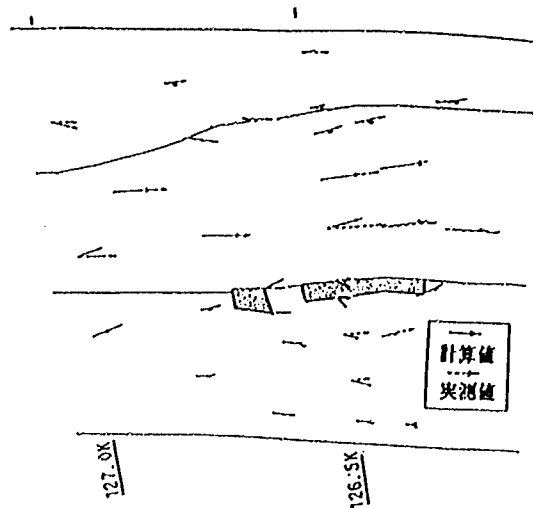


図-4.2.10 樹木群付近の表面流速の比較

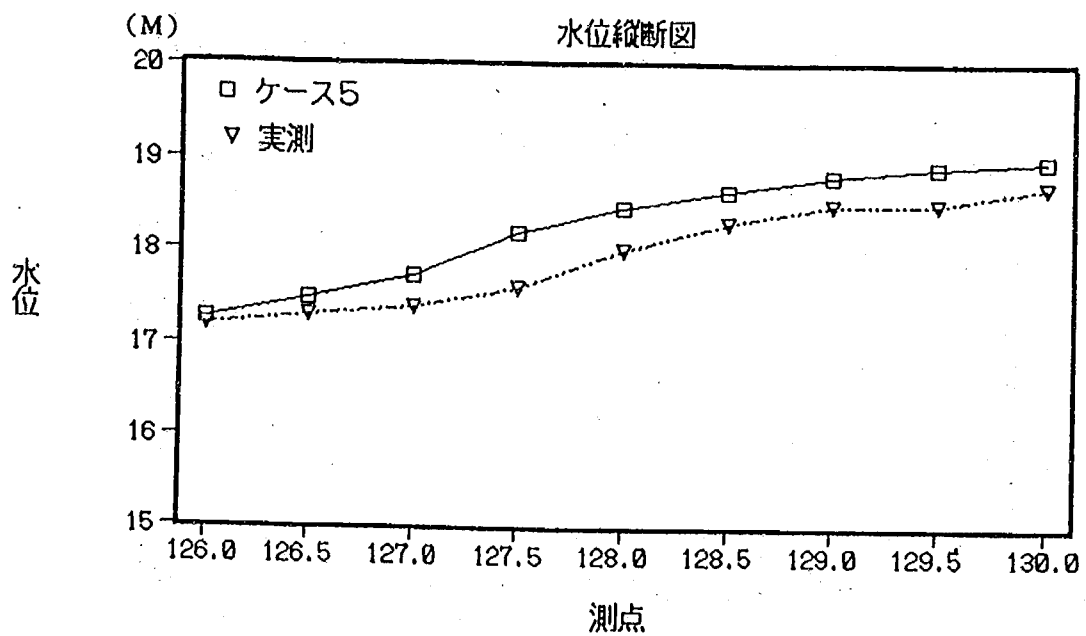


図-4.2.11 水位の縦断変化

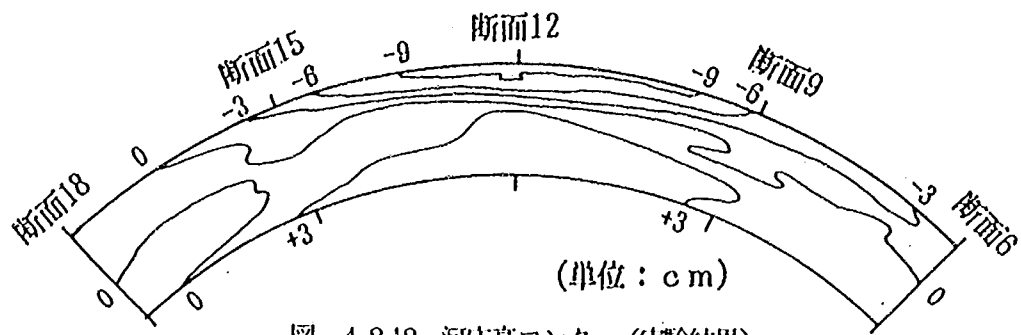


図-4.2.12 河床高コンター (実験結果)

