

ISSN 0386—5878

土木研究所資料第3872号

土木研究所資料

鋼製橋脚の終局変位の解析方法に関する研究

(その3) 非弾性有限変位解析による終局状態の評価

平成14年7月

独立行政法人土木研究所
耐震研究グループ (耐震)

Copyright © (2002) by P.W.R.I.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the Chief Executive of P.W.R.I.

この報告書は、独立行政法人土木研究所理事長の承認を得て刊行したものである。したがって、本報告書の全部又は一部の転載、複製は、独立行政法人土木研究所理事長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。

鋼製橋脚の終局変位の解析方法に関する研究

(その3) 非弾性有限変位解析による終局状態の評価

耐震研究グループ

上席研究員 運上 茂樹

主任研究員 河藤 千尋

要 旨

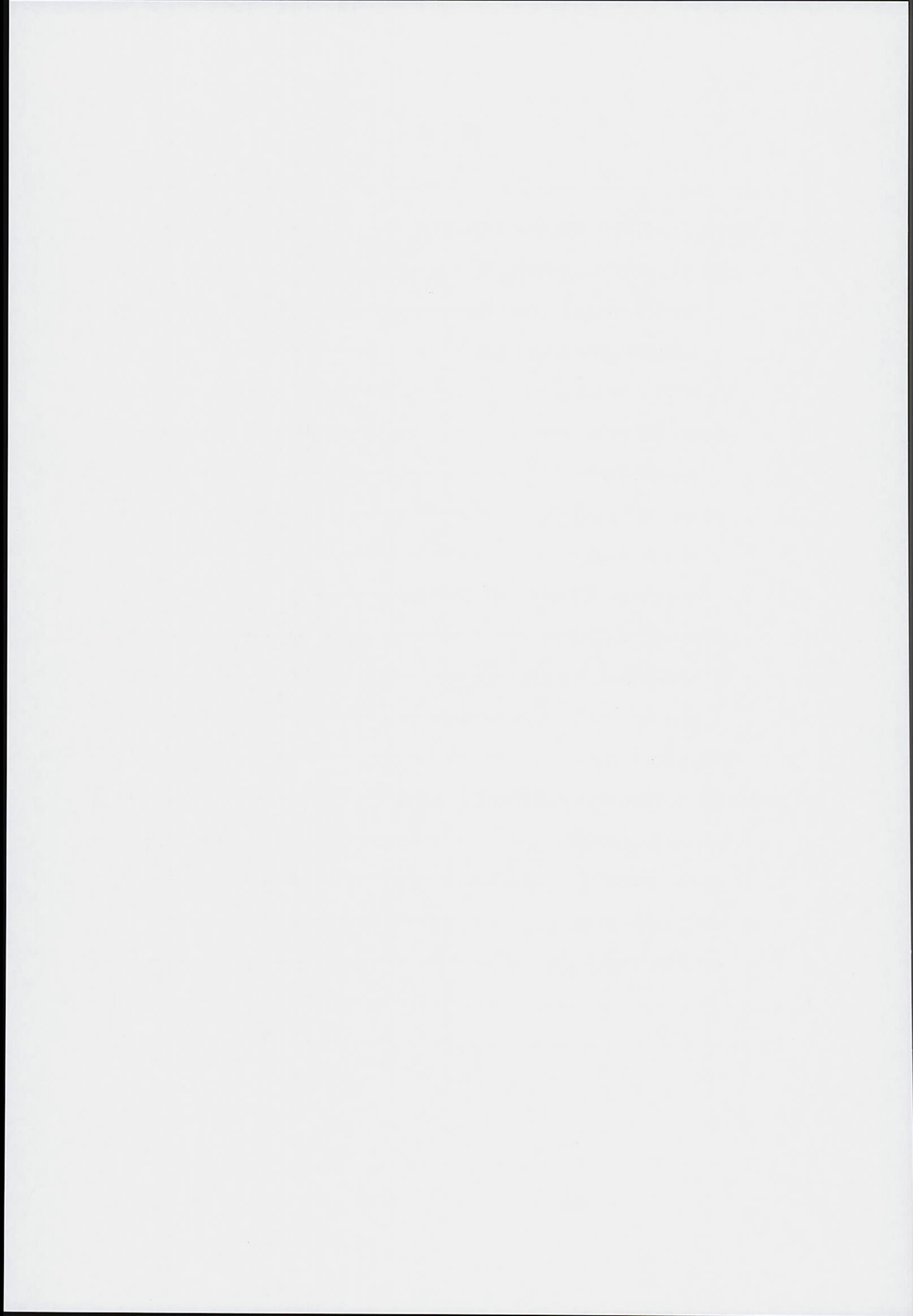
本資料は円形の鋼製橋脚の非線形域における耐震設計上の終局状態について、非線形域におけるひずみ値を用いた簡易かつ精度よい評価法の検討を目的に、シェル要素を用いた非弾性有限変形解析法を用いて円形鋼製橋脚の座屈損傷領域のひずみ分布性状及び終局ひずみの設定法について解析した結果をまとめたものである。さらに、解析から得られた結果を用いて、円形鋼製橋脚模型の実験データとの比較により円形鋼製橋脚の耐震設計上の終局状態について、その終局状態の評価法への適用性の検討を行ったものである。

また矩形の鋼製橋脚については既存の検討で、同様の手法により終局ひずみを設定し、鋼製模型橋脚実験結果と比較しているが、その補足検討結果も併せて報告するものである。

キーワード：円形鋼製橋脚、終局状態、非弾性有限変位解析、終局ひずみ

目 次

1. まえがき	1
2. 円形断面を有する鋼製橋脚の終局変位の推定法の検討	2
2. 1 耐震設計上の終局状態とその評価指標	2
2. 1. 1 鋼製橋脚の耐震設計上の終局状態	2
2. 1. 2 鋼製橋脚の終局状態の評価指標	2
2. 1. 3 終局ひずみの設定法	2
2. 3 解析方法と解析モデル	4
2. 3. 1 解析対象橋脚	4
2. 3. 2 解析方法と解析モデル	6
2. 3. 3 解析モデルの検討	7
2. 3. 4 解析モデルより得られる平均ひずみの評価	12
2. 4 非弾性有限変位解析結果	21
2. 4. 1 初期降伏耐力と降伏変位	21
2. 4. 2 座屈パラメータと平均ひずみの関係	36
2. 5 模型実験橋脚との比較	42
3. 矩形断面を有する鋼製橋脚の終局変位の推定法の追加検討	47
3. 1 既検討結果と追加解析	47
3. 2 追加解析条件の設定	48
3. 3 非弾性有限変位解析結果	49
3. 4 修正提案式の実験供試体への適用	50
4. まとめ	54
参考文献	55



1. まえがき

平成7年兵庫県南部地震以降、鋼製橋脚の耐震性について調べるため、各方面で模型供試体を用いた実験的研究や解析的研究が行われ、鋼製橋脚の非線形域における動的耐力や変形性能に関する知見が蓄積されてきている。このような成果を踏まえ、非線形域の挙動特性を考慮した鋼製橋脚の耐震設計法の開発が進められてきている。

鋼製橋脚の非線形域の挙動を考慮して耐震設計を行う場合には、耐震設計上許容し得る終局状態を適切に与えるとともに、こうした終局状態の評価法が重要となる。これまで、鋼製橋脚のじん性に影響を及ぼすパラメータとの関係が実験的に検討され、座屈パラメータやひずみ値等との関係を定式化した評価方法が提案されている^{1)～5)}。

本資料では、円形の鋼製橋脚の非線形域における耐震設計上の終局状態について、非線形域におけるひずみ値を用いた簡易かつ精度よい評価法の検討を目的に、シェル要素を用いた非弾性有限変形解析法を用いて鋼製橋脚の座屈損傷領域のひずみ分布性状及び耐震設計上の終局状態を評価するため終局ひずみの設定法について解析した結果をまとめたものである。さらに、解析から得られた結果を用いて、鋼製橋脚模型の実験データとの比較により鋼製橋脚の耐震設計上の終局状態について、その終局状態の評価法への適用性の検討を行ったものである。

また、矩形の鋼製橋脚については本資料と同様の手法によって終局ひずみを設定し、鋼製模型橋脚実験結果と比較しているが⁶⁾、その補足検討も併せて行ったのでここに報告するものである。

2. 円形断面を有する鋼製橋脚の終局変位の推定法の検討

2. 1 耐震設計上の終局状態とその評価指標

2. 1. 1 鋼製円形橋脚の耐震設計上の終局状態

本研究では、鋼製円形橋脚の耐震設計上の終局点としては、水平耐力が最大に達した時と定義した。一般に、鋼製橋脚が正負交番の繰返し荷重を受けた場合には、最大水平耐力点を過ぎると局部座屈の影響が顕著となり、繰返し荷重を受けることによる水平耐力の低下が大きくなる傾向を有するため、最大水平耐力点以降の変形性能を期待しにくい。一方、最大水平耐力点までは、一般に繰返しによる耐力の低下の影響が小さく、安定して水平耐力を保持できる特性を有している。本検討での最大荷重点を終局と定義するのはあくまで1つの終局状態の定義であり、他の定義に置き換えることも可能である。

2. 1. 2 鋼製円形橋脚の終局状態の評価指標

本研究では、鋼製円形橋脚の終局状態を評価する指標として座屈損傷領域におけるひずみ値を用いることとした。鋼製円形橋脚の非線形域の力学特性を求めるためには、座屈現象を適切に考慮できる解析方法を用いる必要があるが、一般にこうした解析を通常の設計に用いるのは煩雑である。このため、ここでは、はり要素を用いた鋼製円形橋脚モデルのプッシュオーバー解析に基づいて鋼製橋脚の耐力や変形性能を求める方法を基本的な解析方法とした。ただし、はり要素を用いた解析では座屈現象の影響を考慮することができないため、はり要素から算出されるひずみの値が、座屈現象の影響を適切に評価した場合と等価になるように与えることにより終局状態となるようにした。

2. 1. 3 終局ひずみの設定法

終局状態を与えるひずみ（以下、終局ひずみと呼ぶ）としては、水平耐力が最大に達した時の圧縮側のひずみ分布に着目し、塑性化や座屈損傷が生じる領域の平均的なひずみ（以下、平均ひずみと呼ぶ）を算出し、これを鋼製円形橋脚の終局状態を評価する指標と定義した。

終局状態を与える平均的なひずみの与え方としては、いくつかの方法が考えられるが、ここでは、次の方法で終局平均ひずみの設定を試みた。

図-2.1は、鋼製円形橋脚断面の1/4部分における基部付近の要素分割を示したものである。ここに、円周方向の $i=1,2,\dots,n_i$ は、荷重方向の z 軸から y 軸方向への1/4円周に沿った要素の分割であり、縦軸（ $j=1,2,\dots,n_j$ ）が基部から橋脚天端へとなっている。シェル要素中心の軸ひずみを ε_{ij} で表示する。圧縮側1/4の円周方向への要素分割数と橋脚の高さ方向への要素分割数をそれぞれ n_i と n_j とする。

図-2.1に示すように、円形断面に荷重方向の z 軸から y 軸へ角度 α の領域（ $i=1,2,\dots,n_\alpha$ ）と要素分割による橋脚の高さ $l=l_j$ の範囲に存在する全シェル要素中心の軸ひずみ ε_{ik} （ $i=1,2,\dots,n_\alpha$; $k=1,2,\dots,j$ ）の平均値を求め、その値を平均ひずみ ε_a とする。 ε_a は次式によって計算できる。

$$(\varepsilon_a)_{\alpha j} = \left\{ \sum_{k=1}^j \left(\sum_{i=1}^{n_a} \varepsilon_{ij} \right) / n_a \right\} / j \quad \alpha = 0 \sim 90^\circ; \quad j = 1, 2, \dots, n_j \quad \text{式 (2-1)}$$

上式において、 $\alpha = 0^\circ$ は円形断面に生じる圧縮側の軸ひずみが最も大きい箇所となり、 α の増加にともなう軸ひずみは小さくなる。したがって、式 (2-1) で定義した平均ひずみも、 α が大きいほど、平均ひずみが小さくなる。

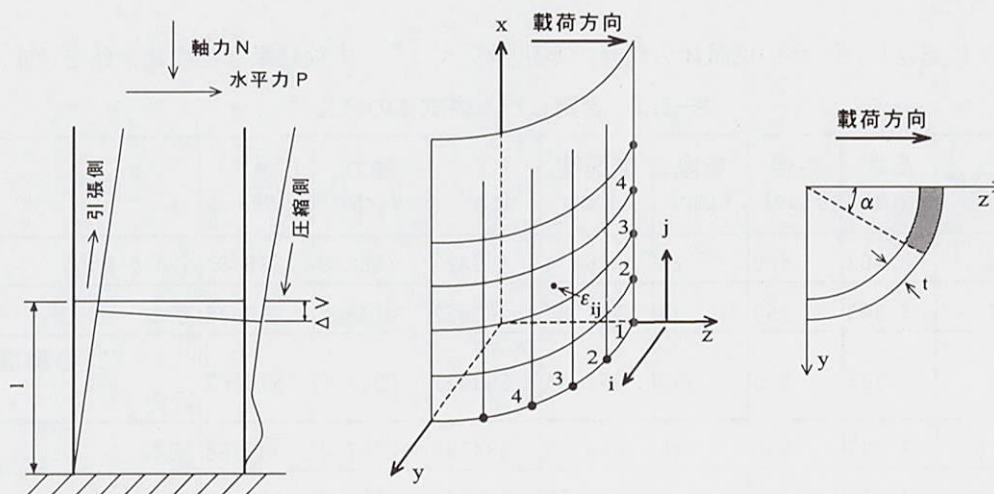


図-2.1 圧縮側の要素分割

2. 3 解析方法と解析モデル

2. 3. 1 解析対象橋脚

解析対象とする橋脚は試設計により設定した。解析手法の妥当性を実験供試体により検証するため、解析対象供試体は実験供試体と同じ大きさで試設計することにした。解析対象供試体の試設計にあたり、文献1)に示される実験供試体の中から縦リブ付き断面、コンクリート充填および二重鋼管の供試体を除いた標準的な円形断面を有する8体の供試体を選定した。そして極力8体の供試体の径厚比、軸力比をカバーするように試設計を行った。

表-2.1、2.2 に選定した8体の供試体の諸元、座屈パラメータ、実験結果などの諸条件を示す。

表-2.1 選定した8供試体の諸元¹⁾

供試体	高さ h(m)	外径 D(mm)	板厚 t(mm)	断面積 A(cm ²)	I (cm ⁴)	軸力 N(kN)	σ_y (MPa)	備考
KC1	3.303	600	20	364.4	153423	888.9	275.97	コハ°外断面
KC2	3.303	850	13	341.84	299422	2146.2	430.42	基本
KC3	3.303	850	13	341.84	299422	2312.8	610.93	KC1、KC2の鋼種 変更
No.6	3.403	900	16	444.35	434189	2087.4	343.98	基本
No.8	3.403	900	9	251.92	250023	888.9	290.08	基本
No.29	3.424	900	9	251.92	250023	1548.4	308.70	No.8軸力増
T7	5.0	900	16	444.35	434189	1813.0	347.90	No.6の細長比大
M24	3.424	875	7	190.9	179782	673.2	306.54	基本

表-2.2 選定した8供試体の座屈パラメータと実験結果¹⁾

供試体	軸力比 N/N _y	径厚比パラ メータR _t	細長比パラメ ータλ	Pu (kN)	δ_m (mm)	Pu/Py	δ_m/δ_y	hy (m)
KC1	0.088	0.032	0.374	657.6	102.0	1.81	5.86	1.346
KC2	0.146	0.111	0.324	980.0	43.9	1.25	2.80	0.660
KC3	0.111	0.158	0.388	1450.4	52.1	1.25	2.16	0.664
No.6	0.137	0.076	0.284	1538.6	51.0	1.83	3.60	1.540
No.8	0.122	0.115	0.258	594.9	26.0	1.43	2.50	1.023
No.29	0.199	0.123	0.268	526.3	24.0	1.31	2.80	0.814
T7	0.117	0.077	0.419	96.0	107.0	1.59	3.88	1.850
M24	0.115	0.153	0.270	42.0	25.0	1.83	2.12	0.716

表中の円形断面の径厚比パラメータ R_t と細長比パラメータ λ は次式で与えられる。

$$R_t = \left(\frac{R-t/2}{t} \right) \cdot \frac{\sigma_y}{E} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad \text{式(2-2)}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \cdot \frac{2h}{\sqrt{\frac{L}{A}}} \quad \text{式(2-3)}$$

$$h_y = h - (P_y/P_u) \cdot h \quad \text{式(2-4)}$$

ここに、 $R = D/2$; D : 断面の外径、 t : 断面の板厚、 σ_y : 降伏応力 (実験値)、 ν : ポアソン比

E : ヤング率

また、 P_u : 実験より得られた最大水平荷重

h : 橋脚高さ

M_y : 降伏モーメント

P_y : 降伏水平荷重

M_u : 終局モーメント

h_y : 図-2.2 に示す最大荷重時に橋脚が

降伏以上の応力とひずみが生じる領域

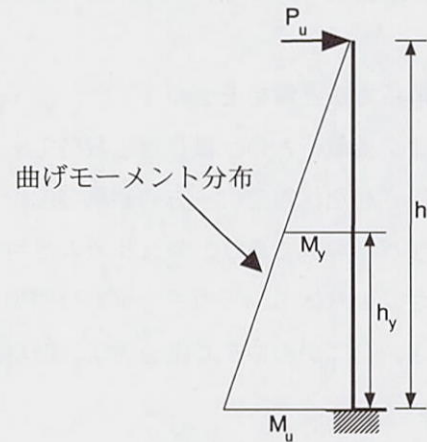


図-2.2 最大水平荷重時に橋脚の降伏した領域

試設計し、設定した断面は $R_t = (0.06, 0.08, 0.10, 0.12)$ の 4 断面であり、これに軸力比 N/N_y (10%, 15%) の 2 ケースを組み合わせ、解析ケース数は 8 ケースとした。図-2.3 は解析対象橋脚と実験供試体の幅厚比パラメータと軸力比の分布を示したものである。表-2.3 に解析対象橋脚の諸元を示す。

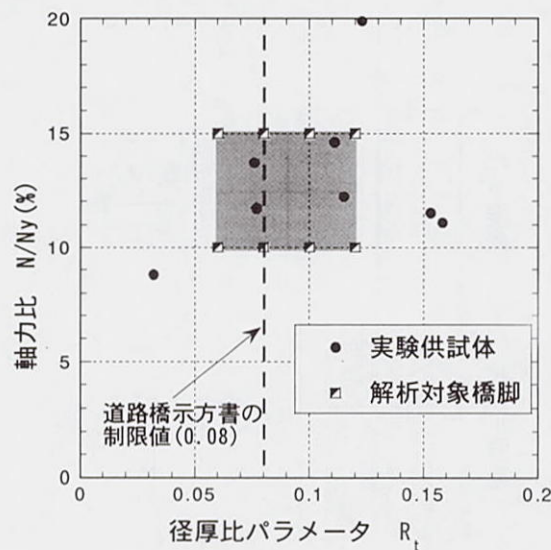


図-2.3 解析対象ケースの幅厚比パラメータと軸力比の関係

表-2.3 解析対象橋脚の諸元と座屈パラメータ

解析対象 橋脚	高さ h (m)	外径 D (mm)	板厚 t (mm)	断面積 A (cm ²)	I (cm ⁴)	径厚比 パラメータ R _t	細長比 パラメータ λ
①	3.4	900	20.75	573.2	554188	0.060	0.288
②	3.4	900	15.65	434.8	425190	0.080	0.287
③	3.4	900	12.57	350.4	345052	0.100	0.286
④	3.4	900	10.5	293.4	290234	0.120	0.285

鋼材の材質はSM490Yとし、公称応力度 $\sigma_y=352.8\text{N/mm}^2$ とした。

2. 3. 2 解析方法と解析モデル

実験では正負交番载荷という繰り返し载荷であるが、設計への適用を考慮して非弾性有限要素解析では一定の軸力を作用させた状態での一方向载荷の解析とした。解析は材料非線形性と幾何学的非線形性を考慮したプッシュオーバー解析であり、シェル要素を用いて局部座屈を考慮できる解析とした。

解析に先立ち、供試体の水平力-水平変位関係、損傷モードを精度よく求めることを目的に、損傷が生じることが予想される区間のモデル化の方法、鋼材に与える応力-ひずみ関係のモデル化の方法などを検討した。

表-2.2と図-2.1に示した実験結果によると、水平力が最大荷重 P_u に達する時に、橋脚に生じる応力度が降伏応力度に達した領域は、橋脚基部から約1.85mの範囲であることがわかる。ここでは、供試体が塑性化すると予想される領域をシェル要素でモデル化するため、橋脚基部1.85mからやや高い1.9mまでとした。特に、局部座屈は橋脚基部付近に生じると予想されたので、局部座屈を精度良く再現するため、シェル要素でモデル化する範囲1.9mのうち、橋脚基部付近の900mmの範囲はメッシュを細かくした。

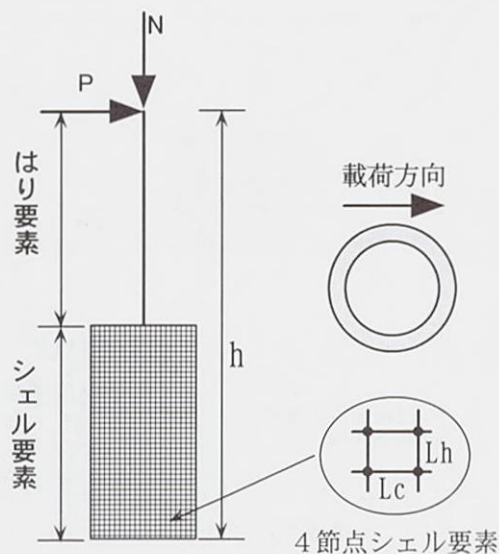


図-2.4 供試体のモデル化

局部座屈が生じない上の部分は Timoshenko のはり理論に基づくはり要素でモデル化し、せん断変形が考慮できるモデルとした。はり要素とシェル要素の境界では変形を適合させるために、その断面に位置するシェル要素の節点位置を平面保持の仮定とはり要素の節点変位によって拘束した。

