

土木研究所資料
第600号



Mohrの応力円と Lameの応力橢円 の 性質と土圧解折への応用

昭和45年9月

建設省土木研究所

この資料はW. C. HUNTINGTON の「Earth pressure and Retaining Walls」の本をもとにして書いたものである。

現在、土圧に関する本はかなり多くみられるが、初めから判りやすくしかも丁寧に解説を加えたものは少ないので、ここに上記本を参考として主として土圧に対する考え方をまとめてみた。

土圧は土質力学の基本となるものであるから、この資料がそれに対するささやかな参考となれば幸である。

1970年 7 月

建設省土木研究所新潟試験所長

山 下 宏

佐藤工業株式会社技術研究部

岩 藤 正 彦

目 次

1. 一点における応力の釣合	3
2. モールの応力円	5
3. ラーメの応力楕円	9
4. 土の中の応力状態	15
5. ランキン土圧	17

1 一点における力の釣合

今、力を受けている物体の中の一点を通る任意の平面に作用する応力を考える場合、応力が垂直に作用する面を、主応力面(Principal Plane)という。又この面に作用する応力を、主応力(Principal Stress)とよぶ。いかなる点においても、主応力面は常に二つあり、これらは互いに直交する。

大きな垂直応力の作用する面を、第一主応力面(first principal plane)又は、最大主応力面(major plane)とよび、この面に作用する応力を、第一主応力(first principal stress)又は最大主応力(major principal stress)とよぶ。同様にして小さな垂直応力の作用する面を、第二主応力面(second principal plane)又は最小主応力面(minor plane)とよび、この面に作用する応力を、第二主応力(second principal stress)又は最小主応力(minor principal stress)という。

主応力面に作用する応力は垂直であるから、この面には剪断応力は働かない。又主応力はその点を通る任意の平面に作用する応力の中で、最大と最小の応力であることが後に示される。

基本三角形

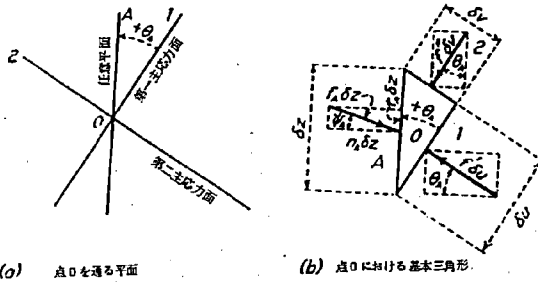
図1-1(a)に示すように、力をうけている物体の中の一点Oを通り、この紙面に垂直な三平面を描く、平面O1は第一主応力面、平面O2は、第二主応力面、平面OAは第一主応力面から反時計まわりに、 $+\theta A$ だけ傾いた任意の平面である。

点Oの位置において、図(b)に示すような、上の三平面に囲まれた基本三角形を考える。各平面を、その隣接する二つの範囲の記号を用いて、O1, O2, OA等と表示する。

第一主応力面O1に作用する主応力 f_1 、第二主応力面O2に作用する主応力

を f : 任意平面 OA に作用する応力を f_A とする。

f_A の法線成分を n_A , 接面成分を t_A とする。



(a) 点Oを通る平面

(b) 点Oにおける基本三角形

図1-1 基本三角形に作用する応力

符号の協約

混乱をさけるために、応力と角の符号を次の様にきめる。

1. 応力 f とその法線成分 n は、圧縮の時を 正とする。
2. 基本三角形に作用する剪断応力は、三角形を反時計まわりに回転させる方向を正とする。
3. 傾角 (ψ_A) は、正の剪断応力を生じさせる方向を正とする。
4. 応力円におけるすべての角は、ある基準線又は基準面から反時計まわりにはかった角を正とする。

基本三角形においては、正の傾角は常に法線から時計まわりの方向に傾いているので、負の角として計られる。しかしながら応力円図においては、反時計まわりの方向に計った傾角を正とする

基本三角形の釣合

図1-1 b に示した三角形が釣合するためには、 OA に垂直な方向の応力の成分の合計は0でなければならない。

$$\text{すなわち } n_A \delta Z - f' \delta V \cos \theta_A - f'' \delta V \sin \theta_A = 0$$