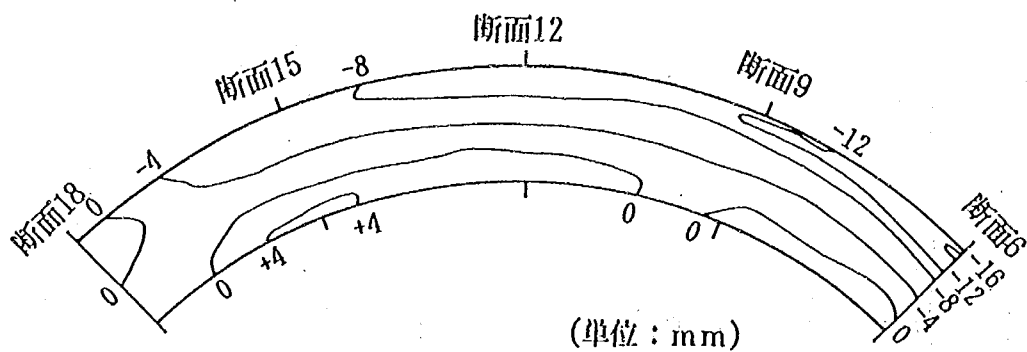


図-4.2.13(a) 河床高コンター (準3次元計算法750秒後)

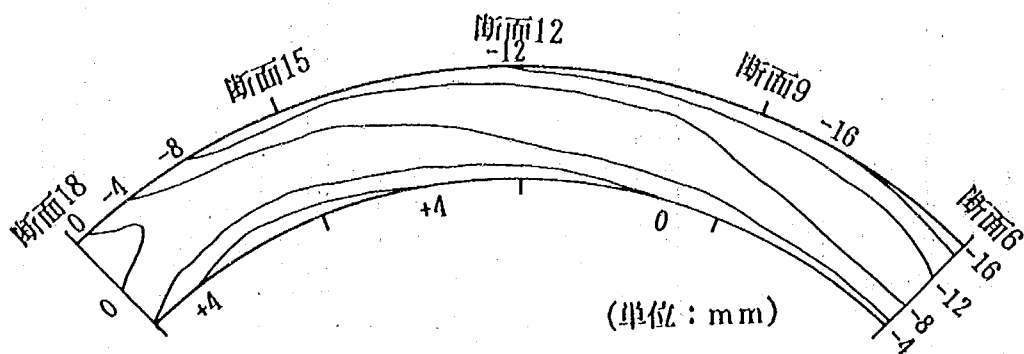


図-4.2.13(b) 河床高コンター (簡易計算法1200秒後)