また、初期不整や残留応力の影響については無視した。

2. 3. 3 解析モデルの検討

(1) シェル要素の分割数の違いが解析結果に及ぼす影響

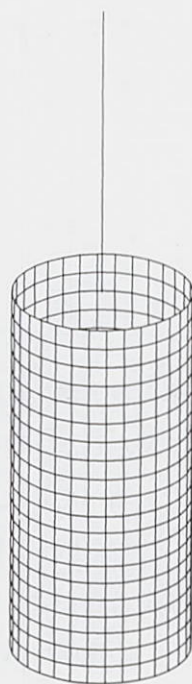
使用する解析モデルの検討にあたり、標準的な供試体を選定し、解析と実験の比較を行う必要がある。そこで、選定した 8 供試体のなかから、No6 供試体を標準供試体として選定した。理由は、1) 道路橋示方書 V 耐震設計編では、コンクリートを充填しない鋼製橋脚にぜい性的な破壊が生じないように鋼管の径厚比の制限した構造を提案しており、 $R_t \leq 0.08$ とするよう推奨している。8 供試体のうち、0.08 以下となるのは No6 と T7 のみである。2) T7 供試体は、供試体 No6 の高さを高くすることにより細長比を変えたものであり、他の供試体はすべて約 3.3m から 3.4m の範囲である。このことから、径厚比パラメータ R_t が 0.08 よりも小さく、高さ h も他の供試体とほとんど変わらないために径厚比の違いが円形鋼製橋脚の耐力特性に与える影響を比較しやすいと考えられるからである。

選定した標準供試体 No6 を用いて、シェル要素でモデル化する際の分割の仕方が解析結果にどう影響するか調べた。表-2.4 は、橋脚基部 900mm までの領域における要素分割のケースを示したものである。ここに、NC と NH はそれぞれ円形断面の円周方向と橋脚高さ方向の分割数である。また、 L_c と L_h は図-2.4 に示す 4 節点シェル要素における円周方向の幅と橋脚高さ方向の高さである。図-2.5 に要素分割の図を示す。

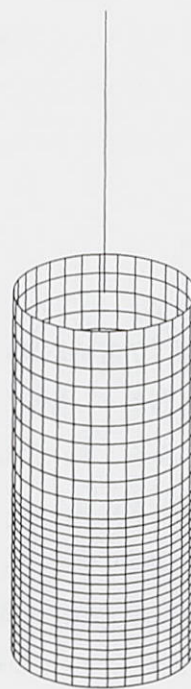
解析に用いた応力-ひずみ関係は、1%のひずみ硬化を有するバイリニア型である。

表-2.4 鋼製円形橋脚の実験供試体 No. 6 における要素分割

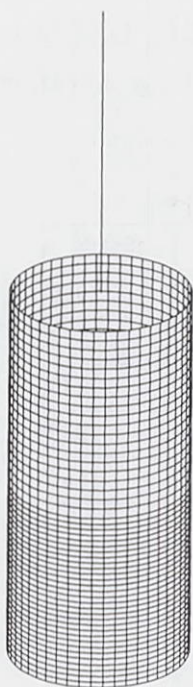
ケース	NC	L_c (mm)	NH	L_h (mm)	節点数	要素数
No6-1	32	86.8	10	90	352	320
No6-2	32	86.8	18	50	608	576
No6-3	48	57.9	30	30	1488	1440
No6-4	68	40.8	30	30	2108	2040
No6-5	68	40.8	45	20	3128	3060



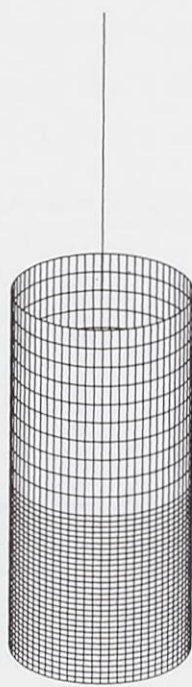
(a) 要素分割のケース 1



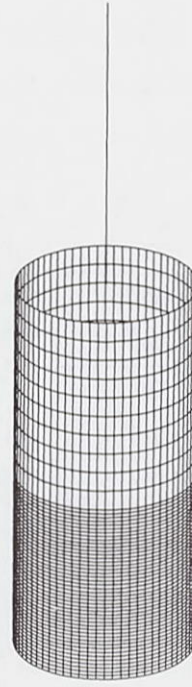
(b) 要素分割のケース 2



(c) 要素分割のケース 3



(d) 要素分割のケース 4



(e) 要素分割のケース 5

図-2.5 標準供試体No.6 の要素分割の比較

表-2.5 に解析より得られた最大荷重と変位および実験値との比較を示す。また、図-2.6 に水平荷重と水平変位の関係を示す。図には、橋脚をすべてはりモデルでモデル化したファイバーモデルの解析結果も示した。

表-2.5 解析より得られた最大荷重と変位

解析 ケース	解析結果		解析／実験	
	最大荷重 (kN)	変位 (mm)	荷重比	変位比
No6-1	1330.65	88.21	0.865	1.730
No6-2	1299.45	54.64	0.845	1.071
No6-3	1292.82	47.41	0.840	0.930
No6-4	1293.00	46.76	0.840	0.917
No6-5	1290.60	45.02	0.839	0.883

実験値： $P_u=1538.6\text{kN}$ ； $\delta_m=51\text{mm}$

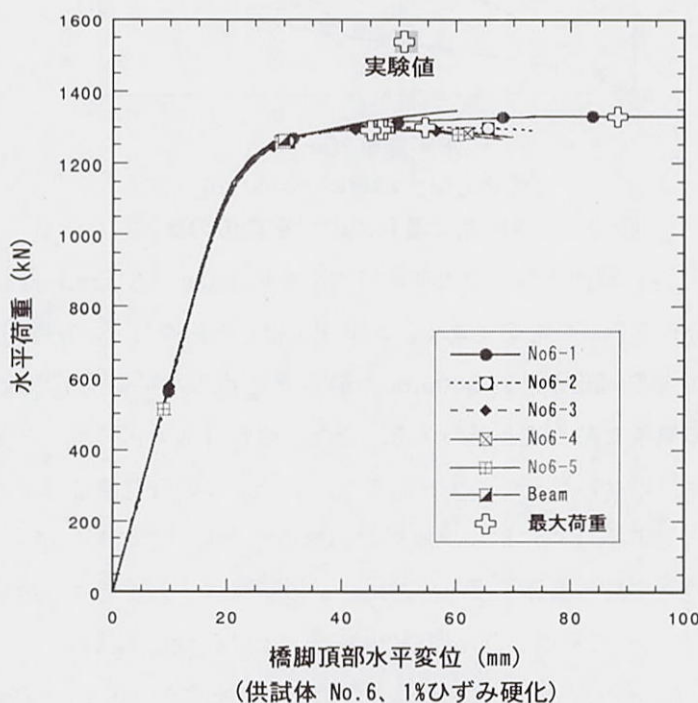


図-2.6 標準供試体No.6 のメッシュ分割の差による FEM 解析結果の比較

表-2.5、図-2.6 より以下のことがわかる。

- 1) 最大荷重はメッシュの分割数が増えるに従い一定値に収束していくようであり、解析ケースNo.6-3 でほぼ一定の 1293kN を示す。
- 2) 実験結果との比較では最大荷重に関しては全ケースで解析値は実験値よりも約 16% 小さい。これは供試体No.6 の変形性能が大きいこと、ひずみ硬化の影響が単調荷重よりも大きく現れたものと考えられる。
- 3) 変位に関しては変位が 40mm までならばすべてのケースでほぼ一致している。
- 4) 要素分割の違いは、最大荷重よりも最大変位の差の方が大きい。最も粗い分割であるケース 1 は、局部

座屈が発生しにくくなるため、最大荷重時の水平変位が実験値よりも遙かに大きく得られている。

- 5) 円周方向に要素分割を変化させたケース 3 とケース 4 では、結果にほとんど差がないことから、円周方向への要素分割が解析結果に与える影響は小さい。

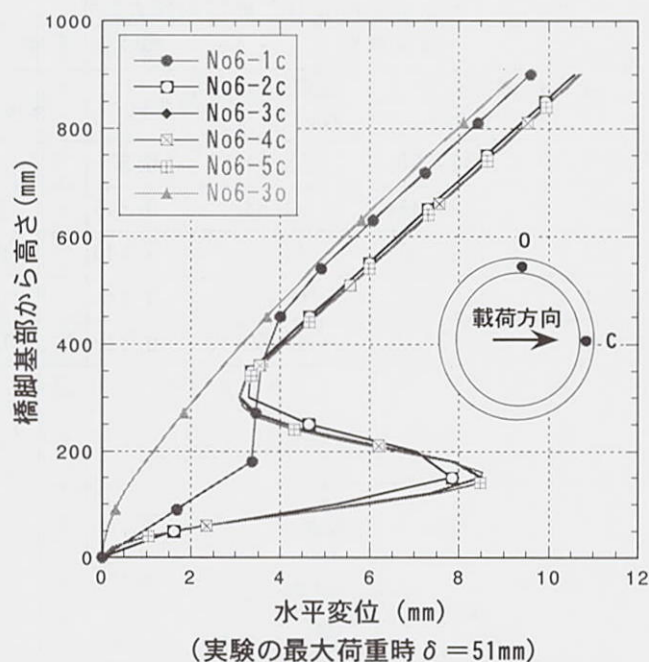


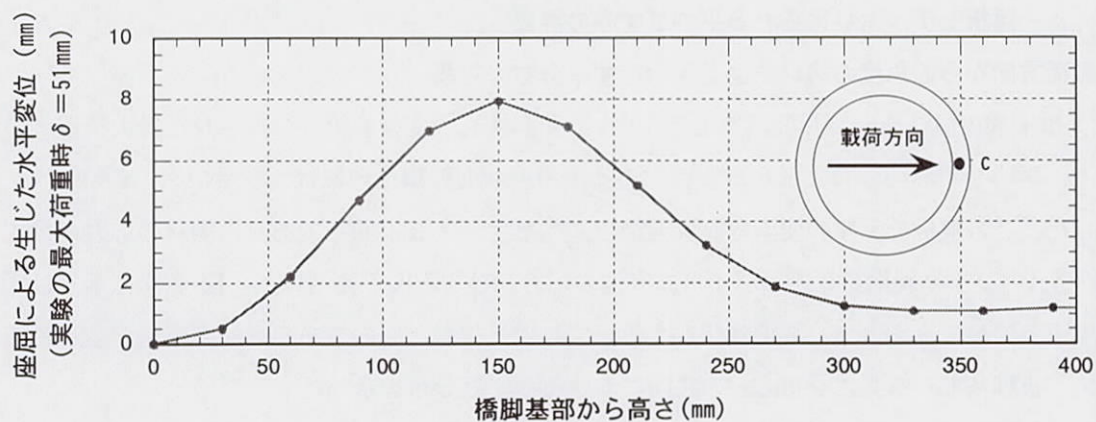
図-2.7 橋脚断面着目点の水平変位の比較

図-2.7 は標準供試体の繰返し載荷実験の最大荷重時水平変位 ($\delta_m = 51\text{mm}$) を作用させたときの橋脚基部から 900mm 間の水平分布を示したものである。水平変位は、圧縮側 C 点と反時計周りに 90° 進んだ O 点の変位を示す。図-2.7 より橋脚基部から約 300mm の範囲で C 点の水平変位が急激に大きくなっており、この領域が局部座屈している領域であることがわかる。また、要素分割の粗いケース 1 では局部座屈の変形を他の分割に比べ、評価できていないことがわかる。また、ケース 3 の分割数になると、それ以上の分割数でも変わりがなく、C 点に直交する O 点には局部座屈の影響はほとんどないことが見て取れる。

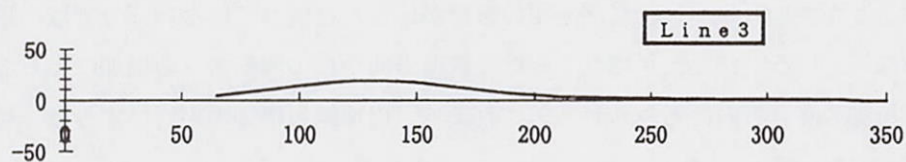
局部座屈が生じていると考えられる橋脚基部から 300mm の範囲は、文献 7) より円筒の弾性座屈波長の計算式 ($l = 2 \times 1.73 \sqrt{R \cdot t}$) によって算出した座屈長 294mm とほぼ一致している

図-2.8 は、標準供試体 No.6 の繰返し載荷実験で最大荷重を超えた $6\delta_y$ ($6\delta_y = 77\text{mm}$) の変位時に計測した C 点の水平変位を示したものである。図-2.7 と図-2.8 を比較すると、繰返し載荷において、最大荷重を超えた後に計測した変位は、解析結果よりも大きな変位が生じている。これは、繰返し載荷により局部座屈が進展したからと考えられる。このように、生じる変形量に違いはあるものの FEM 解析より得られる局部座屈の範囲は実験結果とほぼ一致していることがわかる。

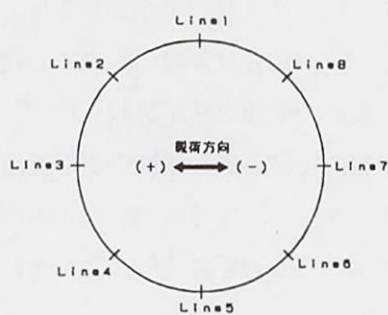
以上より、検討対象とした要素分割の中で、最大水平荷重とそのときに生じる水平変位が繰返し載荷実験結果を最も再現しており、局部座屈が生じる範囲も実験結果と整合しているケース 3 の要素分割を用いて、以後の FEM 解析を行った。



(a) Pushover 解析結果



(6 $\delta y = 85\text{mm}$ 以後 $\delta = 0$ 時の変形)



橋脚断面に着目点

(b) 正負交番载荷実験結果

図-2.8 繰返し载荷実験で計測した供試体 No. 6 の水平変位

2. 3. 4 解析モデルより得られる平均ひずみの評価

(1) 載荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異

図-2.9 は実験供試体をシェル要素でモデル化し、非弾性有限変位解析より得られた最大荷重時の圧縮側の軸ひずみと平均ひずみの分布を示したものである。円形断面の損傷領域は、 $\alpha=0^\circ$ 、 $\alpha=23^\circ$ 、 $\alpha=45^\circ$ に着目した。この解析モデルの要素分割は前節で述べたケース3と同じであり、鋼材の応力-ひずみ関係の構成則が1%のひずみ硬化を有するバイリニア型の応力-ひずみ関係を用いた。図-2.9 に示すひずみは、鋼管の板厚中心のひずみを表し、初期降伏ひずみ ε_y で無次元化したものである。局部座屈が生じる領域に着目するため、橋脚基部から高さ900mmの区間におけるひずみ分布を示した。

軸ひずみと平均ひずみの分布を比較すると、軸ひずみは局部座屈による変形が大きいところで大きく、小さいところで小さくなっており、局部座屈の影響が、ひずみの分布に直接現れていることがわかる。一方、塑性損傷領域を考慮して求めた平均ひずみ ε_a は、局部座屈による影響が緩和されて、その最大値は、局所ひずみの最大値よりも小さい。しかし、局部座屈の影響がほとんど現れていない部分では、平均ひずみは軸ひずみより大きくなっている。また、平均ひずみは、載荷方向からの回転角 α の増加にともない小さくなり、同様な傾向は、橋脚の高さ方向にもみられる。これより、円形鋼製橋脚の平均ひずみは、軸ひずみが最も大きくなる $\alpha=0^\circ$ の部分を用いて評価すれば良いと考えられる。

(2) はり要素を用いたプッシュオーバー解析によるひずみ分布

近年、解析技術の進歩、計算機能力の向上によりシェル要素を用いた弾塑性有限要素解析も比較的容易に行えるようになってきている。しかし、一般的には実設計へのその適用はまだまだ容易ではない。一方で、鋼製橋脚の耐震設計の分野では、はり要素の断面を微小分割したファイバーモデルを用いて解析する実例が多くなってきている。そこで本研究の目的である鋼製橋脚の変形性能の推定において、はり要素のファイバーモデルを用いてプッシュオーバー解析を行い、ある範囲のひずみ値を評価することによりシェル要素を用いた解析時の最大荷重の結果を推定に用いることを考える。この変形性能の評価方法は矩形断面の鋼製橋脚で既に行われている方法である⁵⁾。

はり要素を用いた Pushover 解析は、供試体のせん断変形を考慮できる Timoshenko はり要素でモデル化し、鋼材の応力-ひずみ関係は1%ひずみ硬化型を用いる。橋脚の高さ方向へのはり要素の分割数とはり要素断面の微小要素数は、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析と同じとした。はり要素を用いた Pushover 解析は、局部座屈の影響を考慮できないため、最大荷重時、終局時という状態を明確には定義できない。ここでは、はり要素を用いた Pushover 解析より得られる各供試体の水平変位が、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析より得られる最大荷重時の水平変位に達するまで荷重を漸増させた。

図-2.10 は、FEM 解析の最大荷重時の変位まで載荷したはり要素を用いた Pushover 解析から得られるはり要素の軸ひずみ(ε -BEAM)と平均ひずみ(ε_{ba})の分布を示したものである。図には、前述したシェル要素のひずみ(ε -FEM と ε_a) 分布も示してある。図中の ε_a は、前出の式(2-1)で定義される塑性損傷領域における平均ひずみ(FEM 非弾性有限変位解析結果)、 ε_{ba} は損傷領域(角度 α と高さ l_j の範囲)におけるはり要素断面に生じる軸ひずみを平均化したものである。ここでは、はり要素円形断面の圧縮側1/4部分に着目

し、断面の微小要素の分割数は n_i 、橋脚高さ方向へのはり要素の分割数は n_j とする。したがって、載荷方向 z 軸から y 軸への角度 α 、基部から高さ l_j の範囲に存在する全積分点のひずみを用いて平均ひずみ ε_{ba} を式 (2-1) と同じように次式で求めることができる。

$$(\varepsilon_{ba})_{\alpha j} = \left\{ \sum_{k=1}^j \left(\sum_{i=1}^{n_a} \varepsilon_{ij} \right) / n_a \right\} / j \quad \alpha = 0 \sim 90^\circ; \quad j = 1, 2, \dots, n_j \quad \text{式(2-5)}$$

図-2.10 の左側に示すはり要素とシェル要素のひずみの分布を比較すると、局部座屈の影響によって両者の分布が大きく異なっていることがわかる。シェル要素の局所ひずみは、橋脚基部よりやや上方に位置する局部座屈が生じるところで最も大きくなっているに対して、はり要素を用いた Pushover 解析では、局所ひずみは橋脚基部で最も大きくなっている。これは、ファイバーモデルを用いたはり要素の解析では、局部座屈の影響を考慮できないために、塑性変形が基部に集中するからである。このことから、はり要素のファイバーモデルを用いた解析では、基部のひずみだけで橋脚の塑性変形性能を評価することは適切ではないことがわかる。一方、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析の平均ひずみ ε_a とはり要素解析の平均ひずみ ε_{ba} に着目すると、荷重最大時の水平変位に達したときに圧縮側に生じた平均ひずみが基部から高さ方向に沿った分布は、局所ひずみの分布と同様に、基部付近では、両者は異なる分布を示している。しかし、ある領域を超えれば、両方の方法から求めた結果もほぼ同じとなることがわかる。このため、 ε_a と ε_{ba} の値が異なる領域は、局部座屈の影響が大きい領域と考えることができる。シェル要素を用いた非弾性有限変位解析とファイバーモデルを用いたはり要素解析から判断すると、両者の平均ひずみ ε_a と ε_{ba} の違いは、局部座屈の考慮、非考慮の違いが大きいと予想される。ここでは、 ε_a と ε_{ba} の差が著しい領域を塑性損傷領域とみなすことにする。図-2.10 の右側に示した対象供試体の平均ひずみ ε_a と ε_{ba} の分布は、円形断面の載荷方向から $\alpha = 23^\circ$ 、 $\alpha = 45^\circ$ の何れにおいても、橋脚基部から 600mm~800mm の範囲でほぼ一致していることがわかる。これより、円形鋼製橋脚の変形性能を評価するシェル要素とはり要素の平均ひずみを整合させるために、平均ひずみを求める円形鋼製橋脚の塑性損傷領域は、円形断面の $\alpha = 0^\circ$ と橋脚の高さ $l_a = 0.7D$ という範囲を提案する。

表-2.6 シェル要素の平均ひずみとはり要素の平均ひずみの比較

供試体	高さ h (m)	外径 D (mm)	板厚 t (mm)	径厚比 R_t	$\varepsilon_a / \varepsilon_y$ (SHELL)	$\varepsilon_{ba} / \varepsilon_y$ (BEAM)	$\varepsilon_a / \varepsilon_{ba}$	l_a (mm)	l_a / h
KC2	3.3	850	13	0.111	3.30	3.21	1.028	595	0.180
KC3	3.3	850	13	0.158	2.54	2.52	1.009	595	0.180
No. 6	3.4	900	16	0.076	4.96	4.94	1.004	630	0.185
No. 8	3.4	900	9	0.115	3.05	3.00	1.019	630	0.185
No. 29	3.4	900	9	0.123	2.93	2.81	1.044	630	0.184
T-7	5.0	900	16	0.077	5.45	5.21	1.045	630	0.126
M24	3.4	875	7	0.153	2.48	2.36	1.050	612.5	0.179

注) : $l_a = 0.7D$

表-2.6 は、対象供試体におけるシェル要素を用いた解析とはり要素を用いた Pushover 解析より得られる

最大荷重時の平均ひずみの値および両者の比率を示したものである。表-2.6 より、提案した損傷領域（ $\alpha = 0^\circ$ 、 $l_d = 0.7D$ ）においてシェル要素を用いた FEM 解析より得られた平均ひずみは、はり要素の平均ひずみよりやや大きいことがわかる。しかし、表-2.6 に示すように、両者の差が 5%以内にとどまっており、両者の差は小さいと言える。これより、上記の平均ひずみを求めるために提案した損傷領域を用いれば、はり要素のファイバーモデルを用いた Pushover 解析によって円形鋼製橋脚の変形性能を評価することができる。

