

マイクロフィルム用資料

I S S N 0836—5878
土木研究所資料第3660号

土 木 研 究 所 資 料

社会基盤施設における耐震性水準の
合理的な設定方法に関する基礎的研究

平成11年 8 月

建設省土木研究所
耐震技術研究センター防災技術課

Copyright © (1999) by P.W.R.I.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the Director General of P.W.R.I.

この報告書は、土木研究所長の承認を得て刊行したものである。したがって、本報告書の全部又は一部の転載、複製は、土木研究所長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。

社会基盤施設における耐震性水準の 合理的な設定方法に関する基礎的研究

防災技術課 課 長 杉 田 秀 樹

主任研究員 野 崎 智 文

要 旨

社会基盤施設の耐震性を確保する場合、起こり得る最大規模の地震に対して全ての施設の安全性を完全に確保することが必ずしも妥当でない場合がある。本報告は、国・地域で想定される地震動に対して個々の施設が発揮する性能と、想定地震動の頻度や耐震対策に要するコストと比較しながら施設の耐震性水準を選択するための適切な表示法を提案するとともに、それを用いて複数の施設の最適な耐震対策投資配分を決定する方法について検討した結果をまとめたものである。なお、本研究は建設省土木研究所重点研究プロジェクト「耐震設計の体系化に関する研究」（平成10～14年度、プロジェクトマネージャ：岡原美知夫構造橋梁部長）の課題として位置づけられているものである。

キーワード：地震、耐震設計、耐震性水準、耐震性能、投資配分、意思決定、最適化

目 次

1. 序 論	1
2. 社会基盤施設の耐震設計の現状と課題	2
2. 1 現状における考え方	2
2. 2 性能基盤設計の流れ	3
2. 3 公共事業評価の流れ	4
2. 4 社会基盤施設の耐震設計における課題	5
3. 耐震性水準の選択に必要な性能とコストの表示	6
3. 1 概 要	6
3. 2 実現パフォーマンスマトリックスの提案	7
3. 2. 1 要求パフォーマンスマトリックスと実現パフォーマンスマトリックス ..	7
3. 2. 2 等水準線の特徴	8
3. 2. 3 入力地震動レベル	10
3. 2. 4 地震時性能レベル	11
3. 3 パフォーマンスマトリックスのIOCカーブへの拡張	12
3. 3. 1 IOCカーブの定義	12
3. 3. 2 IOCカーブの意義	13
4. IOCカーブの試算例	16
4. 1 概 要	16
4. 2 設計条件の設定	16
4. 3 入力地震動レベル	17
4. 4 地震時性能レベル	18
4. 5 試算結果	18
5. 耐震性水準に関する意思決定アプローチ	21
5. 1 概 要	21
5. 2 意思決定技術の検討	21
5. 3 定式化と解の導出	24
5. 4 試 算	29
6. 結 論	31

1. 序 論

これまで数々の地震災害の経験に基づき、国内の社会基盤施設の耐震性の向上に関する努力がなされてきた。1995年1月に発生した兵庫県南部地震においても、直下地震によるこれまでにない強さの地震動、地盤の流動化といった新しい知見に基づき、施設設計の高度化が図られてきたところである。一方、この兵庫県南部地震を契機として、施設の耐震性水準、防災投資の考え方そのものにも新たな問題が投げかけられている。たとえば、複数施設間での耐震性水準の整合や施設システムとしての連携、適切な防災投資の規模・あり方について、意見、提言がなされている¹⁾²⁾。また、防災投資のあり方については、学術分野、特に計画学の分野においても鋭意検討が進められているところであり、防災投資の水準や社会的選択を理論面から検討している。³⁾⁴⁾

さて、耐震性水準の選択・決定や防災投資問題を考えるにあたっては、入力地震動および地震動に対して施設が発現する性能が明示されていることが必要であるが、性能基盤設計の流れが深い関係を持っている。1989年ロマプリータ地震、1994年ノースリッジ地震という都市地域における二つの地震を経験したアメリカ合衆国においては、特に建築物の耐震設計の分野で性能を基盤とした設計法が提示されているほか⁵⁾、各国において性能基盤設計に関する概念、表示法に関する検討が進められている⁶⁾。このような考え方は、市場の規制緩和、国際的な市場の開放、コスト縮減といった社会の流れの中にあって喫緊の課題の一つであるが、日本においても建築分野での検討を始めとして、同様の試みがなされている⁷⁾。

さて、社会基盤施設の耐震性水準を定める場合には、建築物とは異なった困難性がある。建築物については、施主と設計者が打ち合わせ、施主が意思決定を行うことによって個別施設の耐震性水準を独立に定めることができるが、社会基盤施設の場合は地域に多くの施設が存在し、複数の施設に対して耐震性水準を確保するための投資配分を考えなければならない。またその際の意思決定者は、本来的にその施設の存在が影響を与える範囲の市民、施設のユーザー、施設に対する出資者（すなわち納税者や料金負担者）といった不特定多数の者であり、意思決定の方法が難しいものとなる。

本研究は、多種多様な社会基盤施設の耐震性水準を定める際に、相互の整合がとれ、地域にとって最もよい状態となるような設定方法について基礎的な検討を行うものである。本報告では、そのためにまず施設の耐震性水準を適切に表示する方法を提案する。これにより、個別施設の水準を検討しやすくするとともに、複数施設間のバランスを判断することが可能となる。また提示された表示方法に基づいて、複数施設の耐震性水準を地域の要請に即した形で設定する手法を提案する。

2. 社会基盤施設の耐震設計の現状と課題

2.1 現状における考え方

構造物、施設等の地震時安全性確保は、防災基本計画に示された基本的な考え方に則り、各々の施設に関する法令、基準等に基づいて行われている。法令、基準等では、各施設の入力として考えるべき地震動およびこの地震動に対して満足すべき性能が謳われ、これを実現するための耐震設計法が示されている。我が国では、関東大地震を契機として建築物や公共土木施設の設計に地震力が入り入れられ、「新耐震設計法（案）」⁸⁾によって耐震設計の基本概念が体系づけられた。各々の施設の耐震設計法は、この基本概念の延長線上で、施設ごとの震災経験や構造特性を考慮し、社会的背景を反映しながら発展してきているが、施設ごとの耐震設計を相互に比較した場合以下の点が指摘されよう。

- ① 入力地震動の与え方が様々である：各施設の耐震設計における入力地震動は対象となる施設の地震時挙動の解析法に即した形で与えられるのが一般的であり、施設・手法によって最大応答加速度に対応する震度係数のような単一の数値から、応答加速度スペクトル、時刻歴波形など様々な形態を取っている。したがって、施設間で耐震性能を確保する際の地震動の頻度や強さ等に関する整合性が確認できない。
- ② 地震動の発生頻度が明示されていないものも多い：多くの社会基盤施設では、地域ごとの地震発生の頻度や地震動の強さを地域ごとの補正係数によって表し、静的な地震荷重に乗じている。このような表示方法は定量的ではあるが、地震動の強さと発生頻度が明示されていない⁹⁾¹⁰⁾。道路橋や建築物等の耐震設計においては、入力地震動の発生頻度に関して、供用期間中に数回発生するもの（レベル1）と発生する頻度は低いが非常に強いもの（レベル2）という二つのレベルを考えているがそれらの表現は定性的なものにとどまっている¹¹⁾。地域において想定される地震動に対応するためには、地震動の発生頻度を定量的に示すことが必要である。
- ③ 施設の性能のバリエーションが少ない：施設の目標耐震性能については、現在でも多くの設計基準で構造物としての安定性や地震後の機能性によって示されている。しかしながら、それらの表現は定性的なものが多く、性能の変化による社会活動等への影響も明確ではない。たとえば道路橋示方書は二つの重要度の橋について、「致命的な被害を防止する」、「限定された損傷にとどめる」、「健全性を損なわない」といった目標性能を掲げているが、それらの性能状態が機能性や修復性に対して与える影響について明確には記述されていない。

施設の耐震性水準を地域の要請に即した形で選択するためには、当該水準を選択することによる施設の性能を把握し、またその影響を評価する必要があるが、このためには、どのくらいの頻度の地震動に対してどの程度の機能障害が生じ、また安全性が損なわれるかが明示されていなければならない。逆にこれが判断しやすい形で整理されていれば、地域の要請と施設の構築コストを勘案して適切な施

設の耐震性水準を選択することができる。本章では、構造物の性能を基盤とした設計の流れと公共プロジェクトの評価に関する現状を整理し、耐震設計における課題としてまとめる。

2.2 性能基盤設計の流れ

建築物の分野では、設計細目のみを示した仕様規定型の設計から、施設の要求性能を明示した性能基盤設計の考え方への移行の動きが活発である⁵⁾⁶⁾⁷⁾。性能基盤設計には、これまで用いられてきた設計細目は保持しながらそれによって確保される施設の性能を明示するもの、施設に要求する性能（および場合によってはその検証方法）のみを示して設計方法は任意とするものなどいくつかのタイプが考えられるが、いずれにしてもその要諦は、外力に対して施設がどのような性能を保持すべきかを明示し、それに基づいた設計を行うことにある。たとえば合衆国カリフォルニア州 SEAOC^(脚注)により示されたパフォーマンスマトリックスは、縦軸に地震動の発生頻度を示し、横軸には施設の性能を示した上で、各地震動に対して施設が保持すべき性能を施設の重要度ごとに示している（図 2.1）。

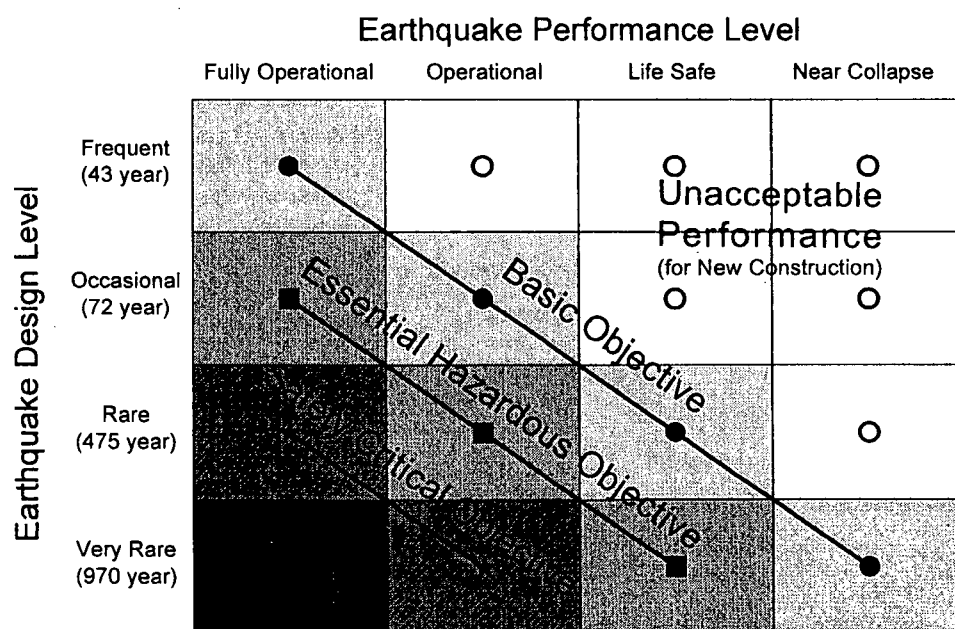


図 2.1 SEAOC VISION 2000 におけるパフォーマンス・マトリックス⁵⁾

ここで、各地震動レベルに対応して要求される性能を連ねた線が 3 本あるが、これらは施設の重要度

(脚注) SEAOC : Structural Engineers Association of California (カリフォルニア州構造技術者協会)。カリフォルニア州の行政、学術、民間各部門の構造技術者をメンバーとする団体で、耐震基準を含む構造技術に関する基準を作成、提案している。

に応じて要求される耐震性水準を表している。たとえば通常の目的(Basic Objective)を持つ施設においては、頻繁に発生する(frequent)地震動に対しては完全に機能(fully operational)することが要求されている。このような表示方法の特徴は、外力の発生頻度とそれに対して発現する施設の性能を明示していることにあるが、その水準の選択については、通常は施設の重要度に対する要求水準が定められており、それを少なくとも満足するように設計するものとなっている。

2.3 公共事業評価の流れ

最近になって、公共事業の費用対効果を評価し、事業の採択や優先順位に定量的な評価を導入することが盛んになっている¹²⁾¹³⁾。それらは一般的に平常状態での各プロジェクトのライフサイクルにおける便益とコストを計算し、比較するものである。プロジェクトの便益は、たとえば道路の建設による旅行時間の短縮などの直接効果のほか、CO₂の削減といった間接的な効果も含まれ、それらは貨幣価値に換算される。これに対し、プロジェクト当初のコストとメンテナンス等に必要なコストを加えたプロジェクトサイクルにおける総コストを比較し、その効率性を論じるのが、通常とられる方法である。そのためには、たとえばプロジェクトが実施された場合と実施されない場合の状態を比較する必要があるが、プロジェクトの種類によらず、一般的な手順には①プロジェクトなしの状態における状況の推定、②プロジェクトありの場合の状況の推定、③双方の状況の違いに応じたプロジェクト便益の差分、④プロジェクトにかかる総コストの算出、⑤便益とコストの比較が含まれる(図2.2)。

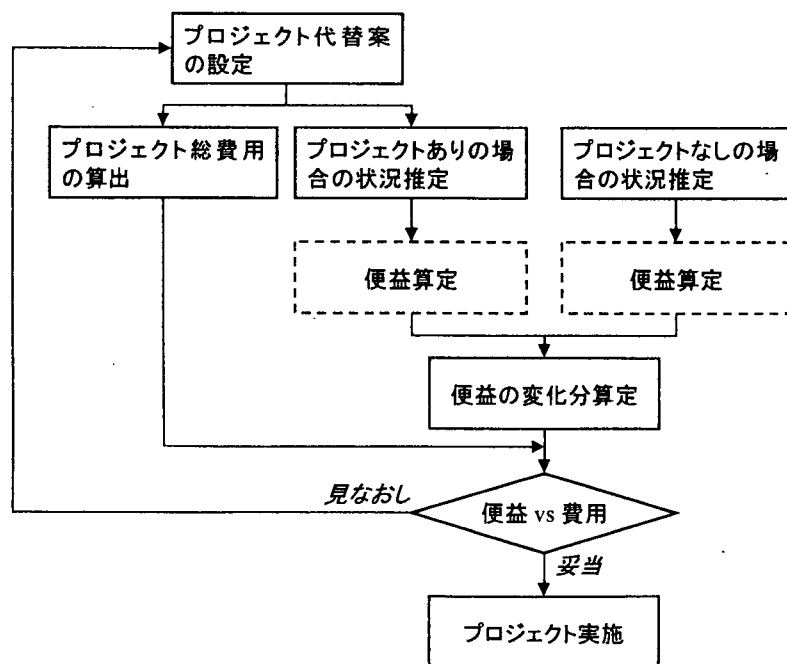


図2.2 プロジェクト評価の一般的な流れ

2.4 社会基盤施設の耐震設計における課題

一般的なプロジェクトに対し、防災対策のように不確実な（あるいは確率過程を含む）問題に関しても、確率的アプローチなどにより投資効果の評価を行う方法について研究がなされているが、それらは理論的なモデルや概念を構築したものである³⁴⁾。ここで、実際の防災対策に関する事業評価については、以下のような問題点が挙げられる。

- ・ そもそも事象の発生が不確実であるか、確率過程であるとしてもその確率分布を特定するのが困難である
- ・ 特に地震災害の場合、地震の規模が大きくなるほど発生確率が極端に小さくなるとともに、その結果発生する被害が甚大なものとなり、主観的評価と客観的評価の間に乖離が生じ得る
- ・ 確率的に表現された事象が、市民や意思決定者に受け入れられるかどうかについて論議がある
- ・ 直接的な人の安全性や広域にわたって間接的に生じる経済的影響に関わる事業について正当な評価が可能かどうか検討が必要

本報告では、まず個々の施設の耐震性水準を適切に表示し、確率表示を含む耐震対策事業を、その発生頻度と地震時の性能および耐震対策コストに基づいて選択、決定する基本的な考え方を提案する。さらに、複数の施設が存在する場合に、その耐震性水準を適切に選択することによって国あるいは地域の要請に最もよく適合させる手法を提案する。

3. 耐震性水準の選択に必要な性能とコストの表示

3.1 概 要

本章では、SEAOC により提案されたパフォーマンスマトリックスの意義を考察し、その上でその考え方を拡張する。これに先だって、本研究におけるいくつかの概念、用語の定義を明確にしておく(図 3.1)。

(入力) 地震動レベル(input earthquake ground motion level, input earthquake level)

施設が受ける可能性がある地震動のレベル。設計時に用いられる入力地震動であり、当該施設が構築されるサイトにおける地震動でもある。地震動レベルはそのサイトで経験するであろう地震動を表すもので、その頻度の高低あるいは地震動の強さのいずれで表現してもよい。設計のためには、地震動の強さで表す必要があり、また耐震性水準選択のような意思決定にあたっては頻度で表示されている方がよい場合がある。地震動レベルを頻度で表示する場合には、年超過確率あるいは再帰年、ある期間内の超過確率などを用い、地震動の強さで表す場合には、施設の設計方法によって地表面加速度や応答加速度あるいはスペクトルなどを用いる。ただし、一般的には地震動の頻度と強さが常に一定の関係で結ばれているのではなく、個々のサイトにおけるハザード解析等によってこれらが示される。

(地震時) 性能レベル(seismic performance level)

施設に地震動が作用したときに発現する性能のレベル。性能には様々なカテゴリーが含まれるが、本研究では、安全性(safety)、修復性(reparability)、機能性(serviceability)を考える。たとえば道路橋の場合、安全性にはユーザーの安全性や橋梁近傍の住民の安全性、修復性には応急復旧や恒久復旧に要する期間等が含まれ、機能性には地震直後の緊急輸送／一般交通の通行可能性などが含まれる。また、平常時の性能を含めて論議する場合には、たとえば機能性に交通容量などの要素も含まれる。性能レベルは、「地震直後にも暫定開放可能」、「倒壊の危険はないが通行不可能」などの施設性能に対応する。これらの言語表現による性能は、施設設計のための工学パラメータ（たとえば応答塑性率）と対応している必要がある。また、意思決定のためには、暫定開放までの期間や通行可能な最高速度などの数量で表現が必要な場合もある。

耐震性水準(seismic quality)

ある設計内容で構築した施設は、入力地震動に対応した地震時性能を発現する。同じ施設でも異なる地震動に対しては異なる性能が発現するが、それらの対応は施設が設計、構築されたときに定まり、施設が耐震性に関する一定のポテンシャルを持っていると考えてよい。このポテンシャルのことを本研究では「耐震性水準」と定義する。施設の耐震性水準は、入力地震動とこれに対して発現する施設の地震時性能の組み合わせで表現できるが、これは当該施設の設計内容に応じて定まる施設の品質に相当する。たとえば自動車の品質は、「10 万 km 走っても故障しない」というように与えられた条件

(10万km走行)とそれに対して発現する性能(故障しない)との組み合わせで表されるが、構造物の耐震性もこれと同じである。このような水準には、各地震動レベルに対して最低限要求する性能で表示したものと、特定の設計内容のもとで各入力地震動に対して実際に発現する地震時性能によって表示したものがありうるが、それらを明確に区別する場合、本研究では前者を要求(耐震性)水準(demanded seismic quality)、後者を実現(耐震性)水準(realized seismic quality)と呼ぶ。