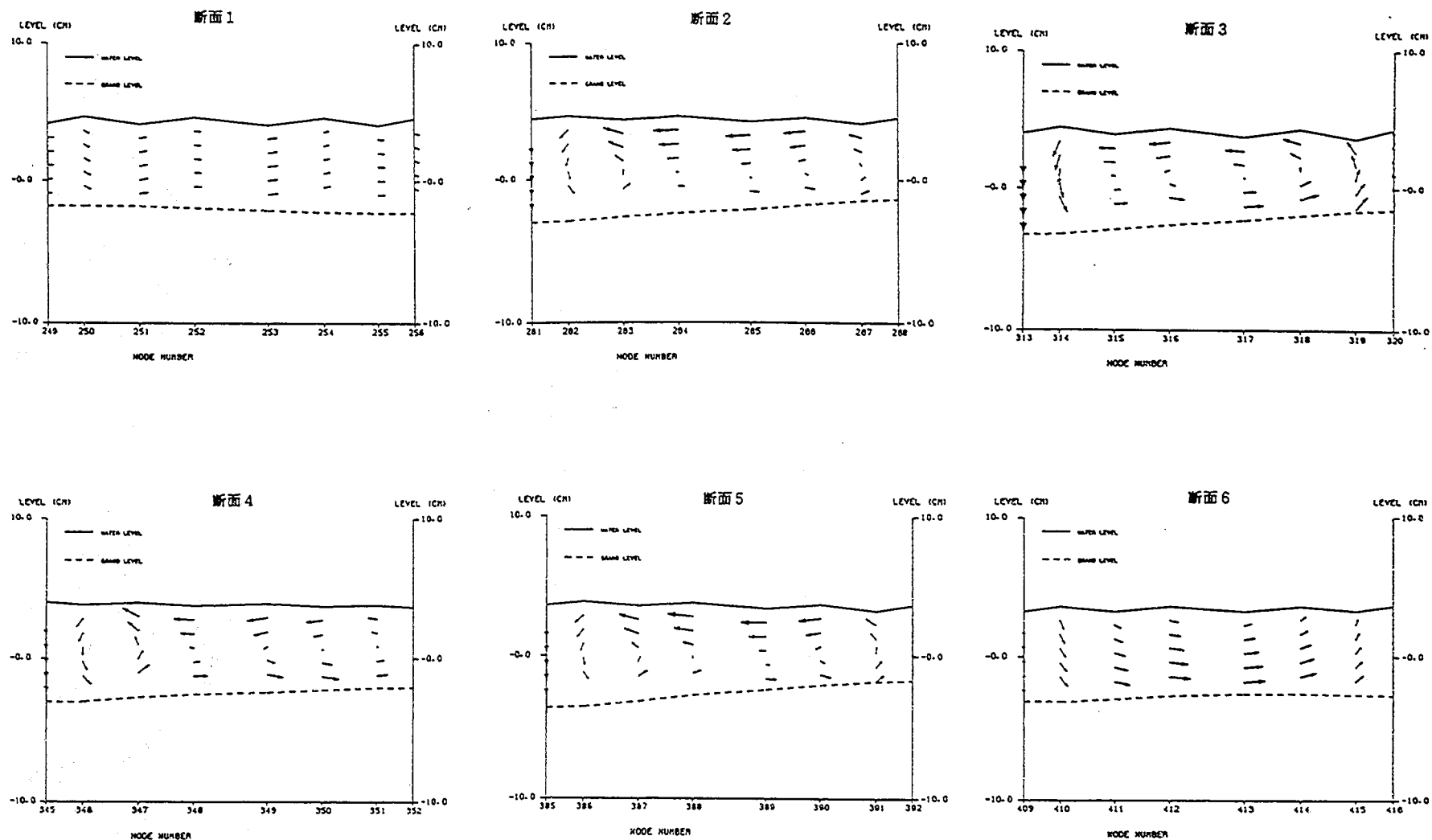


図-4.2.14 水位 河床高の横断変化 二次流分布

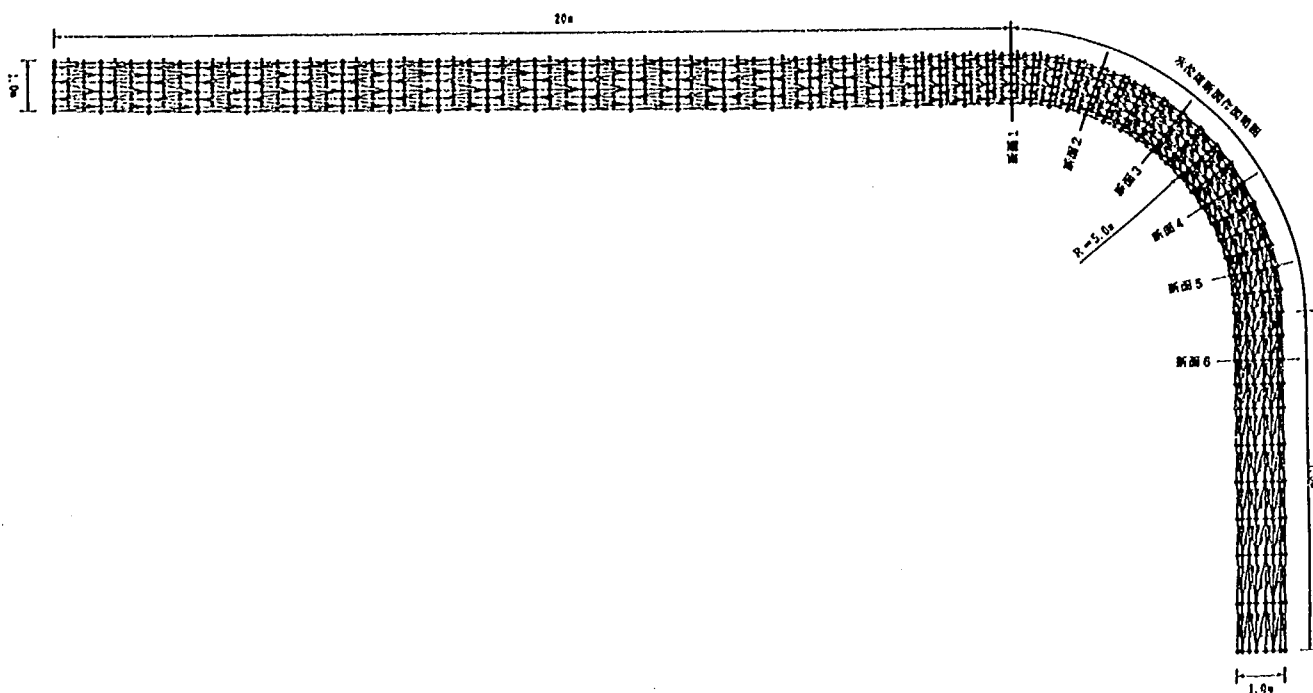


図-4.2.15 要素分割

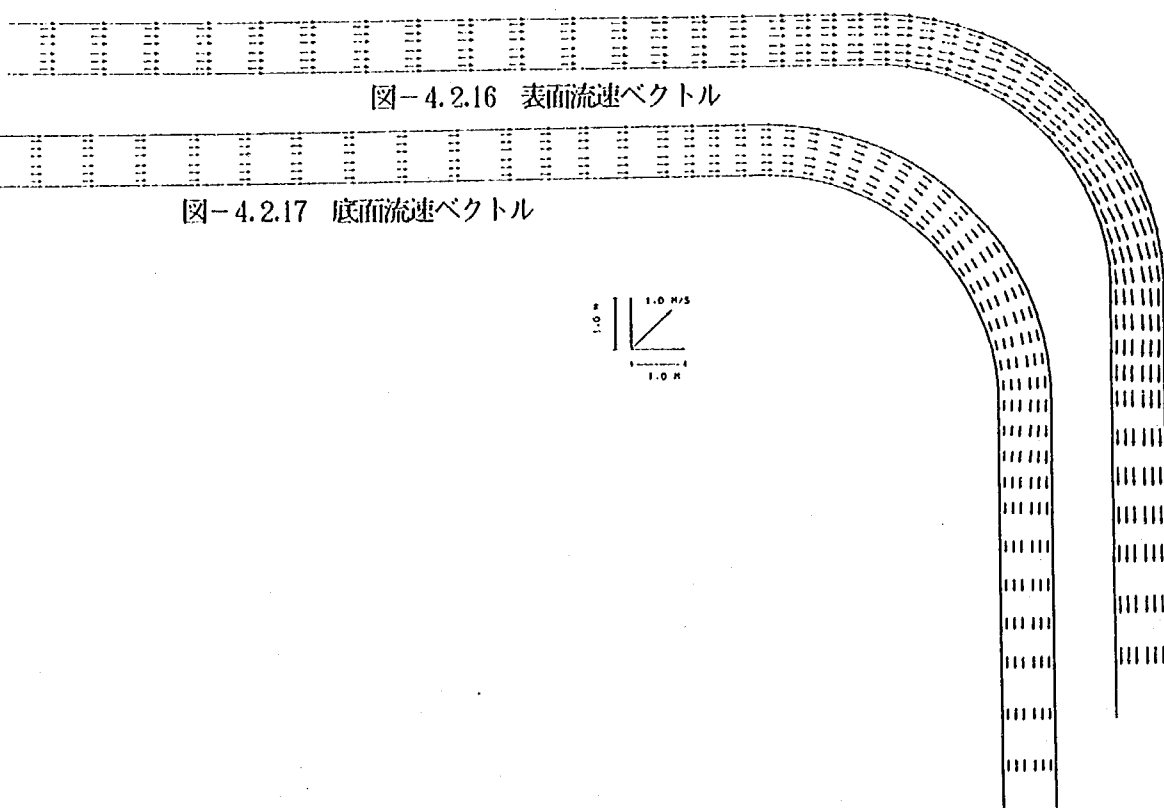


図-4.2.16 表面流速ベクトル

図-4.2.17 底面流速ベクトル

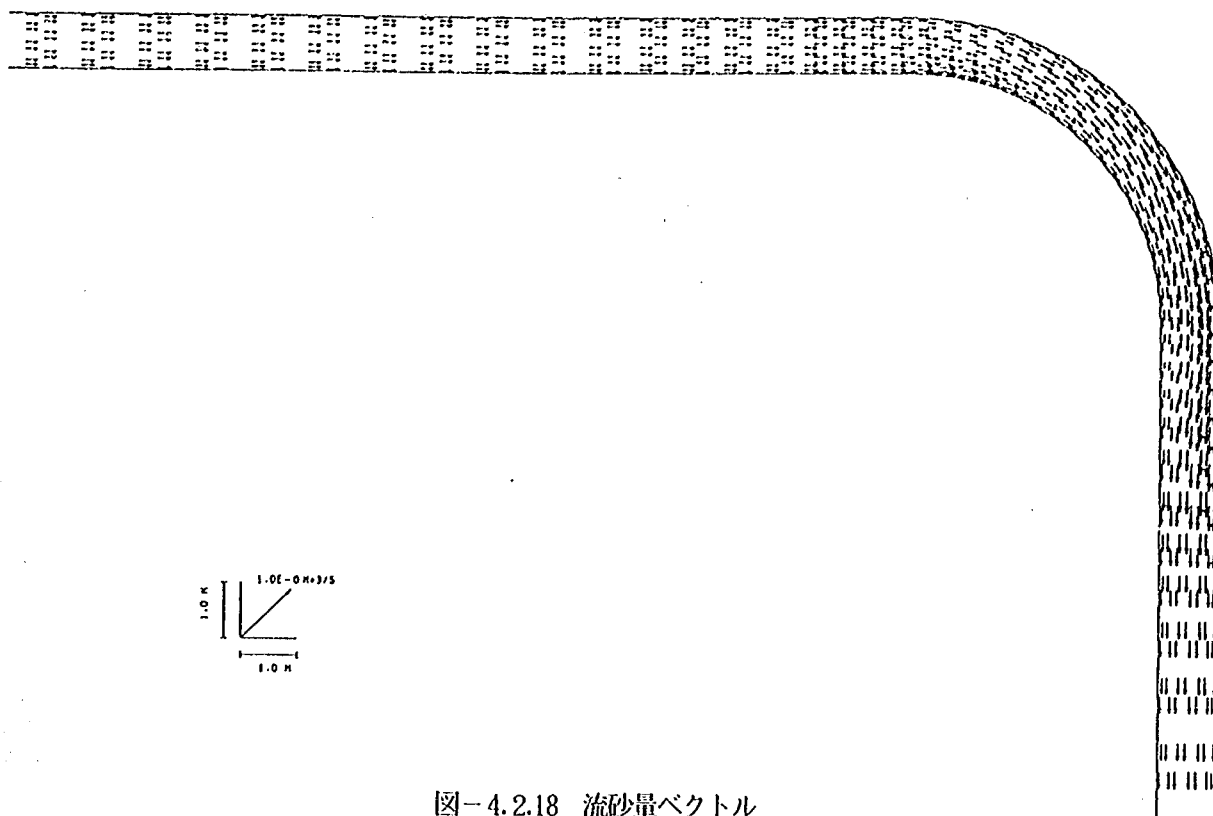


図-4.2.18 流砂量ベクトル

5 章 結論

本研究で作成した計算モデルの特徴とテストランで得られた知見をまとめて、結論とする。

1) モデルの特徴

本モデルでは、従来型のものと比較して以下の特徴を持つ。

- ①移流項は、2次の風上差分型で離散化される。
- ②水位の計算に、運動方程式を導入することにより、水位は拡散型で表される。
- ③計算式全体をランピングすることによって、抵抗項による負の拡散及び非線形項から生み出されるシアーに比例する正または負の拡散項を取り除いた。
- ④2重要要素の重ね合わせにより、要素分割に依存する解の特性及び不安定性を取り除いた。ただし、この場合では要素分割は構造的でなければならない。また、隣合う要素の大きさをなるべく変えない。
- ⑤重み付き積分を行い、要素を重ね合わせて得られる離散化スキームは、一般座標系による2次精度の差分法とほぼ同一であり、本モデルでは周辺情報が余分に入るだけである。

2) 安定性について