然るに $\delta V = \delta Z \cos \theta_A$ $\delta V = \delta Z \sin \theta_A$ であるから

$$n_A \delta Z - f' \delta Z \cos^2 \theta_A - f'' \delta Z \sin^2 \theta_A = 0$$

両辺を δZ で除して

$$\tau_A = f' \cos^2 \theta_A + f'' \sin^2 \theta_A \text{ ————— (a)}$$

同様にしてOA方向の応力の成分の合計も0でなければならないから、

$$\tau_A \delta Z - f' \delta V \sin \theta_A + f'' \delta V \cos \theta_A = 0$$

$$\tau_A \delta Z - f' \delta Z \cos \theta_A \sin \theta_A + f'' \delta Z \sin \theta_A \cos \theta_A = 0$$

$$\tau_A = (f' - f'') \sin \theta_A \cos \theta_A \text{ ————— (b)}$$

2 モールの応力円

式(a)(b)の関係は、次の応力円からもとめられる。

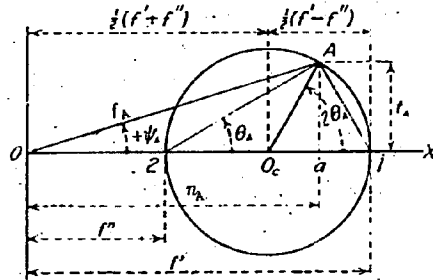


図2-1 応力円

この応力円は、次の様にして作図できる。

1. OX上にO1 = f' O2 = f'' となるように1, 2をとる。
2. 中心をOX上に持ち点1, 2を通る円を描く。円の中心をOcとする。
3. Oc1から反時計まわり、すなわち正の方向に任意の角∠1OcA = 2θAとなるように、円周上に点Aをとる。幾何学的に∠12A = θAとなる。
4. OAを結び垂線AaをOX軸に下す。

次に証明されるように、図1-1における平面OAに作用する応力は、図2-1においてfA = OAで、その法線成分はnA = Oaで、接面成分は、τA = Aaである。fAの傾角は+ψAで、水平軸から反時計まわりに計られるので符号は正である。

応力円の証明

図 2-1 より $1/2 = f' - f'' \quad A/2 = 1/2 \cos \theta_A = (f' - f'') \cos \theta_A$

$$a/2 = A/2 \cos \theta_A = (f' - f'') \cos^2 \theta_A$$

それ故 $n_A = \sigma_A = \sigma_2 + a/2 = f'' + (f' - f'') \cos^2 \theta_A$

$$= f' \cos^2 \theta_A + f'' (1 - \cos^2 \theta_A) = f' \cos^2 \theta_A + f'' \sin^2 \theta_A$$

これは、式(a)と同じである。

同様にして $t_A = A_a = A/2 \sin \theta_A = (f' - f'') \cos \theta_A \sin \theta_A$

これは、式(b)と同じである。

すなわち、応力円からもとめられた各応力の大きさ、傾角は、実際の平面に作用する応力の大きさ、傾角を正しく表わすことがわかる。

他平面に作用する応力

上に述べたように、点Oにおける応力円は、その点を通る任意平面に作用する応力と、その点における主応力との関係を正しく示す。同様にしてその点を通る任意平面OBに作用する応力と主応力との関係も示すことができる。それ故、応力円は、平面OA、OB、その他その点を通るすべての平面に作用する応力間の正しい関係を示すことができる。

今二平面OAとOBとの関係をもとめる方法を図2-2に示す。

OA平面上の点Oにおける応力円を図2-1を参考にして(a)に描く。

(b)に示された平面OA上の点Oに作用する応力 f_A とその傾角 ψ_A は、前に述べたように応力円周上の点Aによって決定される。

(b)に示された平面OB上の点Oに作用する応力 f_B とその傾角 ψ_B は、次のようにして決定する。

- (b)において角度の符号が負であるから(a)において $\angle XOc'B = 2\theta_B$ となるようにXOcから時計回りの方向にBをとれば良いのであるが今平面AOとBOとのなす角を $-\theta$ とすれば(a)において、Aより時計まわりの方向に $\angle AOc'B = 2\theta$ となるようにBをとればよい。
- OBを結べば、これは平面OBに作用する応力 f_B に等しく、この傾角はOXから時計まわりの方向にあるから負で $\angle XOB = -\psi_B$ であ