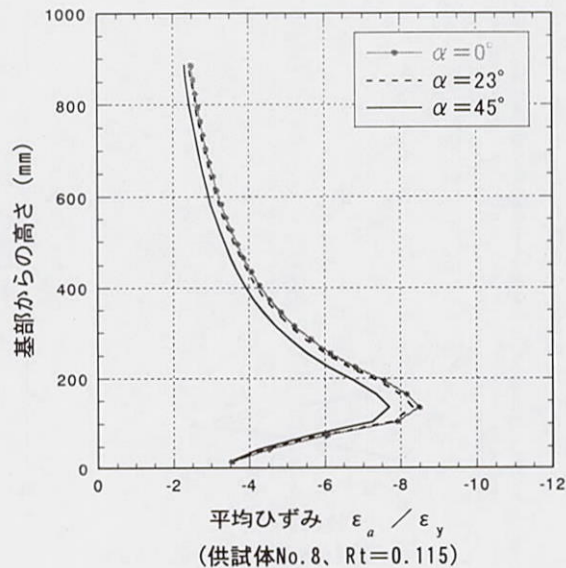
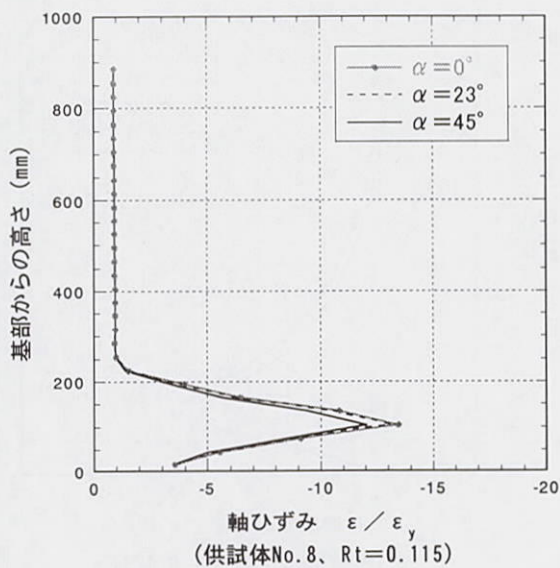


図-2.9(5) 載荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.115$)

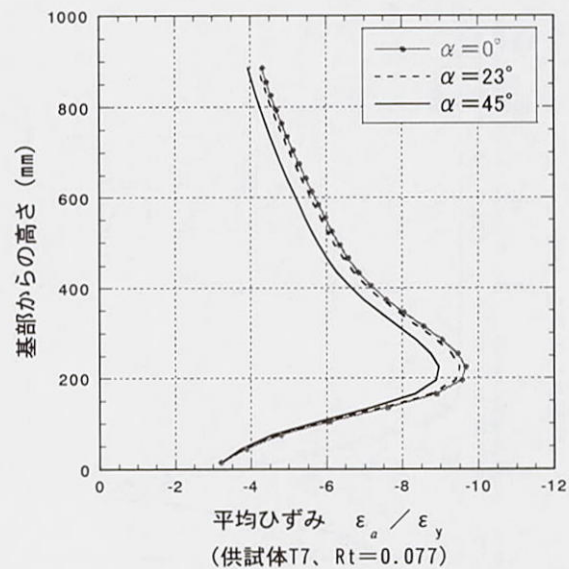
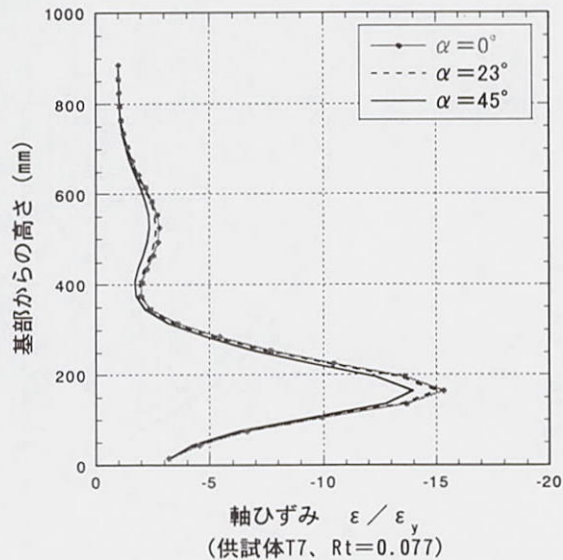


図-2.9(6) 載荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.077$)

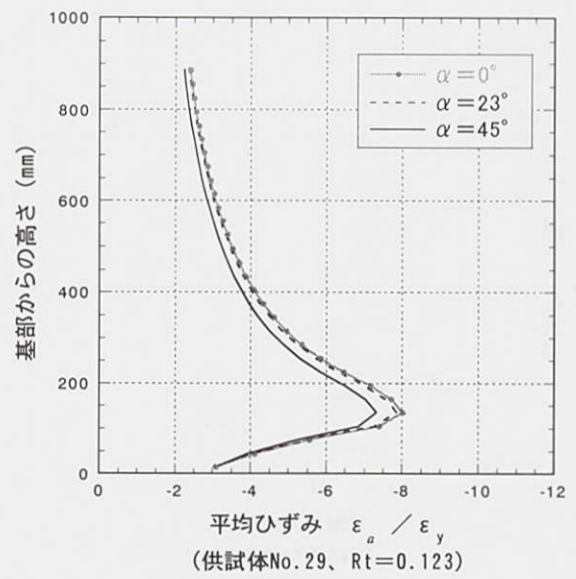
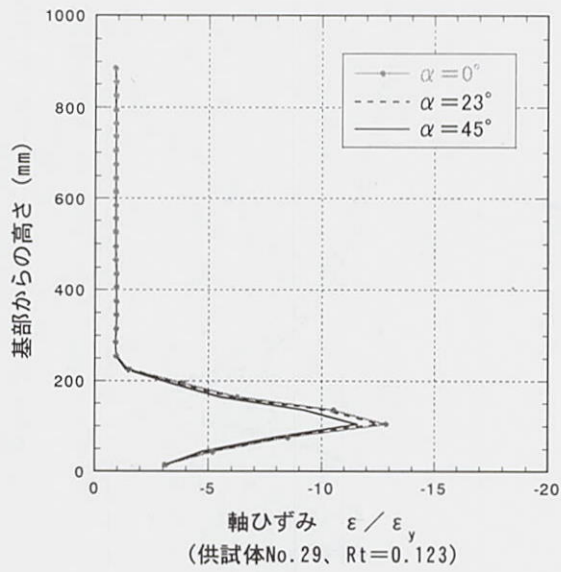


図-2.9(3) 載荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.123$)

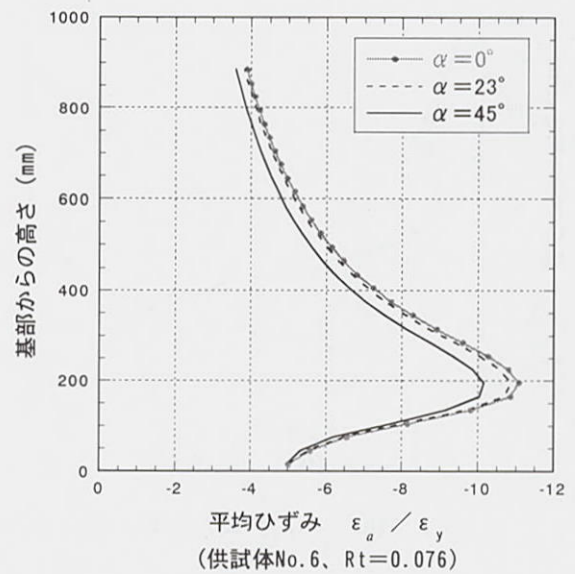
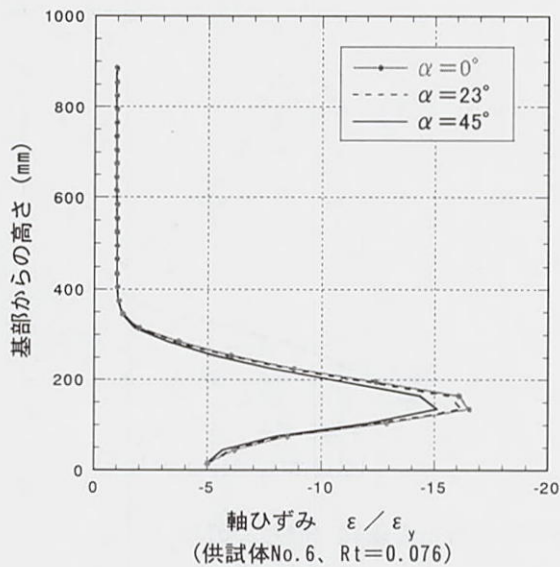


図-2.9(4) 載荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.076$)

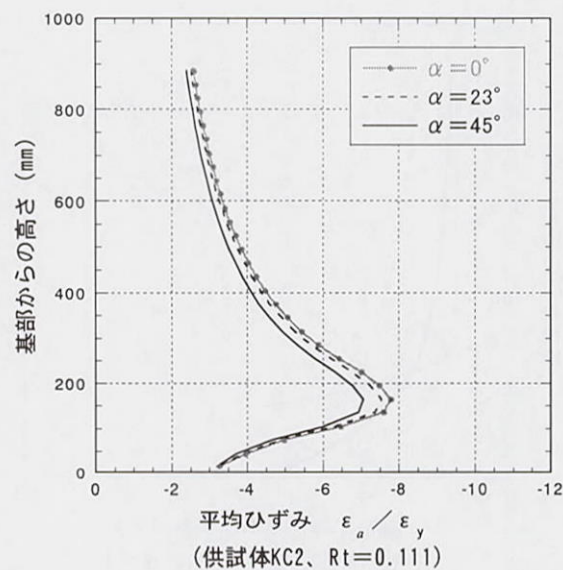
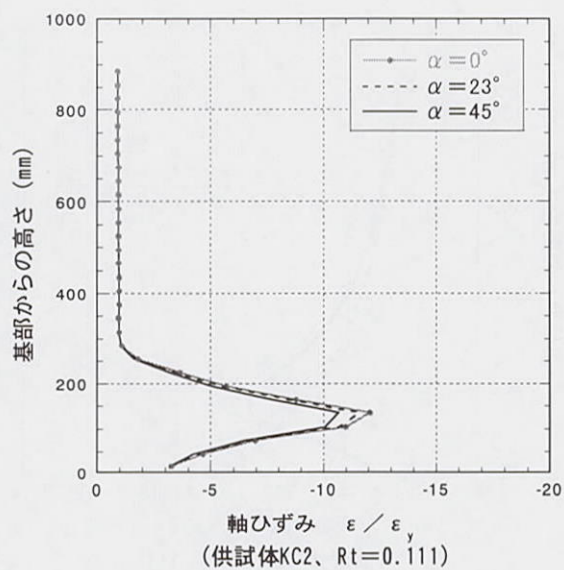


図-2.9(1) 载荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.111$)

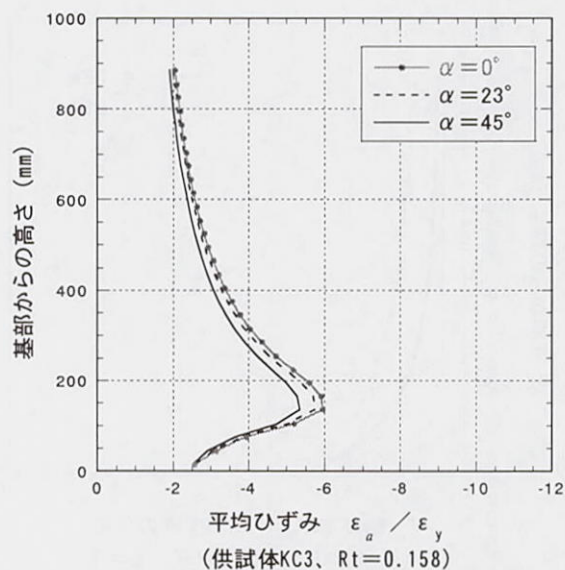
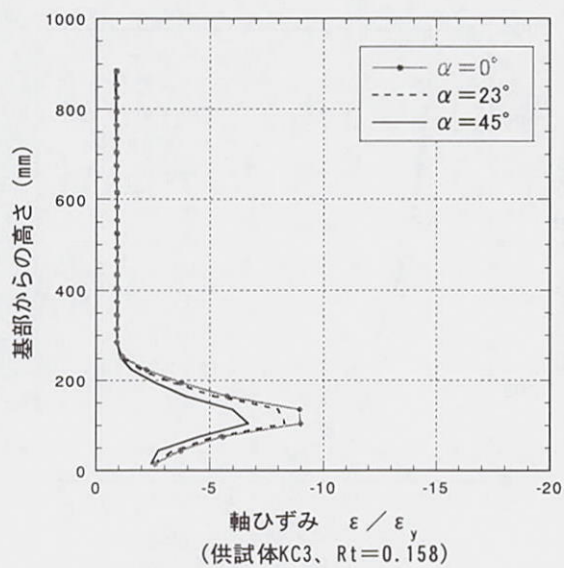


図-2.9(2) 载荷方向からの角度の違いによる平均ひずみ分布の差異 ($Rt=0.158$)

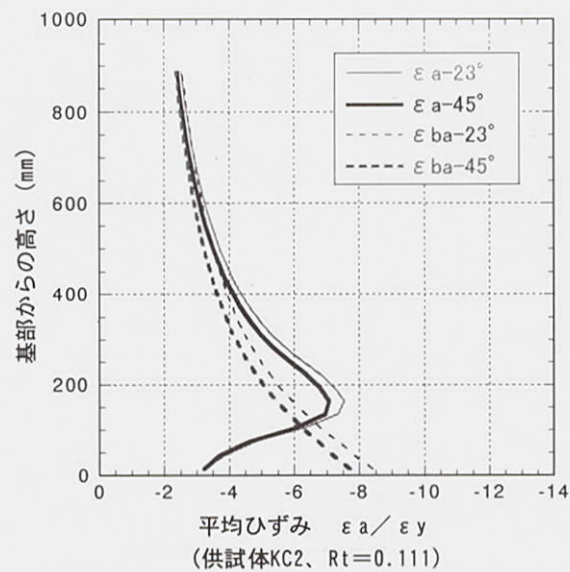
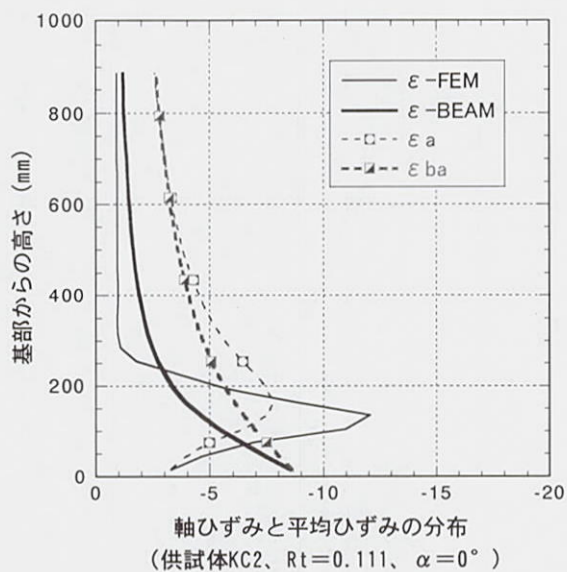


図-2.10(1) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.111$)

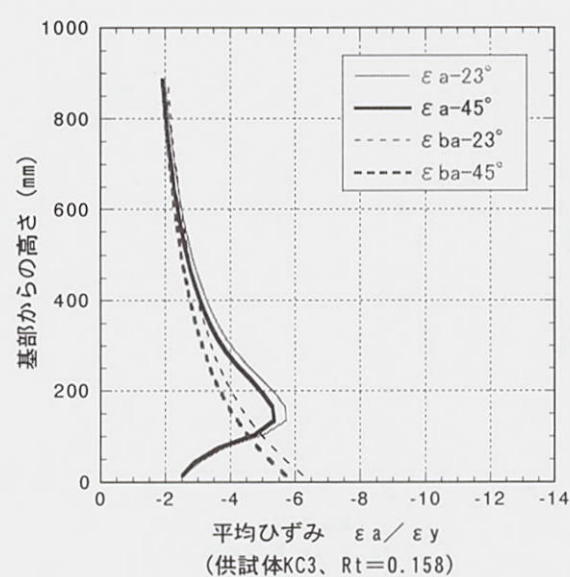
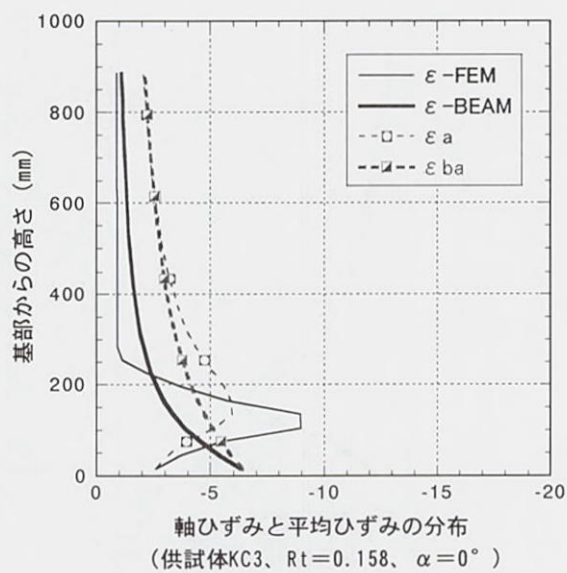


図-2.10(2) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.158$)

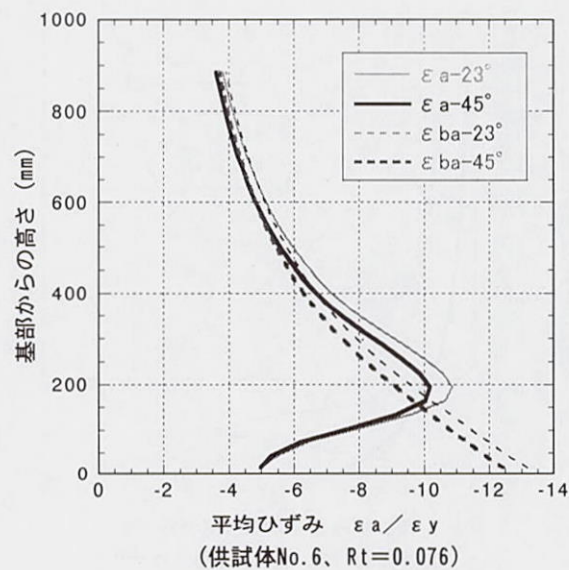
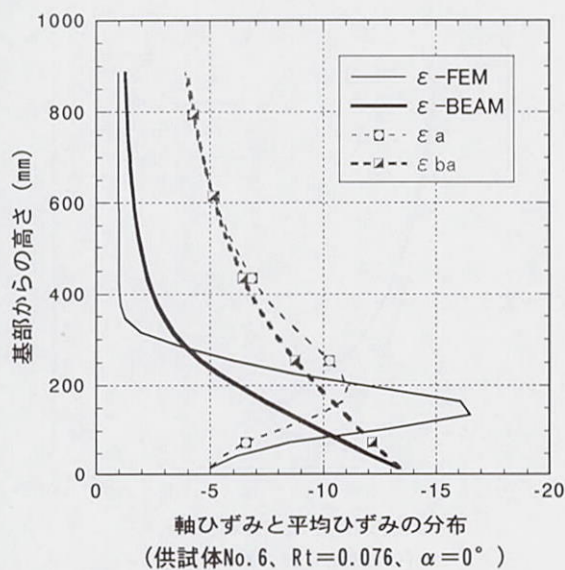


図-2.10(3) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.076$)

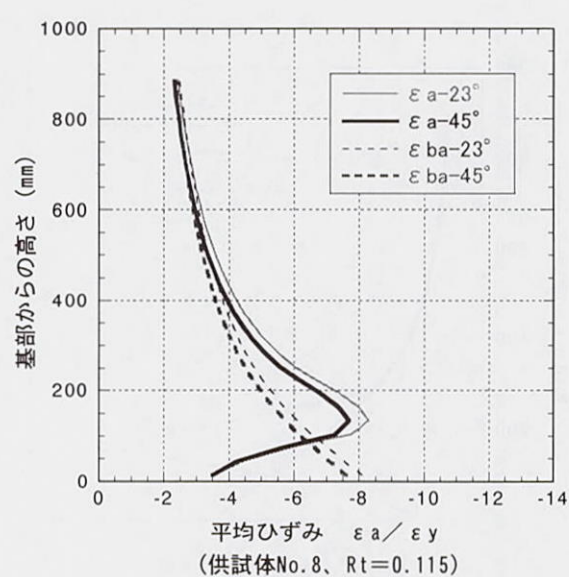
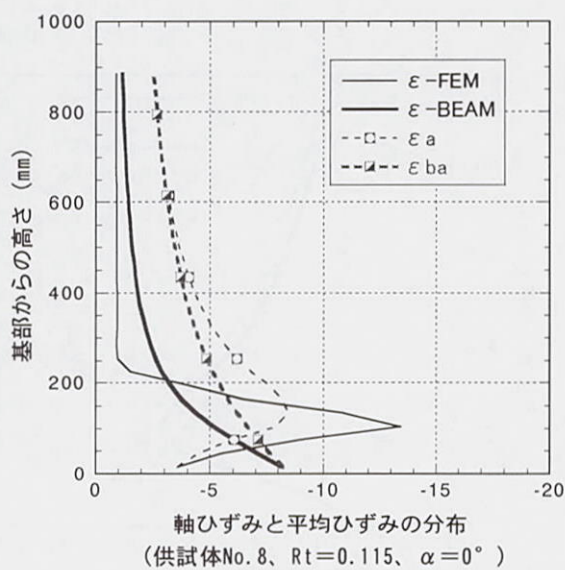


図-2.10(4) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.115$)

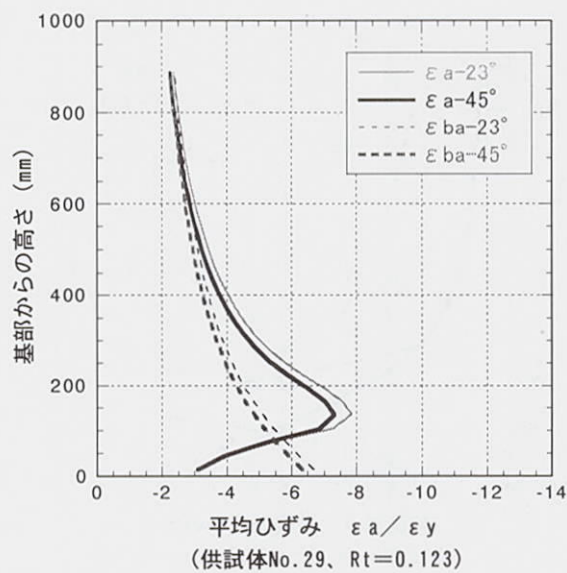
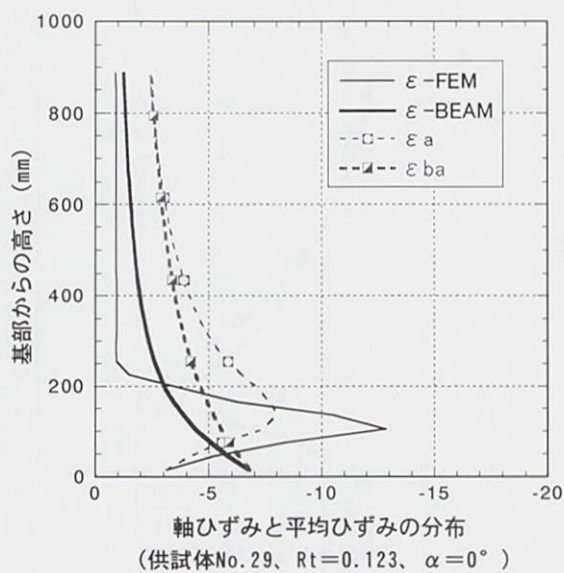