本モデルで導入した安定化の手法は、不要な人工粘性を除去しており、計算の安定化に有効であることが、計算することによって実際に確認された。

風上化により、流れは非常に安定し、河床に応じて流速分布が急変化しても安定である。ただし、風上化を行った場合には境界条件を正確に与えないと端部から振動が生じる。振動が生じた場合には、原因があるので、スキームをチェックして負の人工粘性を除く。

水位計算において、要素内の単位時間内の流速の変化を考慮することにより、安定化が図れた。ただし、安定性を高めようとして、この重みを大きくすると時間刻みを大きく取れない。適切な重みと時間間隔を与えることが肝要である。

3) 簡易モデル

平面流速ベクトルと流線の曲率から求めた二次流を用いて、河床変動計算を行う方法であり、非常に安定な解が得られ、なおかつ計算速度が速い。また、河床変動が水面まで達せず、かつ、与える条件が正確ならば解の精度はかなり良いと思われる。

ただし、鉛直流速分布形とその強度を固定しており、実際には鉛直流速分布が変化する、例えば

$$\partial(\Delta z/h)/\partial(s/h_a)$$

が大きく、河床面抵抗によって堆積位置で計算上限界掃流力より小さくなる場合には問題がある。これについては、鉛直流速分布の変化と河床面抵抗の一般的な与え方について研究する必要がある。

4) 多自由度型モデル

鉛直方向の分布形をモードの重ね合わせで表し、流速分布を準3次元的に求めて河床変動計算を行う方法であるが、計算に時間がかかる。流れの計算を簡略化したモデルでは、スカラー計算で富所モデルに対し約5倍の計算速度になるが、簡易モデルよりは遅い。