る。

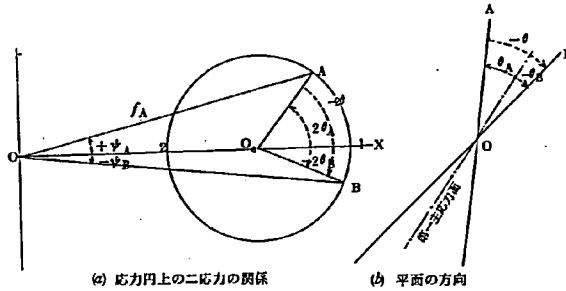


図 2-2 任意の二平面に作用する応力の関係

図 2-1 において、応力円を描く時は、主応力 f と f' が与えられていたが、図 2-2 を考慮すれば、 OA 、 OB のような任意の二応力の大きさとその傾角が既知であれば、応力円を作図することができる。なぜならば OX 上に中心を持ち、点 A 、 B を通る円は一つしか存在しないからである。それ故主応力を知る必要はなくなる。

極の位置とその利用

図 2-2 と同じ応力円において次に述べる補助線を引けば、前述した応力の関係を、中心角を利用してもとめるよりも簡単にもとめることができる。

1. 方向既知の平面 OA に作用する応力によって決定される図 2-3(a)上の点 A から(b)に示す平面 OA に平行線を引き円周との他の交点をもとめる。この交点は極 (Pole) と呼ばれ、 O_P で示される。

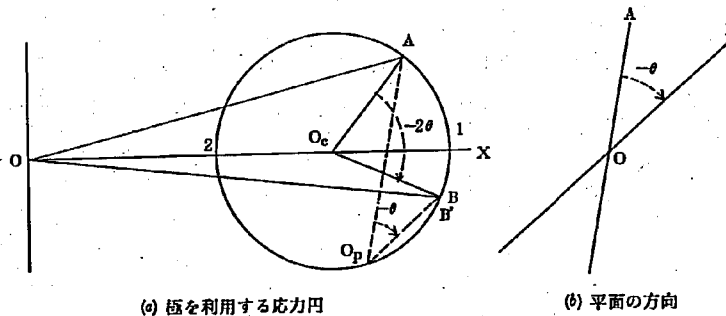


図 2-3 極の位置

2. O_P から平面 O_B に平行線を引き、円周との交点を B' とする。この交点 B' は、前に述べた方法によって求めた点 B と一致することは容易にわかる。 O_B を結べば、前に述べたように平面 O_B に作用する応力 f_B に等しく、傾角は $-\psi_B$ である。

すなわち、与えられた点における応力円と極の位置がわかれば、その点を通るすべての平面に作用する応力の大きさと傾角は、図 2-3 の要領で容易にもとめることができる。