図-2.10(5) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.123$)

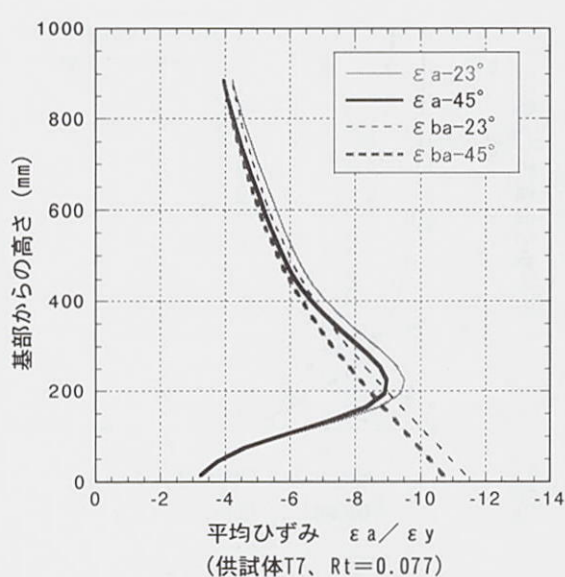
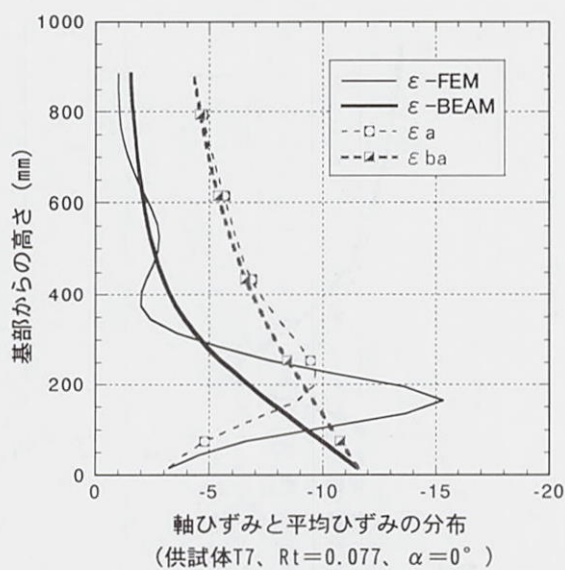


図-2.10(6) はり要素とシェル要素の平均ひずみ分布の違い ($Rt=0.123$)

2. 4 非弾性有限変位解析結果

2. 4. 1 降伏耐力と降伏変位

図-2.11 に試設計した 8 ケースの解析対象橋脚の非弾性有限変位解析結果を示す。図は水平荷重－水平変位の関係を示したものである。図に示す最大荷重と最大荷重時の変位は、最大荷重付近の $P-\delta$ 曲線を補間して 2 次曲線の回帰式より求めたものである。これは、非弾性有限変位解析は数値解析であるため、得られる荷重と変位の関係は解析に用いる増分量毎に出力された離散値である。このような場合、出力された値が増分量に依存しているために最大耐力を得られないことがある。このため、解析より得られた水平荷重－水平変位関係の最大荷重付近の値を用いて曲線補間を行い、その曲線から最大荷重とその時の水平変位を推定した。

図-2.11 より、径厚比パラメータ R_t が同じならば、橋脚の最大荷重 P_u と最大荷重時の水平変位 δ_m は、軸力比が大きくなるとともにわずかに減少することがわかる。図の右側には、水平荷重と水平変位を初期降伏耐力 P_y と降伏変位 δ_y で無次元化した、 P/P_y と δ/δ_y を示してある。最大塑性率 δ_m/δ_y は、軸力比が大きくなるとともに小さくなる傾向がわずかに現れているが、実用上は、ここで対象とした軸力比の範囲では、最大塑性率 δ_m/δ_y は等しいとみなせる。以上より、ここで対象とした軸力比の範囲であれば、軸力比が鋼製橋脚の耐力と変形性能に与える影響は小さいと言える。解析対象橋脚の初期降伏耐力 P_y と降伏変位 δ_y を表-2.7 に示す。

表-2.7 解析対象橋脚の初期降伏耐力 P_y と降伏変位 δ_y

断 面	軸力比=10%		軸力比=15%	
	P_y (kN)	δ_y (mm)	P_y (kN)	δ_y (mm)
$R_t=0.06$	1150.1	13.6	1086.2	12.8
$R_t=0.08$	882.4	13.6	833.4	12.8
$R_t=0.10$	716.0	13.6	676.2	12.8
$R_t=0.12$	602.3	13.6	568.9	12.8

初期降伏耐力 P_y と降伏変位 δ_y は次式によって与えられる。

$$P_y = \sigma_y (1 - N/N_y) \cdot \frac{Z}{h}; \quad Z = \frac{I}{(D/2)} \quad \text{式(2-6)}$$

$$\delta_y = \frac{P_y \cdot h^3}{3EI} = \frac{\sigma_y (1 - N/N_y) \cdot h^2}{\frac{3}{2} D \cdot E} \quad \text{式(2-7)}$$

ここに、 σ_y : 降伏耐力、 N_y : 降伏軸力、 h : 橋脚高さ、 I : 断面 2 次モーメント、

D : 直径、 E : ヤング率

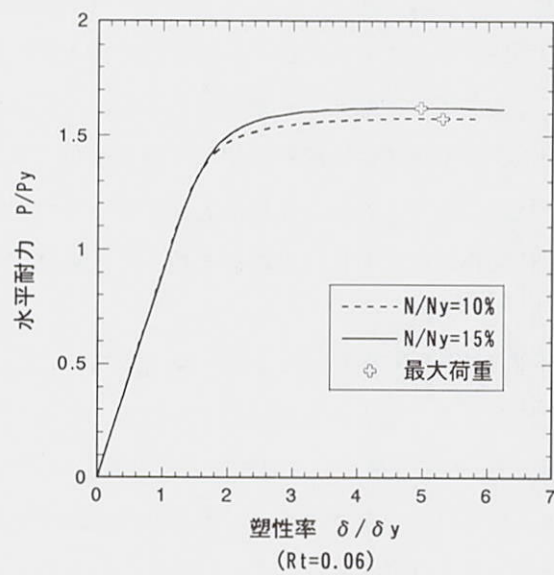
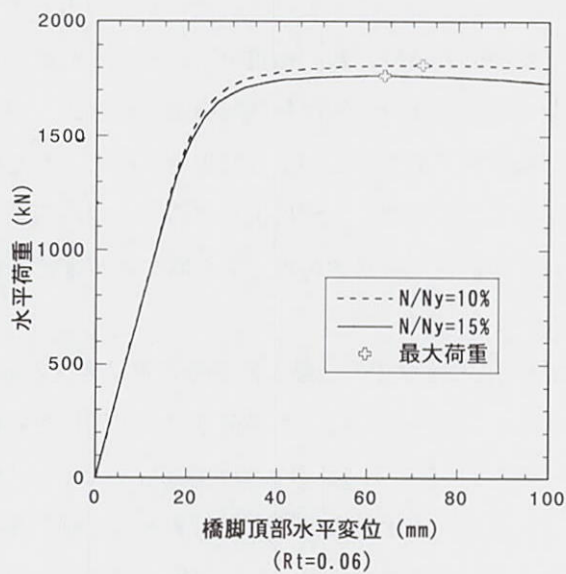


図-2.11(1) 水平変位—水平荷重関係、塑性率—水平耐力関係 ($Rt=0.06$)

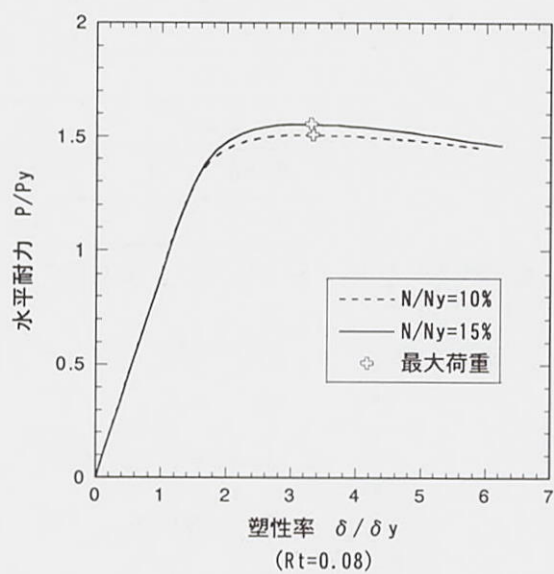
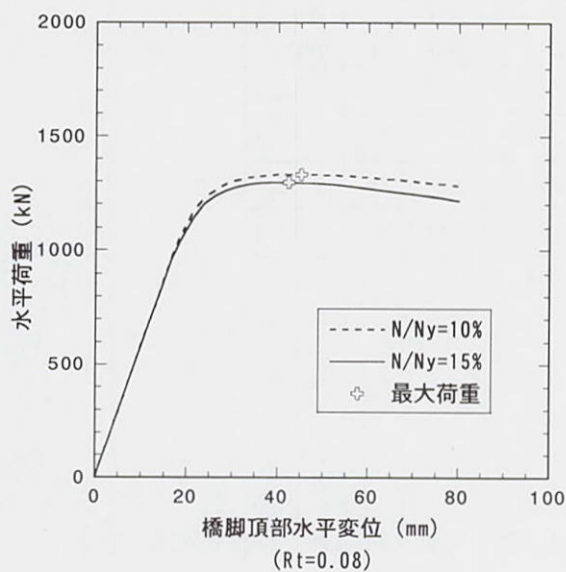


図-2.11(2) 水平変位—水平荷重関係、塑性率—水平耐力関係 ($Rt=0.08$)

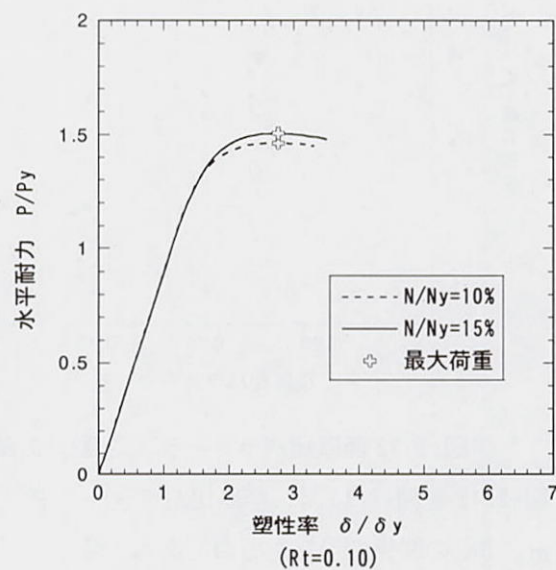
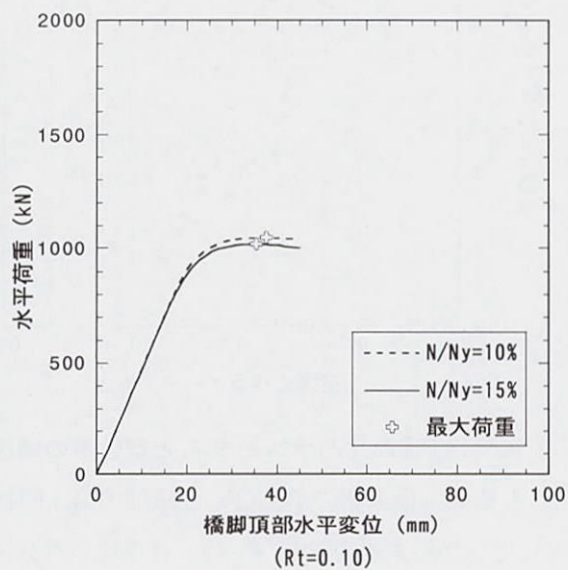


図-2.11(3) 水平変位—水平荷重関係、塑性率—水平耐力関係 ($Rt=0.10$)

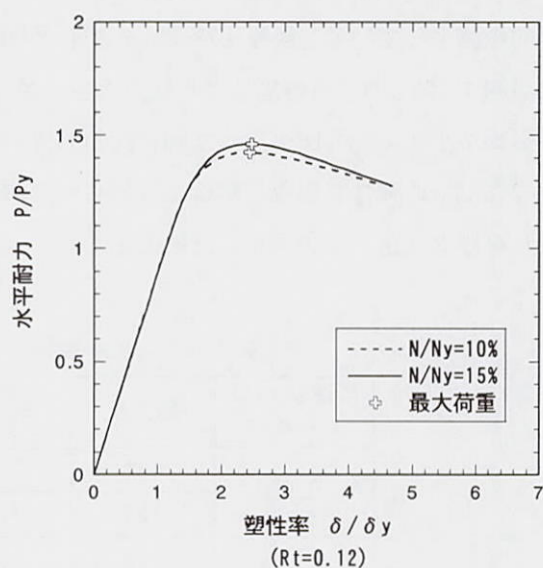
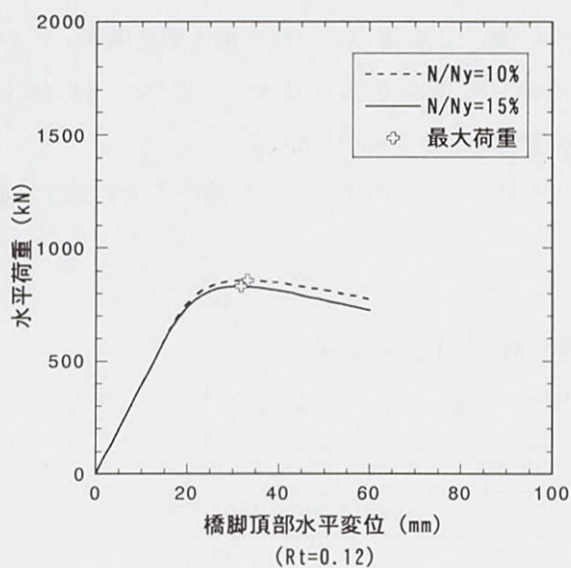


図-2.11(4) 水平変位—水平荷重関係、塑性率—水平耐力関係 ($Rt=0.12$)

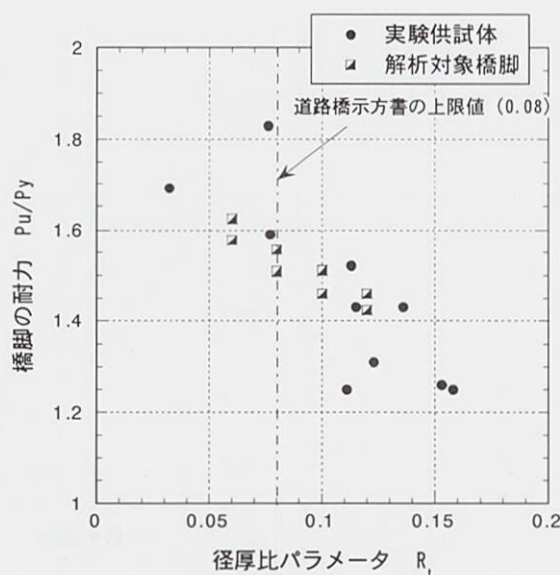


図-2.12 径厚比パラメータ R_t と耐力の関係

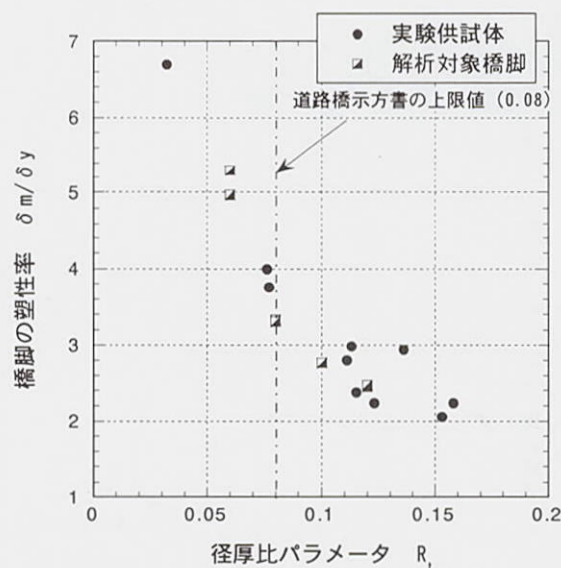


図-2.13 径厚比パラメータ R_t と塑性率の関係

図-2.12 と図-2.13 は、径厚比パラメータ R_t と無次元化した橋脚の最大耐力 P_u/P_y と橋脚の最大塑性率 $\delta m/\delta y$ の関係を示したものである。図-2.12 より、無次元化した最大耐力 P_u/P_y は、径厚比パラメータ R_t の増加に伴い小さくなる傾向があるが、その変化量は 1.4~1.6 の間にあり、その変化量は小さい。また、軸力比の違いによって、橋脚の最大耐力 P_u/P_y がわずかに変化するとともに径厚比パラメータ R_t との関係は同じ傾向にある。

図-2.13 に示す橋脚の変形性能を表す最大塑性率 $\delta m/\delta y$ は、径厚比パラメータ R_t によって大きく変化する。特に、 R_t が 0.06~0.08 の範囲では、径厚比パラメータ R_t の増加に伴い最大塑性率 $\delta m/\delta y$ は指数関数的に減少している。径厚比パラメータ R_t が 0.06 の場合は、軸力比の違いによって最大塑性率 $\delta m/\delta y$ の差が約 7% になり、他の橋脚よりやや大きい。径厚比パラメータ R_t が 0.08 より大きい場合は、軸力比による影響が小さく、今回検討した軸力比範囲ではその影響は無視できることがわかる。

表-2.8 は、非弾性有限変位解析より得られた解析対象橋脚における最大荷重と最大荷重時の水平変位およびそれを無次元化した値を示したものである。

表-2.8 シェル要素を用いた非弾性有限変位解析結果

径厚比パラメータ R_t	軸力比	P_u (kN)	δm (mm)	P_u/P_y	$\delta m/\delta y$
0.06	10%	1814.4	72.1	1.58	5.30
	15%	1764.9	63.7	1.62	4.97
0.08	10%	1331.3	45.2	1.51	3.33
	15%	1295.8	42.4	1.55	3.30
0.10	10%	1047.3	37.5	1.46	2.76
	15%	1018.4	35.4	1.51	2.76
0.12	10%	857.1	33.2	1.42	2.44
	15%	830.7	31.7	1.46	2.47

図-2.14 はシェル要素を用いた非弾性有限変位解析より得られた最大荷重時の変形を示したものである。図の上側は橋脚をモデル化した全体であり、下側は橋脚基部付近の変形を 10 倍に拡大して表示したものである。図-2.14 より全てのケースにおいて橋脚基部付近に局部座屈が生じているのがわかる。またこれらの局部座屈はすべて圧縮側がすべて外側にはらみ出す座屈形状となっている。径厚比パラメータ R_t が小さい時は、橋脚基部に微小な局部座屈が生じた後も水平荷重は増加しつづけ、水平荷重が最大値に達した後に耐力の低下が生じる。局部座屈の変形の度合いは大きく、橋脚のじん性も大きい。一方、径厚比パラメータが大きい範囲では橋脚基部に局部座屈が生じたあと、水平荷重はすぐに最大値に達する。このため局部座屈の度合いは径厚比パラメータが小さい時に比べて小さくなっている。

図-2.15 は FEM 解析の最大荷重時において、シェル要素でモデル化した橋脚基部付近 ($l=0.9\text{m}$) における鉛直方向の軸応力度と von Mises の相当応力を示したものである。ここには、橋脚円形断面の板厚中心の応力度を示してある。軸応力 (σ_{11}) は、载荷方向に沿った分布は圧縮応力から引張応力に変化している。一方、von Mises の相当応力は、全て正の値であり、その最小値はゼロよりはるかに大きい。これより、最大荷重時に橋脚基部付近の応力分布は、鉛直方向の軸応力からなる 1 軸状態ではなく、多軸の応力状態となっていることがわかる。また、同じ径厚比パラメータを有する鋼製橋脚の応力分布図は、ここで対象とした軸力比の範囲では、ほとんど変化していないことがわかる。

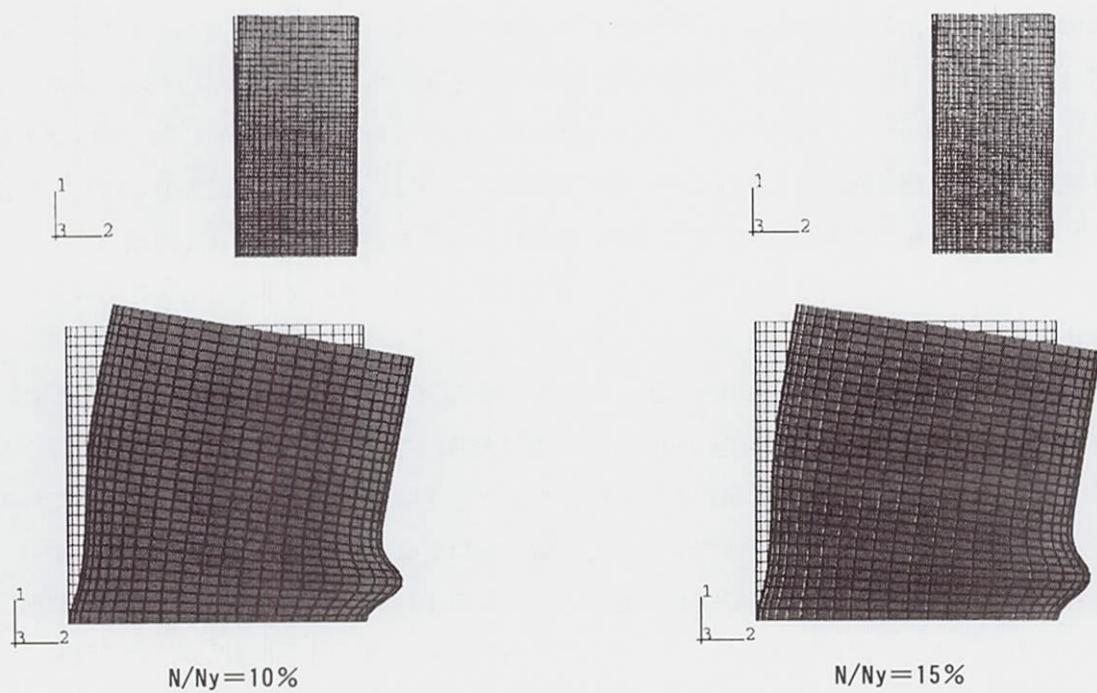


図-2.14(1) 円形鋼製橋脚の変形 ($Rt=0.06$)