また、風上化処理は、0次モードだけとしたが、結果を見ると平均流速で移流されるものについては他のモードについても行った方がよい可能性がある。

平面河床変動計算法は、計画河道での河床変動や水衝部の算定に用いることができ、河道の将来予測や河道計画、河道維持計画の立案などに対し役に立つと思われる。計算条件が厳しい場合などには、未だ精度的に問題があり、模型実験などの方が信頼性は高いが、条件が簡単なものであれば計算の方が模型を作らない分だけコストが低く行い易い。なお、平成3年現在では、実際の河道計画の検討に対しては、まだ数値計算は平面流計算で流況を確認する程度にしか使われていないようである。

筆者は建設省の技術研究会「河道特性に関する研究—その2—」において、収集したこれまでに行われた数値計算の事例を見る機会があった。これから気づいたことを述べると、基礎データの与え方、例えば河道の断面形や粗度の分布の与え方がかなりラフであり、問題が多い。特に合成粗度を全体に与えた場合などは、水位が合っても流況は信用できない。このような基礎データ作成やデータの与え方の問題は、実際に計算する人間に依るところが大きい。河床変動を検討する場合には、計算で用いる流量、粒径、河床波の影響、有効掃流力、流砂量式、アーマー化などについてどの様に考え、どの様に与えるが問題となる。実際の現象があらかじめ分かっている場合や既存のデータから十分予測できる場合には、それを解析の中に反映させることが肝要になる。しかしながら、計算を専門に行う人は、計算を行うことが目的になる傾向が見られるので、基礎データの作成などは実際の現象を知っている人間が行った方がよいと思われる。