主応力面と主応力

ある点における応力円と極の位置がわかっているならば、その点における主応力面の方向と主応力の大きさは、容易に決定される。

第一、第二主応力面の方向は各々 $O_P 1$ と $O_P 2$ で示され、主応力は $f^1 = O_P 1$ 、 $f^2 = O_P 2$ で示される。

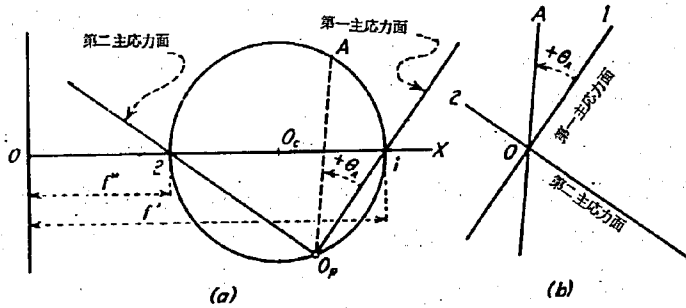


図 2-4 主応力面と主応力

傾角が最大となる平面

ある点における応力円と極の位置が、わかっているならば、その点を通り傾角が最大となるような平面の方向とその時の傾角は次のようにしてもとめられる。

1. 原点 O を通り応力円に接線を引く、接点を M , N とする。
2. 正の最大傾角をなす平面の方向は OPM で表わされ、応力のなす最大傾角は $\psi_{\max} = \angle XOM$ で表わされる。
3. 負の最大傾角をなす平面の方向は OPN で表わされ、応力のなす最大傾角は $\psi_{\max} = \angle XON$ で表わされる。
4. これらの平面に作用する応力は等しくて、 $f_M = \sigma_M$, $f_N = \sigma_N$ である。

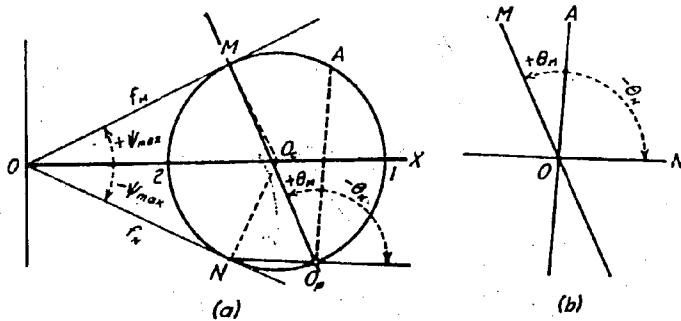


図 2-5 傾角が最大となる平面

3 ラーメの応力楕円

ある点における応力状態により応力円が描かれると、その点における応力楕円も、図 3-1 に示すように容易に描ける。

(b) に示した応力円が前に述べた方法で作図されたとする、応力楕円は次のようにして作図する。

1. (b) において OP_1 を結ぶ。これは第一主応力面の方向であるとともに、楕円の短軸の方向である。同様にして OP_2 を結べば、これは第二主応力面の方向であるとともに、楕円の長軸の方向である。
これらの平面を (a) に描く。
2. (a) において、任意点 O を通って (b) に平行に長軸 $2-2$ を引き、その線上に $O_m = l$ となるように m をとる。同様にして、(a) に平行に短軸 1

-1 を引き、その線上に $On = f'$ とするよりに n をとる。

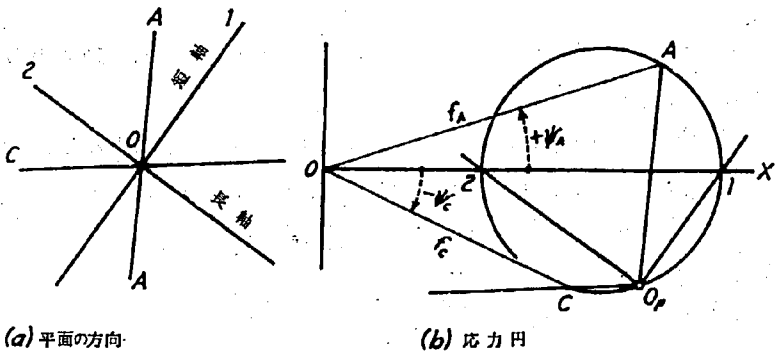
図に示すように、大円と小円とを描く。

3. (a)における任意平面 OC に平行に(c)において OC を引き、これに法線 OC' を引く。この法線と大円との交点を C' 、小円との交点を O'' とする。
4. C' を通って短軸に平行線を引く。 O'' を通って長軸に平行線を引く。両者の交点を O とする。これは応力楕円上の点である。
5. CO を結ぶ。これは平面 OC に作用する応力 f_c の大きさに等しく、方向は実際に作用する応力の方向と一致している。平面 OC にたてた法線と f_c とのなす角は、 f_c の傾角で(c)においては ψ_c として示されている。