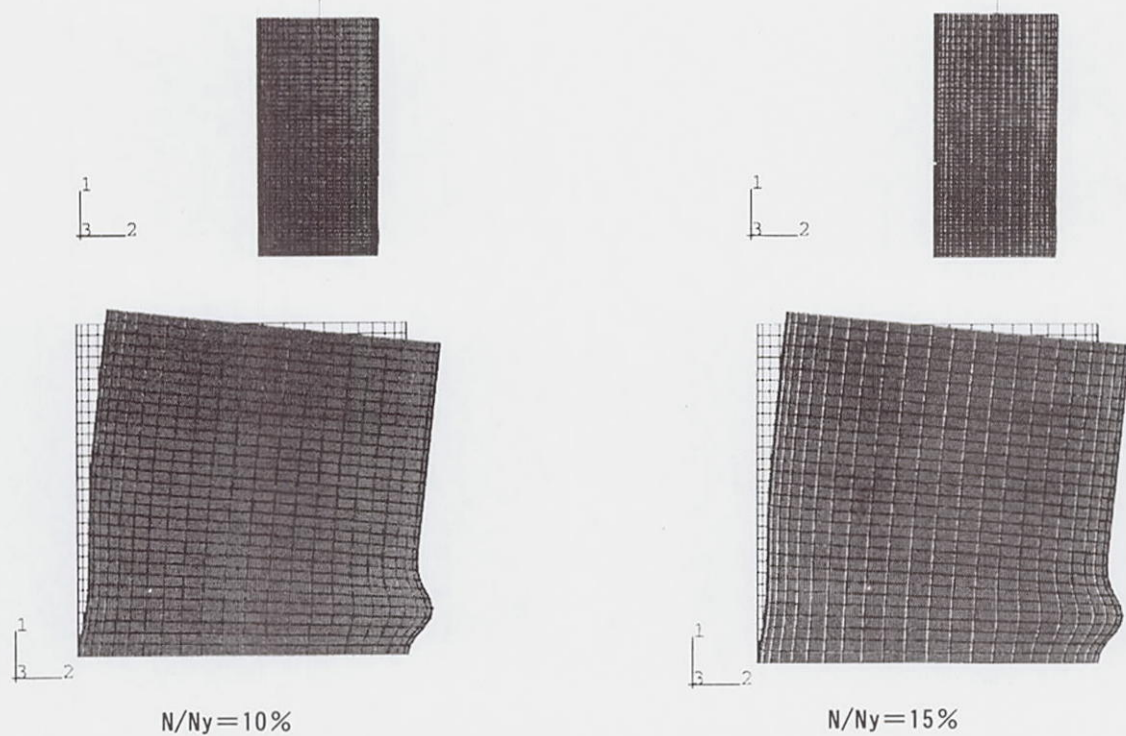


図-2.14(2) 円形鋼製橋脚の変形 ($Rt=0.08$)

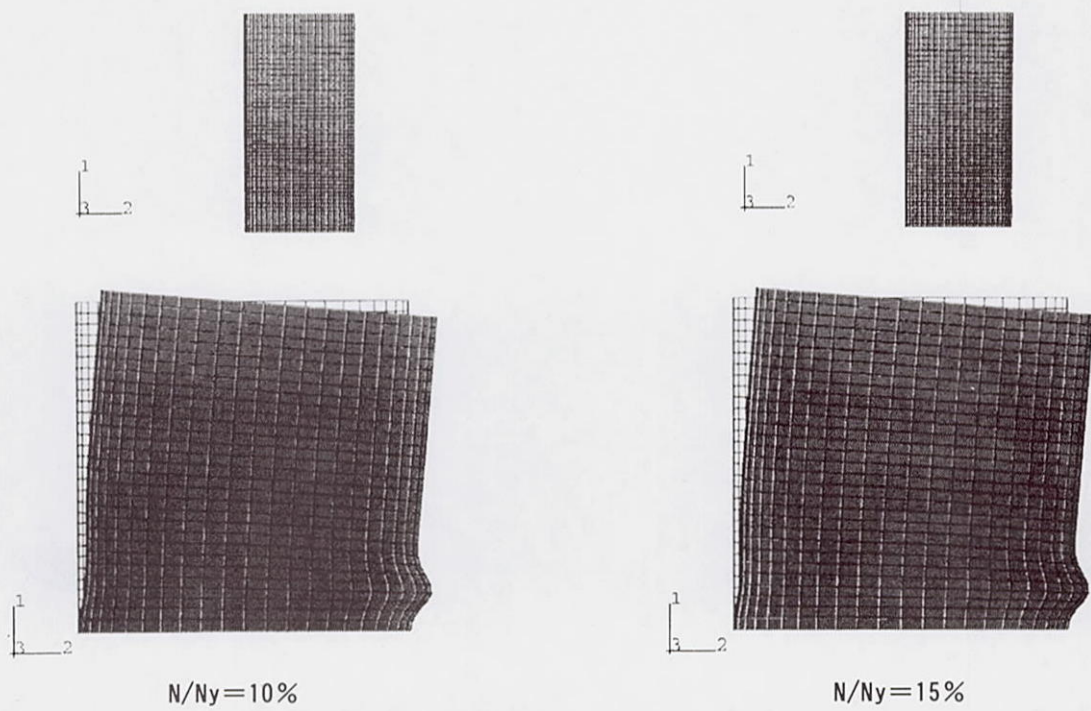


図-2.14(3) 円形鋼製橋脚の変形 ($Rt=0.10$)

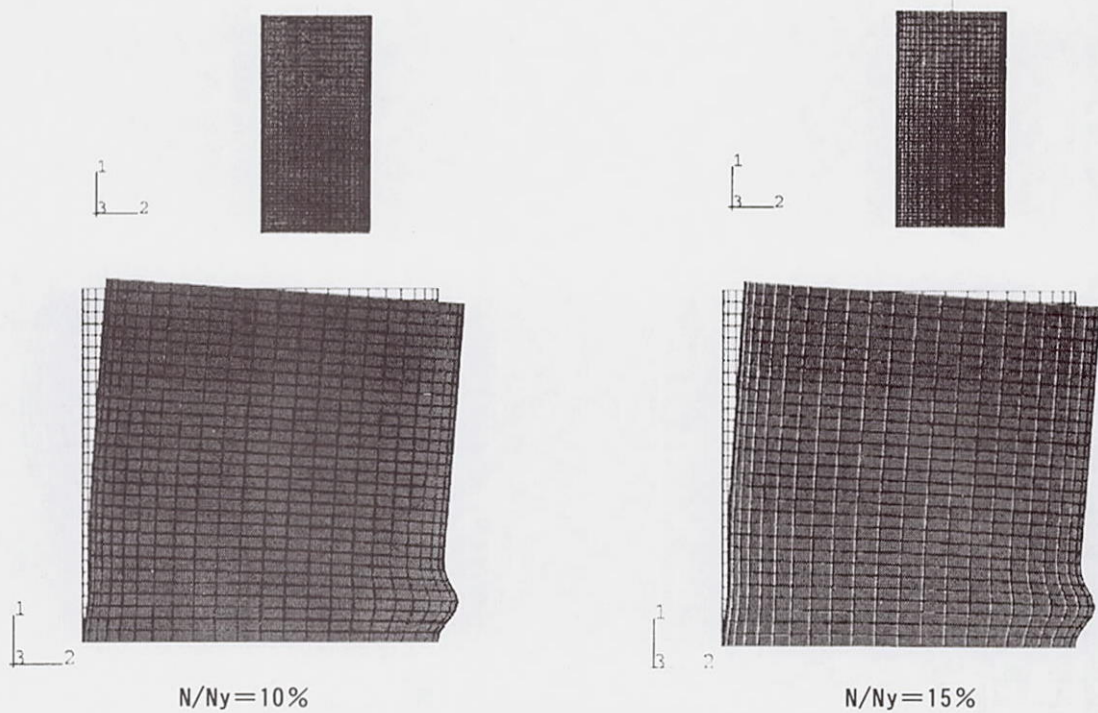
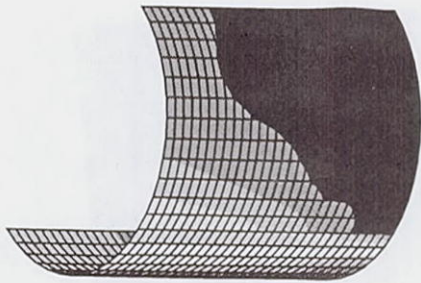
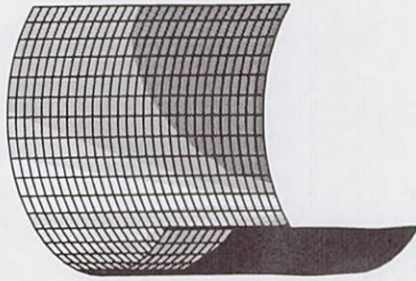


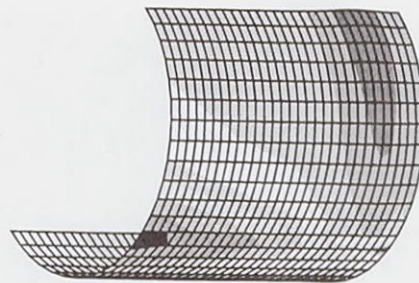
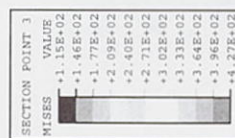
図-2.14(4) 円形鋼製橋脚の変形 ($Rt=0.12$)



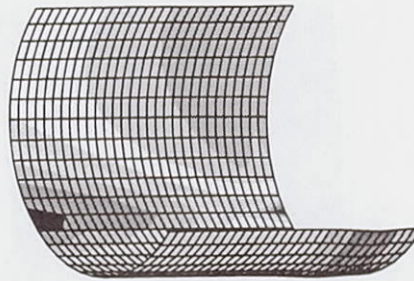
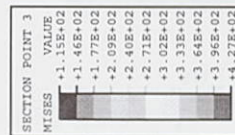
軸応力度



軸応力度



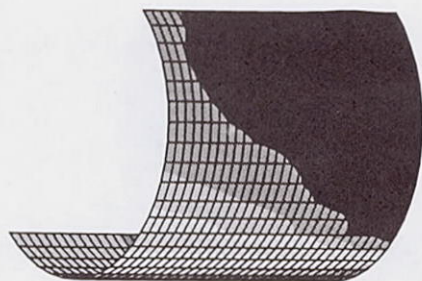
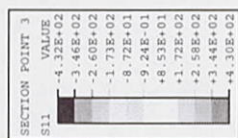
Von Mises 相当応力



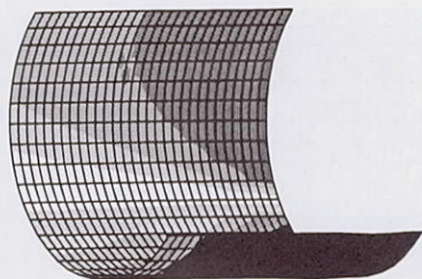
Von Mises 相当応力



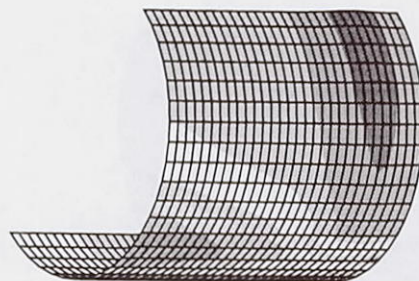
図-2.15(1) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.06$, $N/N_y=10\%$)



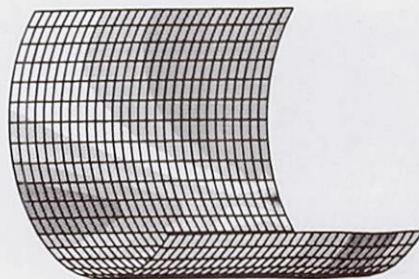
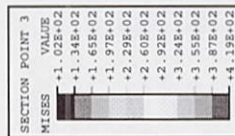
軸応力度



軸応力度

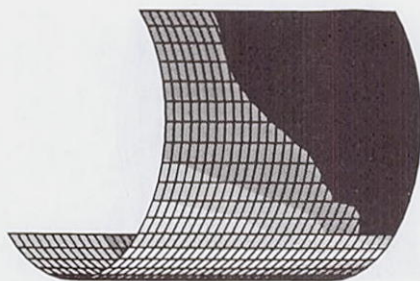
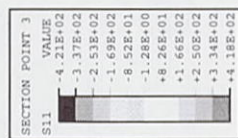


Von Mises 相当応力

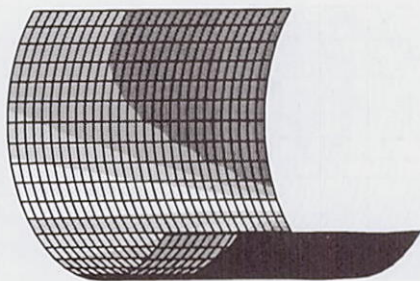
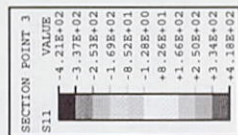


Von Mises 相当応力

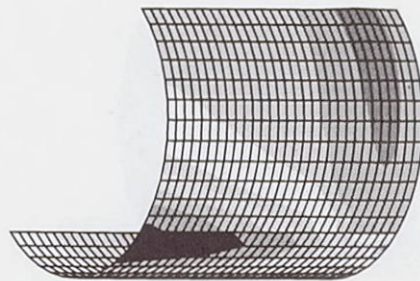
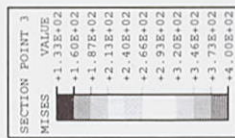
図-2.15(2) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.06, N/N_y=15\%$)



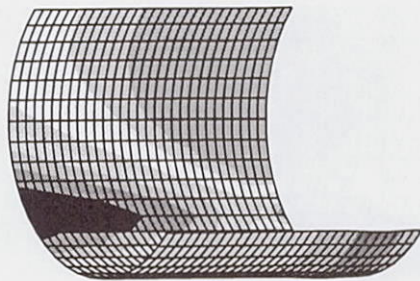
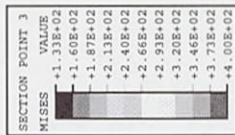
軸応力度



軸応力度

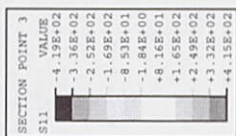


Von Mises 相当応力



Von Mises 相当応力

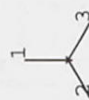
図-2.15(3) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.08, N/N_y=10\%$)



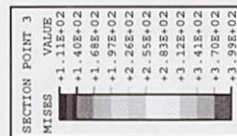
軸応力度



軸応力度



Von Mises 相当応力



Von Mises 相当応力

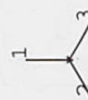
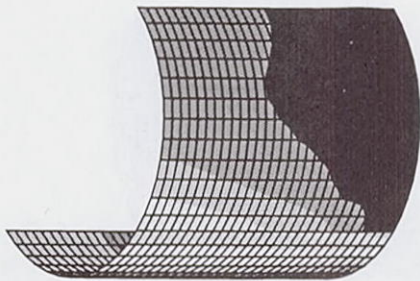
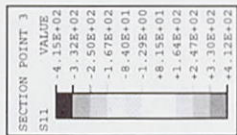
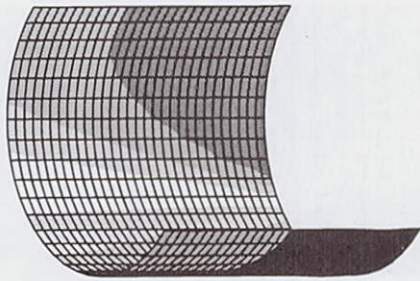


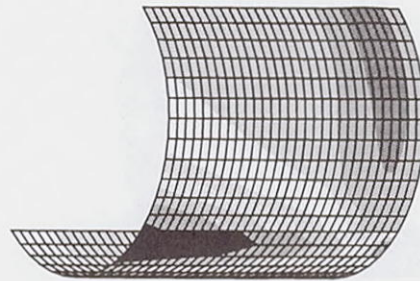
図-2.15(4) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.08$, $N/N_y=15\%$)



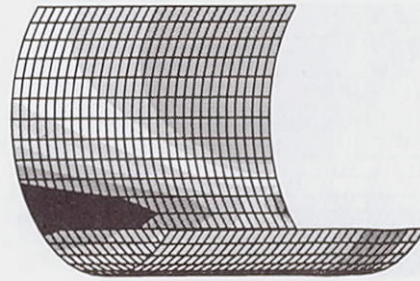
軸応力度



軸応力度



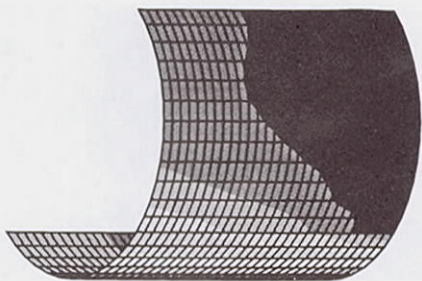
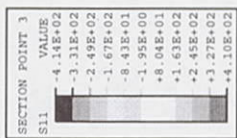
Von Mises 相当応力



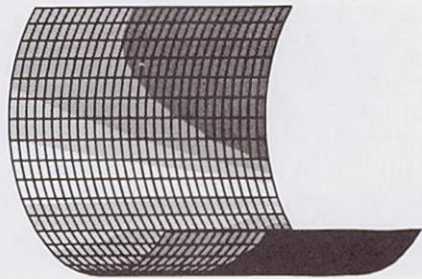
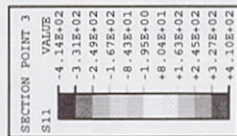
Von Mises 相当応力



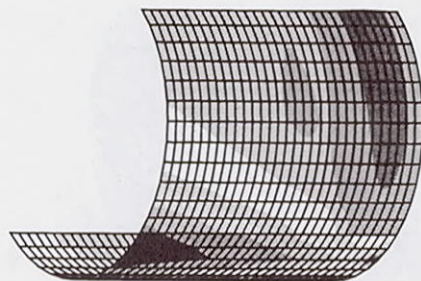
図-2.15(5) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.10, N/N_y=10\%$)



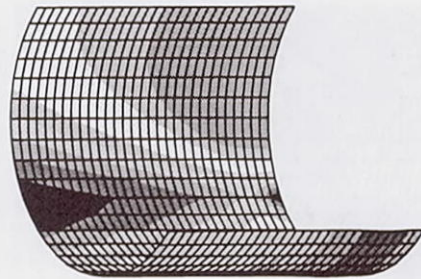
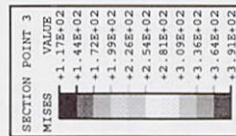
軸応力度



軸応力度

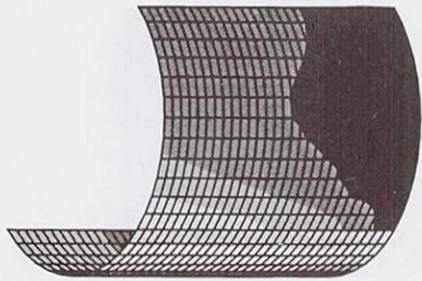
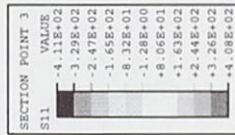


Von Mises 相当応力

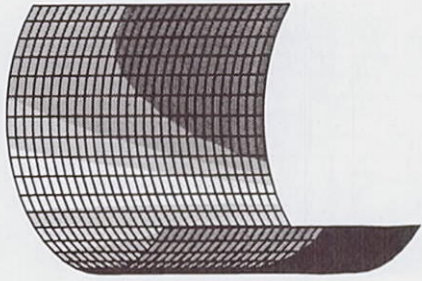


Von Mises 相当応力

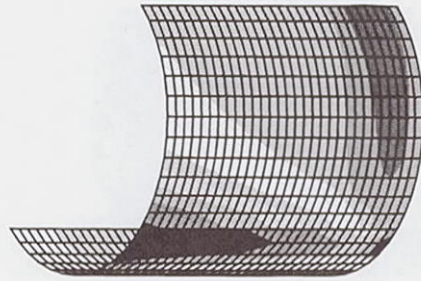
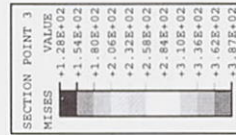
図-2.15(6) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.10, N/N_y=15\%$)



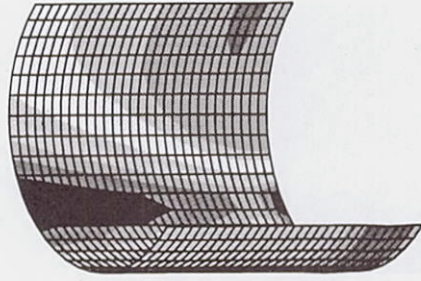
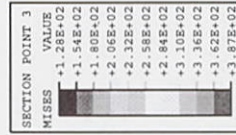
軸応力度



軸応力度



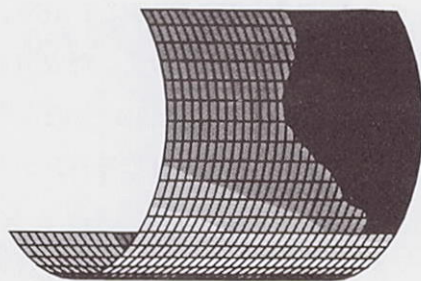
Von Mises 相当応力



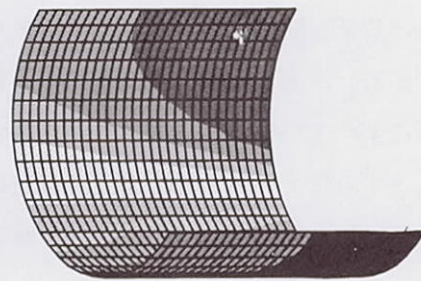
Von Mises 相当応力



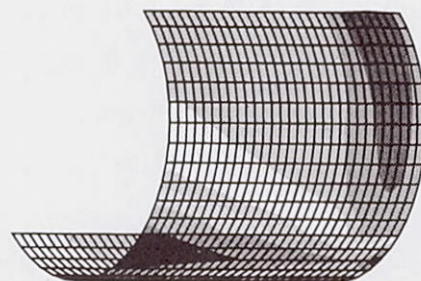
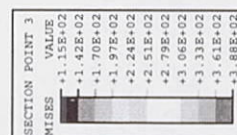
図-2.15(7) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.12, N/N_y=10\%$)



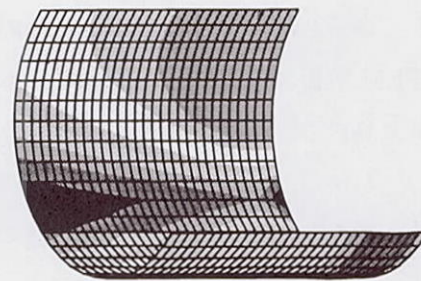
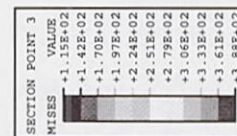
軸応力度