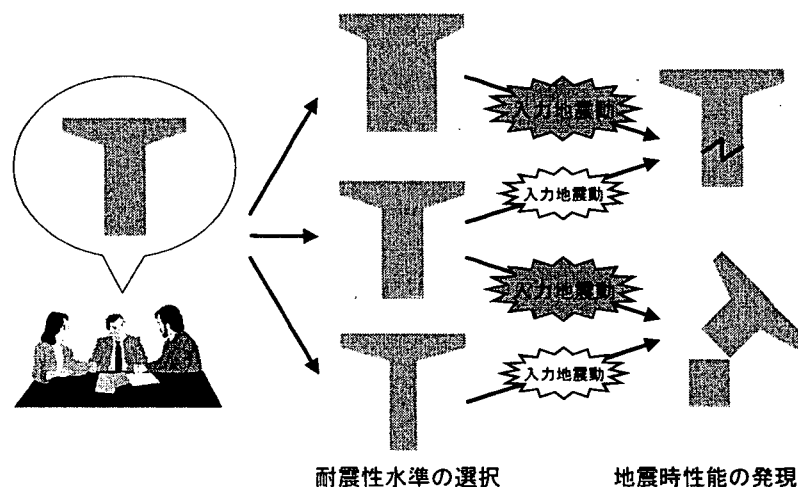


図 3.1 耐震性水準・入力地震動・地震時性能の概念整理

3.2 実現パフォーマンスマトリックスの提案

3.2.1 要求パフォーマンスマトリックスと実現パフォーマンスマトリックス

SEAOC を始めとして現在までに提案されているパフォーマンスマトリックスは、入力地震動レベルに対して要求されるべき施設の地震時性能を定めた要求耐震性水準を示したものといえる。要求耐震性水準を表現するパフォーマンスマトリックスでは、マトリックス中の線は構造物の重要度等を勘案してあらかじめ定められ、各地震動レベルに対して発現する性能がこの線で示される性能を下回らないように設計内容が決定される。この意味で、従来のパフォーマンスマトリックスに示された線は「要求水準線(demanded quality line)」と呼ぶことができる(図 3.2 左)。すなわち、実際にある構造物を設計し構築した場合、一般には要求水準よりも高い水準で設計され、各地震動に対して要求性能よりも発現性能が高くなる。

一方、実際の構造物をある設計内容で構築すると、各入力地震動レベルに対して発現する性能レベルは(材料強度のばらつき等の不確定性を除いて)確定する。したがって、パフォーマンスマトリックス中に、ある設計に対応した地震動レベルと性能レベルの点を連ねた線を描くことができるが、これは特定の設計内容の耐震性水準を表したものであり、「実現水準線(realized quality line)」と呼ぶことができる(図 3.2 右)。実現水準線はある条件で設計構築された構造物の水準を示すものであり「等水

準線(isoquality line)と呼んでもよいし、この線上では設計内容が同じであることから、「等設計線(isodesign line)」と呼んでもよい。

本研究において、要求水準線で表示されたパフォーマンスマトリックスと実現水準線で表示されたものを明確に区別する場合には、各々「要求パフォーマンスマトリックス(demanded performance matrix: DPM)」、「実現パフォーマンスマトリックス(realized performance matrix: RPM)」と呼ぶことにする。

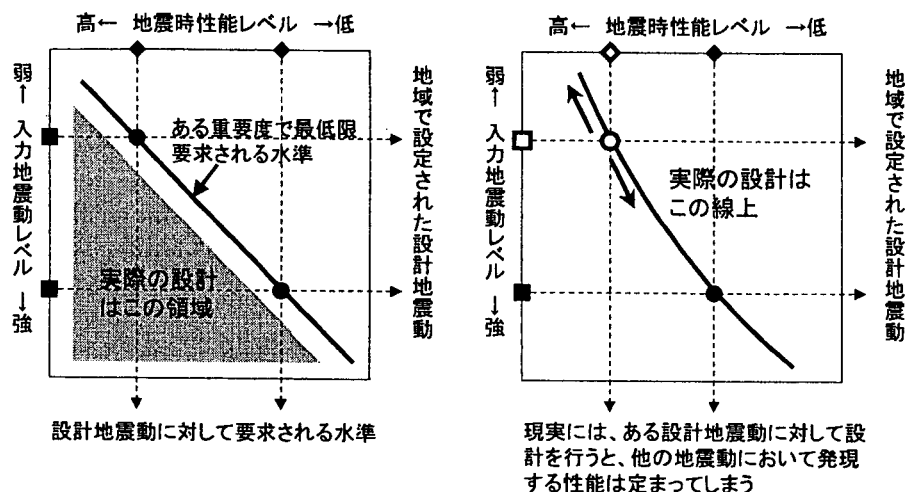


図 3.2 要求水準線および実現水準線で表示されたパフォーマンスマトリックス

等水準線で表示された実現パフォーマンスマトリックス(RPM)は、施設を計画している特定のサイトに対して一つ準備され、その中に複数の等水準線が描かれる。たとえば橋梁の場合、総スパン長や地盤条件はサイト固有の固定条件であり、これに対して橋梁形式や設計内容を変化させることにより複数の等設計線が描かれる。地域において、施設の耐震性水準を自由に選ぶことができるなら、地域で想定される複数の入力地震動レベルに対して各等水準線から導かれる地震時性能レベルを比較し、地域の要請と比較しながら必要な設計内容を選択することができる。また、国あるいは地域においてシビルミニマムとしての最低要求水準があるならば、それを等設計線と同じようにパフォーマンスマトリックス中に描き、その水準を下回らない設計線の中から地域の要請に適合するものを選択することもできる。

3.2.2 等水準線の特徴

RPM 中に複数の設計内容に対応した等水準線を描くことによって、地域で想定される地震動レベルとそれに対して地域で必要とされる性能レベルを比較しながら、等水準線すなわち実際の設計内容を選定することが可能となる。すなわち、DPM はシビルミニマムとしての要求耐震性水準を示し、それから先の水準選択を個別の意思決定者に委ねているのに対して、RPM はシビルミニマム等の要求、制約は別途考慮した上で意思決定者にとって最適な耐震性水準を選択するためのメニューであるといえ

る（図 3.3）。等設計線は、ある入力地震動レベルに対して所定の性能を満足するような設計を行い、その設計条件において異なるレベルの入力地震動に対する性能レベルを求めることで得られる。このことを図 3.4 に示す。まず、入力地震動の□のレベルに対して、地震時性能レベルが◇となるように設計内容を設定し、○の水準を得る。次に、この設計内容に対して■のレベルの地震動を入力すると性能レベル◆を得る。このときの水準●は○と同じ水準であり、同様の作業を複数の地震動レベルについて繰り返し、計算点を連ねることにより、等水準線を得ることができる。

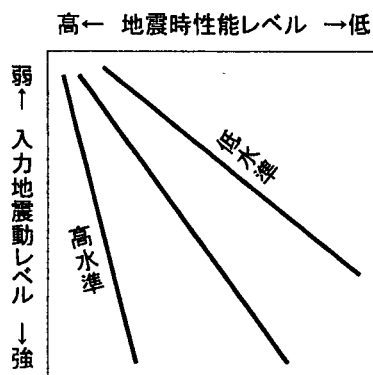


図 3.3 複数の設計水準の選定

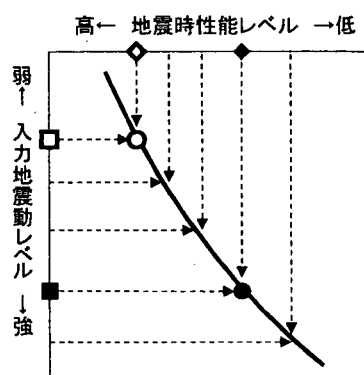


図 3.4 等設計線を求める手順

ここで、一般的な等水準線の形状は図 3.5 のようになるはずである。すなわち、入力地震動レベルが小さい場合には、設計水準によらず平常時の性能からの乖離が小さくなるため、等設計線は高性能の点に集ってゆく。逆に地震動レベルが大きくなると、設計水準の地震時性能の差に対する影響が大きくなるため($\epsilon_p < \epsilon_p'$)、等設計線は互いに離れてゆく。

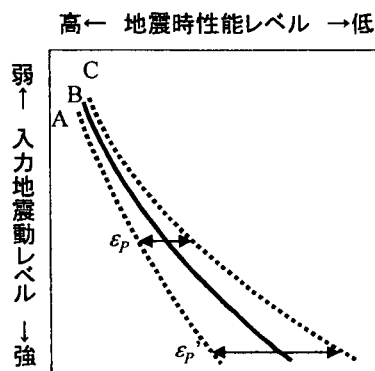


図 3.5 一般的な等設計線の形状

ここで、構造物の性能として耐震性の確保による性能の増加分のみを表示する場合には、性能が最高のレベルでは平常時と同等の機能が確保されることになり、等設計線は一点に集る（図 3.6 左）。一方、風など他の荷重を考えたり、構造物のライフサイクルにおける全般的な性能を論じる場合には、

最高の性能自体が初期の設計条件で変化しうる。たとえば、橋梁の幅員を変更することにより、平常時の整備水準（交通容量等）のみならず耐震性水準も変化するし、このような場合には等設計線は必ずしも一点に集らない（図 3.6 中央）。また、特定の設計水準において地震動レベルがあるレベルより低くなると性能が急に低下するような場合には、等設計線同士が交わることもありうる（図 3.6 右）。

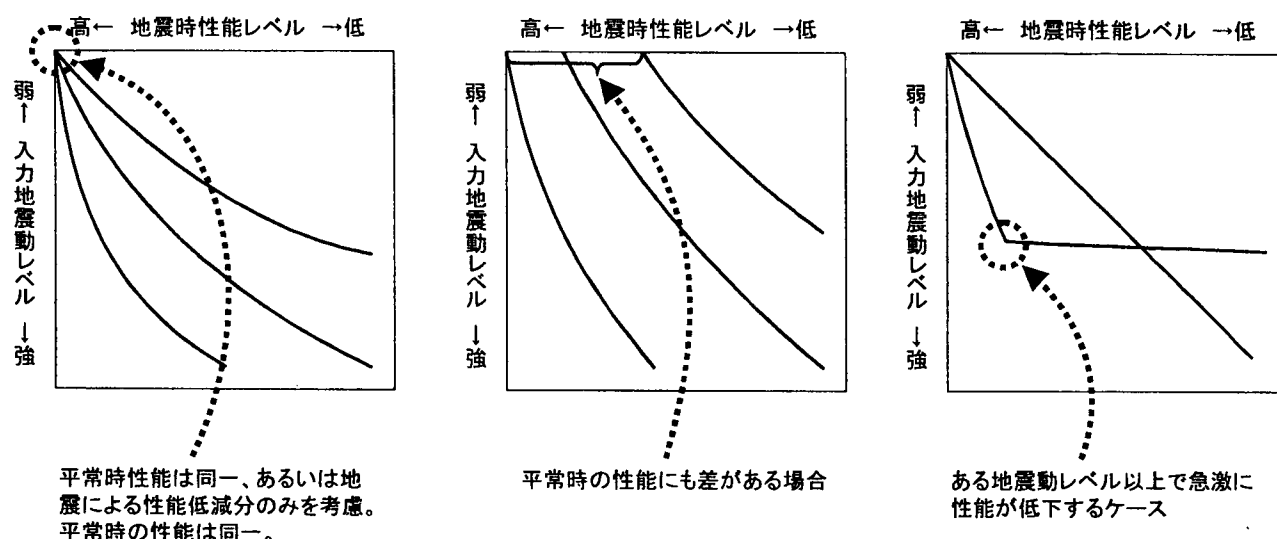


図 3.6 等水準線のバリエーション

3.2.3 入力地震動レベル

入力地震動レベルの表示方法は、最大地表面加速度等の地震動特性値や地震動波形など地震動の動きそのものによる場合と、その発生確率による表示による場合が考えられる。地域において発生する地震の頻度と性能を比べながら水準を検討する場合には、入力地震動レベルは確率で表示されるのが適当であろう。確率による表現は、年超過確率(probability of exceedence in a year)あるいは再現期間(return period)による場合と、 M 年間における超過確率(probability of exceedence in M years)による場合がある。たとえば N 年に一度の頻度で発生する地震が一年の間に少なくとも一度発生する確率は、 $p_1 = 1/N$ である。いま、 M 年の間にこのレベルの地震が全く発生しない確率は $(1 - p_1)^M$ であるから、 M 年間の間に少なくとも一度このレベルの地震が発生する確率 p_M は次式のようにになる。

$$p_M = 1 - (1 - p_1)^M = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^M \quad (3.1)$$

図 2.1 の VISION 2000 によるパフォーマンスマトリックスに表示されている地震動レベルの再起年(43 年、72 年、475 年、970 年) 及びその他いくつかの再起年を上式の N に代入すると、対象期間 M の値によって超過確率は表 3.1 のように変化する。

表 3.1 再起年と一定期間内の超過確率

再起年	年超過 確 率	対象期間と超過確率		
		10年	50年	100年
10	10.00%	65.1%	99.5%	100.0%
43	2.33%	21.0%	69.2%	90.5%
72	1.39%	13.1%	50.3%	75.3%
180	0.56%	5.4%	24.3%	42.7%
475	0.21%	2.1%	10.0%	19.0%
975	0.10%	1.0%	5.0%	9.8%
2475	0.04%	0.4%	2.0%	4.0%
4975	0.02%	0.2%	1.0%	2.0%

代替案の選択の際には、意思決定者が認識できる程度の期間（たとえば寿命に相当する期間、2～3 世代程度にわたる期間など）や構造物の耐用年限内の超過確率で表示したほうが把握しやすい。

一方、実際に RPM 内に等設計線を描く場合には試設計をする必要があるが、その際には入力地震動が設計上利用できる形で与えられていなければならない。道路橋の設計における震度法や保有水平耐力法の場合には最大応答加速度(Peak Response Acceleration: PRA)あるいは最大地表面加速度(Peak Ground Acceleration: PGA)となるが、動的解析を行う場合には具体的な加速度波形が必要となる。超過確率で区分し PGA で表示したハザードマップについてはこれまでも検討されてきているが、個々の施設についてパフォーマンスマトリックスの地震動レベルを設定する際には、施設を計画している地域においてこれが必要になる。

3.2.4 地震時性能レベル

地震時性能レベル（あるいは耐震性能レベル）は、一定の水準で構築された施設に地震動が入力された場合に発現する性能を表す。性能レベルは「完全に機能(fully operational)」、「人命の保全(life safe)」などのように限界状態を言語表現することや、それらを定量表現することが考えられる。ただし、性能のカテゴリーを安全性、修復性、機能性のように分けた場合、各々の限界状態の順序を正しく一軸上に並べなければならない。たとえば道路橋の橋脚のみについて考える場合、上部構造、支承、基礎が破壊しないと仮定すれば、性能レベルのいくつかが耐力-変位関係 (P - δ 関係) やモーメント-曲率関係 (M - ϕ 関係) 上の点で表現できる。

図 3.7 は、橋脚を想定し、上部構造の慣性力の作用位置における水平力 P と水平変位 δ の関係に性能レベルを結びつけた概念を示したものである。性能レベルは「完全機能」～「大被害」までの四つを表示しており、それらには安全性（大被害、人命保全）、修復性（短期復旧）、機能性（完全機能）の各カテゴリーが混在しているが、一軸上に並べられており、 δ あるいは μ などの工学量と関連付けられている。

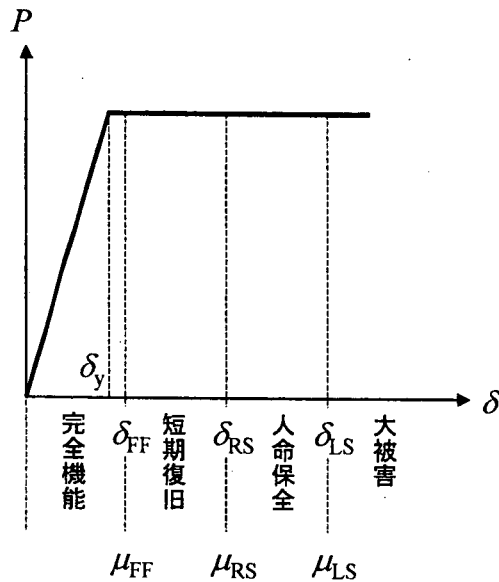


図 3.7 性能レベルと P - δ 関係上の変位 δ 、応答塑性率 μ との対応

各性能レベルは簡単な言語表現となっているが、実際の意思決定や設計の際には、これらの限界状態はより具体的な表現となっているのがよい。たとえば「完全機能」については「地震直後に緊急車両が時速〇〇km/h で走行することが可能」、「短期復旧」ならば「地震発生後〇〇時間で通行可能となる」といった表現が考えられる。もちろん、これらの性能レベルの区分はこれより細分化して設定してもよい。設計を行う際には、これらのように具体的な数値を持った限界状態が橋脚天端における変位 δ や応答塑性率 μ など設計時に用いられる工学量と対応づけられる。図では、各限界状態の境界の変位を δ_{FF} (Fully Functional)、 δ_{RS} (Reparable in Short time)、 δ_{LS} (Life Safe) で表している。また、これらを降伏変位 δ_y で除して応答塑性率 (μ_{FF} 、 μ_{RS} 、 μ_{LS}) で表示することもできる。

3.3 パフォーマンスマトリックスの 10C カーブへの拡張

3.3.1 10C カーブの定義

等設計線で表された RPM は、想定地震動レベルに対する性能が明示されているため施設の耐震性水準の検討に有用であるが、実際には、各設計内容によって耐震対策を施す際のコストを考慮しなければならない場合がほとんどである。そこで、パフォーマンスマトリックス中の各等設計線に対応するコストを算出し、これを第三の軸によって表示する。すなわち地震動レベルと性能レベルを変数とし、この組み合わせを実現するためのコストを下記の様に定義する。

$$c = C(P, a) \quad \text{or} \quad c = C(P, p) \quad (3.2)$$

ここで、 c ：施設の建設コスト、 P ：地震時性能レベル、 a ：PGA 等地震動の強さによる入力地震動レベル、 p ：発生確率で表示された入力地震動レベルを表す。この式は、当該サイトに建設する施設が地震動レベル a に対して P という性能を発現するようにするな水準とするために必要な建設コストを意味している。 P 、 p あるいは a が実数で定義されており、 C が連続関数であるとすれば三次元空間 (c, P, a) または (c, P, p) 内に曲面が形成される (図 3.8)。これを「IOC 曲面／関数(input-output-cost curve/function: IOC curve/function)」と呼ぶことにする。