本研究に当たっては、多くの方々の御支援を得た。特に部外研究員として協同研究した山本信二さん(大日本コンサルタント)には、短い期間の内に簡易モデルのプログラミングからテストランまで行って頂いた。また、多自由度型モデルの改造並びにオペレートについては、パシフィックコンサルタントの浜口さん、蒲生さんに御協力頂いた。また、ダム構造研究室の佐々木研究員には有限要素法について有益な助言を頂いた。ここに、記して感謝の意を表したい。

最後に、要素分割の方法について述べておきたい。本文でも述べた様に、要素の分割方法は4角形の方が良い。これから、新たに有限要素法を始められるならば、4角形要素を用いた方がよい。これは、メモリーと計算量の点で、本方法よりも有利なためである。不幸なことに、既に三角形要素一次補間を用いている場合には、本モデルと同様に2重に要素の重ね合わせを行わないと、正しい計算ができない。また、本モデルで使用した安定化の方法も、同様に要素分割が正しく行われていないと、物理的な意味を失う。

なお、本モデルで3角形分割を用いているのは、以下の経緯によるので注意されたい。元々、土研には4角形分割での有限要素法モデルが在ったが、これを蛇行河道で使うと発散した。そこで、藤田研究員(現総合研究開発機構)が以前検討に用いたコンサルタントのモデル(3角形1次補間)を改造していくことになった。これを検証した結果、水位と流速はやや乱れるが解は求められるので、これを使うことにした。次に山本さんが部外研究員として、川原タイプのモデル(3角形1次補間)を持ち込んできた。テストとしてこれに、二次流を考慮し、xy系での河床変動計算モデルを組み込んで計算を行った。しかし、河床変動計算には人工粘性の導入を禁じたため、河床高が乱れて長時間の計算ができず、解が求められない。有限要素法が、局所座標系への機械的な変換ならば、計算データと河床変動の式の上からは乱れは減衰するはずなのであるが、実際には減衰しない。ここで、山本さんは一度戻る。また、計算を通じて人工粘性の問題と風上化の必要性を感じたので、これも併せて検討する。その後、じょう乱が要素の分割方法に起因

しており、実際にスキームの違いを書き下して3角形分割に問題があることが判った。ここで、分割方法の工夫で問題を解決しようと、佐々木君に聞くと、本来ならば4角形分割の方が良く、構造問題の定常計算では異なる三角形分割の解を求めて、これを重ね合わせるなどしているが非定常問題での例はないとのことであった。しかし、分割方法の変更はできない。一方、世間の状況を見ると、建設コンサルタントが有限要素法を用いている場合には、3角形1次要素を用いていることが多く、計算値が乱れているのを強制的に均して解としていることが多く、この問題についても解決しなければならない。そこで、3角形分割のプログラムを用いて、最小限の変更で合理的な計算が可能な方法について考えた。初めは、2種類の要素を、1時間 step ごとに入れ換えることを考えたが、この場合には離散化スキームを書き下すと計算の物理的意味が変になる。すなわち、2重要素の重ね合わせは同時に行う必要がある。プログラムの変更のついでに、スキームを書き下して不要な人工粘性を取り除き（ランピング化）、安定化手法（風上化、ポアッソン化）も導入する。山本さんに再度部外研究員として来てもらい、プログラムを完成した頂いた。

このように、研究時間の多くを安定化の検討に費やしたために、検証は未だ十分ではない。砂州の計算についても、従来の実験結果、解析解などと比較検討し、また非砂州領域での蛇行や弯曲の影響についても調べるつもりであったが時間の都合上できなかった。これらについては別の機会があれば、検討したい。

平成 3年 3月

参考文献

なお、参考文献は比較的手に入れ易いものを中心に挙げた。

(川原の有限要素法に関する基礎的な文献)

1) 川原睦人 「有限要素法流体解析」 日科技連, 1985

2) 川原睦人 「水理解析と有限要素法」 土木学会水理委員会 水工学シリーズ77-A-2, 1977

(清水の差分法)

3) 清水康行, 板倉忠興 「河川における2次元流れと河床変動の計算」 土木試験所報告第85号, 1986

4) 清水康行, 板倉忠興, 山口甲 「2次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション」

第31回水理講演会論文集, 1987

5) 清水康行, 板倉忠興, 「簡易な3次元モデルによる蛇行流と河床変動の数値計算」第43回年次学術講演会 pp.272-273, 1988

6) 清水康行 「蛇行河川における3次元流れと掃流砂, 浮遊砂を考慮した河床変動の計算」開発土木研究所報告, 1988

(ADI法またはBeam-Warming法)