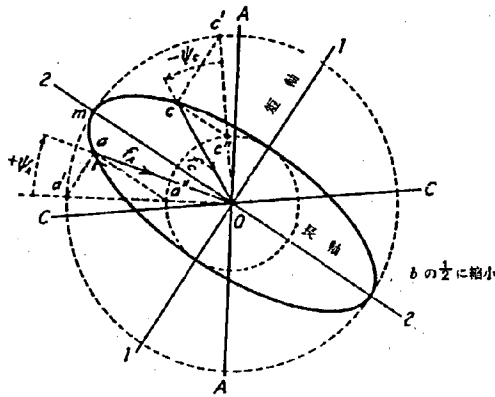
これは法線から反時計まわりにはかられるので負である。(c)から得られた f_c と ψ_c の値で、(b)より得られた値を照合すればよい。

(a)における平面 OA 上の応力 f_A の大きさとその傾角 ψ_A は(c)から同じようにしてもとめられる。点 a も又応力楕円上に乗る。

これらの値を(b)からもとめようとすれば、極 O_p を通り平面 OA に平行線を引けばよい。この線と応力円との交点を A とすれば、前に述べたように $OA = f_A$ で OA と水平軸 OX のなす角は ψ_A である。これは点 O に関して時計まわりの方向に計られるので正である。



三
内



(c) 応力楕円

図3-1 応力円を利用した応力楕円の作図

Oを通るいろいろな平面に対して作図したaやc等のすべての点の軌跡は、図に示したように応力楕円をなす。応力楕円は直接に作図できるけれども上に述べた方法が簡単であろう。

応力円から得られないような知識は、応力楕円からも得られない。けれども応力円においては、平面の方向が実際の平面の方向と一致して示せるように、応力楕円においては、応力の方向が実際に作用している応力の方向と一致するので、説明する場合に便利である。

応力楕円の証明

図3-1 aに示した主応力面と任意平面AAに囲まれた基本直角三角形を図3-2 aに示す。(a)に作用する力の三角形を(b)に示す。

$$(b)より \quad (f_A \delta z)^2 = (f' \delta u)^2 + (f'' \delta v)^2$$

然るに $\delta u = \delta z \cos \theta_A$ $\delta v = \delta z \sin \theta_A$ であるから

$$(f_A \delta z)^2 = (f' \delta z \cos \theta_A)^2 + (f'' \delta z \sin \theta_A)^2$$

$$すなわち \quad f_A^2 = (f')^2 \cos^2 \theta_A + (f'')^2 \sin^2 \theta_A \quad (c)$$

図3-1 cに示した応力楕円を、次の説明をわかりやすくするために、少し修正して図3-2 cに示す。長軸は最小主応力面又は第二主応力面と一致し、短軸は最大主応力面又は第一主応力面と一致することはもち

らんである。

(c)より $f_A^2 = (oe)^2 + (ea)^2$ _____ (d)

然るに $oe = oa' \cos \theta_A$ $ea = ga'' = oa'' \sin \theta_A$ _____ (e)

$oa' =$ 大円の半径 $= f'$ _____ (f)

$oa'' =$ 小円の半径 $= f''$ _____ (g)

であるから (e) (f) (g) より

$oe = f' \cos \theta_A$

$ea = f'' \sin \theta_A$ となる。

これらの値を(d)に代入すると

$f_A^2 = (f')^2 \cos^2 \theta_A + (f'')^2 \sin^2 \theta_A$

これは(c)と同じである。

すなわち応力楕円は図3-2 bの力の三角形から得られたものと同じ結果を与える。

点Oにおける応力楕円は、その点を通る任意平面に作用する応力の大きさと主応力の値とを関係づけるので、応力円と同じようにその点を通るすべての平面に作用する応力の相互関係を明示することができる。