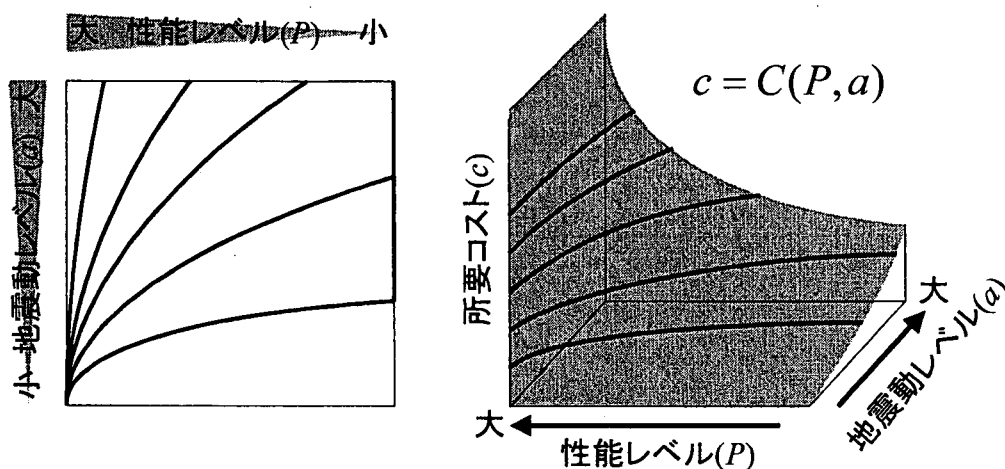


図 3.8 IOC 関数の概念

3.3.2 IOC カーブの意義

ある施設について図 3.8 のように表現された IOC カーブが与えられると、その施設の耐震性水準を決定するために有用な資料となる。たとえば、ある地域の一つのサイトにおいて道路橋の耐震設計を考えるとする。当該サイトで三つの地震動レベル p_1 、 p_2 、 p_3 が想定されているとし、それらが設計に利用可能な量 (たとえば PGA) a_1 、 a_2 、 a_3 に変換できるものとする。ただし地震動の強度は $a_1 < a_2 < a_3$ とし、超過確率はこの逆で $p_1 > p_2 > p_3$ の関係にあるものとする。当該サイトにおいて、平常時の性能など他の条件を満足する範囲で耐震設計を変え、図 3.9 のような等設計線及びその上でのコストが得られるものとする。

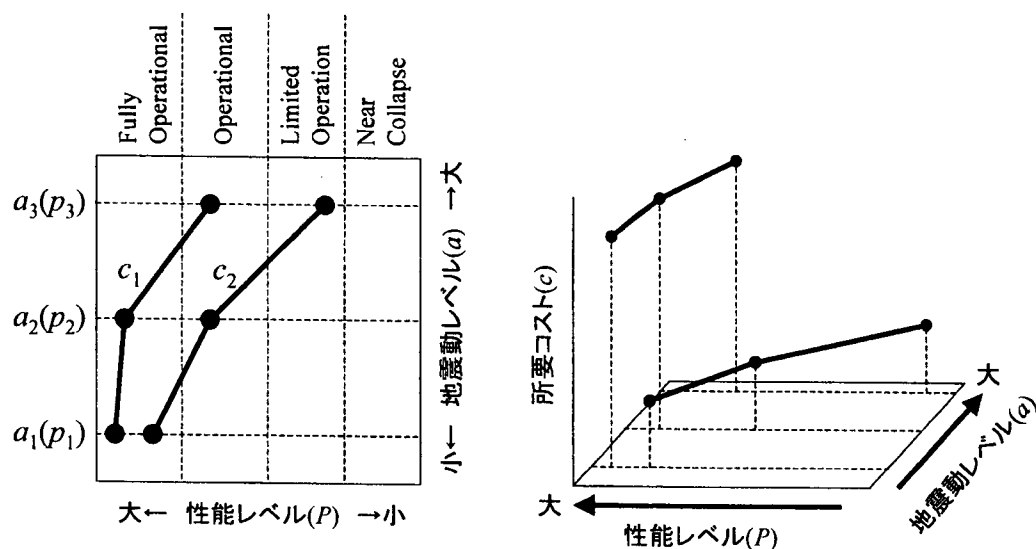


図 3.9 IOC 関数上の等水準線の例

当該サイトにおいて二つの設計代替案の中から一つを選択する際に、各想定地震動レベルに対して各設計代替案において実現する性能とコストを比較する。今仮に、地震動レベルが表 3.2 の様に得られているとする。ここで超過確率の対象期間は、橋梁の耐用年限あるいはプロジェクトライフに相当する 50 年としている。場合によっては意思決定者の想定余命に相当する期間や一代程度の子孫までの生活期間などでもよいが、少なくとも個人あるいは集団が意思決定を行う際に現実的なイメージの中で判断できるような値とすることが望ましい。

表 3.2 地域で想定される地震動の例

地震動 レベル	50年 超過確率	再起年	最 大 加速度
a_1	99%	10	180gal
a_2	50%	72	400gal
a_3	5%	970	1000gal

図 3.9 より、50 年間の間でほぼ確実に（すなわち頻繁に）発生すると見込まれる強度が小さい地震動（レベル 1）に対しては、設計水準 1（コスト c_1 の水準）でも設計水準 2（コスト c_2 の水準）でも発現する性能は大差なく、完全に機能するとしている。これに対し、50 年間の間に半々の割合で発生すると見込まれる中程度の地震動（レベル 2）に対しては、水準 1 では完全に機能するが、水準 2 では制限つきで機能することがわかる。ここで性能の表現は、実際にはより具体的な表現となり、たとえば安全走行可能な上限の走行速度や完全に機能するまでの復旧期間等で示されることになる。さらに、50 年間の間に発生する確率が 5% という稀な地震動（レベル 3）の場合、水準 1 ではある程度の機能が確保されるが、水準 2 では相当機能が制限されることになる。その代わり、水準 1 を確保する

ためにはより高いコスト c_1 が必要となる。このような表現により、複数の設計水準のなかから、それらのコスト、入力地震動に対する発現性能を比較しながら、望ましい水準を選択することが可能となる。

4. IOC カーブの試算例

4.1 概 要

第3章において、一般に想定される構造物の地震時性能を考慮して RPM および IOC カーブを描いたが、本章では、与えられた条件のサイトにおいて様々な耐震性水準の橋梁を設計し、実際の RPM および IOC カーブを試算した。

4.2 設計条件の設定

試算対象としては以下のような諸元の道路橋を設定する。また、図 4.1 にその概要を示す。

構造形式	上下線分離構造
橋梁形式	3 径間連続橋 (3×50m = 150m、幅員 10.7m、片側 2 車線)
上部工形式	RC 床版鋼箱桁 (2 主桁)
支承条件	反力分散支承
下部工形式	RC 橋脚 (高さ 10m)
基礎工形式	場所打ち杭 (杭長 22m)、ただし一部ケースについてはケーソン基礎
地盤条件	Ⅱ 種地盤
地層構成	第 1 層 (フーチング下面-0.0~10.0m、粘性土層、平均 N 値 4) 第 2 層 (フーチング下面-10.0~20.0m、砂質土層、平均 N 値 20) 第 3 層 (フーチング下面-20.0~30.0m、砂礫層、平均 N 値 50)

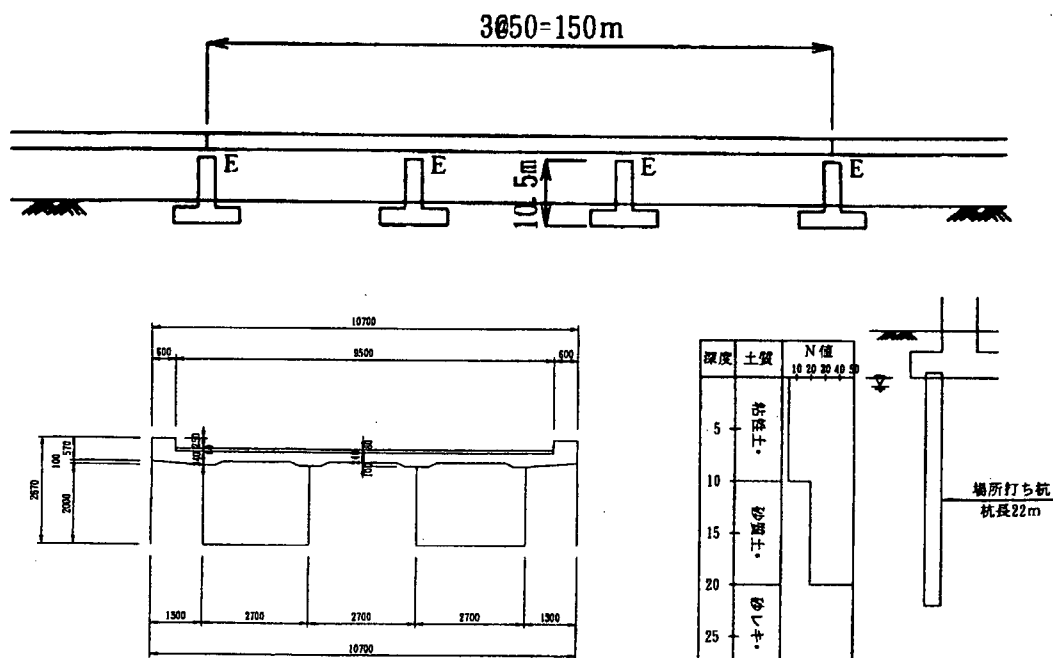


図 4.1 モデル橋梁の概要

耐震性水準のバリエーションは、橋脚の断面を変化させることによって表 4.1 のような 11 の設計ケースを設定した。これらのケースは異なる耐震性水準に対応するものであり、水準ケースといってもよい。本来、橋梁の機能は、橋脚のみではなく上部構造、支承、基礎の各部材の水準のバランスによって変化するが、ここでは簡略化のために、全てのパターンを通じて支承が破壊せず上部工に作用する力を伝達すること、また基礎の被災が橋脚の被災に対して橋梁系全体に影響を与えるまでには至らないだけの水準を確保することを仮定した。なお、各ケースの詳細については巻末資料 1.1～1.11 に示している。ここで、ケース D1 については、非常に強い地震動に対しても弾性範囲内で応答することを目指しているため、橋脚の断面が大きくなり、これを支えるために基礎をケーソンとしている。

表 4.1 設計ケース

設計ケース	橋脚躯体断面 直角方向×橋軸方向 (mm)	躯体主鉄筋	基礎
D1	6700×6700	D32(2段)/D32	ケーソン
D2	4900×4500	D32(2段)/D32	杭 (12本)
D3	4500×3500	D32(2段)/D32	杭 (8本)
D4	4000×3000	D32(2段)/D32	杭 (6本)
D5	3500×2900	D32(2段)/D32	杭 (6本)
D6	4300×2800	D29(2段)/D29	杭 (8本)
D7	3900×2500	D29(2段)/D29	杭 (6本)
D8	3500×2300	D29/D29	杭 (6本)
D9	2300×2100	D22/D22	杭 (6本)
D10	2100×2100	D22(2段)/D22	杭 (4本)
D11	2100×2100	D25/D25	杭 (4本)

ケーソン断面は10000×10000

場所打ち杭の杭径は1200(鉄筋はD25)

4.3 入力地震動レベル

入力地震動レベルは、発生頻度とそれに対応する地表面最大加速度値(PGA)によって 4 つのレベルを仮定した(表 4.2)。PGA と年超過確率の関係は本来地域ごとに異なるものであり、施設の構築サイトが特定されて始めて決定されるものであるが、ここでは例示されているハザード曲線¹⁴⁾等を参考にしながら設定した。

表 4.2 入力地震動の設定

地震動 レベル	PGA (gal)	再帰年	年超過 確率	50年 超過確率	備 考
1	100	10	0.1	99.5%	耐用年限中における発生確率が高い地震、道示の震度法レベル
2	250	100	0.01	39.5%	
3	700	1000	0.001	4.9%	既往最大、道示のタイプⅡレベル
4	1100	10000	0.0001	0.5%	既往最大以上の地震

4.4 地震時性能レベル

地震時性能レベルは橋脚天端の変位に基づく量によって表すこととした。このような場合、橋脚天端における変位を用いた応答塑性率を用いることが考えられる。

$$\mu = \frac{\delta}{\delta_y} \quad (4.1)$$

ここで δ : 橋脚天端の応答変位、 δ_y : 橋脚天端における降伏変位。しかしながら、今回の試算においては、橋脚断面が非常に小さいケースにおいて降伏変位から終局変位までの間が非常に短い場合があり、そのようなときには被災程度が大きいにもかかわらず μ の値が大きくなる。そこで、ここでは橋脚の塑性状態に関する以下のようなパラメータを用いた。

$$\lambda = \frac{\delta - \delta_y}{\delta_u - \delta_y} \quad (4.2)$$

ここで δ_u : 橋脚天端における終局変位。すなわち λ は橋脚が塑性状態に入ってから終局状態に至るまでの間のどの状態にあるかを示すパラメータであり、ここでは「塑性状態率」と呼ぶことにする。このパラメータは、SEAOCによる建築物の性能基盤設計において、要求塑性変位率(Inelastic Displacement Demand Ratio: IDDR)として定義されているものに対応する¹⁵⁾。この λ に対応した橋梁の性能を言語表現したものを表4.3に示す。

表 4.3 塑性状態率 λ と性能の言語表現の対応

λ	損傷程度	性能表現
0以下	被災なし(弾性範囲内)	完全に機能
0~0.25	軽微な損傷	使用可能
0.25~0.6	中規模な損傷	補修後に使用可能
0.6~0.9	大規模な損傷	使用不可
0.9~	倒壊の可能性	倒壊の可能性

4.5 試算結果

以上の設定に基づき、各レベルの地震動に対する橋脚天端の応答を計算した結果を表4.4に示す(詳細は巻末資料2)。

表 4.4 各ケース・入力地震動に対して算出された塑性状態率 λ

設計ケース	初期費用 (百万円)	発生確率			
		0.1	0.01	0.001	0.0001
D1	163.5	0.000	0.000	0.000	0.000
D2	44.0	0.000	0.000	0.009	0.107
D3	32.5	0.000	0.000	0.080	0.297
D4	25.0	0.000	0.000	0.226	0.679
D5	24.5	0.000	0.000	0.375	1.077
D6	29.0	0.000	0.000	0.331	0.925
D7	23.0	0.000	0.006	0.738	—
D8	20.5	0.000	0.033	1.054	—
D9	14.0	0.000	0.897	—	—
D10	14.0	0.000	1.148	—	—
D11	14.0	0.000	0.931	—	—
PGA(gal)		100	250	700	1100

表中、初期コストとは橋脚と基礎の構築に必要な総工事コストである。また「—」が示された欄は、 λ が非常に大きく現実的ではない（あるいは確実に被災した）状態に至ったものである。これらの結果を、RPM として描いたのが図 4.2 である。試算結果は予想される RPM の形状と一致していることがわかる。

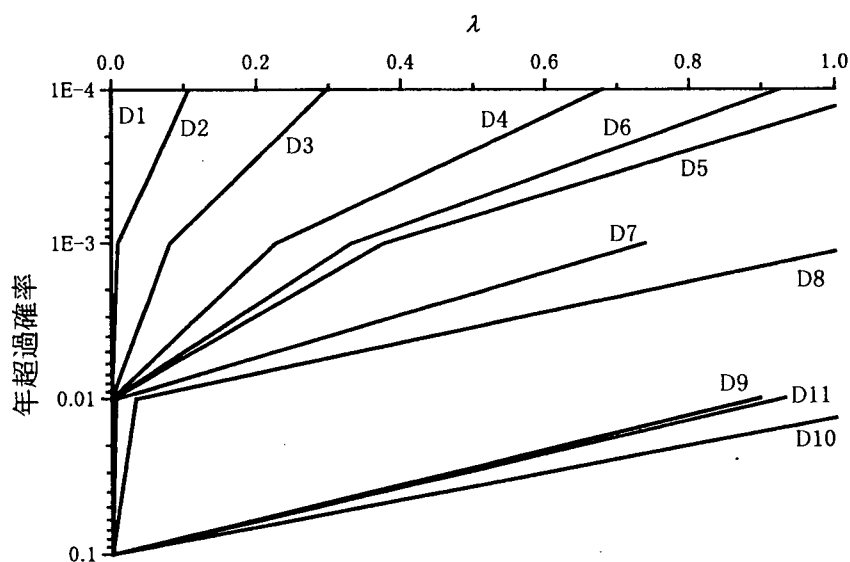


図 4.2 試算された実現パフォーマンスマトリックス(RPM)

また、各設計ケースに対する初期コストを加味し、11本の等水準線を三次元空間内に描いたものが図 4.3 である。これらの線群による曲面形も、図 3.8 に示した一般的な IOC カーブと同じ形状となることがわかる。

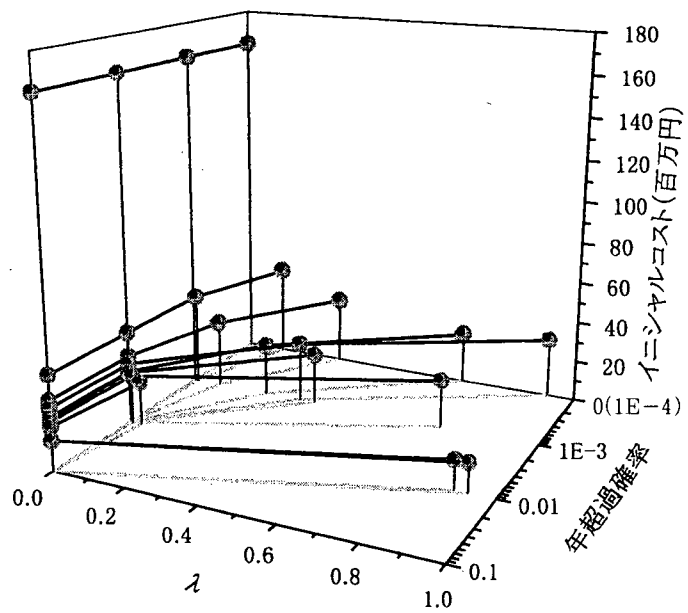


図 4.3 三次元空間内の等水準線

5. 耐震性水準に関する意思決定アプローチ

5.1 概 要

地域において、複数の、場合によっては異なる種類の施設の耐震性水準を検討する場合、各々の水準の組み合わせの中から、地域にとって最も望ましい組み合わせを選択することになる。その際、3章に示した IOC 関数が各施設ごとに得られていれば、コスト、性能に基づいた具体的な判断が可能であることを述べた。しかしながら、施設の数、地域で想定する入力地震動の数、施設ごとの耐震性水準のバリエーションが多くなった場合、たとえ意思決定者が一人であったとしても、どの組み合わせが最適なのか判断がつかないのが一般的である。本章では、このような一般的問題を解決するために、意思決定に関する数理的なモデルを構築することを試みる。ここで、耐震性水準の設定・選択に関して以下のように問題を設定する。

地域において、複数の施設に関する耐震対策の内容を決定しなければならない。各施設が存在する（あるいは計画されている）各サイトにおける条件は明らかになっている。このとき、各施設の耐震対策内容をどのようにすれば地域の要請に最も適合した状態となるか？

ここで耐震対策の内容は、2章および3章で述べた耐震性水準によって定まるとする。具体的には、耐震性水準が等水準線として示され、各施設について等水準線を適切に選択することによって、地域で想定される地震動に対して発現する各施設の性能と、当該設計内容で施設を構築するために必要なコストが定まる。地域の状態が各施設の地震時性能と耐震対策にかかるコストの組み合わせによって変化するとして、この要請度を最大にするような等水準線を選択する。

なお、サイトにおける条件とは、たとえば道路橋における総スパン長、河川堤防の計画高水流量、当該サイト周辺における地質条件など設計時の与件としてあたえられる条件を指す。本章では、このような問題を解決する際の方法について検討する。

5.2 意思決定技術の検討

(1) 指定された要求性能を満足する最も低コストの水準を選択する場合

最も簡単な例は、設計基準等において施設の重要度があらかじめ定まっており、それに対して最低限要求される具体的な要求水準が明示されている場合である。たとえば、「50年間の超過確率が50%の地震動に対してはほぼ完全に機能し、5%の地震動に対しては機能回復までの期間が1ヶ月程度以内」といった表現がこれに相当する。このケースは要求パフォーマンスマトリックス(DPM)が与えら