7) R.M.Beam and R.F.Warming "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equation", AIAA J.16, pp.393-402, 1981

(移流項の風上化と精度)

8) 日本物理学会編「スーパーコンピュータ」5章, 11章, 培風館, 1985

9) 朝位孝二, 小松利光, 大串浩一郎 「移流方程式の高精度数値解法について」第43回年次学術講演会, pp.538-539, 1990

10) 大串浩一郎, 小松利光, 朝位孝二 「非線形移流項の高精度数値解法について」第44回年次学術講演会, pp.596-597, 1990

11) 本田逸郎, 大庭英樹, 南金山哲治, 谷川祐治, 中島幸敏 「二次元キャビティ流れの数値解析」日本機械学会論文集(B編)56巻522号, 1990

(圧力のポアソン型化)

12) 土木学会編 「土木工学における数値解析/流体解析編」MAC法, サイエンス社

13) 吉田裕, 野村卓史, 菅野良一 「非定常非圧縮粘性流れの有限要素方程式の解法」土木学会論文集第351号, 1984

14) B.Ramaswamy "Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flows" Computers & Fluids Vol.14, No4, pp349-388, 1988

15) 沢田郁夫「新しい数値流体解析アルゴリズムNSMAC」日本機械学会論文集(B編)55巻516, pp.2230-2237, 1989

16) 林正宏, 川原睦人 「流速修正法による非圧縮粘性流れの有限要素解析」第43回年次学術講演会, pp.572-573, 1990

17) 林正宏, 川原睦人 「分離法を用いた非圧縮粘性流れの有限要素解析」第42回年次学術講演会, pp.604-605, 1989

- 18) 畑中勝守, 川原睦人 「3次元非圧縮粘性流れの有限要素解析」第45回年次学術講演会, pp.570-571, 1990
(混合補間法)
- 19) 文献1) 5章
- 20) 石毛立也, 川原睦人 「有限要素法の補間関数についての一考察」第44回年次学術講演会, pp.598-599, 1989
- 21) 石毛立也, 川原睦人 「定常 Navier-Stokes 方程式の有限要素解析における要素の選択について」第45回年次学術講演会, pp.568-569, 1990
(Boundary-Fitted-Grid-System または一般座標系)
- 22) Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W. "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies" J. of Comp. Phys. Vol.15, pp.299-319, 1974
- 23) Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W. "Numerical Grid Generation, Foundations and Applications", North-Holland
- 24) 井上智夫, 岩佐義朗, 綾史朗 「一般座標系による流れと水質混合特性の平面2次元解析」第43回年次学術講演会, 1987
- 25) 岩佐義朗, 綾史朗, 井上智夫 「河川における流れと横分散に関する数値実験的研究」京大防災研究所年報第32号 B-2, pp.669-687, 1989
(上流型)
- 26) 文献1) 4章
- 27) T.J.R. Hughes, "A Simple Scheme for Developing 'Upwind' Finite Elements" International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.12, pp.1359-1365, 1978
- 28) Guy Payre, Michel de Brossia and Jacques Bazinet "An 'Upwind' Finite Element Method via Numerical Integration" International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.18, pp.381-396, 1982
(テイラーガラキン法)
- 29) J. Donea "Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problem", International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.20, 101-119, 1984
- 30) N.D. Katopodes et al. "Explicit Computation of Discontinuous Open Channel Flow", J. ASCE, Hyd. Div., Vol.112-6, pp.456-475, 1986
- 31) 岡太郎, 近森秀高 「Taylor-Galerkin 法による洪水氾濫解析」第44回土木学会年次学術講演会 pp.138, 1989
- 32) 矢沢成尚, 真野明, 沢本正樹 「有限要素法による河口砂州付近の流れの解析」第44回年次学術講演会, pp.584-585, 1989
(BTD法)
- 33) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.G. Upson "A Modified Finite Element Method for Solving