軸応力度



Von Mises 相当応力



Von Mises 相当応力

図-2.15(8) 最大荷重時の応力分布 ($R_t=0.12$, $N/N_y=15\%$)

2. 4. 2 座屈パラメータと平均ひずみの関係

ここでは、解析対象の円形鋼製橋脚 8 ケースにおいてシェル要素を用いた非弾性有限変位解析より得られた最大荷重時の解析結果を基に、前述した平均ひずみの計算式と提案した損傷領域 ($\alpha=0^\circ$ 、 $l_d=0.7D$) を用いて平均ひずみを求め、径厚比パラメータ R_t と平均ひずみの関係を検討する。また、円形鋼製橋脚の耐震設計への適用を目的に、最大荷重時を終局状態とし、平均ひずみと径厚比パラメータ R_t の関係を定式化する。

図-2.16 は、非弾性有限変位解析の最大荷重時に橋脚基部付近の軸ひずみと平均ひずみを示したものである。図には、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析より得られた結果とはり要素を用いた Pushover 解析結果を示してある。はり要素の Pushover 解析は、前述した対象供試体の解析と同様に、ファイバーモデルを用いて FEM 解析より得られた最大荷重時の変位まで載荷した結果である。シェル要素を用いた非弾性有限変位解析より求めた軸ひずみと平均ひずみの分布は、局部座屈の影響によって橋脚の高さ方向に大きく変化している。しかし、ある範囲を超えれば、はり要素の軸ひずみや平均ひずみは、非弾性有限変位解析結果と近くなる。両者の平均ひずみの分布を比較すると、橋脚の高さが約 600mm~800mm の区間でシェル要素の平均ひずみ ϵ_a とはり要素から求めた平均ひずみ ϵ_{ba} がほぼ一致しており、これより 2. 3. 4 で提案した損傷領域の長さ ($l_d=0.7D$) が適用できることがわかる。

図-2.17 は、解析対象橋脚におけるシェル要素を用いた非弾性有限変位解析とはり要素を用いた Pushover 解析より得られた水平荷重-水平変位関係を比較したものである。図より、橋脚の終局状態において、径厚比パラメータ $R_t=0.12$ の橋脚を除けば、FEM 解析とはり要素解析の水平荷重がほぼ一致していることがわかる。また、 $R_t=0.06$ の解析ケースでははり要素と FEM 解析で二次勾配に差があるものの、FEM 解析で得られた最大荷重時の最大変位にはり要素による解析が良く再現できているといえる。一方、径厚比パラメータ $R_t=0.12$ では、はり要素を用いた Pushover 解析より得られた水平荷重は、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析の結果よりやや大きくなっている。これは、 $R_t=0.12$ の供試体は径厚比パラメータが大きいため、橋脚の変形性能が小さく、局部座屈が生じた後に橋脚全体の安定性が失われ、耐力の低下が生じたからである。また、道路橋示方書に規定される円形鋼製橋脚の径厚比パラメータ $R_t=0.08$ より小さければ、局部座屈が最大荷重までの領域に与える影響が小さいと言える。

図-2.18 は、実験供試体と解析対象橋脚の FEM 解析より求めた平均ひずみと径厚比パラメータ R_t の関係を示したものである。解析対象の円形鋼製橋脚は、同一の径厚比パラメータ R_t において、軸力比を 10%、15%と変化させた。図-2.18 より、径厚比パラメータ $R_t=0.06$ の場合は、軸力比の影響によって、最大荷重時の平均ひずみの差が約 8%とやや大きい、他の橋脚は、軸力比の影響がほとんどみられない。したがって、ここで対象とした軸力比の範囲では、終局状態の平均ひずみに軸力比が与える影響が無視しても良いと考えられる。

図-2.18 に実験供試体 7 ケースと解析対象供試体 8 ケースの計 15 ケースの終局時平均ひずみと径厚比パラメータ R_t から指数関数で求めた回帰曲線を示す。回帰式を求めるにあたり、 $R_t=0.032$ の KC1 は径厚比パラメータが他の供試体と比較して小さいため、回帰式を求める時には径厚比パラメータの範囲を大きく越えるので対象から外した。回帰式の相関係数は 0.9914 であり、径厚比パラメータ R_t と平均ひずみの間に良い相関関係が得られた。回帰式は次式によって与えられる。

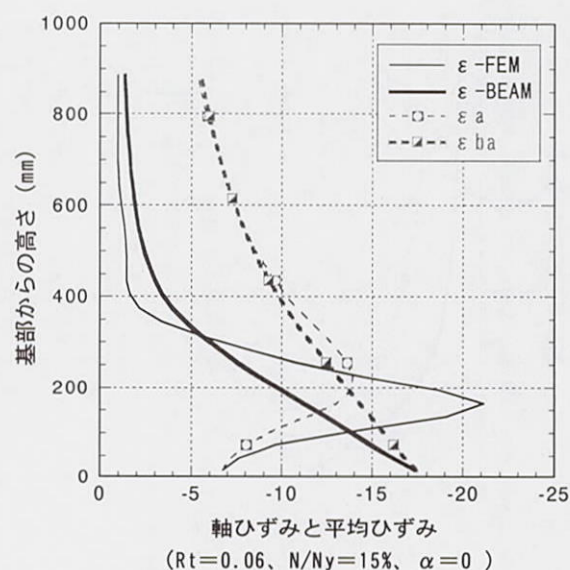
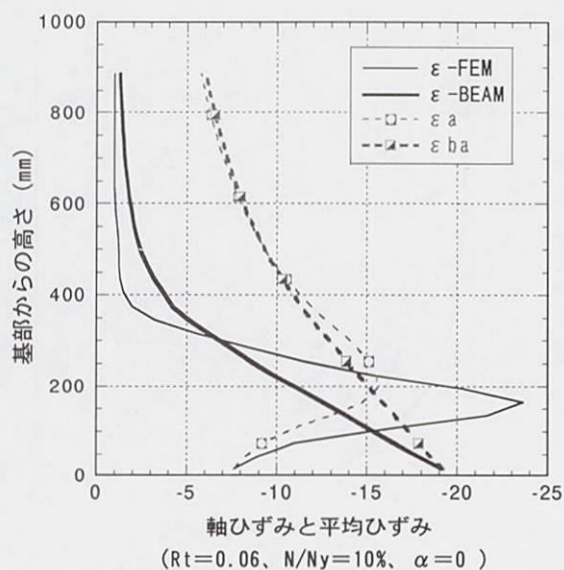


図-2.16(1) はり要素とシェル要素の平均ひずみの違い ($Rt=0.06$)

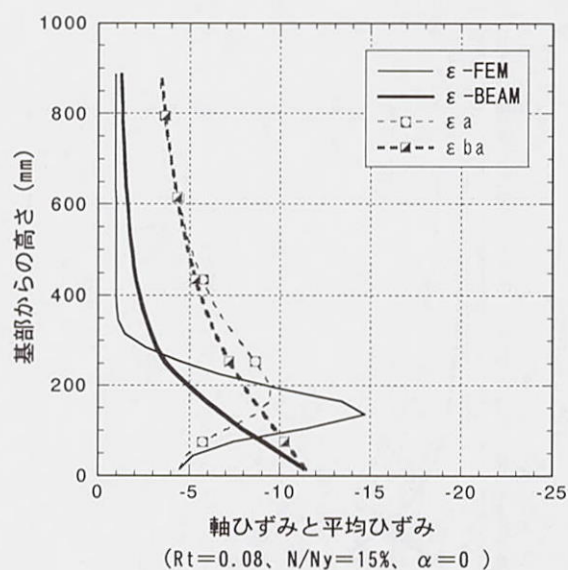
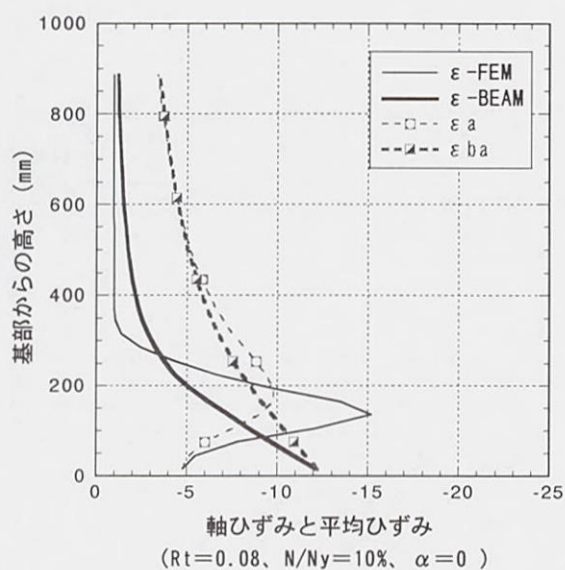


図-2.16(2) はり要素とシェル要素の平均ひずみの違い ($Rt=0.08$)

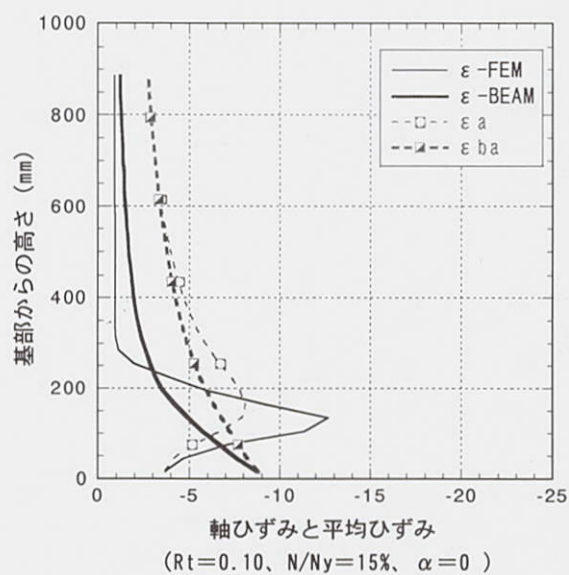
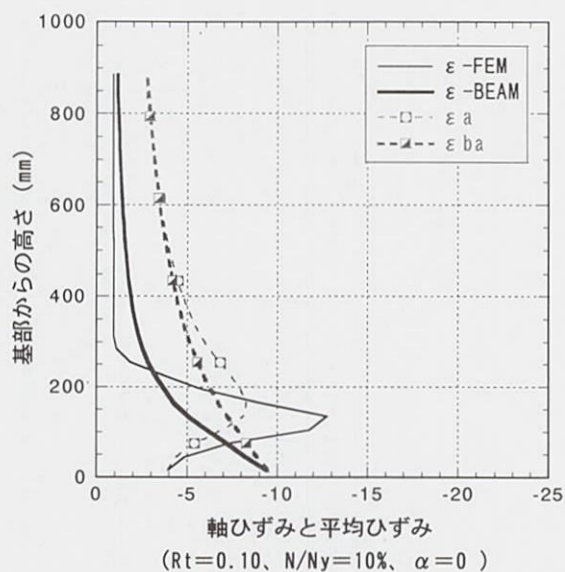


図-2.16(3) はり要素とシェル要素の平均ひずみの違い ($Rt=0.10$)

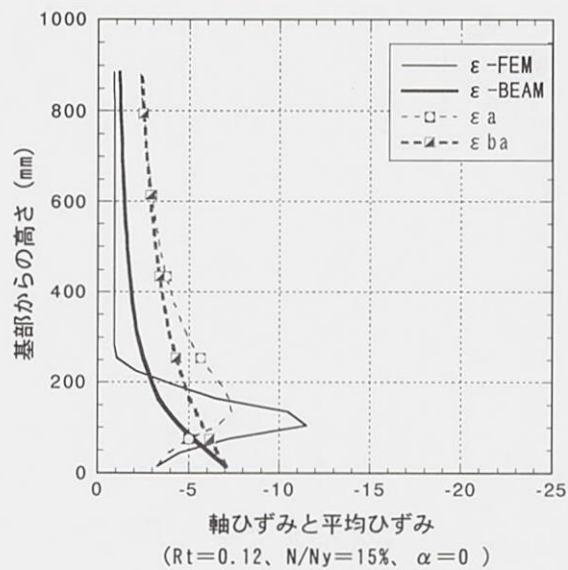
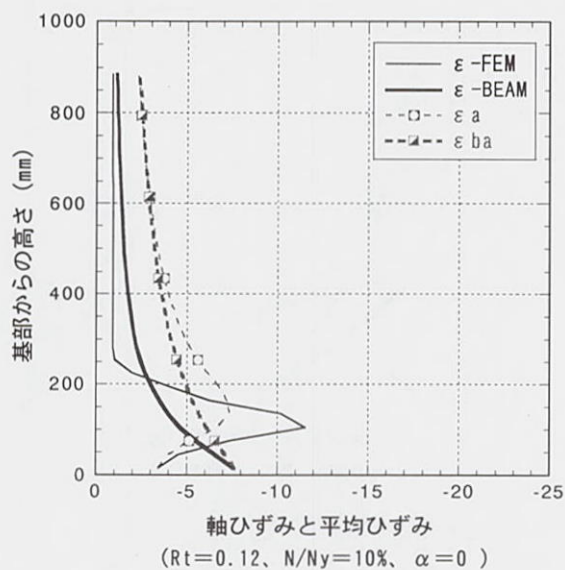


図-2.16(4) はり要素とシェル要素の平均ひずみの違い ($Rt=0.12$)

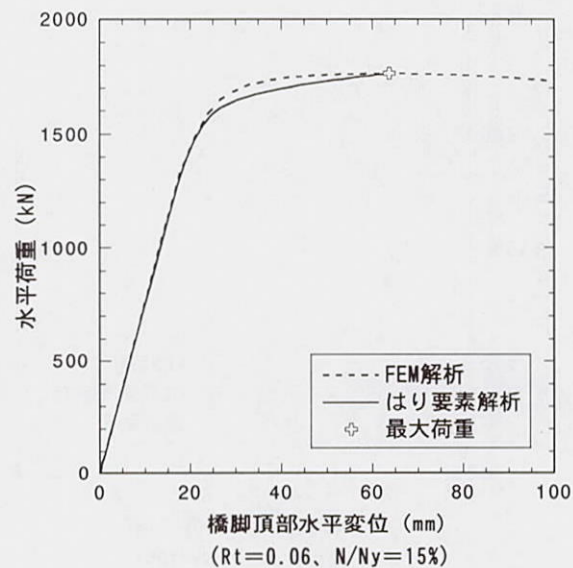
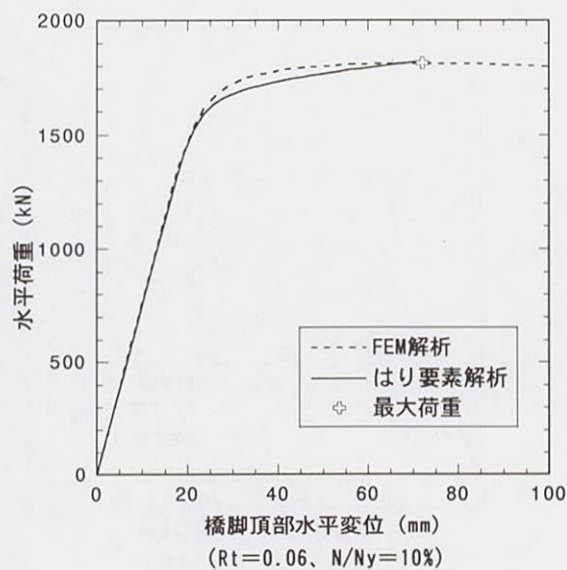


図-2.17(1) はり要素とシェル要素の水平変位－水平荷重関係の違い ($Rt=0.06$)

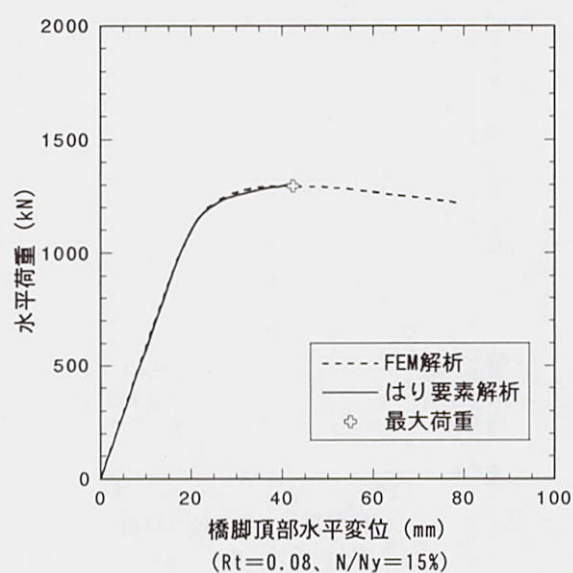
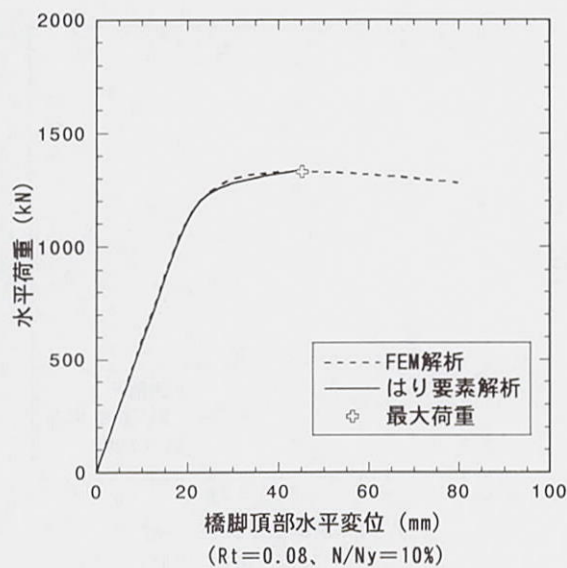


図-2.17(2) はり要素とシェル要素の水平変位－水平荷重関係の違い ($Rt=0.08$)

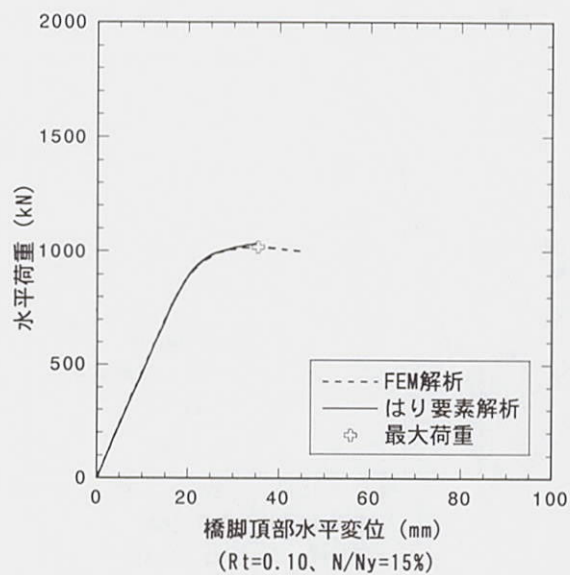
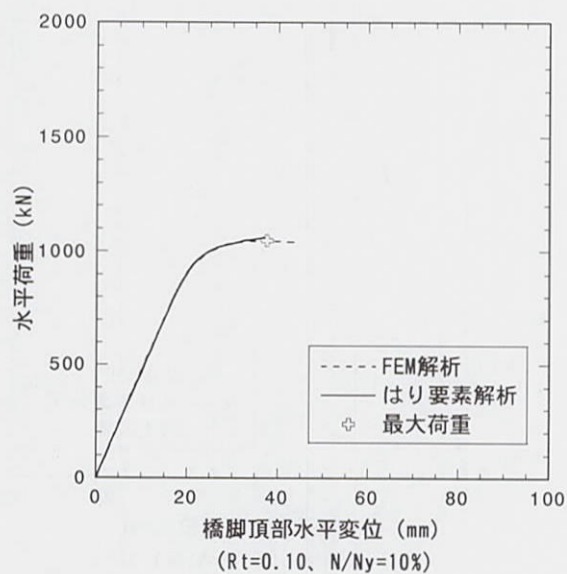


図-2.17(3) はり要素とシェル要素の水平変位-水平荷重関係の違い ($Rt=0.10$)

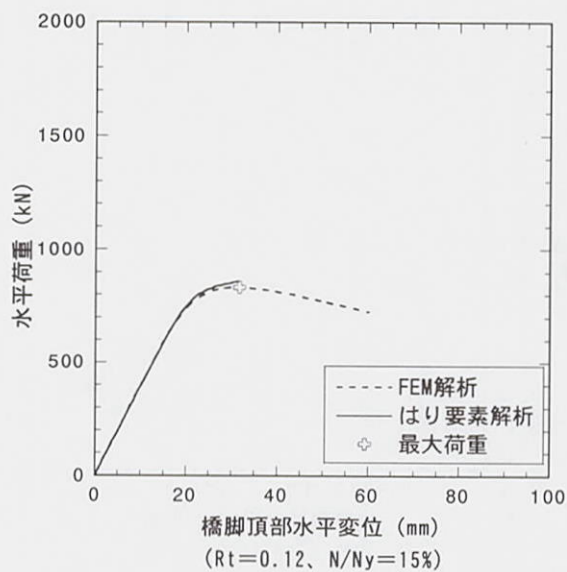
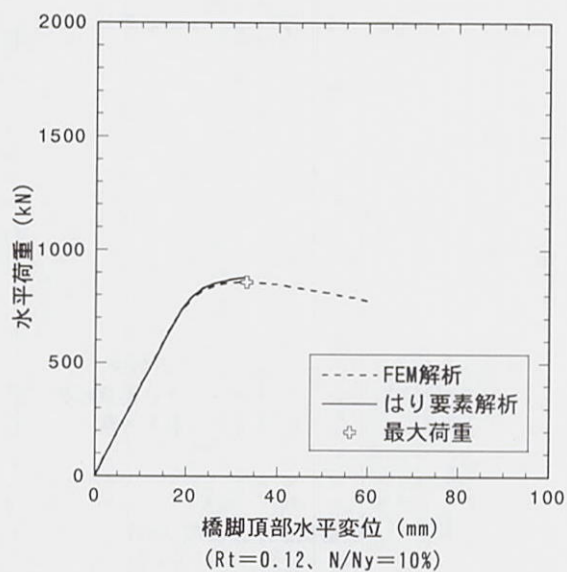


図-2.17(4) はり要素とシェル要素の水平変位-水平荷重関係の違い ($Rt=0.12$)