れており、かつ対象施設の重要度がさだめられている状況に相当する。このような場合には、複数の耐震性水準のうちから、各地震動レベルに対して要求される性能を下回らない水準を選択すればよいが、通常は最も低コストとなるものが選ばれる。この場合、施設ごとの要求水準が制約条件として与えられ、その中で総コストを最小化するという問題を解いていることになる。すなわち、先の問題における地域の要請を「地域が支出するコストを小さくすること」と設定していることになる。施設の構築・補強に要するコストの総額が限られている場合には、対策を行う施設のプライオリティを定める必要があるが、その際には、最も重要度が高いもの、最もコストが小さいもの（すなわち早期に完成するもの）、最も社会的効果が大きいものなど、優先させる条件を別に設定しなければならない。

(2) 要求性能を施設ごとに選択可能な場合

たとえば、要求性能を満足したうえで地域の判断によってより高い水準の施設を望む場合や、要求性能自体が指定されず施設ごとに任意に選択可能な場合を想定する。このような場合、各施設について選択した耐震性水準（等水準線）の組み合わせから、地域の満足度が判断されなければならない。いま、地域の満足度 z が以下のような関数によって定量的に計算可能であるとする。

$$z = Z \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_E \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{S1} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{1E} & \cdots & P_{SE} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{pmatrix} \right) = Z(p, P, c) \quad (5.1)$$

ここで p_e : 地震動レベル e の地震動の発生確率、 P_{se} : レベル e の地震動が発生した場合に発現する施設 s の性能、 c_s : 施設 s の耐震対策コスト。

地域において各施設の水準（＝コスト）を決定する際、上記のような満足度を最大とするように決定するのが一般的である。その際、 p 、 P 、 c を独立に選ぶことはできず、それらが相互に関連しあっている。この場合、この満足度を目的関数とし、いくつかの制約条件の下で目的関数を最大化するような性能とコストの組み合わせ、すなわち耐震性水準を求めることになる（あるいは目的関数を不満足度として、それを最小化してもよい）。

$$\begin{aligned} \max z &= Z(p, P, c) \\ \text{s.t. } f_1(p, P, c) &\geq 0 \\ &\vdots \\ f_n(p, P, c) &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.2.a)$$

あるいは、

$$\begin{aligned}
\min z &= Z(p, P, c) \\
\text{s.t. } f_1(p, P, c) &\geq 0 \\
&\vdots \\
f_n(p, P, c) &\geq 0
\end{aligned} \tag{5.2.b}$$

このような表現は特殊なものに見えるが、現実の意思決定過程もこのような体系であることが示される。たとえば(1)のように統一的な設計基準等に基づいて個別施設ごとの要求耐震性水準を確保しながら、最低のコストで設計するという一般的な状況について考える。いま、基準において「〇〇の地震動に対しては〇〇の安全性（機能）を確保する」と示されているとすると、目的関数は各施設のコストの和となり、それを最小化することが目標となる。またその際の制約条件は、各地震動レベルに対する実現性能が要求性能を上回るように設定される。いま、施設が一つの場合で、1～Eのレベルの地震動が想定される場合を例として定式化すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\min c \\
\text{s.t. } P(p_e, c) &\geq P_e^* \quad (e=1 \sim E)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで c : 施設の構築（あるいは補強）にかかるコスト、 $P(p_e, c)$: 施設にコスト c をかけたときのレベル e の地震動に対する実現性能、 P_e^* : レベル e の地震動に対する要求性能。ここで、 c は単独で最小化されるのではなく、地震動レベルに対する性能条件を満足するように変化させる。施設が複数の場合にも、個々の施設についてこの問題を解くことにより総コストは最小化される。この場合、目的関数を施設への投資コストとし、これを地域の「不満足度」と考えて最小化している。しかしながら、地域の満足・不満足は、地震時の施設の性能によっても変化する。たとえば、非常に大きな地震に対して完璧な機能を確保するために莫大なコストがかかる場合、これを要求性能として設定してしまうと本来の地域の要請に合致しなくなるかもしれない（もちろん、その逆にもっとコストをかけても性能を上げることを地域が望むことも考えられる）。

上記のような方法に対して、複数の施設に対して何らかの方法で重要度を計算し、その値に基づいて投資額を配分することも考えられる。たとえば、あらかじめ選定したパラメータによって各施設の重要度を計算し、重要度による比例配分によって各施設の投資額を決定する場合、定式化は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \max Z \left(p, P_{11}(c_1, p_1), \dots, P_{SE}(c_S, p_E), \sum_s c_s \right) \\
& \text{s.t. } I_s = I(\mathbf{x}) \quad (s=1 \sim S) \\
& \quad c_s = \frac{I_s}{\sum_j I_j} c^* \quad (s=1 \sim S) \\
& \quad \sum_s c_s = c^*
\end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで、 c_s ：施設 s に対する投資額、 $I(\mathbf{x})$ 、 I_s ：施設の重要度を計算する関数形と施設 s の重要度、 $\mathbf{x}$ ：重要度計算に用いるパラメータ、 c^* ：コスト総額の制約。なお、補強対策などの緊急度について考える場合には、式 5.4 に時間軸を含めて考える。この方法の場合、パラメータ $\mathbf{x}$ と重要度関数 $I(\bullet)$ の関数形を適切に選択することによって、地域の満足度を最大化することになる。しかしながらこの方法の場合、一般的には具体の目的関数である満足度を最大化することによって関数形やパラメータの適否を考えることは稀で、通常はパラメータの重みつき総和などによって計算した重要度とそれに基づく投資配分方法が地域の満足度を最大化するかあるいはそれに近いと「信じて」そのような方法を用いていることになり、その妥当性は確認されていない。

上記のことから、耐震対策投資を有効に行うための様々な手法は、結局のところ地域の満足度を高めるための最適化問題を（たとえ問題を簡略化したり「そう信じて」いるだけであるとしても）解いていることになる。そこで次節では、直接地域の満足度を計測し、式 5.3 のような最適化問題を直接解く方法について検討する。

5.3 定式化と解の導出

(1) 問題設定

問題を定式化するため、5.1 節で設定した問題をさらに具体的に記述する。まず、簡単な例で考えるため、以下の様に問題を設定する。

地域において、二つの施設に関する耐震対策の内容を決定しなければならない。地域において二種類の地震が想定されており、また各施設の IOC カーブが得られているとする。このとき、与えられた投資額によって、各施設の耐震対策を行うとすると、その内容をどのようにすれば最も地域の要請に合った状態となるか？

この問題を簡単なイメージで示したのが図 5.1 である。サイト 1($s=1$)では病院の建設が計画されており、サイト 2($s=2$)では道路橋が計画されている。また、二つのサイトを含む地域において二つの地震($e=1, 2$)が想定されており、それらの発生確率が p_1 、 p_2 で与えられているとする。

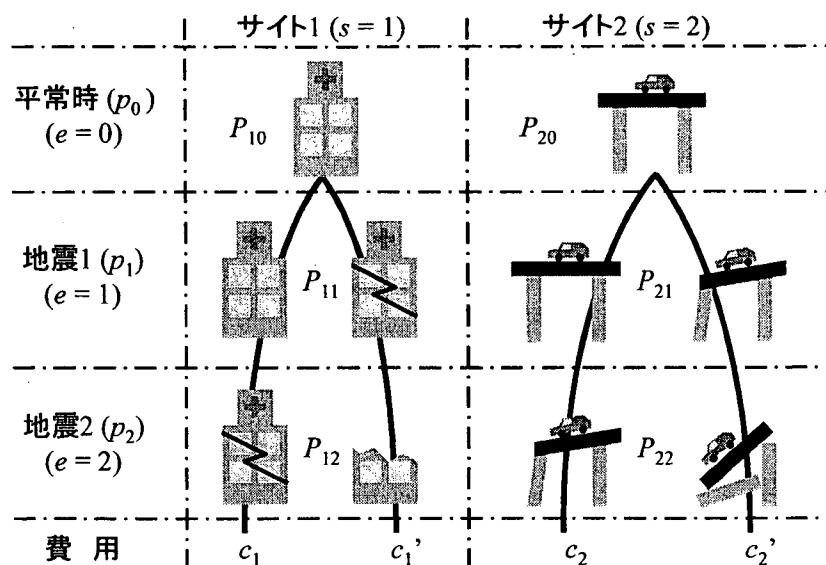


図 5.1 例題のイメージ

図中、平常時とは有意な地震動に見舞われない事象で、その確率が $p_0 = 1 - p_1 - p_2$ である。ただし地震の規模は地震 1 < 地震 2 であり、確率は $p_1 > p_2$ である。これらの地震による、サイト 1、2 の地震動は各々で異なってもよい。この確率と地震動の強度は、ハザードマップ等によって一対一で対応付けられる。また、サイト s の施設（あるいは施設 s ）が地震 e の地震動に見まわれた場合の実現性能レベルを P_{se} と定義している。たとえば、サイト 2 で地震 1 が発生した場合の発現性能レベルは P_{21} などとしている。この性能は、施設 s に投じる耐震対策コスト c_s によって変化する。たとえばサイト 1 の病院については $c_1 > c_1'$ であり、 c_1 で高水準の整備を行えば、より弱い地震 1 に対しては健全な状態を保ち、より強い地震 2 に対しては若干の被害が生じる。一方、 c_1' で低水準の整備を行うと、弱い地震動でも若干の被害が生じ、強い地震動では倒壊の危険性がある。道路橋についても同様である。なお、ここで平常状態の性能を考えているが、これは平常状態における施設のサービス水準を判断に含めて考えることを示している。したがって、この場合コスト c は耐震対策コストのみではなく、施設構築に必要な全コストを含めている。これらの設定を表として表したものが表 5.1 である。

表 5.1 例題の設定

地震レベル	費用 発生確率	サイト1	サイト2
		$C_1(P, p)$	$C_2(P, p)$
平常時	$p_0 = 1 - p_1 - p_2$	P_{10}	P_{20}
地震1	p_1	P_{11}	P_{21}
地震2	p_2	P_{12}	P_{22}

これらの設定のもと、地域にとって最もよい状態を実現するための性能 P_{se} の組み合わせを決定する。その組み合わせが決定されれば、それらと地域で与えられている地震動レベル p より、最適化された各サイトのコスト c の組み合わせすなわち耐震性水準の組み合わせが定まる。

(2) 目的関数

ここで、地域の状態をあらわす目的関数を考える。このような関数の一例として、各施設の性能レベルに応じて定められる純便益の期待値すなわち期待純便益が考えられる。

$$z = p_1 NB(P_{11}, P_{21}, c_1 + c_2) + p_2 NB(P_{12}, P_{22}, c_1 + c_2) + (1 - p_1 - p_2) NB(P_{10}, P_{20}, c_1 + c_2) \quad (5.5)$$

ここで $NB(P_1, P_2, c)$: 地域の純便益、 P_1, P_2 : 各々施設 1、2 の性能レベル、 c_1, c_2 : 施設 1、2 への投資コストを表す。純便益を規定する変数としては、性能レベル P_{se} と耐震対策コスト総額 c_s であり、地震動レベル（あるいは発生確率）は含まれていないが、これは、地震動強度に関わらず、地域の便益は震災後の被災状態のみによって計算されることを意味する（たとえば、地震動の状況にかかわらず、「病院が倒壊し、道路橋に若干の被害が生じている」といった性能の組み合わせに対して、便益が計測できるとしている）。この表現では、地震が発生しない場合の性能 P_{10}, P_{20} が便益に影響を与えているが、たとえばこれは、車線数の違いによる平常時の効果の違いなどに対応する。なお、地域の純便益は直接・間接的に生ずる便益から総コストを差し引いたものとなるから、純便益 NB は便益 B と施設 s にかかるコスト c_s を用いて $B(P_1, P_2) - c_1 - c_2$ と表すこともできる。

通常、公共事業の純便益は正の値が期待され、その値が大きい事業ほど事業の効果が高いと判断される。しかしながら、本問題の場合、純便益が必ずしも正となるとは限らない。たとえば対象として耐震対策事業分のみを切り出して論じる場合、まず対策コスト c_s は総事業費のうち、当該水準を満足するために必要な追加費用となり正の値であるから、純便益に対しては負の効果を持つ。便益 B については、正の値をとる場合も負の値をとる場合もある。たとえば、道路橋が被災し 1 ヶ月間通行不能状態になった場合でも、少なくともそのネットワーク状態で何らかの経済活動が行われるため便益は正となる。一方、被災によって通行となり、さらに発生した瓦礫の処理等の損失がある場合などには便益が負となることも考えられる。したがって純便益の総額は負となる可能性があるが、その場合でも負の純便益を最大化（すなわち絶対値を最小化）することによって損失額を最低に抑えることができるため、目的関数として採用することができる。ところが、期待純便益の問題点は、地震発生の確率が非常に小さく、その損失が非常に大きくなった場合に、必ずしも理論どおりの期待額が感覚的に妥当と考えられる額（妥当額）に一致しない可能性があることにある（巻末資料 3）。

いま、各施設の性能レベル及び総投資額を独立変数とする効用関数 $U(P_1, P_2, c)$ を考えると、目的関数として以下の期待効用を採用することもできる。

$$z = EU = p_1 U(P_{11}, P_{21}, c^* - c_1 + c_2) + p_2 U(P_{12}, P_{22}, c^* - c_1 + c_2) + (1 - p_1 - p_2) U(P_{10}, P_{20}, c^* - c_1 + c_2) \quad (5.6)$$

ここで、 c^* ：地域の予算総額、 $U()$ ：各施設の性能とコストに対応した効用関数。耐震対策により多くのコストをかけるほど残りの予算額は少なくなり効用を低下させる。その一方で、その耐震対策によって確保される地震時の性能が高いほど効用は高くなる。式 5.8 のような期待効用を構成する多変数効用関数 U は、それを測定するのが一人の人である場合、変数間の独立性等を仮定し、被験者に対して質問を繰り返すことにより特定することができる¹⁶⁾。

(3) 制約条件つき最適化問題

地域において式 5.5 あるいは式 5.6 の目的関数を最大化するとき、いくつかの制約条件が課される。以下、目的関数を式 5.6 の期待効用 EU として、いくつかのケースについて考える。

- ① 予算の一部を用いて耐震対策に充てる場合。ただし平常時の性能を耐震対策の最適化とともに変更可能。

$$\begin{aligned} \max_{P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}} EU &= p_1 U[P_{11}, P_{21}, c^* - C_1(P_{11}, p_1) - C_2(P_{21}, p_1)] \\ &+ p_2 U[P_{12}, P_{22}, c^* - C_1(P_{12}, p_2) - C_2(P_{22}, p_2)] \\ &+ p_0 U[P_{10}, P_{20}, c^* - C_1(P_{10}, p_0) - C_2(P_{20}, p_0)] \end{aligned} \quad (5.7.a)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } C_1(P_{11}, p_1) &= C_1(P_{12}, p_2) = C_1(P_{10}, p_0) \\ C_2(P_{21}, p_1) &= C_2(P_{22}, p_2) = C_2(P_{20}, p_0) \\ C_1(P_{10}, p_0) + C_2(P_{20}, p_0) &\leq c^* \end{aligned} \quad (5.7.b, c, d)$$

ここで C_s ：施設 s の IOC カーブ。この場合、効用は各施設の地震時性能に加えて手持ち予算の残分の多寡に影響を受ける。制約条件式 5.9.b 及び c は、各施設において地震動レベルに関わらず投資コストが同じにならなければならないことを示している。これは、RPM 上において各施設の地震動レベル p_e と性能レベル P_{se} の組を独立に選ぶのではなく、施設ごとに一本の等設計線上に乗るように選ばなければならないことに対応する。さらに言い換えれば、一旦構築した施設の耐震性水準は地震動レベルを予見して変更することができないことを意味する。ここで、コスト～性能～地震動レベルの関係は、地震動レベル p_e に対して耐震対策コスト c_s によって耐震性水準を確保している場合に発現する性能が P_{se} であることから、

$$P_{se} = P(c_s, p_e) \quad (5.8)$$

と表現するのがわかりやすいが、IOC カーブとの整合のため、これをコストについて解いて

$$c_s = C_s(P_{se}, p_e) \quad (5.9)$$

の形で表す。式 5.8 から式 5.9 に書き換えるためには、 P_{se} と c_s が一対一対応である必要がある。

この問題の場合の IOC カーブのコストの値は、平常時性能および地震時性能の双方を実現するための総コストとなる。この式を解くことによって、各地震時性能（および平常時性能）が得られるが、制約条件から、それらは各施設に対して各々一つの整備水準すなわち設計内容を選択したことに他ならない。その水準によって、地震時／平常時性能と予算残額を加味した効用が最大となる。

与件としては、地域の効用関数、各施設の IOC カーブ、地域で想定される地震動レベル、耐震対策予算総額であり、これより各施設の地震時性能 $P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}$ が得られる。各 P_{se} とそれに対応する地震動レベル p_e を IOC 関数に代入して得られるコストは施設 s ごとに同じ値をとり、それらに対応する耐震性水準は同じである。このコストに対応する耐震対策内容が、期待効用を最大化するものとなる。このケースでは、各地震動レベルで想定される状態を含めて最大化するために、平常時の性能も変化する。

② 手持ち予算の全てを耐震対策投資に振り向ける場合。ただし平常時の性能を耐震対策の最適化とともに変更可能。

$$\max_{P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}} EU = p_1 U(P_{11}, P_{21}) + p_2 U(P_{12}, P_{22}) + p_0 U(P_{10}, P_{20}) \quad (5.10.a)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } C_1(P_{11}, p_1) &= C_1(P_{12}, p_2) = C_1(P_{10}, p_0) \\ C_2(P_{21}, p_1) &= C_2(P_{22}, p_2) = C_2(P_{20}, p_0) \\ C_1(P_{10}, p_0) + C_2(P_{20}, p_0) &= c^* \end{aligned} \quad (5.10.b, c, d)$$

このケースでは、複数の施設の整備に振り向けるコスト総額は一定である。コストは耐震対策を含む施設整備総額であり、それに対応して各地震動レベルと平常時に対する性能が定まる。この場合、複数の施設の耐震対策に振り向ける予算の総額は定まっているため、手持ち予算によって効用は変化しない。また、制約条件式 5.10.d は、予算総額が一定であることを示している。この場合に計算されるのは①のケースと同じ $P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}$ である。

③ 手持ち予算の全てを耐震対策投資に振り向ける場合。ただし平常時の性能はあらかじめ固定されている。

$$\max_{P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}} EU = p_1 U(P_{11}, P_{21}) + p_2 U(P_{12}, P_{22}) + p_0 U(P_{10}, P_{20}) \quad (5.11.a)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } C_1(P_{11}, p_1) &= C_1(P_{12}, p_2) \\ C_2(P_{21}, p_1) &= C_2(P_{22}, p_2) \\ C_1(P_{11}, p_1) + C_2(P_{21}, p_1) &= c^* \end{aligned} \quad (5.11.b.c)$$

このケースでは、平常時の性能が他の計画等によってあらかじめ定められているとする。これに対して、耐震対策コストを変化させることにより、各地震動レベルに対して発現する性能が定まる。平常時の性能は耐震性水準によって変化しないため、最大化する目的関数を

$$EU - p_0 U(P_{10}, P_{20}) = p_1 U(P_{11}, P_{21}) + p_2 U(P_{12}, P_{22}) \quad (5.12)$$

としてもよい。IOC カーブのコストの値は、耐震対策分のみでも総コストでもよい。なお、この場合も耐震対策コストの総額が一定であるため、手持ち予算による効用の変化は無視する。