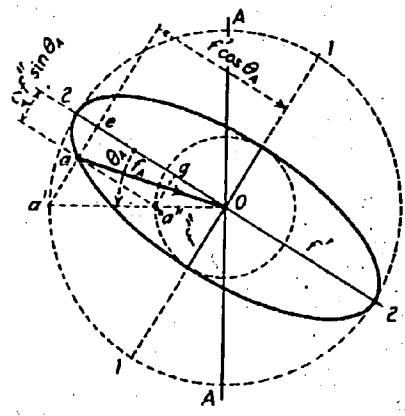
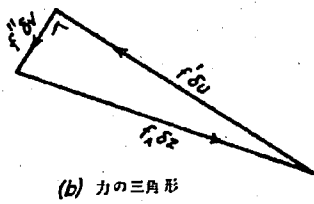
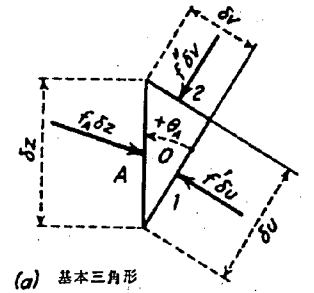


図3-2 応力楕円の証明

例題 A 応力円

力をうけている物体の中の点Oを通り、鉛直線から 5° ($\omega_A = +5^\circ$) 左側に傾いている平面OA上の一点に作用する応力は $f_A = 1400 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ で、その傾角は $\psi_A = 15^\circ$ である。その点を通る平面OBに作用する応力は、 $570 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ で、その傾角は $\psi_B = -20^\circ$ である。

応力円を利用して次の間に答えよ。

1. 平面OBと鉛直線とのなす角 (ω_B) と、平面OAとOBとのなす角 (θ_B) とをもとめよ。
2. 主応力 (f_1 と f_2) の大きさと、鉛直線と主応力面 (O_1 と O_2) のなす角 (ω_1 と ω_2) とをもとめよ。
3. 最大、最小剪断応力の大きさ (t_{\max} と t_{\min}) と、その作用する平面 (O_C と O_D) が鉛直線となす角 (ω_C と ω_D) をもとめよ。
又、最大、最小剪断応力がおこる面に作用する応力 (f_C と f_D) の大きさとその傾角 (ψ_C と ψ_D) をもとめよ。
4. 正の最大傾角がおこる平面OEと鉛直線とのなす角 (ω_E)
負の最大傾角がおこる平面OFと鉛直線とのなす角 (ω_F)
正の最大傾角の大きさ (ψ_E)
負の最大傾角の大きさ (ψ_F)
正と負の最大傾角がおこる平面に作用する応力 (f_E と f_F) とその時の剪断応力 (t_E と t_F) の大きさをもとめよ。

B 応力楕円

応力円よりもとめられた各値をもとにして、Aと同じ点Oにおける応力状態のもとで、応力楕円を作図せよ。

1. Aでもとめられた主応力の大きさと方向と主応力面の方向を利用して応力楕円のための大円と小円を描け。
2. Aでもとめられた平面OAとOBの方向を利用して、この平面に作用する応力の大きさ (f_A と f_B) とその傾角 (ψ_A と ψ_B) をもとめよ。

3. Aでもとめられた最大，最小剪断応力の作用する平面OCとODの方向(ω_C と ω_D)を利用して，この平面に作用する応力の大きさ(f_C と f_D)と傾角(ψ_C と ψ_D)をもとめよ。
4. Aでもとめられた正と負の最大傾角がおこる平面OEとOFの方向を利用して，この平面に作用する応力の大きさ(f_E と f_F)と傾角(ψ_E と ψ_F)をもとめよ。