- the Time-dependent Incompressible Navier-Stokes Equation, Part1 : Theory, Part2 : Applications", Int. J.Num.Meth.Fluids,4,1984,557-598,619-640
- 34) 野村卓史, 飯島政義, 三橋浩一「振動する物体周りの流れの問題のA L E有限要素解析」東工大土木工学科研究報告 No.40, 1989
(離散化式の安定性)
- 35) 土木学会編「土木工学における数値解析／流体解析編」4章5章, サイエンス社
- 36) P.J.Rocche「コンピュータによる流体力学」構造工学研究所
- 37) 高橋亮一編著「コンピュータによる流体力学〈演習〉」構造計画研究所, 1982
- 38) 平岡正勝, 古市徹, 田中宏明「移流拡散方程式の数値解の安定解析」土木学会論文報告集第319号, 1982
- 39) 岡永博夫, 山本泰, 棚橋隆彦「差分法による移流方程式の高精度計算について」日本機会学会論文集 (B編) 56巻522号, 1990
- 40) 松田安弘「一次元移流拡散方程式の, 有限要素法および差分法による新しい定式化」日本機会学会論文集 (B編) 56巻522号, 1990
(TVD法)
- 41) 大林茂, 桑原邦郎「圧縮性流れの Navier-Stokes 方程式の数値計算法 I」ながれ vol.5-2, pp131-145, 1986
- 42) 大林茂, 桑原邦郎「圧縮性流れの Navier-Stokes 方程式の数値計算法 II」ながれ vol.5-3, pp199-209, 1986
(富所モデル)
- 43) 富所五郎, 荒木正夫, 吉田宏司「開水路の流れの三次元数値解法」第29回水理講演会論文集, 1985
(長谷川式)
- 44) 長谷川和義「沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究」北海道大学博士論文, 1984
- 45) 長谷川和義「蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究」土木学会論文報告集 Vol.338, pp. 105-114, 1983
- 46) 芦田和男, 澤井健二, 謝正倫「二次元水域における砂州の発達・変動過程に関する研究(3)」京大防災研究所年報第32号 B-2, 1989
(流砂に関する文献)
- 47) 吉川秀夫編「流砂の水理学」丸善, 1985
(付加せん断力)
- 48) 福岡捷二, 山坂昌成「直線流路の交互砂州」第27回水理講演会論文集 pp.703-708, 1983
- 49) 福岡捷二, 山坂昌成, 清水義彦「平衡形状に着目した中規模河床形態の卓越波数と形成領域区分」土木学会論文報告集 Vol.363, pp.115-124, 1985
(芦田, 道上式)
- 50) 芦田和夫, 道上正規「移動床流れの抵抗と掃流量に関する基礎的研究」土木学会論文報告集第206号, 1972
(流砂量ベクトル)

- 51) 平野宗夫 「拡幅を伴う流路変動について」 土木学会論文報告集第210号, 1973
- 52) 長谷川和義 「非平衡性を考慮した側岸侵食量式に関する研究」 土木学会論文報告集第316号, 1981
(二次流)
- 53) Rozovskii "Flow of Water in Bends of Open Channels", The Academy of Science of USSR, 1957
- 54) F.Engelund "Flow and Bed Topography in Channel bed" ASCE, Vol.100, HY11, pp.1631-1648, 1974
- 55) Zimmerman, C and J.F.Kennedy "Transverse Bed Slopes in Curved Alluvial Streams" J. ASCE Hyd. Div., Vol.104-1, 1978
- 56) M.Falcon and J.F.Kennedy "Flow alluvial-river curves" J. of Fluid. Mech., Vol.133, pp.1-16, 1983
- 57) 池田駿介 「移動床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について」 土木学会論文報告集 Vol.229, pp.55-65, 1974
(非平衡性)
- 58) 福岡捷二, 山坂昌成, 安陪和雄 「強い非平衡流砂運動を伴う河床変動」 第28回水理講演会論文集 pp.679-684, 1984
- 59) Kennedy, J.F. "The Mechanics of Dunes and Antidunes in Erodible Channels", J.F.M.16-4, 1963
- 60) Hayashi, T "Formation of Dunes and Antidunes in Open Channels", Proc. ASCE Vol.96-2, 1970
- 61) 林泰造, 尾崎幸男, 大西光陽 「中規模河床形態の発生機構について」 第26回水理講演会論文集 pp.17-24, 1982
(実験データ)
- 62) 福岡捷二, 渡辺明英, 黒川敏信 「ベーン工の洗掘抑制効果と設計法に関する研究」 土研資料第2644号
- 63) 町田智之, 山坂昌成, 星丈男 「有限振幅砂州の発達と減衰に関する研究」 第43回年次学術講演会, 1987
- 64) 村本嘉雄, 藤田裕一郎 「中規模河床形態の分類と形成条件」 第22回水理講演会論文集, 1978
- 65) 黒木幹男, 岸力 「中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究」 土木学会論文集第338号, 1983
- 66) 文献49) と同じ

有限要素法による
平面河床変動計算法の検討

I S S N 0386 - 5878

土木研究所資料第2957号

平成3年3月 (1991)

山本晃一／渡辺明英／山本信二

要 旨 本研究では、有限要素法を用いた流れと平面河床変動の計算モデルを作成し、その適用性について検討した。本モデルは、従来の方法では不安定であった有限要素法による流れの計算方法を、風上化などの簡単な処理をすることによって、解の安定性を高めたものであり、河床変動計算はxy座標系で行われるという特徴を持つ。本文ではモデルの考え方と安定性、精度について検討した結果について述べている。

キーワード：有限要素法、平面河床変動計算、風上化、ランピング化

郵便はがき

3 0 5 - □ □

41円切手
をはって
下さい。

茨城県つくば市大字旭一番地

建設省土木研究所

河川研究室

御中

No. _____

No. _____

配布先氏名

配布先住所

○

土木研究所資料第2957号 部

上記のとおり受領しました。

所 属 (住 所)

氏 名

⑩