5.4 試算

前節で定式化した問題について、関数形を特定し試算してみる。ここでケース 1 及び 2 については、平常時の性能が耐震対策の内容によって影響を受ける。実際には、平常時に確保される性能が他の計画により与えられ、それに対して追加的な耐震対策コストを加えて耐震性水準を高める考え方の方が自然である。そこで、ここではケース 3 について試算する。

いま、施設 1、2 の性能レベルと地域が支払う総コストに関する効用関数 U 及び各施設の IOC 関数 C_i が以下のように特定されているとする。

$$\begin{aligned} U(P_{1e}, P_{2e}) &= P_{1e}^{\alpha_1} P_{2e}^{\alpha_2} \\ C_1(P_{1e}, p_e) &= P_{1e}^{\eta_1} p_e^{\xi_1} \\ C_2(P_{2e}, p_e) &= P_{2e}^{\eta_2} p_e^{\xi_2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで効用関数の指数については、性能が高いほど P_{se} の値が大きくなるように定義されていれば、性能が高くなるにしたがって効用が増大することから $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 。さらに限界効用が低減すると仮定す

ると、 $1 > \alpha_1, \alpha_2 > 0$ となる。コストについては、同一地震動レベルに対して地震時性能を高く求めるほど高くなることから $\eta_1, \eta_2 > 0$ 。高い地震性能になるほど、さらに性能を高める追加のコストは高くなると考えられることから、 $\eta_1, \eta_2 > 1$ と考えられる。一方、地震動レベルが高いほど (p_e が低いほど) 同一性能を確保するためのコストが高くなることから、 $\xi_1, \xi_2 < 0$ 。地震発生確率が小さくなるほど地震動の強度の増加率は大きくなり、同一性能を確保するためのコストが高くなることから、 $\xi_1, \xi_2 < -1$ と考えられる。

式 5.13 を式 5.11, 12 に代入してこれを解くと、地震時性能レベル P_{se} は以下ようになる (巻末資料 4)。

$$P_{se} = \left(\frac{\alpha_s / \eta_s}{\sum_s \alpha_s / \eta_s} p_e^{-\xi_s} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_s}} \quad (s, e = 1, 2) \quad (5.14)$$

式 5.14 において、地震動レベル p_e が一定で総予算額 c^* のみが増加した場合、性能レベル P_{se} は増加する ($\because \eta_s > 0$)。これは、総予算額が増加することによって、各施設に配分される耐震対策投資額が増加するため、各施設の耐震性水準が向上し、同じ地震動レベル (p_e) に対して発現する性能が高くなることを意味する。一方、総予算額 c^* が一定で地震動レベルが増加した場合 (地震動の規模が増加した場合、すなわち発生確率 p_e が減少した場合) には、性能レベルは減少する ($\because 0 < p_e < 1, -\xi_s / \eta_s > 0$)。これは、同じ総投資額を各施設の耐震対策に配分する場合、想定される地震動レベルが高いほど、当該地震動に対して各施設で発現する性能は低くなることを意味する。また、施設 s の α_s / η_s が大きいほど、すなわち性能レベルの増加に対する効用増加の感度 (α_s) がコスト増加の感度 (η_s) に対して大きいほど、その施設で実現される性能レベルが高くなる。すなわちこれは、与えられた地震動に対して発現する性能を向上させるために必要なコストに対して、向上した性能から受ける利益が大きい傾向を示すほどその施設に振り向ける投資額が増加し、その結果同一地震動レベルに対して発現する性能が高くなることを示す。

上記のように、得られた解は一般的な意思決定との矛盾を持たず、かつ具体的な数値として性能レベル P_{se} が得られ、これから、IOC 関数 C_1, C_2 を通して施設ごとの耐震対策投資額が計算される。そして IOC 関数が一価関数であれば、これから各施設の耐震設計内容が定まる。各施設に対して定まった設計内容は、所定の予算制約のもとで地域の満足度 (便益あるいは効用) を最大化している。

6. 結 論

本研究は、公共土木施設の耐震性水準を地域で想定される地震動と施設の地震時性能によって表示し、地震に関する防災投資の効率化に資することを目的とし、以下の結果を得た。

(1) 実現レベルのパフォーマンスマトリックスの提案

従来、性能基盤設計の分野で示されているパフォーマンスマトリックスは、所与の要求水準を図示したものであるのに対して、実際に構造物等が複数の地震動に対する応答を等水準線として示す実現レベルのパフォーマンスマトリックス(realized performance matrix: RPM)の考え方を示し、耐震対策投資に際して RPM を用いることの有効性を示した。

(2) IOC カーブの提案

RPM に対して対策に必要なコストを加えた IOC カーブの考え方を導入し、地域で想定される地震動、施設に対して投資する耐震対策コスト、そのコストに対する耐震性水準のもとで地震動に対して発現する施設の性能を表現した。また、耐震対策投資に関する意思決定に対して IOC カーブを用いることの有効性を示した。

(3) RPM 及び IOC カーブの試算

モデル的に設定した道路橋について、様々な耐震性水準を設定し、各水準について複数の地震動に対する性能を計算し、RPM 及び IOC カーブを試算した。その結果、試算された RPM、IOC の形状と理論上想定される RPM、IOC の形状が一致することを確認した。

(4) IOC カーブを利用した震災対策投資配分の最適化方法の検討

複数施設についてそれぞれの IOC カーブが得られている場合、地域の満足度を最大とする各施設の耐震性水準の決定方法（すなわち耐震対策投資配分の決定方法）を示した。

また本研究の結果、下記の事項を今後さらに検討すべきことが判明した。

(1) 確率によって表示された地震動の認識について

地震動レベルを確率によって表示した場合、それが一般に正しく認識されるのかということが論議になることがある。たとえば年超過確率が 5 千年、1 万年、1 万 5 千年の地震動の場合 50 年超過確率は各々約 1%、0.5%、0.3%となるが、これに対応する PGA が施設の耐震性水準に影響を与えるほど大きく異なるとしても、高々 0.2~0.5%程度の違いが意思決定者にとって意味をなさないかもしれない。期待純便益を目的関数として最適化問題を解く場合、確率については線形な関係となっているため、たとえば 0.2%と 0.1%では目的関数に反映される効果が倍半分の違いになるが、実際にそうであると認識されるかどうかは不明である。このような疑問に対して考えられる方法は下記のとおり整理できる。

- ① やはり目的関数に期待純便益を用い、冷徹に損失とその緩和に関する価値を最大化する。たとえ

非常に小さい確率に対して期待値と人間の感覚が乖離するとしても、国・地域の目標は確率論的な期待値を最小化することにあると考える。この方法の是非は本報告における意思決定よりもレベルが高い意思決定のスタンスそのものに関連する。

- ② 確率と対応して得られる効用関数を用いた期待効用を目的関数とする。この場合、効用関数形を同定する際に確率に対する意思決定者の判断も含まれる。この方法の問題は、多数の変数を持つ効用関数の同定方法、多数の意思決定者が存在する場合の「代表的な効用関数」の同定方法、期待効用論におけるいくつかのパラドックスなどにあり、これを解決するための学術的な問題と現実論とのギャップは大きい。また、実際の意思決定とは別の段階で間接的に求められた効用関数を意思決定者が受け入れるかどうかという点にも注意しなければならない。

この問題は、技術的な問題と並んで、社会としてこのような考え方を受け入れるかどうかという面も有している。本研究のスタンスは、確率評価が社会的に受け入れられる状態を想定している。

(2) 地震動の与え方の問題

たとえば同じ発生確率で異なる震源の地震動が考えられる場合、確率表現された地震動と設計上の地震動表現が一对一对応ではなくなる。また、構造物の設計方法によって、PGA 以外のパラメータが要求されたり、時刻暦波形やスペクトルといった単一の指標で分類できない状態で与えることが必要な場合も考えられる。このような場合、やはり地震動レベルのパラメータを確率とするのがよい。そして、その確率に対応した（場合によっては複数の）地震動を構造物の設計法に必要な表現にして、最適化問題を解くことになる。この場合、同じ確率で異なる地震動に対しては別の事象として考え、それぞれの地震動による性能レベルを用いて最適化問題を解く。たとえば確率 p_1 で想定される地震動が一つ、確率 p_2 で想定される地震動が二つある場合、目的関数は下記のようになる。

$$z = p_1 U(P_{11}, P_{21}, c) + p_2 U(P_{121}, P_{221}, c) + p_2 U(P_{122}, P_{222}, c) \quad (5.15)$$

ここで、 P_{s1} : 施設 s の地震動レベル 1 に対応する性能、 P_{s2i} : 地震動レベル 2 の地震動のうち i 番目の地震動に対応する施設 s の性能。すなわちこの場合、同じ発生確率の地震動は独立であると考えている。

(3) 地震時性能推定精度の問題

たとえば道路橋の橋脚についてはある程度地震時の挙動に関する知見も得られているが、土構造物についてはその挙動が橋梁ほど明確ではなく、性能の推定精度も不確実である。このような精度は施設の性能推定に関する技術の品質ともいえるが、施設間でこの品質にばらつきがある場合、それが意思決定にあたって明示されており、配慮されることが必要である。

また、橋梁のように基礎、橋脚、支承、上部工といった各部材より構成されている構造物システムの場合、システム全体性能すなわち限界状態を正確に同定することが難しくなる。たとえば 4 章で示

した試算においては、支承が橋脚に先行して被災せず常に上部工の地震荷重を伝えるとしたが、上部構造と支承を先に破壊させ落橋のみを防止する構造とすれば、上部構造の地震荷重は橋脚に伝達されないため、支承が破壊しないと想定した場合よりも橋脚の水準は低くてもよいことになる。通常の設計では、与えられた地震動に対して要求される性能を満足し、さらに余裕を持たせることによってこれらの問題を回避しているが、投資問題を扱う場合には施設の地震時挙動を的確に予測しなければならない。

(4) 地震時性能の表現

通常の性能基盤設計の考え方では、性能のカテゴリーとして機能性(serviceability)、修復性(reparability)、安全性(safety)などに区分される。一方、本報告におけるパフォーマンスマトリックスも既往のものも性能軸は一次元であり、応答塑性率や塑性状態率といった工学パラメータで表示されている。意思決定にあたっては、性能が適切な言語と数値で表現されている必要があるが、パフォーマンスマトリックス作成にあたっては、ある工学パラメータに対応した性能を推定し、性能カテゴリーごとに適切に表現しなければならない。

また本報告の最適化法では、目的関数のパラメータとして同一施設で複数の性能レベルを持たせることもできる。たとえば景観に関する性能が追加された場合、これに関する性能レベルのパラメータを追加して最適化する。景観のように一次元の実数によって表しにくいものについては、その数自体は意味を持たないインジケータとしてモンテカルロ法や GA 等の方法により最適化問題を解く。

(5) IOC 関数の多価性

図 3.7 のように、IOC 関数は必ずしも一価の関数となるとは限らない。たとえば、異なる設計内容であってもある地震動レベルに対して同じ性能レベルとなることや、地震動レベルによって性能が逆転することもあると考えられる。その場合、等設計線は重なったり交わったりし、IOC 関係は一価関数とはならない。このような例は、免震設計によって強い地震動に対して有効な設計をした場合に、条件設定が悪ければ、頻繁に発生する弱い地震動に対してむしろ余裕がなくなる場合に起こり得る¹⁷⁾¹⁸⁾。

このような IOC 関数の多価性を解決するためには、関数のパラメータを増やすことが考えられる。たとえば橋梁形式による違いがコストと地震時性能に大きく影響するならば、形式に対応した整数パラメータを定義し、これに応じて異なる IOC 関数形とする。

(6) 最適化問題の適用について

現在、耐震設計に限らず構造物の設計は、提示された要求性能を少なくとも満足するように行われるのが一般的である。この場合、耐力確保等の設計方針は「より強く」あるいは「より安価に」という一方向の考え方である。一方、耐震対策事業に対する投下コストとその効果を考慮して最適な結果を得ようとする場合には、事業効果によっては耐力を低減させその代わりに投下コストを少なくすることが、効果の上昇を図れることもある。このとき、個別の構造物においては絶対的な人命の安全、最低の機能の確保といった重要な性能レベルが影響を受けることもありうるが、これに関する是非も

問題となろう。これに対しては、国あるいは地域としての最低限度の要求（シビル・ミニマム）は確保した上で、それを超える分について満足度を最適化する方法である。アプローチとしては、シビル・ミニマムに相当する制約条件を付加して最適化問題を解くことになる。

(7) アクセプタンス・レベル・オブ・リスク

上記の問題をシビル・ミニマムの設定によって回避したとしても、最終的にはこの問題が存在する。そもそも性能を明示しそれに立脚した設計を行うということは、いかなる外力に対しても絶対的に安全な施設を構築するという表現がもはや不可能であり、「どの程度の強さあるいは頻度の外力に対してどの程度の損失があることを受容するか」ということを明確に示さなければならないことを意味する。このことは受容危険レベル(acceptance level of risk)として一般に知られるものであり、特に自然災害や危険物に関わるものについては、たとえ基幹施設といえどもそれかを看過することはできない。その際には、施設の地震時挙動を可能な限り正確に予測可能な解析手法を開発高度化することが必要である。また、外力、材料の質や構築過程における品質が決定論的に定まるのではなく、確率変動を持つとして、信頼性理論を適切に組み合わせることも必要になる。

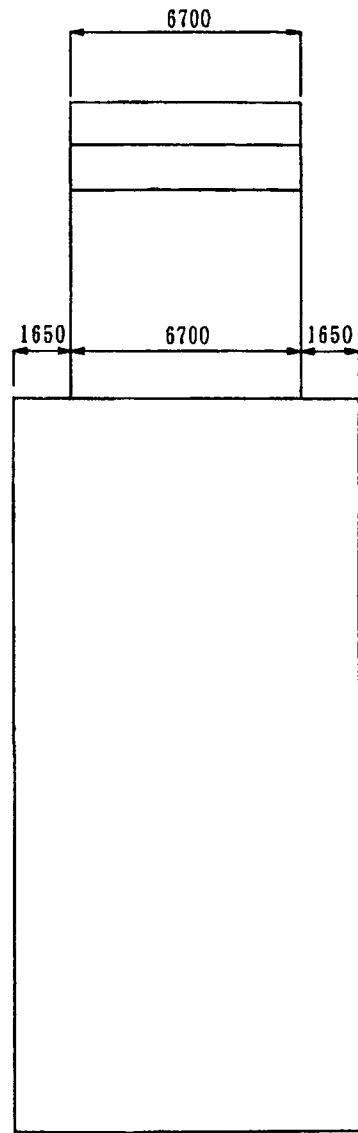
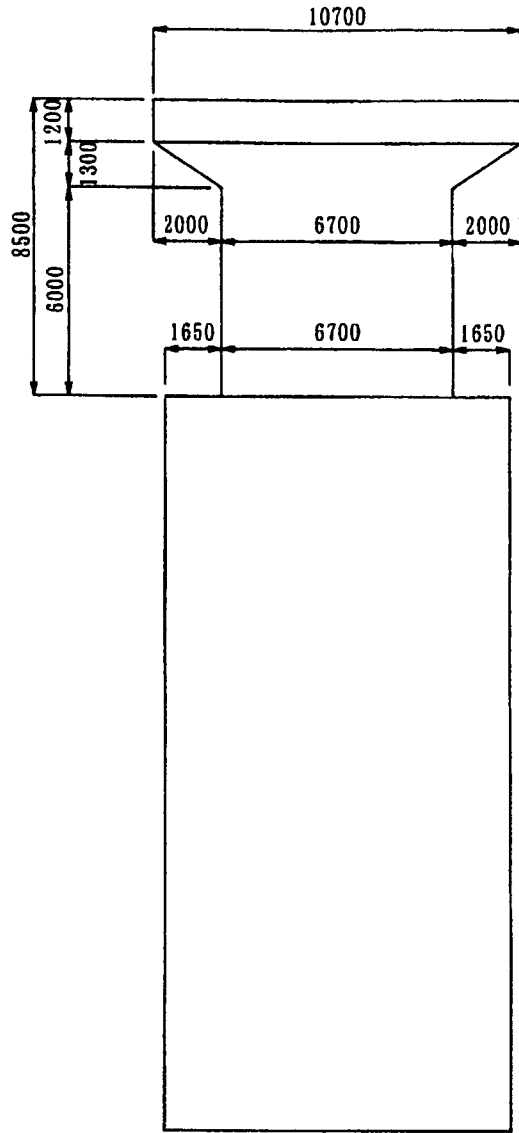
本報告で示したような手順の意思決定手法が社会的に受け入れられるかどうかについては、まだ議論を尽くしていない。しかしながら、施設の構築、補強に限らずあらゆる事業の各段階で必ず意思決定は行われており、そのとき、主観・客観を問わず何らかの方法で、複数の代替案の中から一つの案を選び出しているのであり、今後はそのような手順に関する透明性が問われ、明確な説明性を有することが必要となる。このことは「全く誤差のない完全な回答でなければ頼りにしない」ということではなく、本来は技術やそれによって構築された施設の品質やそのばらつきを明示した上で、できるだけ合理的に最善の答えを探す方法を確立し、着実にその精度を上げていくということである。

参考文献

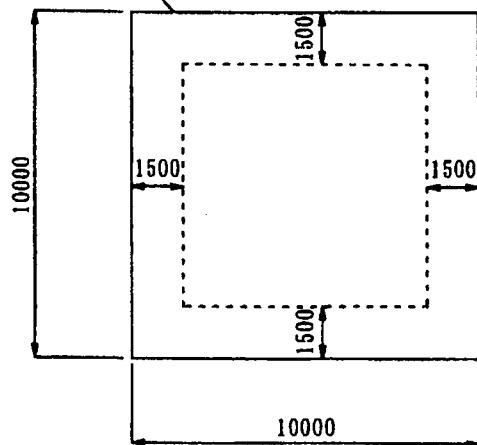
- 1) 土木学会 耐震基準等に関する提言集, (社)土木学会, 1996年5月20日, pp 4, 7, 21, 23-26, 34, 58, 70-74
- 2) 新時代を迎える地震対策—地震に強いみちづくりへの提言, 建設省道路局道路防災対策室監修, pp 14-17
- 3) 水谷守・中村孝明・下野正人・亀村勝美: 確率論的アプローチによる地震リスクマネジメント (SRM)手法の提案, 土木学会第51回年次学術講演会講演概要集, pp738-739, 1996年9月
- 4) 上田孝行, 「防災投資の便益評価—不確実性と不均衡の概念を念頭に置いて—」, 土木計画学研究・講演集 No.19(2), pp17, 1996年11月
- 5) VISION 2000 - Performance Based Seismic Engineering of Buildings, Structural Engineers Association of California Vision 2000 Committee, April 1995
- 6) International Workshop on Harmonization of Performance-based Building Structural Design in Countries Surrounding the Pacific Ocean, Dec. 1-4, 1997
- 7) 平成10年度建築研究所春季研究発表会 総合技術開発プロジェクト・官民連帯共同研究部門聴講資料, 1998年6月
- 8) 新耐震設計法(案), 土木研究所資料第1185号—総プロ「新耐震設計法の開発」研究報告, 1977年3月
- 9) 建設省河川砂防技術基準(案)同解説 設計編 [I], 建設省河川局監修, (社)日本河川協会編, 山海堂
- 10) 下水道施設の耐震対策指針と解説, 建設省都市局下水道部監修, (社)日本下水道協会
- 11) 道路橋示方書・同解説 V耐震設計編, (社)日本道路協会
- 12) 道路投資の評価に関する指針(案), 道路投資の評価に関する指針検討委員会編, (財)日本総合研究所
- 13) 鉄道プロジェクトの費用対効果マニュアル97, 運輸省鉄道局監修, (財)運輸経済研究センター
- 14) 理論地震動研究会編著、「地震動 その合成と波形処理」、鹿島出版会
- 15) SEAOC Blue Book, Appendix I - PBSE Guidelines: Part 2, PBSE Ad Hoc Committee, April 1999
- 16) Howard Raiffa, Decision Analysis - Introductory Lectures on Choices under Uncertainty, 1968
- 17) 道路橋の免震設計法マニュアル(案), (財)土木研究センター, 1992年12月
- 18) 林亜紀夫, 成田信之, 前田研一, 岩崎興治, 「橋梁用免震装置鉛プラグ入り積層ゴム支承の最適特性値探索」, 土木学会論文集 No.553/VI-33, pp117-128, 1996年12月