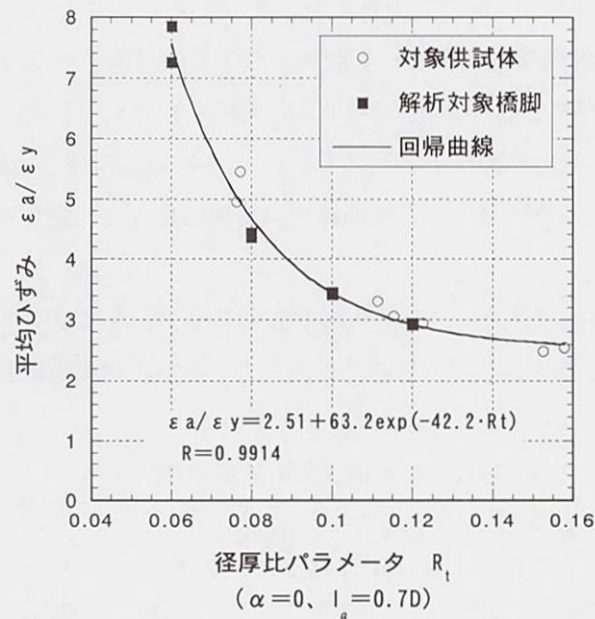


図-2.18 径厚比パラメータ R_t と平均ひずみの関係

$$\varepsilon_a / \varepsilon_y = 2.51 + 63.2 e^{-42.2 R_t} \quad \text{式 (2.8)}$$

上記の回帰式の適用範囲は、径厚比パラメータ R_t が 0.06～0.16 である。ここでは、式 (2.8) を円形鋼製橋脚の終局時に橋脚基部付近に生じる平均ひずみの評価式として提案する。この式がはり要素（ファイバーモデル）を用いた Pushover 解析にも適用することによって、円形鋼製橋脚の最大荷重とそのときの水平変位を求めることができる。

2. 5 模型実験橋脚との比較

シェル要素を用いた非弾性有限変位解析によるパラメトリックスタディを行い、円形鋼製橋脚の最大荷重時の平均ひずみと径厚比パラメータ R_t の関係を最小二乗法によって式 (2-8) のように定式化した。ここでは、鋼製橋脚の繰返し載荷実験における円形断面を有する供試体 7 基に対してはり要素（ファイバーモデル）を用いた Pushover 解析を行い、式 (2-8) より算出される平均ひずみに達する時の水平変位を求め、実験結果や FEM 解析結果と比較することにより式 (2-8) の適用性を検討する。なお、 $R_t=0.032$ の供試体 KC1 は径厚比パラメータが小さく、回帰曲線の適用範囲を大きく超えるので、ここでの比較からは外した。

表-2.9 は、対象供試体の径厚比パラメータ R_t 、円形断面の外径 D 、平均ひずみを評価する塑性損傷領域長 l_d および式 (2-5) より算出した平均ひずみ等を示したものである。損傷領域長 l_d は、 $0.7D$ とした。

表-2.9 対象とした供試体の終局平均ひずみ

供試体	高さ h (m)	外径 D (mm)	板厚 t (mm)	径厚比 パラメータ R_t	$\varepsilon_a / \varepsilon_y$ 式 (2-8)	l_d (mm)
KC2	3.3	850	13	0.111	3.088	595
KC3	3.3	850	13	0.158	2.591	595
No. 6	3.4	900	16	0.076	5.037	630
No. 8	3.4	900	9	0.115	2.997	630
No. 29	3.4	900	9	0.123	2.867	630
T7	5.0	900	16	0.077	4.945	630
M24	3.4	875	7	0.153	2.611	613

はり要素を用いた Pushover 解析は、前述したと同様に、せん断変形を考慮できる Timoshenko はり要素と 1%ひずみ硬化型の応力-ひずみ関係を適用した。供試体の平均ひずみは、式 (2-5) で定義したものをを用いた。

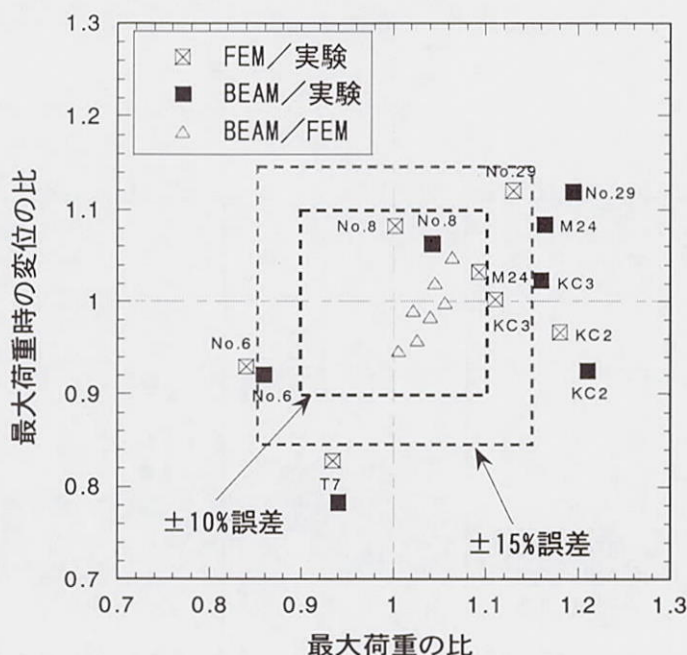
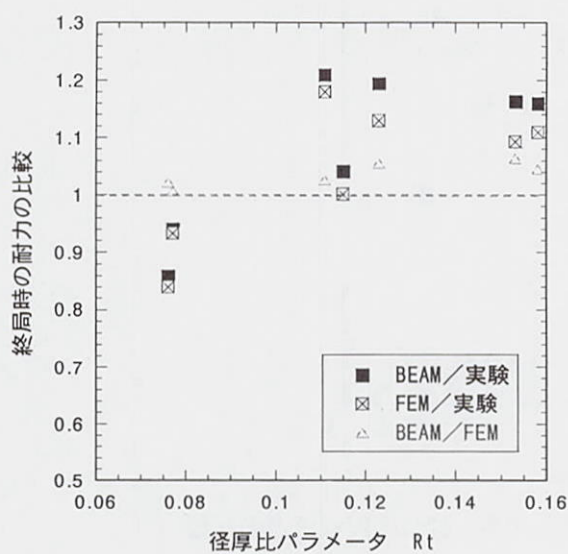


図-2.19 平均ひずみの提案式より求めた最大荷重と変位の実験値との比較

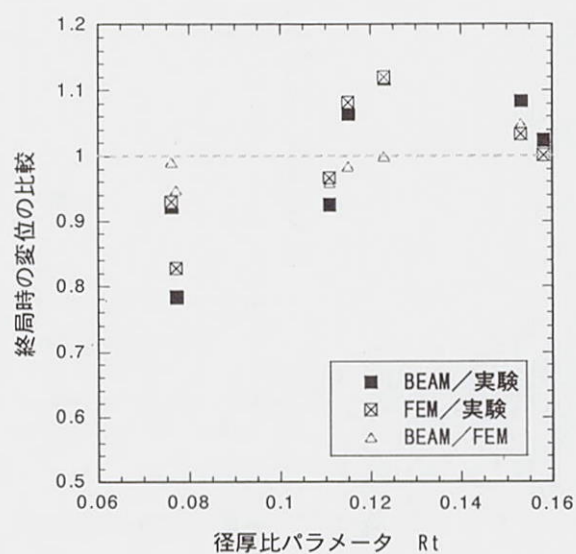
図-2.19 は、はり要素を用いた Pushover 解析より得られた実験供試体の最大荷重と最大荷重時の水平変位を実験結果や FEM 解析結果と比較したものである。Pushover 解析の値は、供試体の塑性損傷領域の平均ひずみ $\varepsilon_a / \varepsilon_y$ が表-2.9 に示した値に達した時の水平荷重と水平変位である。図-2.19 に示すように、Pushover 解析より得られた供試体の最大荷重とそのときの水平変位は、実験値と比較すると、シェル要素を用いた FEM 解析の結果よりバラツキはやや大きくなった。これは、はり要素を用いた Pushover 解析より得られた終局耐力は、全ての供試体においてシェル要素を用いた FEM 解析の終局耐力よりも大きいからである。しかし、はり要素の Pushover 解析と FEM 解析の結果を比較すると、両方の終局耐力と変位における差の最大値は約 6%と小さい。これより、平均ひずみの提案式 (2-8) は、円形鋼製橋脚の変性性能を評価するために行うはり要素（ファイバーモデル）を用いた Pushover 解析に適用できるといえる。

図-2.20 は、終局耐力や終局変位における解析結果と実験結果と比率が橋脚の径厚比パラメータ R_t によってどのように変化するかを示したものである。径厚比パラメータ R_t の増加に伴い、終局時の耐力と変位ともに解析の方は実験値より大きくなる傾向がある。道路橋示方書に規定される径厚比パラメータの制限値 0.08 より小さければ、解析より得られる耐力と水平変位は実験結果よりも小さくなっている。これより、ここで提案した式 (2-8) は、径厚比パラメータ R_t が 0.08 よりも小さい領域では設計上安全側の評価を与えることになる。

解析と実験より得られた水平荷重—水平変位関係の比較を図-2.21 に示す。最大荷重時の荷重と変位を見ると、提案式 (2-8) によって求めた平均ひずみとはり要素のファイバーモデルを用いた Pushover 解析の結果がシェル要素を用いた非弾性有限変位解析結果とほぼ一致していることがわかる。

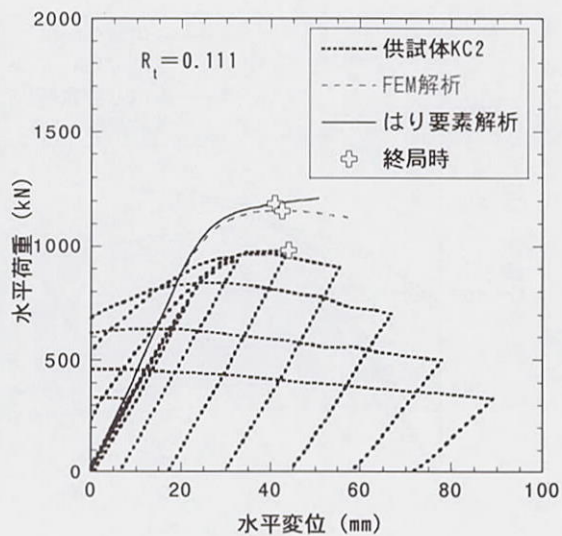


(1) 終局耐力の比較

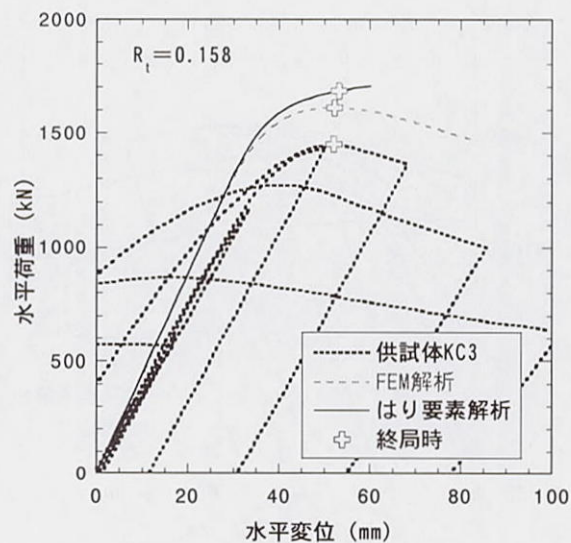


(2) 終局時の変位の比較

図-2.20 径厚比パラメータ R_t と橋脚の終局耐力および終局変位の比較

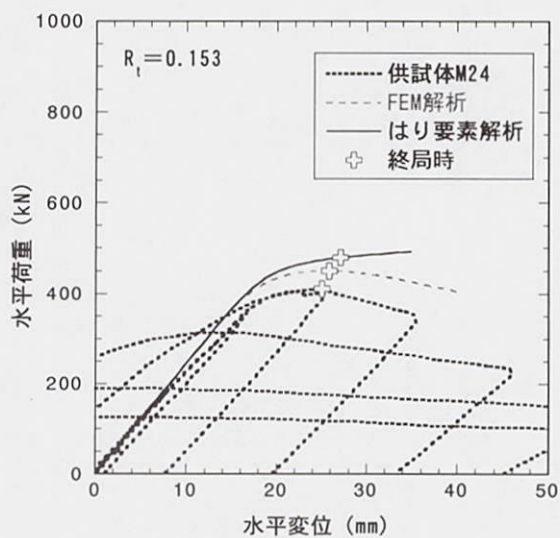


供試体 KC2

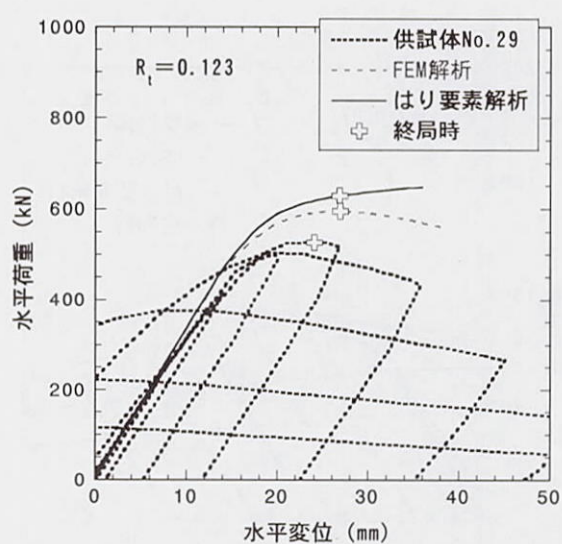


供試体 KC3

図-2.21(1) 解析より得られた水平荷重-水平変位関係と実験結果との比較

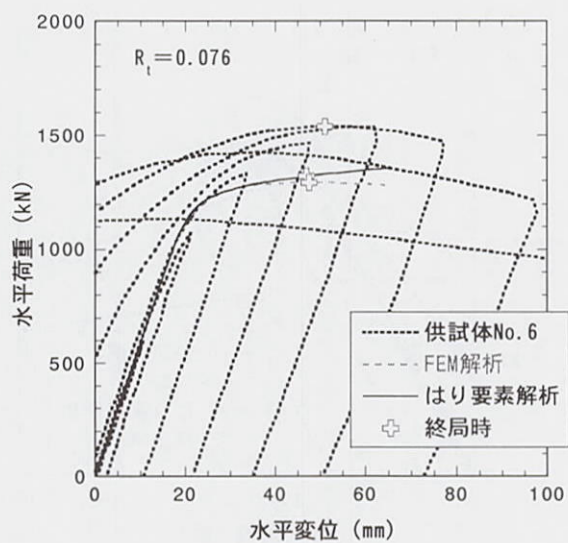


供試体 M24

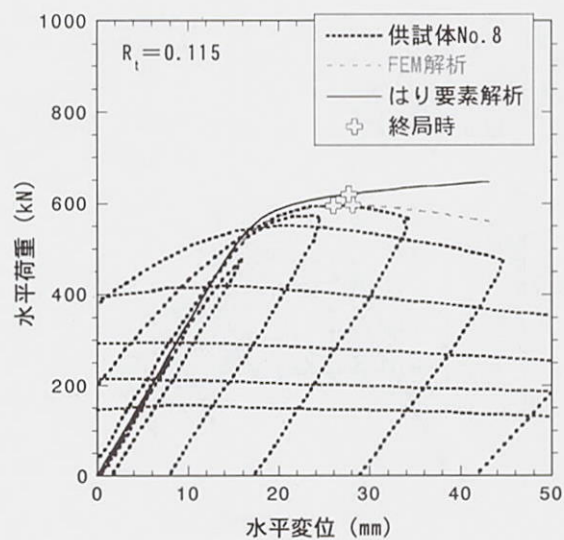


供試体 No.29

図-2.21(2) 解析より得られた水平荷重-水平変位関係と実験結果との比較

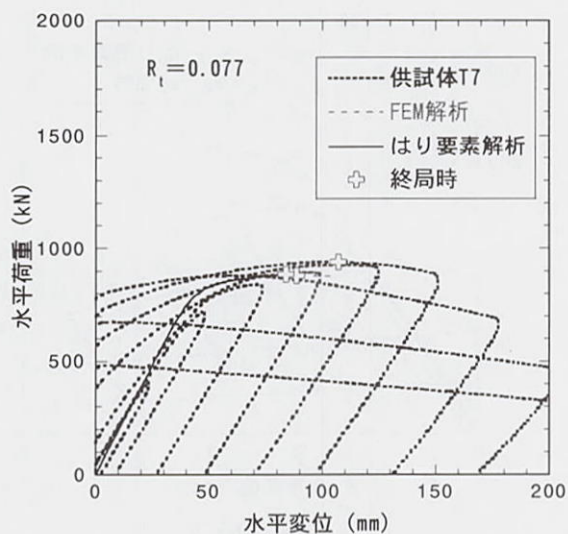


供試体No.6



供試体No.8

図-2.21(3) 解析より得られた水平荷重－水平変位関係と実験結果との比較



供試体 T7

図-2.21(4) 解析より得られた水平荷重－水平変位関係と実験結果との比較

3. 矩形断面を有する鋼製橋脚の終局変位の推定法の追加検討

3. 1 既検討結果と追加解析

前章までの円形鋼製橋脚の検討と同様の手法で矩形断面鋼製橋脚の変形性能推定のための検討を行っている⁶⁾。この既検討においては平均ひずみと幅厚比パラメータ R_F の関係を式(3-1) (以下、回帰式(1)と呼ぶ)のように導いている。図-3.1 に平均ひずみと幅厚比パラメータ R_F との関係を示す。この式(3-1)を求めるにあたっては、幅厚比パラメータ R_F を 0.25 から 0.55 まで 5 通りに変え、軸力比を 10, 12.5, 15% の 3 通り設定して橋脚断面を試設計したものと実験供試体のモデル 3 ケースを加えた計 18 ケースについて非弾性有限変位解析を行い、仮定した損傷領域長の平均ひずみと幅厚比パラメータ R_F との関係を導いたものである。この関係式を使って、実験供試体への適用性を前章までと同様にはり要素を用いたプッシュオーバー解析を行い、関係式のひずみに達するときの荷重、変位を求めることにより判断した。図-3.2 に実験結果と回帰式(1)より求められる解析結果のうち変位について示す。図-3.2 より幅厚比パラメータ $R_F \leq 0.3$ の領域では解析から求めた終局変位の値は実験結果より 1.3 倍から 2.4 倍程度大きく推定していることがわかる。

この原因として回帰式(1)を作成するために実施した橋脚の試設計における幅厚比パラメータ R_F は最小値が 0.25 であり、このような $R_F = 0.25$ の鋼製橋脚の変形性能は大きいため、水平耐力の低下が生じにくい。このため、解析上最大荷重点の判断が困難になるため、解析は最大荷重点を過大に評価してしまったということが考えられる。

回帰式(1)は R_F が 0.3 より小さい範囲では、平均ひずみが幅厚比パラメータ R_F の減少とともに急速に大きくなる。そのため本追加検討は幅厚比パラメータ $R_F < 0.3$ の領域における平均ひずみと幅厚比パラメータの関係が妥当なものであるかどうかを判断するために、 $R_F = 0.2$ のデータを追加して回帰式の検討を行ったものである。

$$\varepsilon_a / \varepsilon_y = 1.39 + 0.336 / (R_F)^{2.60} \quad \text{式(3-1)}$$

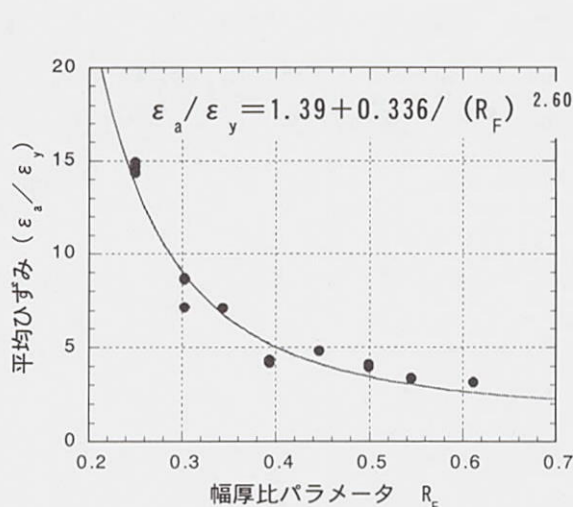


図-3.1 平均ひずみと幅厚比パラメータ R_F の関係

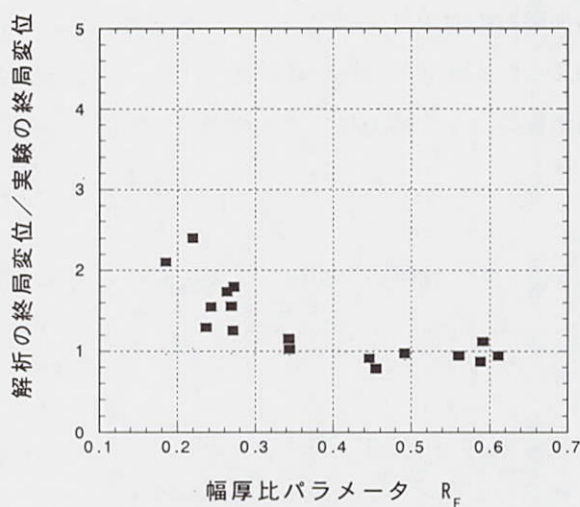


図-3.2 実験結果と解析結果の比率と幅厚比パラメータ R_F との関係

表-3.1 設定した断面の寸法

断面	柱長さ h	ダイヤフラム 間隔 a	全幅 B _F	板厚 t _F	リブ高 h _{FR}	リブ厚 t _{FR}	パネル 数 n _F	A (cm ²)	I (cm ⁴)
R _F =0.25	3423	550	900	10	80	12	6	548	665464
R _F =0.3	3423	600	900	9	75	12	5	465	570028
R _F =0.4	3423	600	900	10	70	10	4	440	552656
R _F =0.5	3423	900	900	10	75	12	4	464	575206
R _F =0.55	3423	900	900	9	70	11	4	413	515775
断面①	3423	450	900	9	85	10	5	457	559302
断面②	3423	450	900	9	80	13	5	487	591056
断面③	3423	450	900	10	80	12	6	548	665464

表-3.2 設定した断面の座屈パラメータ

断面	幅厚比 R _F	幅厚比 R _R	補剛板の 細長比 λ _s	リブ幅厚比 R _{rib}	橋脚の 細長比 λ	リブ剛比 γ _l /γ _{l,req}	リブ剛比 γ _l /γ _l *
R _F =0.25	0.249	0.327	0.186	0.443	0.259	3.840	1.740
R _F =0.3	0.302	0.436	0.234	0.415	0.258	2.570	2.110
R _F =0.4	0.393	0.490	0.289	0.465	0.255	1.588	1.588
R _F =0.5	0.499	0.490	0.384	0.415	0.256	0.964	0.964
R _F =0.55	0.544	0.544	0.429	0.423	0.255	1.000	1.000
断面①	0.2043	0.436	0.161	0.565	0.258	5.732	4.694
断面②	0.2037	0.436	0.159	0.409	0.259	5.747	4.710
断面③	0.2037	0.327	0.153	0.443	0.259	5.802	2.613