卷末資料

1.1 設計ケース D1



連壁基礎 L=21.5m

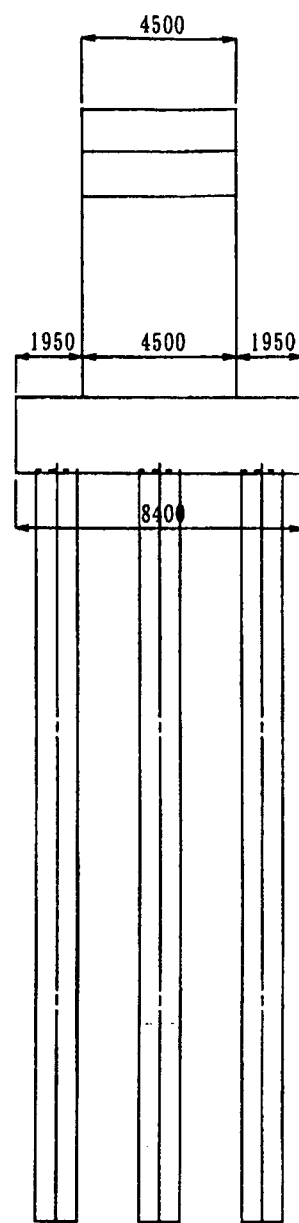
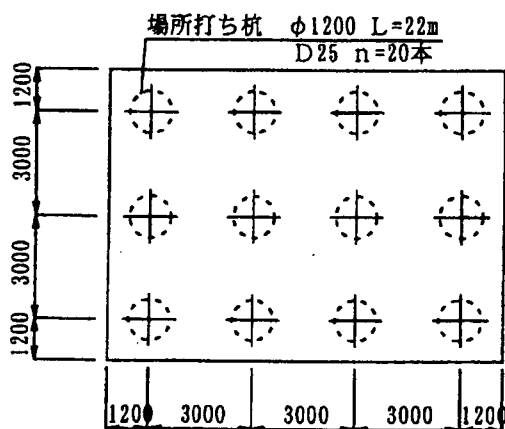
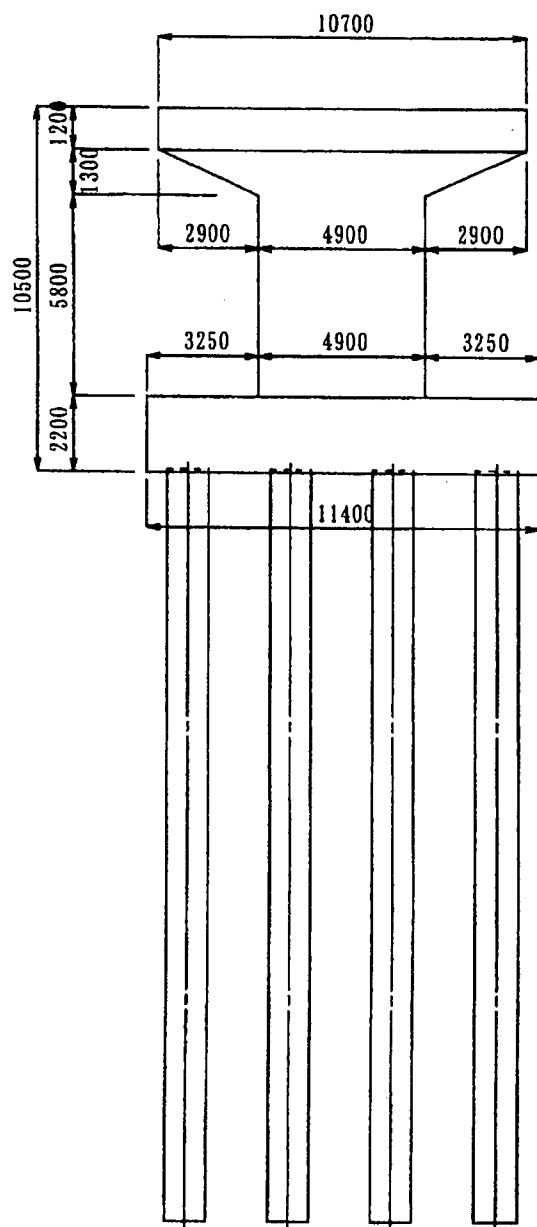


躯体主鉄筋：橋軸 D32 2段
：直角 D32

	躯体	基礎
EQ 4	弾性	弾性
EQ 3	弾性	弾性
EQ 2	弾性	弾性
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

1.2 設計ケース D2

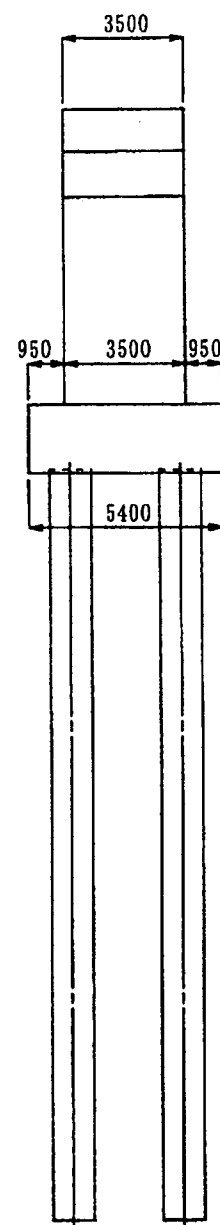
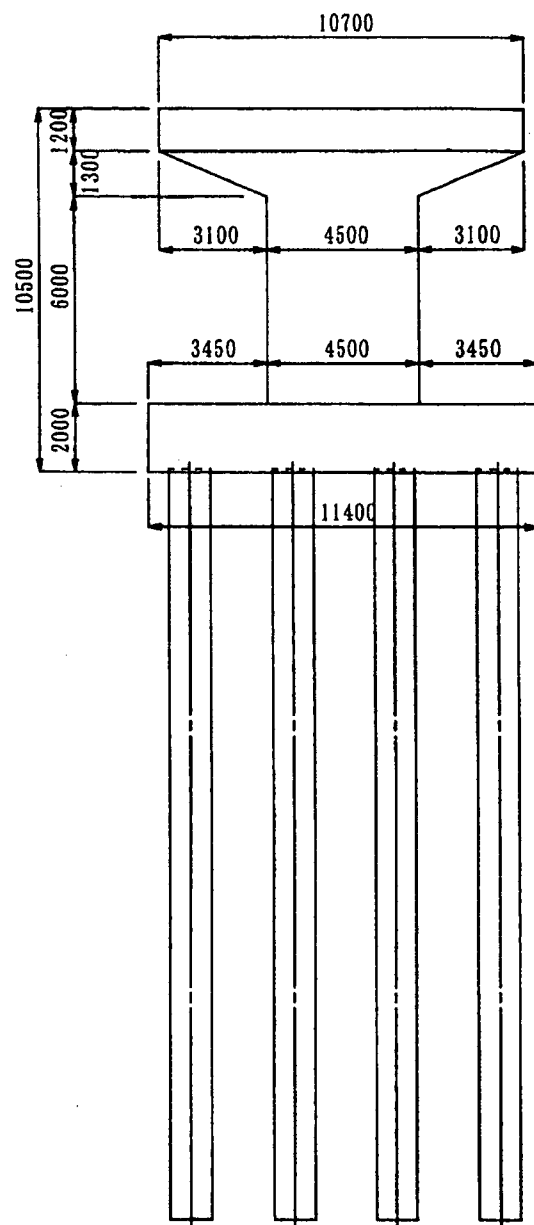


躯体主鉄筋：橋軸 D32 2段
：直角 D32

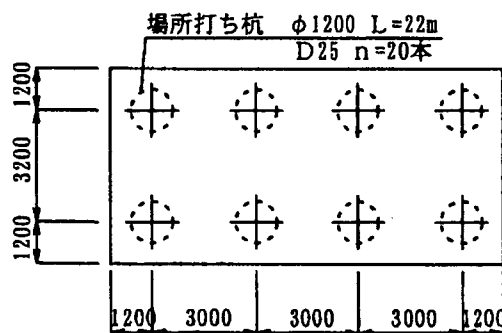
	躯体	基礎
EQ 4	$\lambda=0.107$	$\mu_R=1.6$
EQ 3	$\lambda=0.009$	$\mu_R=1.6$
EQ 2	弾性	弾性
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

1.3 設計ケース D3



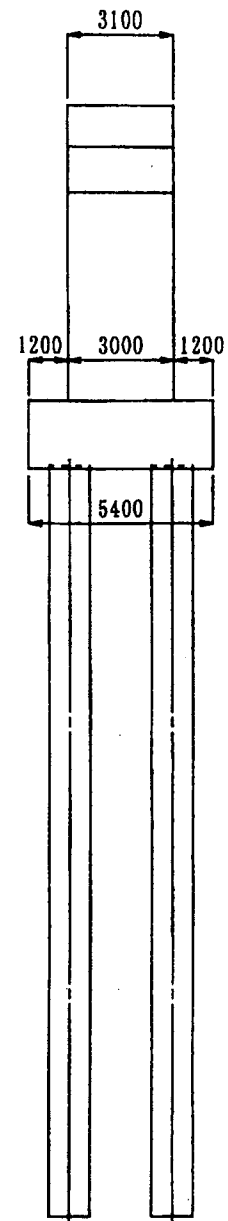
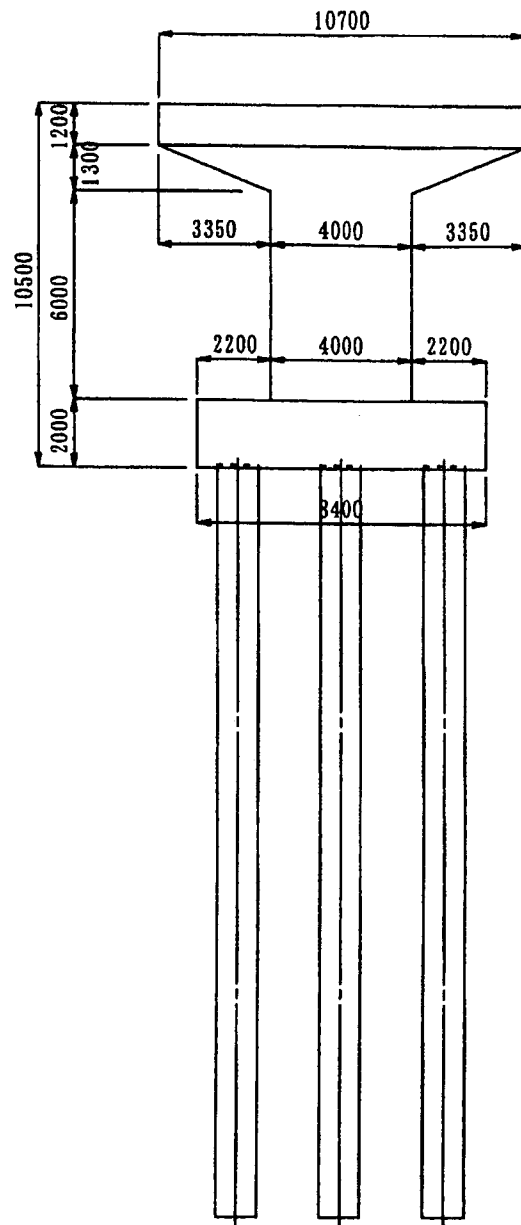
躯体主鉄筋：橋軸 D32 2段
：直角 D32



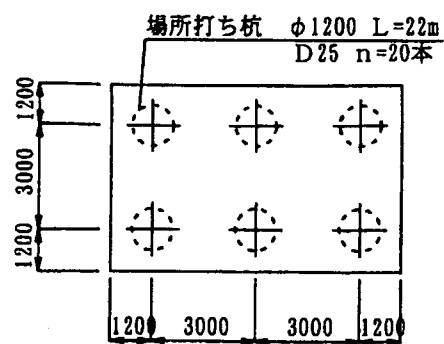
	躯体・	基礎・
E Q 4	$\lambda=0.297$	$\mu_R=2.3$
E Q 3	$\lambda=0.080$	$\mu_R=2.3$
E Q 2	弾性	弾性
E Q 1	弾性	弾性

単位：mm

1.4 設計ケース D4



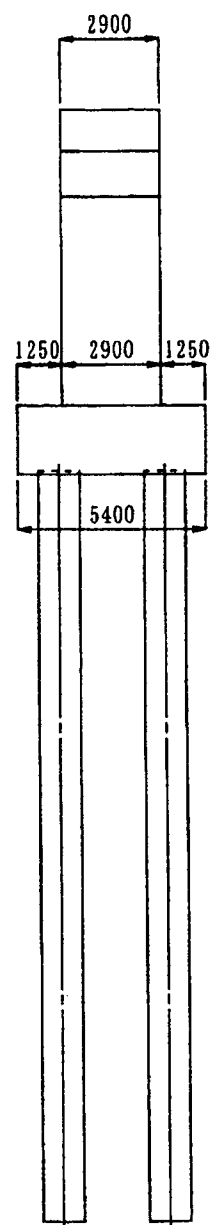
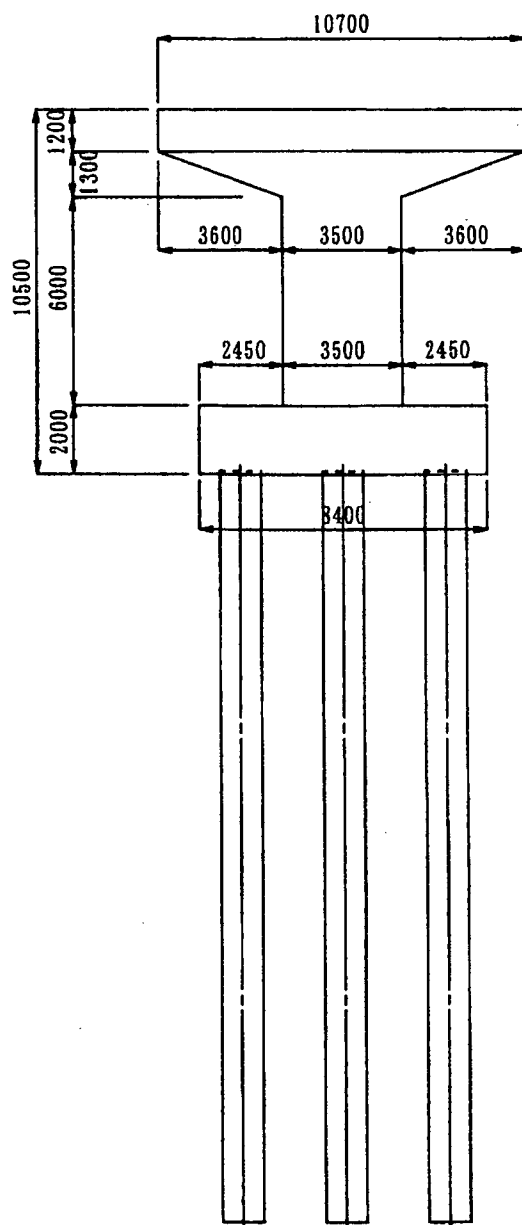
躯体主鉄筋：橋軸 D32 2段
：直角 D32



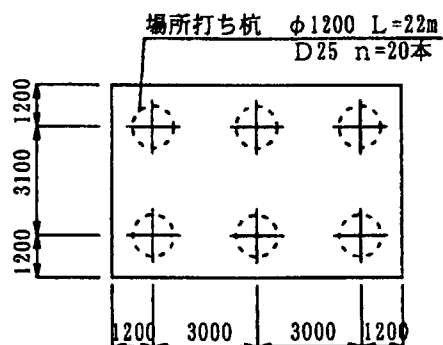
	躯体	基礎
EQ 4	$\lambda = 0.679$	$\mu_R = 2.1$
EQ 3	$\lambda = 0.226$	$\mu_R = 2.1$
EQ 2	弾性	$\mu_R = 1.0$
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

1.5 設計ケース D5



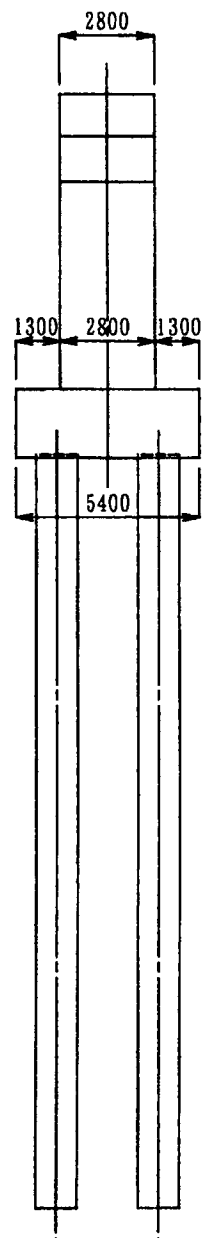
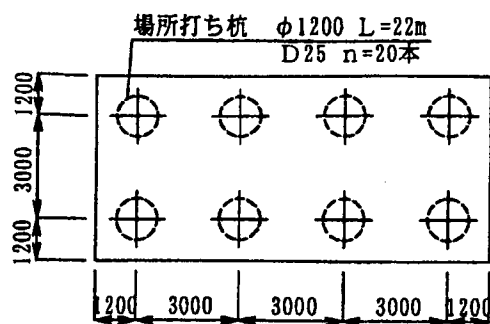
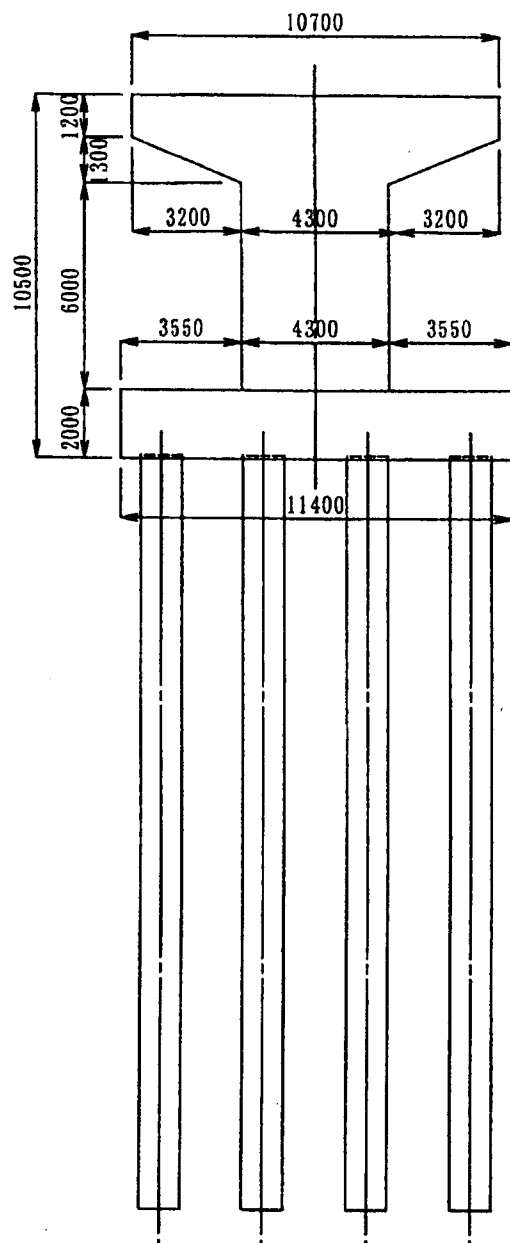
軀體主鉄筋：橋軸 D32 2段
：直角 D32



	軀體	基礎
EQ 4	$\lambda = 1.077$	$\mu_R = 1.6$
EQ 3	$\lambda = 0.375$	$\mu_R = 1.6$
EQ 2	彈性	$\mu_R = 1.0$
EQ 1	彈性	彈性

單位：mm

1.6 設計ケース D6

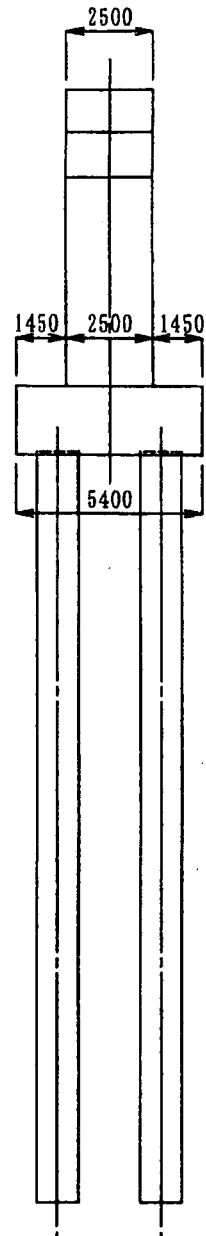
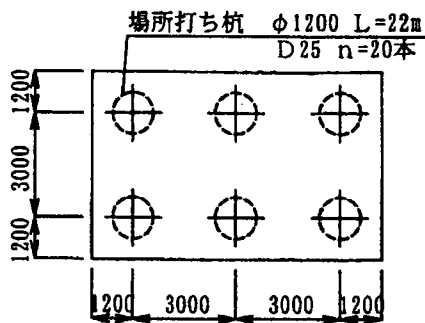
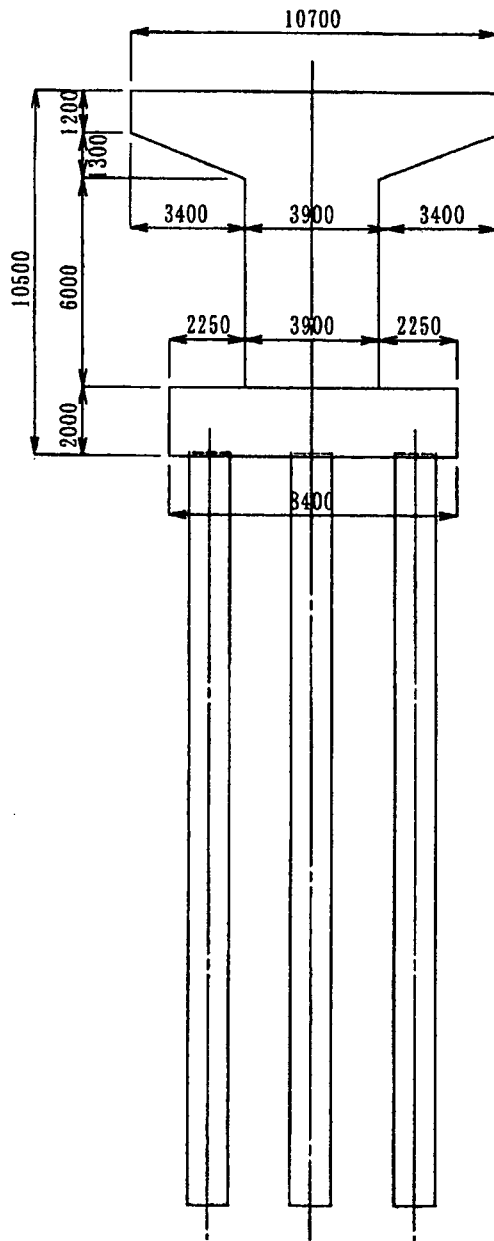


躯体主鉄筋：橋軸 D29 2段
：直角 D29

	躯体・	基礎・
EQ 4	$\lambda = 0.925$	$\mu_R = 1.2$
EQ 3	$\lambda = 0.331$	$\mu_R = 1.2$
EQ 2	弾性	弾性
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

1.7 設計ケース D7

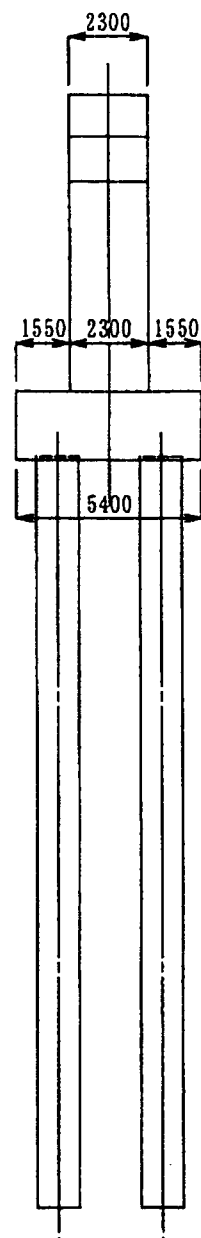
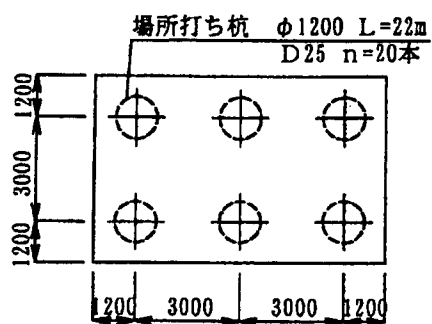
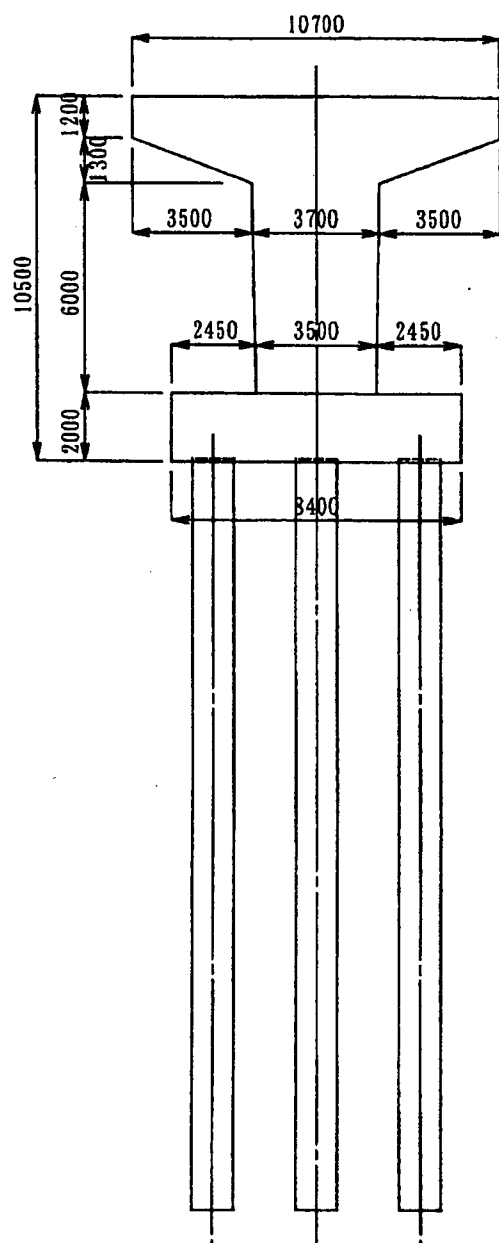


躯体主鉄筋：橋軸 D29 2段
：直角 D29

	躯体	基礎
E Q 4	$\lambda=1.974$	$\mu_R=1.2$
E Q 3	$\lambda=0.738$	$\mu_R=1.2$
E Q 2	$\lambda=0.006$	$\mu_R=1.2$
E Q 1	弾性	弾性

単位：mm

1.8 設計ケース D8

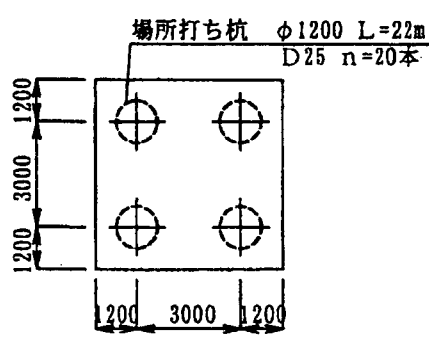
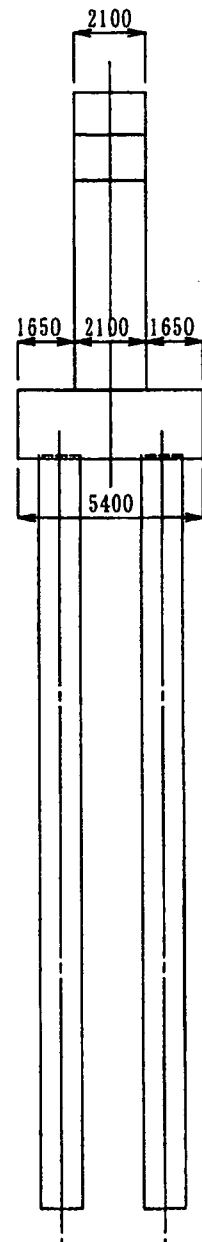
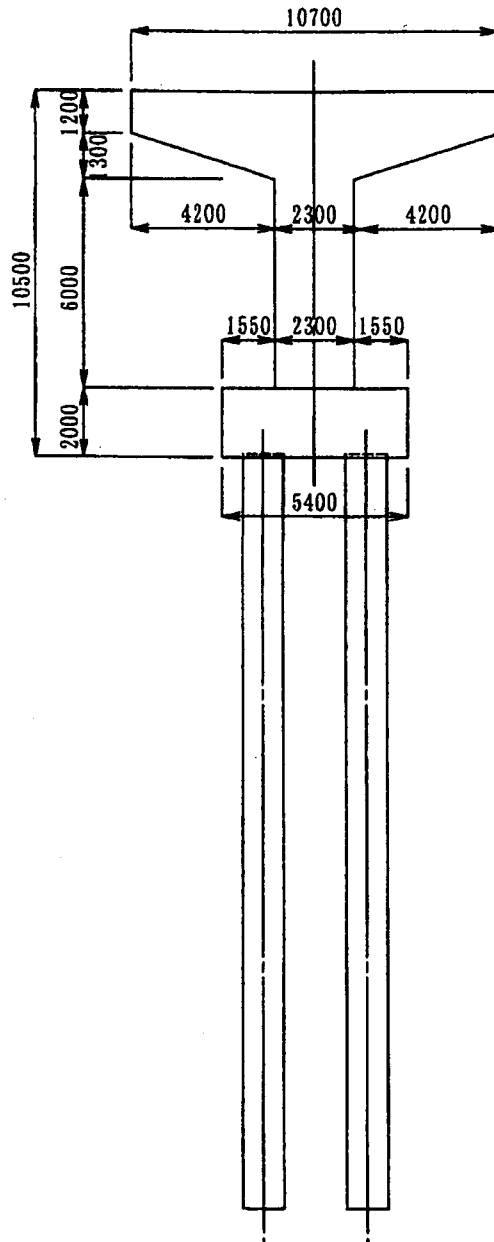


躯体主鉄筋：橋軸 D29
：直角 D29

	躯体	基礎
EQ 4	$\lambda = 2.777$	$\mu_R = 1.0$
EQ 3	$\lambda = 1.054$	$\mu_R = 1.0$
EQ 2	$\lambda = 0.033$	$\mu_R = 1.0$
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

1.9 設計ケース D9

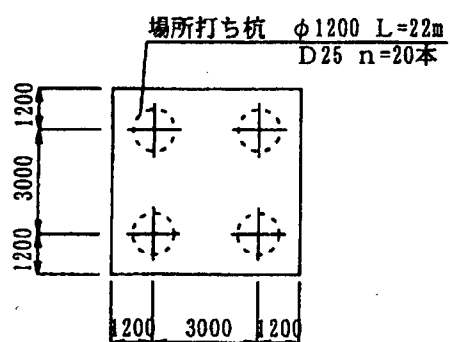
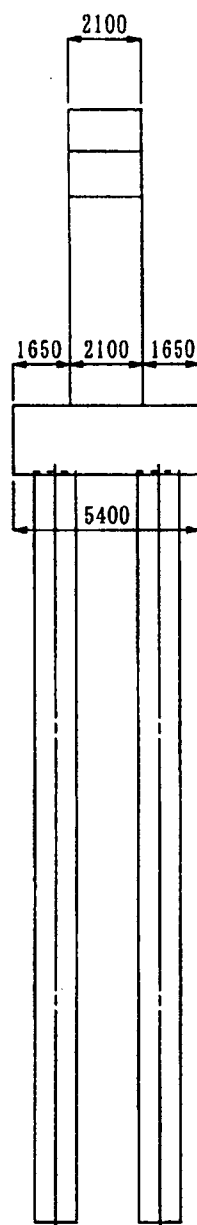
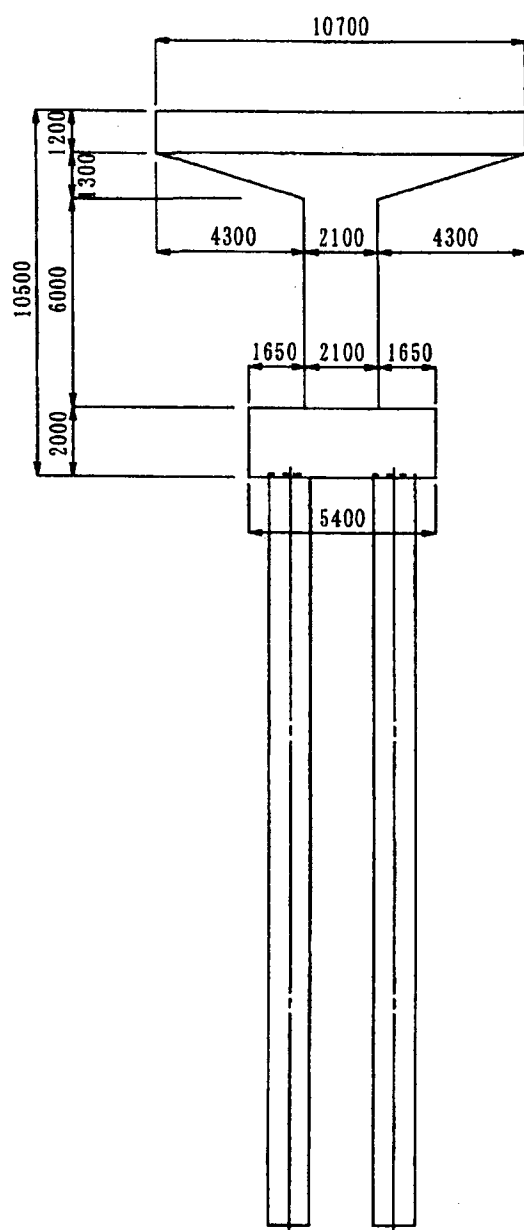


躯体主鉄筋：橋軸 D22
：直角 D22

	躯体	基礎
E Q 4	$\lambda = 20.768$	$\mu_R = 1.0$
E Q 3	$\lambda = 8.289$	$\mu_R = 1.0$
E Q 2	$\lambda = 0.897$	$\mu_R = 1.0$
E Q 1	弾性	弾性

単位：mm

1.10 設計ケース D10

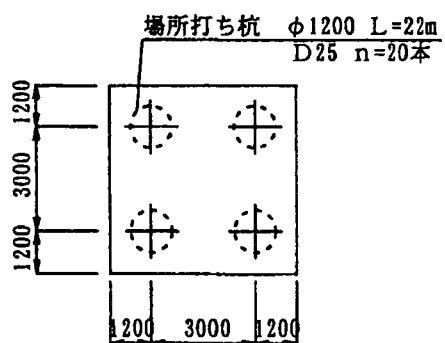
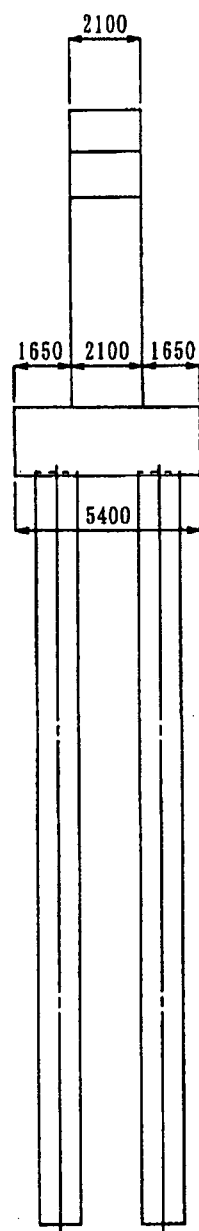
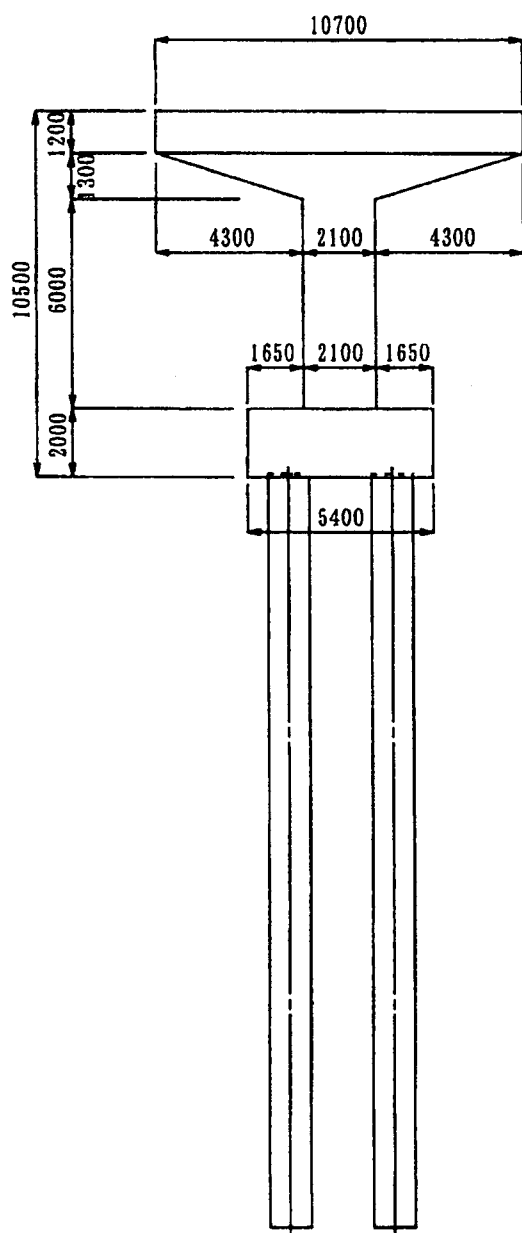