3. 2 追加解析条件の設定

追加解析の対象は幅厚比パラメータ R_F=0.2 の橋脚とした。この幅厚比パラメータ R_Fは式 (3-2) のように与えられるが 0.3 より小さい範囲のデータを追加するにあたり、幅厚比パラメータ R_Fに影響を与えるものは補剛板の板厚や補剛リブの大きさおよびアスペクト比であることがわかる。

$$R_F = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{\pi^2 k_F}} \quad \text{式(3-2)}$$

ここに、b：補剛板の全幅、t：板厚、σ_y：鋼材の板厚、E：ヤング率、μ：ポアソン比、k_F：座屈係数

$$k_F = \frac{(1+\alpha^2)^2 + n\gamma_l}{\alpha^2(1+n\delta_l)} \quad (\alpha \leq \alpha_0)$$

$$k_F = \frac{2(1+\sqrt{1+n\gamma_l})}{1+n\delta_l} \quad (\alpha > \alpha_0)$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{1+n\gamma_l}$$

α：補剛板の縦横寸法比（アスペクト比=a/b）、a：ダイヤフラム間隔、δ_l：縦補剛材 1 個の断面積比、γ_l：剛比、n：縦補剛材で区切られるパネル数

上述の理由により、幅厚比パラメータ R_F は補剛板板厚、補剛リブ寸法、アスペクト比によって異なることから、 $R_F=0.2$ という鋼製橋脚を満足する補剛板や補剛リブの寸法の組み合わせは複数存在することになる。本検討では3種類 $R_F=0.2$ の断面を設定した。表-3.1、3.2 に既検討と今回設定した断面の寸法と座屈パラメータを示す。断面①と断面②は、板厚は同じだが、断面①の補剛リブの座屈パラメータ R_{rib} が断面②の R_{rib} より大きくなるようにしたものである。断面③は、補剛板の板厚 t が他の2ケース $t=9\text{mm}$ より大きい $t=10\text{mm}$ とし、座屈パラメータ R_R を小さくしたものである。したがって、 $R_F=0.2$ となる3種類の鋼製橋脚における非弾性有限変位解析より、幅厚比パラメータ R_F だけでなく、補剛板の板厚や補剛材の剛性などが橋脚の変形性能に与える影響を確認できる。

6. 3 非弾性有限変位解析結果

(1) 非弾性有限変位解析結果

非弾性有限変位解析における解析条件は既解析と同条件とした。具体には塑性化と局部座屈が生じると予想される橋脚基部付近をシェル要素でモデル化し、他の部分をはり要素でモデル化した。鋼材の構成則は1%のひずみ硬化を有するバイリニア型の応力-ひずみ関係を用いた。軸力比は前述したとおり $N/N_y=10\%$ 、 12.5% 、 15% の3通りの軸力を作用させた。

表-3.3 は解析より得られた終局耐力比 P_u/P_y と塑性率 $\delta m/\delta y$ を示したものである。既解析と同様にここで解析した軸力比の範囲では終局耐力比と塑性率は3断面ともにほぼ等しく、軸力比が変形性能に与える影響は小さいといえる。断面①～③における終局耐力比の差は小さいが、断面③の塑性率は、断面①と②の塑性率より大きいことがわかる。このように、幅厚比パラメータ R_F が小さい領域では、同じ R_F を有する断面でも、板厚が大きいほど鋼製橋脚の変形性能が大きくなる傾向にある。これより、幅厚比パラメータ R_F が小さい領域では、 R_F だけを用いて鋼製橋脚の変形性能を評価することは不十分といえる。

表-3.3 各断面の終局耐力比 P_u/P_y と塑性率 $\delta m/\delta y$

解析 ケース	$N/N_y=10\%$		$N/N_y=12.5\%$		$N/N_y=15\%$	
	P_u/P_y	$\delta m/\delta y$	P_u/P_y	$\delta m/\delta y$	P_u/P_y	$\delta m/\delta y$
断面①	1.401	4.9	1.423	4.772	1.447	4.69
断面②	1.372	5.471	1.392	5.338	1.414	5.213
断面③	1.426	9.699	1.44	9.135	1.457	8.868

(2) 平均ひずみ分布

最大荷重時の平均ひずみは、文献6と同じにするため、矩形断面圧縮側フランジのシェル要素の軸ひずみによって定義した。図-3.3 に示す各シェル要素中心の軸ひずみ ε_{ij} の断面方向のひずみの平均値を ε_a と表記する。また、圧縮フランジの基部から高さ l_j の範囲に存在する全シェル要素中心の軸ひずみ ε_{ik} ($i=1,2,\dots$),

$n_i-1, k=1,2,\dots,j)$ の平均値を求め、その値を終局ひずみ ε_{a2} とする。

$$\varepsilon_{a2} = \left(\sum_{k=1}^j \left(\sum_{i=1}^{n_i-1} \varepsilon_{ik} \right) / (n_i - 1) \right) / j \quad j=1,2,\dots,n_j-1 \quad \text{式(3-3)}$$

図-3.4 は、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析より求めた最大荷重時の橋脚基部付近の平均ひずみ ε_a と ε_{a2} の分布を示したものである。図に示すように、断面①と断面②の鋼製橋脚のひずみ ε_a は、局部座屈が生じている基部の1つ目のパネルで大きく変化しているが、ダイヤフラムより上方部分ではひずみの値が小さく、その変化量も小さい。一方、断面③の鋼製橋脚のひずみ ε_a の分布は、基部から2つ目のパネルにかけて ε_a の変化が目立っている。

断面寸法の違いによる橋脚の変形性能を比較するため、軸力比が10%の場合における最大荷重時の平均ひずみ ε_a 分布を図-3.5 に示している。図-3.5 より断面①と断面②のひずみ ε_a は局部座屈が生じている基部の1つ目のパネルで大きく変化しているが、ダイヤフラムより上部ではひずみの値が小さく、その変化量も小さい。一方、断面③の鋼製橋脚のひずみ ε_a は基部から2つ目のパネルまで変化が及んでいる。また図-3.5 の平均ひずみ $\varepsilon_{a2}/\varepsilon_y$ から明らかなように、板厚が10mmの断面③では板厚9mmの断面①、②よりも2倍程度大きいひずみ分布をしている。この結果から同じ幅厚比パラメータ R_F の鋼製橋脚でも、補剛板の板厚の違いによって平均ひずみの値に大きな差が生じることがわかる。

3. 4 修正提案式の実験供試体への適用

(1) 新提案式の作成

図-3.6 は、前述した断面①～③の解析より得られた最大荷重時における橋脚の平均ひずみ ε_{a2} の9ケースと筆者らが既に解析を行っていた $R_F=0.25\sim0.61$ の解析結果18ケースに対して、幅厚比パラメータ R_F と終局平均ひずみ ε_{a2} の相関関係を示したものである。回帰式は式(3-4)のようになる。

$$\varepsilon_{a2} / \varepsilon_y = -14.28 + 13.32 / (R_F)^{0.4465} \quad \text{式(3-4)}$$

式(3-4)を求めるにあたり、平均ひずみを評価する損傷領域長として、宇佐美らの提案⁸⁾ および既検討結果からダイヤフラム間隔値 (a) と 0.7 倍の断面幅 ($0.7B$) で、小さい方の値 ($\min(a, 0.7B)$) としている。今回の追加解析ケースではダイヤフラム間隔 ($a=450\text{mm}$) を用いた。図-6.6 より板厚が9mmとなる断面①と断面②の平均ひずみは板厚が10mmとなる断面③の場合の平均ひずみよりも小さいことがわかる。これは断面の座屈パラメータ R_F 以外に補剛板の R_R や補剛材の R_{rib} も橋脚の変形性能に影響を与えていると考えられる。平均ひずみのばらつきが幅厚比パラメータ $R_F=0.2$ の9ケースで大きいため、回帰曲線上に解析結果が載っておらず、相関係数も0.837となっている。図-3.7 は座屈パラメータ R_F, R_R, R_{rib} と橋脚の平均ひずみの関係を示したものである。横軸は R_F と同じ次元になるように $\sqrt{R_F \sqrt{R_R \cdot R_{rib}}}$ という値を用いており、式(3-5) (以下、回帰式(2)と呼ぶ) のようになる。

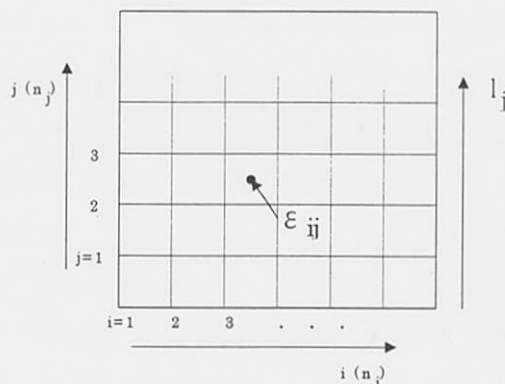


図-3.3 圧縮側フランジの要素分割

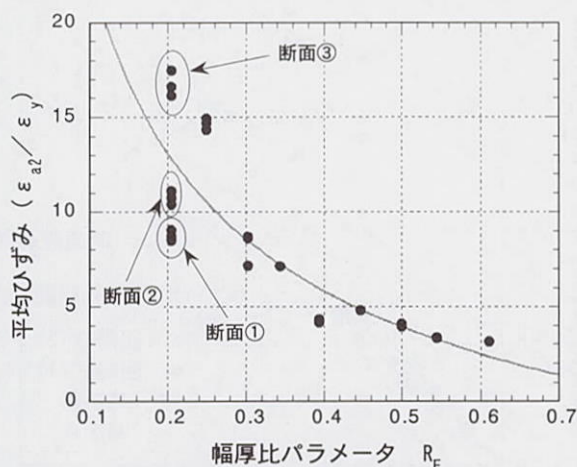


図-3.6 平均ひずみと幅厚比パラメータ R_F の関係

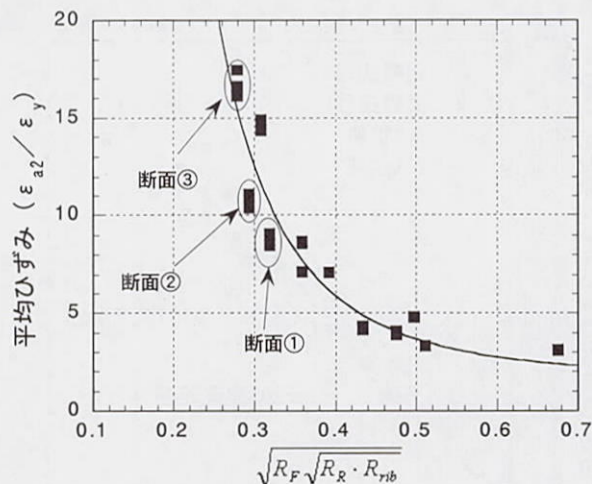


図-3.7 平均ひずみと $\sqrt{R_F \sqrt{R_R \cdot R_{rib}}}$ の関係

$$\frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_y} = 1.63 + 0.213 / \left(\sqrt{R_F \sqrt{R_R \cdot R_{rib}}} \right)^{3.27} \quad \text{式(3-5)}$$

図-3.6 を図-3.7 と比較すると、横軸が 0.2 から 0.3 の範囲で平均ひずみのばらつきが小さくなっていることがわかる。これによって回帰曲線上に解析結果が載ってくるようになり、相関係数も 0.937 と良い相関を示している。

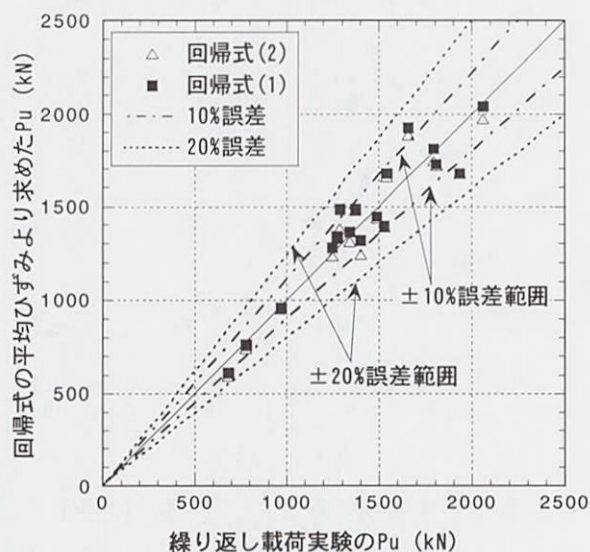
(2) 実験供試体への適用

表-3.4 は、はり要素を用いてプッシュオーバー解析を行い得られた平均ひずみが、回帰式(1)と回帰式(2)を用いて求めた平均ひずみに達する時の鋼製橋脚供試体の終局耐力 P_u と終局変位 δ_m を実験結果と比較したものである。表-3.4 より回帰式(2)は回帰式(1)に比べ、終局耐力と終局変位の解析結果と実験結果に対する比の標準偏差が小さくなっていることがわかる。また、回帰式(2)は終局耐力、終局変位共に解析結果のほうが実験結果よりも小さく算出されており、設計上安全側の評価を与えていることがわかる。

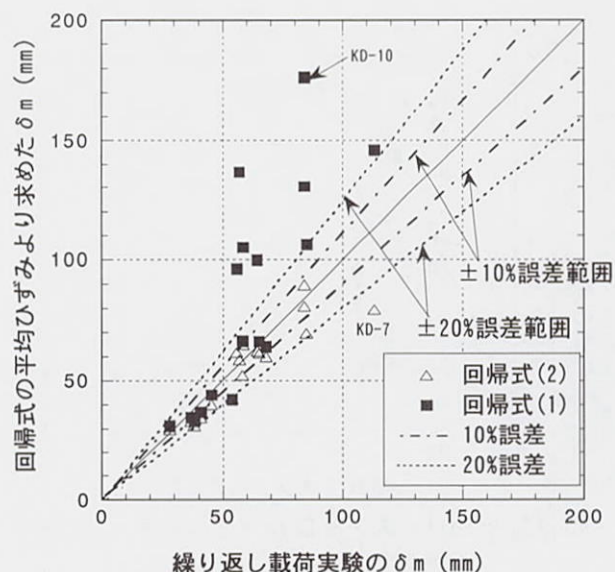
図-3.8 は正負交番载荷試験から得られた最大荷重とその時の水平変位を横軸に表し、プッシュオーバー解析結果を縦軸に表したものである。図-6.8(1)は縦軸に回帰式(1)、(2)により求めた最大荷重を示し、図-3.8(2)は最大変位を示

表-3.4 プッシュオーバー解析より求めた各供試体の終局耐力 P_u 、終局変位 δ_m と実験結果の比較

供試体	幅厚比 パラメータ R_F	回帰式(2)		回帰式(1)	
		P_u 解析 P_u 実験	δ_m 解析 δ_m 実験	P_u 解析 P_u 実験	δ_m 解析 δ_m 実験
No.2	0.588	0.907	0.823	0.912	0.869
No.3	0.454	0.866	0.783	0.865	0.780
No.18	0.591	1.042	1.060	1.049	1.116
No.20	0.611	1.078	0.896	1.084	0.942
T1	0.560	0.984	0.882	0.993	0.947
M18	0.219	1.071	1.028	1.156	2.401
M20	0.343	0.948	0.945	0.955	1.023
M21	0.342	1.139	0.900	1.163	1.149
M22	0.243	0.960	1.068	0.992	1.552
KD-1	0.446	0.963	0.852	0.969	0.908
KD-2	0.263	0.972	1.108	1.012	1.734
KD-3	0.272	0.975	1.113	1.013	1.799
KD-5	0.268	0.993	0.969	1.028	1.554
KD-6	0.271	0.954	0.821	0.981	1.255
KD-7	0.236	0.870	0.703	0.902	1.293
KD-10	0.185	0.887	0.964	0.940	2.103
B1	0.491	1.076	0.888	1.086	0.976
平均値		0.981	0.930	1.006	1.318
標準偏差		0.078	0.118	0.083	0.469



(1) 耐力力の比較



(2) 終局変位の比較

図-3.8 回帰式(1), (2)による解析結果と実験結果の比較

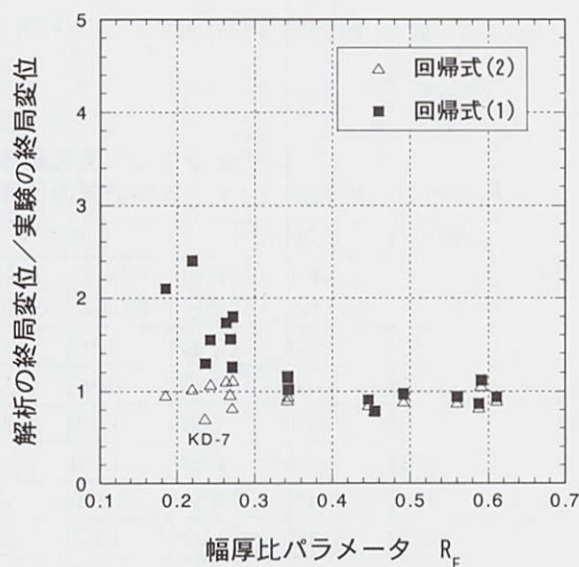


図-3.9 幅厚比パラメータ R_F と解析結果と実験結果の比率の関係

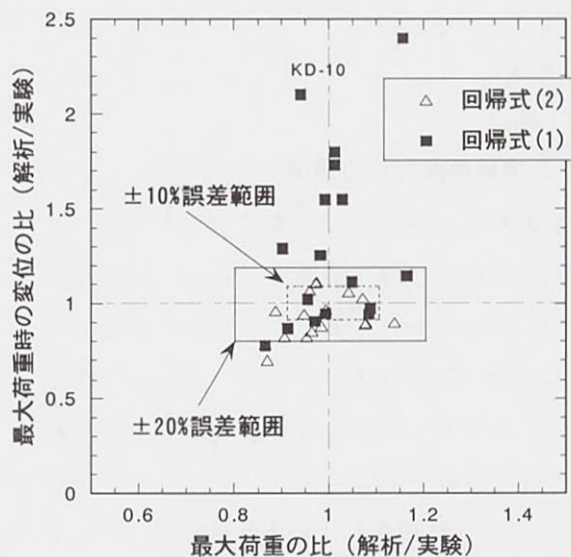


図-3.10 回帰式(1), (2)による解析結果と実験結果の比率の比較

す。図-3.8(1)より供試体の耐力力に関しては、両回帰式ともに求めた実験結果と解析結果の差はほぼ±10%以内にある。一方、図-3.8(2)より終局変位に関しては、回帰式(1)は実験結果よりも20%以上も大きな値が得られている。回帰式(2)は供試体 KD-7 を除けばほぼ±20%以内に収まっているのが分かる。

図-3.9 は表-3.4 の結果のうち、終局変位についてグラフに記したものである。回帰式(2)の平均ひずみより求めた供試体の終局変位と実験値の比は、供試体 KD-7 を除けば、ほぼ±20%以内にあり、回帰式(1)と比べ精度良く実験値を推定していることがわかる。

図-3.10 は横軸に最大荷重の解析と実験の比を取り、縦軸に最大荷重時の解析と変位の比を取り、両回帰

式の精度を比較したものである。この図により、回帰式(2)は、荷重、変位のばらつき共に概ね 20%の誤差範囲に入っているのがわかる。

以上の図-3.8 から図-3.10 より、終局平均ひずみを用いて鋼製橋脚の終局耐力と終局変位を評価する場合は、幅厚比パラメータ R_F 以外の座屈パラメータ R_R 、 R_{rib} も考慮したほうが、鋼製橋脚の変形性能の推定精度が高まることが確認された。

4. まとめ

鋼製円形橋脚の耐力と変形性能について、座屈パラメータ R_t に着目して解析的な検討を行った。結論をまとめると以下ようになる。

- (1) 鋼製円形橋脚に対して、シェル要素を用いた非弾性有限変位解析を行い、最大荷重時の平均ひずみと径厚比パラメータ R_t の関係を定式化した。
- (2) 提案式の適用性を見るため、繰り返し載荷実験の供試体の結果と比較すると、0.11～0.16 の R_t の範囲ではほぼ一致するが、道路橋示方書の制限値である $R_t=0.08$ より小さい領域では安全側の値を与える。

矩形断面鋼製橋脚の耐力と変形性能について、幅厚比パラメータ R_F に着目した追加検討を行った。結論をまとめると以下ようになる。

- (1) 同じ幅厚比パラメータ R_F を有する断面でも、板厚が大きいほど変形性能が大きくなる。このため、幅厚比パラメータが小さい領域では、 R_F だけを用いて鋼製橋脚の変形性能を評価するには十分ではない。
- (2) 橋脚の変形性能は、座屈パラメータ R_F 以外に、補剛板の R_R や補剛材の R_{rib} も影響を与える。この3つの座屈パラメータを用いて、終局平均ひずみとの回帰式を定式化した。

参考資料

- 1) 建設省土木研究所、首都高速道路公団、阪神道路公団、名古屋高速道路公社、(社)鋼材倶楽部、(社)日本橋梁建設協会、「道路橋橋脚の地震時限界状態設計法に関する共同研究報告書(I)～(VII)」、1997.4
- 2) 宇佐美勉：「ハイダクティリティ鋼製橋脚」、橋梁と基礎、97-6
- 3) 運上茂樹、寺山徹：「鋼製橋脚の終局変位の算定方法に関する検討」、第2回鋼構造物の非線形数値解析と耐震設計への応用に関する論文集、pp.99～106、1998.11
- 4) 深谷茂広、小野潔、沈赤、村越潤、西川和廣：「矩形断面鋼製橋脚の正負交番載荷実験結果を基にした曲げ-曲率関係の検討」、構造工学論文集、Vol.46A、pp.1365～1376、2000.3
- 5) 運上茂樹、寺山徹、林昌弘：「鋼製橋脚の終局変位の解析方法に関する研究」、土木研究所資料第 3670号、2000.1
- 6) 運上茂樹、林昌弘、河藤千尋：「鋼製橋脚の終局変位の解析法に関する研究(その2)非弾性有限変位解析による終局状態の評価」、土木研究所資料 3772号、2001.2
- 7) 福本秀士：「新体系土木工学9 構造物の座屈・安定解析」、pp.311～317、1982.2
- 8) 鄭沂、葛漢彬、宇佐美勉：「鋼構造物の強度と変形性能の統一的評価法、第3回鋼構造物の非線形数値解析と耐震設計への応用に関する論文集」、pp.25～32、2000.1