躯体主鉄筋：橋軸 D22 2段
：直角 D22

	躯体	基礎
E Q 4	$\lambda = 25.949$	$\mu_R = 1.0$
E Q 3	$\lambda = 10.374$	$\mu_R = 1.0$
E Q 2	$\lambda = 1.148$	$\mu_R = 1.0$
E Q 1	弾性	弾性

単位：mm

1.11 設計ケース D11



躯体主鉄筋：橋軸 D25
：直角 D25

	躯体	基礎
EQ 4	$\lambda=21.441$	$\mu_R=1.0$
EQ 3	$\lambda=8.561$	$\mu_R=1.0$
EQ 2	$\lambda=0.931$	$\mu_R=1.0$
EQ 1	弾性	弾性

単位：mm

2. 試算結果

case	設計水 平震度	等価 重量	保有水 平耐力	降伏 変位	終局 変位	応答塑 性率	残留 変位	δ_v/δ_y	塑性状態率	性能	
	k_{hc}	W	P_a	δ_y	δ_v	μ_R	δ_P		λ	表現	レベル
D1 1(EQ4)	0.25	1019.6	2989.8	0.010	0.134	1.00	0.00	13.95	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	1019.6	2989.8	0.010	0.134	1.00	0.00	13.95	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	1019.6	2989.8	0.010	0.134	1.00	0.00	13.95	0.000	完全に機能	(1)
	2.75	1019.6	2989.8	0.010	0.134	1.00	0.00	13.95	0.000	完全に機能	(1)
D2 2(EQ4)	0.25	910.79	1487.1	0.017	0.161	1.00	0.00	9.54	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	910.79	1487.1	0.017	0.161	1.00	0.00	9.54	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	910.79	1487.1	0.017	0.161	1.07	0.00	9.54	0.009	使用可能	(2)
	2.75	910.79	1487.1	0.017	0.161	1.92	0.02	9.54	0.107	使用可能	(2)
D3 3(EQ4)	0.25	833.67	985.05	0.023	0.195	1.00	0.00	8.42	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	833.67	985.05	0.023	0.195	1.00	0.00	8.42	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	833.67	985.05	0.023	0.195	1.60	0.01	8.42	0.080	使用可能	(2)
	2.75	833.67	985.05	0.023	0.195	3.21	0.05	8.42	0.297	使用可能	(3)
D4 4(EQ4)	0.25	790.13	715.92	0.028	0.196	1.00	0.00	7.05	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	790.13	715.92	0.028	0.196	1.00	0.00	7.05	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	790.13	715.92	0.028	0.196	2.37	0.04	7.05	0.226	使用可能	(2)
	2.75	790.13	715.92	0.028	0.196	5.11	0.11	7.05	0.679	使用可能	(4)
D5 5(EQ4)	0.25	772.28	624.66	0.030	0.175	1.00	0.00	5.90	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	772.28	624.66	0.030	0.175	1.00	0.00	5.90	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	772.28	624.66	0.030	0.175	2.84	0.05	5.90	0.375	使用可能	(3)
	2.75	772.28	624.66	0.030	0.175	6.28	0.16	5.90	1.077	使用可能	(5)
D6 3(EQ3)	0.25	785.52	588.17	0.028	0.220	1.00	0.00	7.75	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	785.52	588.17	0.028	0.220	1.00	0.00	7.75	0.000	完全に機能	(1)
	1.75	785.52	588.17	0.028	0.220	3.23	0.06	7.75	0.331	使用可能	(3)
	2.75	785.52	588.17	0.028	0.220	7.24	0.18	7.75	0.925	使用可能	(5)
D7 4(EQ3)	0.25	759.06	465.91	0.033	0.194	1.00	0.00	5.83	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	759.06	465.91	0.033	0.194	1.03	0.00	5.83	0.006	使用可能	(2)
	1.75	759.06	465.91	0.033	0.194	4.56	0.12	5.83	0.738	使用可能	(4)
	2.75	759.06	465.91	0.033	0.194	10.54	0.32	5.83	1.974	使用可能	(5)
D8 5(EQ3)	0.25	743.8	414.47	0.037	0.191	1.00	0.00	5.21	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	743.8	414.47	0.037	0.191	1.14	0.01	5.21	0.033	使用可能	(2)
	1.75	743.8	414.47	0.037	0.191	5.43	0.16	5.21	1.054	使用可能	(5)
	2.75	743.8	414.47	0.037	0.191	12.68	0.43	5.21	2.777	使用可能	(5)
D9 4(EQ2)	0.25	708.26	191.91	0.038	0.131	1.00	0.00	3.46	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	708.26	191.91	0.038	0.131	3.20	0.08	3.46	0.897	使用可能	(4)
	1.75	708.26	191.91	0.038	0.131	21.36	0.77	3.46	8.289	使用可能	(5)
	2.75	708.26	191.91	0.038	0.131	52.00	1.94	3.46	20.768	使用可能	(5)
D10 5(EQ2)	0.25	704.77	180.09	0.038	0.123	1.00	0.00	3.21	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	704.77	180.09	0.038	0.123	3.54	0.10	3.21	1.148	使用可能	(5)
	1.75	704.77	180.09	0.038	0.123	23.95	0.88	3.21	10.374	使用可能	(5)
	2.75	704.77	180.09	0.038	0.123	58.41	2.21	3.21	25.949	修後に使用可	(5)
D11 1(EQ1)	0.25	704.77	188.52	0.027	0.093	1.00	0.00	3.44	0.000	完全に機能	(1)
	0.63	704.77	188.52	0.027	0.093	3.27	0.06	3.44	0.931	使用可能	(5)
	1.75	704.77	188.52	0.027	0.093	21.90	0.56	3.44	8.561	使用可能	(5)
	2.75	704.77	188.52	0.027	0.093	53.35	1.41	3.44	21.441	使用可能	(5)

■ : 計算開始点

3. コインによる賭けの参加料 (効用の非線形性)

次のような賭けを持ちかけられたとする。すなわち、コインを1枚準備し、それを投げて裏ならば再度投げ、表が出た時点で賭けは終了。その際、1回目に表が出れば100円、1回目は裏で2回目に表が出れば200円、2回続けて裏が出て3回目に表が出れば400円というように、裏が続けて出る回数によって賞金が2倍ずつ増えていくという賭けだとする。この賭けに参加するのに妥当と考えられる参加料はいくらか。

直感的には、概ね100円～数百円の参加料が妥当だと考える人が多いと予想される。少なくとも100円の賞金は得られるので、考えられる最低の参加料は100円、上限は人によって異なるが、この賭けに5千円も1万円も払う人はそれほど多くないはずである。そこで、この賞金の期待額を計算してみる。

$$\frac{1}{2} \times 100 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 200 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 400 + \dots = 50 + 50 + 50 + \dots \quad (\text{A.3.1})$$

この賭けにおいて、コインを投げる回数を n 回までとすると、期待額から計算される参加料は $50n$ 円となる。たとえば回数を10回までに限った場合、期待額は500円、賞金の最大額は約10万円となるが、その確率は約千分の一であるから、賭け好きの人は期待額による参加料を喜んで払うかもしれない。しかしそれが100回、1000回となると、さすがにそれを払う人はほとんどいなくなるだろう。表が出るまで何回も投げつづけるならば参加料は無限に大きい額となってしまうが、これは直感的には受け入れ難い。このような問題は、St. Petersburgのパラドックスとして知られるものであるが、これは非常に小さい確率で発生する大規模な地震によって大きな被害が生じると予想されるとき、それを防ぐために投資する額の妥当性を論議することと似ている。

ここで、期待値計算において、金額ではなく a を底とする金額の対数をとる。 n 項までの和を計算すると、

$$\frac{1}{2} \log_a 100 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \log_a 200 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \log_a 400 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \log_a 2^{n-1} \times 100 = \left(1 - \frac{n-3}{2^n}\right) \log_a 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \log_a 10 \quad (\text{A.3.2})$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\log_a 2 + \log_a 10 = \log_a 20$ に収束する。賞金額の対数をとることによって、感覚的な問題とパラドックスの整合を図ることができることから、金銭の額に対してその増分が逓減する効用の存在が示唆される。

4. 制約条件つき最適化問題の解

解くべき式は以下のとおり。

$$\max_{P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}} EU - p_0 U(P_{10}, P_{20}) = p_1 U(P_{11}, P_{21}) + p_2 U(P_{12}, P_{22}) \quad (\text{A.4.1})$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } C_1(P_{11}, p_1) &= C_1(P_{12}, p_2) \\ C_2(P_{21}, p_1) &= C_2(P_{22}, p_2) \\ C_1(P_{11}, p_1) + C_2(P_{21}, p_1) &= c^* \end{aligned} \quad (\text{A.4.1.b, c, d})$$

これを Lagrange の未定乗数法で解くため、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を導入する。

$$\begin{aligned} \phi &= p_1 U(P_{11}, P_{21}) + p_2 U(P_{12}, P_{22}) \\ &+ \lambda_1 [C_1(P_{11}, p_1) - C_1(P_{12}, p_2)] + \lambda_2 [C_2(P_{21}, p_1) - C_2(P_{22}, p_2)] + \lambda_3 [C_1(P_{11}, p_1) + C_2(P_{21}, p_1) - c^*] \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

とにおいて、 ϕ を $P_{se}, \lambda_i (s, e = 1, 2; i = 1 \sim 4)$ で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial P_{11}} &= p_1 \frac{\partial U(P_{11}, P_{21})}{\partial P_{11}} + \lambda_1 \frac{\partial C_1(P_{11}, p_1)}{\partial P_{11}} + \lambda_3 \frac{\partial C_1(P_{11}, p_1)}{\partial P_{11}} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial P_{12}} &= p_2 \frac{\partial U(P_{12}, P_{22})}{\partial P_{12}} - \lambda_1 \frac{\partial C_1(P_{12}, p_2)}{\partial P_{12}} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial P_{21}} &= p_1 \frac{\partial U(P_{11}, P_{21})}{\partial P_{21}} + \lambda_2 \frac{\partial C_2(P_{21}, p_1)}{\partial P_{21}} + \lambda_3 \frac{\partial C_2(P_{21}, p_1)}{\partial P_{21}} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial P_{22}} &= p_2 \frac{\partial U(P_{12}, P_{22})}{\partial P_{22}} - \lambda_2 \frac{\partial C_2(P_{22}, p_2)}{\partial P_{22}} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} &= C_1(P_{11}, p_1) - C_1(P_{12}, p_2) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} &= C_2(P_{21}, p_1) - C_2(P_{22}, p_2) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_3} &= C_1(P_{11}, p_1) + C_2(P_{21}, p_1) - c^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4.3.a~g})$$

ここで、 U, C_1, C_2 の関数形を以下の様に特定する。

$$U(P_{1e}, P_{2e}) = P_{1e}^{\alpha_1} P_{2e}^{\alpha_2}, \quad C_1(P_{1e}, p_e) = P_{1e}^{\eta_1} p_e^{\xi_1}, \quad C_2(P_{2e}, p_e) = P_{2e}^{\eta_2} p_e^{\xi_2} \quad (\text{A.4.4})$$

式 A.4.4 を式 A.4.3 に適用し、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 p_1 \alpha_1 P_{11}^{\alpha_1-1} P_{21}^{\alpha_2} + \lambda_1 \eta_1 P_{11}^{\eta_1-1} p_1^{\xi_1} + \lambda_3 \eta_1 P_{11}^{\eta_1-1} p_1^{\xi_1} &= 0 \\
 p_2 \alpha_1 P_{12}^{\alpha_1-1} P_{22}^{\alpha_2} - \lambda_1 \eta_1 P_{12}^{\eta_1-1} p_2^{\xi_1} &= 0 \\
 p_1 \alpha_2 P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2-1} + \lambda_2 \eta_2 P_{21}^{\eta_2-1} p_1^{\xi_2} + \lambda_3 \eta_2 P_{21}^{\eta_2-1} p_1^{\xi_2} &= 0 \\
 p_2 \alpha_2 P_{12}^{\alpha_1} P_{22}^{\alpha_2-1} - \lambda_2 \eta_2 P_{22}^{\eta_2-1} p_2^{\xi_2} &= 0 \\
 P_{11}^{\eta_1} p_1^{\xi_1} - P_{12}^{\eta_1} p_2^{\xi_1} &= 0 \\
 P_{21}^{\eta_2} p_1^{\xi_2} - P_{22}^{\eta_2} p_2^{\xi_2} &= 0 \\
 P_{11}^{\eta_1} p_1^{\xi_1} + P_{21}^{\eta_2} p_1^{\xi_2} - c^* &= 0
 \end{aligned} \tag{A.4.5.a~g}$$

式 A.4.5.b, d より

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \eta_1 &= \alpha_1 P_{12}^{\alpha_1-\eta_1} P_{22}^{\alpha_2} p_2^{1-\xi_1} \\
 \lambda_2 \eta_2 &= \alpha_2 P_{12}^{\alpha_1} P_{22}^{\alpha_2-\eta_2} p_2^{1-\xi_2}
 \end{aligned} \tag{A.4.5.b', d'}$$

これらを式 A.4.5.a, c に代入して

$$\begin{aligned}
 p_1 \alpha_1 P_{11}^{\alpha_1-1} P_{21}^{\alpha_2} + \alpha_1 P_{11}^{\eta_1-1} P_{12}^{\alpha_1-\eta_1} P_{22}^{\alpha_2} p_1^{\xi_1} p_2^{1-\xi_1} + \lambda_3 \eta_1 P_{11}^{\eta_1-1} p_1^{\xi_1} &= 0 \\
 p_1 \alpha_2 P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2-1} + \alpha_2 P_{12}^{\alpha_1} P_{21}^{\eta_2-1} P_{22}^{\alpha_2-\eta_2} p_1^{\xi_2} p_2^{1-\xi_2} + \lambda_3 \eta_2 P_{21}^{\eta_2-1} p_1^{\xi_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.4.5.a', c'}$$

これらより λ_3 を消去する。

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{11}^{\alpha_1-\eta_1} P_{21}^{\alpha_2} p_1^{1-\xi_1} + \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{12}^{\alpha_1-\eta_1} P_{22}^{\alpha_2} p_2^{1-\xi_1} + \lambda_3 = 0 \\ \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2-\eta_2} p_1^{1-\xi_2} + \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{12}^{\alpha_1} P_{22}^{\alpha_2-\eta_2} p_2^{1-\xi_2} + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 \Rightarrow &\frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{11}^{\alpha_1-\eta_1} P_{21}^{\alpha_2} p_1^{1-\xi_1} + \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{12}^{\alpha_1-\eta_1} P_{22}^{\alpha_2} p_2^{1-\xi_1} = \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2-\eta_2} p_1^{1-\xi_2} + \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{12}^{\alpha_1} P_{22}^{\alpha_2-\eta_2} p_2^{1-\xi_2}
 \end{aligned} \tag{A.4.6}$$

一方、式 A.4.5.e, f より、

$$P_{12} = P_{11} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\xi_1/\eta_1}, \quad P_{22} = P_{21} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\xi_2/\eta_2} \tag{A.4.7.a, b}$$

これらを式 A.4.6 に代入すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{11}^{\alpha_1 - \eta_1} P_{21}^{\alpha_2} P_1^{1 - \xi_1} + \frac{\alpha_1}{\eta_1} \left[P_{11} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\xi_1 / \eta_1} \right]^{\alpha_1 - \eta_1} \left[P_{21} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\xi_2 / \eta_2} \right]^{\alpha_2} P_2^{1 - \xi_1} \\
 & = \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2 - \eta_2} P_1^{1 - \xi_2} + \frac{\alpha_2}{\eta_2} \left[P_{11} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\xi_1 / \eta_1} \right]^{\alpha_1} \left[P_{21} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\xi_2 / \eta_2} \right]^{\alpha_2 - \eta_2} P_2^{1 - \xi_2}
 \end{aligned} \tag{A.4.8}$$

変形して

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{11}^{\alpha_1 - \eta_1} P_{21}^{\alpha_2} \left[P_1^{1 - \xi_1} + \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\xi_1 (\alpha_1 - \eta_1)}{\eta_1}} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\xi_2 \alpha_2}{\eta_2}} P_2^{1 - \xi_1} \right] = \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2 - \eta_2} \left[P_1^{1 - \xi_2} + \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\xi_1 \alpha_1}{\eta_1}} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\xi_2 (\alpha_2 - \eta_2)}{\eta_2}} P_2^{1 - \xi_2} \right] \\
 & \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{11}^{\alpha_1 - \eta_1} P_{21}^{\alpha_2} P_1^{1 - \xi_1} \left(1 + P_1^{-1 + \frac{\alpha_1}{\eta_1} \xi_1 + \frac{\alpha_2}{\eta_2} \xi_2} P_2^{1 - \frac{\alpha_1}{\eta_1} \xi_1 - \frac{\alpha_2}{\eta_2} \xi_2} \right) = \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\alpha_1} P_{21}^{\alpha_2 - \eta_2} P_1^{1 - \xi_2} \left(1 + P_1^{-1 + \frac{\alpha_1}{\eta_1} \xi_1 + \frac{\alpha_2}{\eta_2} \xi_2} P_2^{1 - \frac{\alpha_1}{\eta_1} \xi_1 - \frac{\alpha_2}{\eta_2} \xi_2} \right) \tag{A.4.9} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\eta_1} P_{21}^{\eta_2} P_1^{1 - \xi_1} = \frac{\alpha_2}{\eta_2} P_{11}^{\eta_1} P_1^{1 - \xi_2} \\
 & \therefore P_{21}^{\eta_2} = \frac{\alpha_2 \eta_1}{\eta_2 \alpha_1} P_1^{\xi_1 - \xi_2} P_{11}^{\eta_1}
 \end{aligned}$$

これを式 A.4.5.g に代入して

$$\begin{aligned}
 & P_{11}^{\eta_1} P_1^{\xi_1} + \frac{\alpha_2 \eta_1}{\eta_2 \alpha_1} P_1^{\xi_1 - \xi_2} P_{11}^{\eta_1} P_1^{\xi_2} = c^* \\
 & \Leftrightarrow P_{11}^{\eta_1} P_1^{\xi_1} \left(1 + \frac{\alpha_2 \eta_1}{\eta_2 \alpha_1} \right) = c^* \\
 & \Leftrightarrow P_{11}^{\eta_1} = \frac{\alpha_1 / \eta_1}{\alpha_1 / \eta_1 + \alpha_2 / \eta_2} P_1^{-\xi_1} c^*
 \end{aligned} \tag{A.4.10}$$

これより次式の解を得る。

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \left(\frac{\alpha_1 / \eta_1}{\alpha_1 / \eta_1 + \alpha_2 / \eta_2} P_1^{-\xi_1} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_1}}, P_{12} = \left(\frac{\alpha_1 / \eta_1}{\alpha_1 / \eta_1 + \alpha_2 / \eta_2} P_2^{-\xi_1} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_1}} \\
 P_{21} &= \left(\frac{\alpha_2 / \eta_2}{\alpha_1 / \eta_1 + \alpha_2 / \eta_2} P_1^{-\xi_2} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_2}}, P_{22} = \left(\frac{\alpha_2 / \eta_2}{\alpha_1 / \eta_1 + \alpha_2 / \eta_2} P_2^{-\xi_2} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_2}}
 \end{aligned} \tag{A.4.11.a, b}$$

あるいはこれを一般化して、次式のように表現できる。

$$P_{se} = \left(\frac{\alpha_s / \eta_s}{\sum_s \alpha_s / \eta_s} p_e^{-\xi_s} c^* \right)^{\frac{1}{\eta_s}} \quad (s, e = 1, 2) \quad (\text{A.4.12})$$