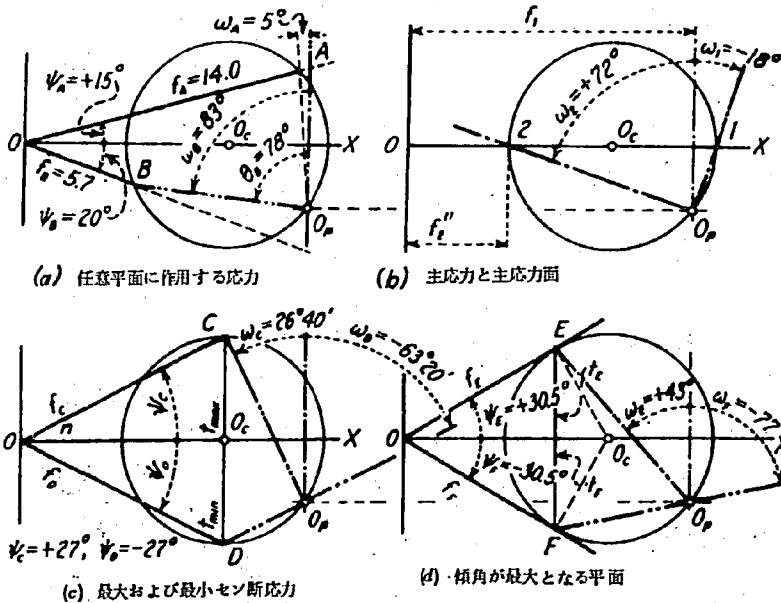
解答

今までにのべた方法によって図3-3に示した解答が得られる。

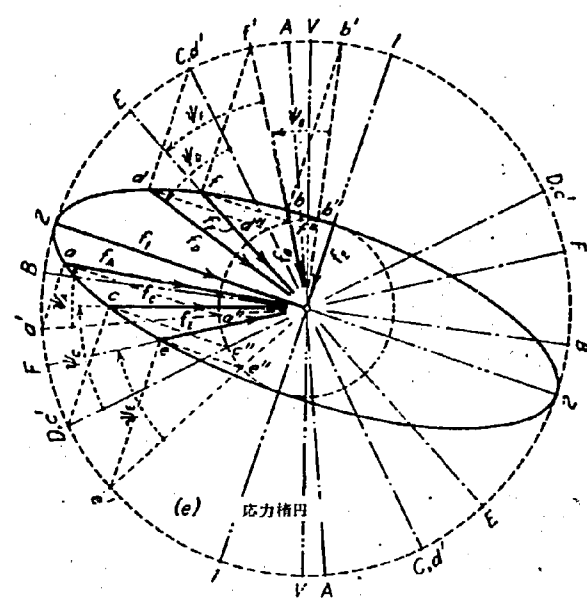
図3-3のaからdまで四つの応力円によって値をもとめたが，これは説明上の混乱をさけるためであり，もちろん一つの応力円によってすべての解答をもとめることができる。

図3-3eには数値は記していないが，これらの値は，aからdまでの応力円によってもとめられた値と同じである。

図3-3 例題の解答



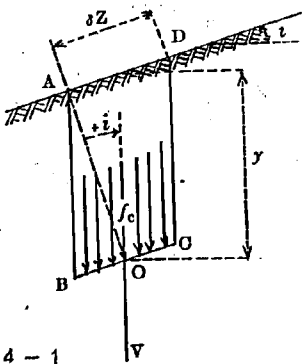
四
月



4 土の中の応力状態

土中の鉛直方向の圧力

図4-1に示すように、地表面から y の深さにある点 O を通り、地表面に



平行な平面 BC に作用する力は平行四辺形 $ABCD$ の重さに等しい。

今地表面の水平面に対する傾きを i とし、土の単位体積重量を w とすると $\square abcd$ の重量は $w \cdot y \cdot \delta z \cos i$ であるから bc に作用する応力を f_0 とすると

$$f_0 \delta z = w \cdot y \cdot \delta z \cos i$$

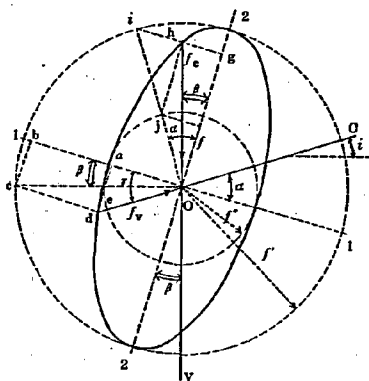
すなわち $f_0 = w y \cos i$ である。

図4-1

幾可学的に傾角は+ i である。

共役応力

図4-1に示したように、地表面と平行な平面BCに鉛直応力 f_c が作用している場合、応力 f_c に平行な平面すなわち鉛直な平面OVに作用する応力の方向をもとめてみる。今図4-1のO点における応力楕円が図4-



2に示すように描けたとする。水平面と i なる傾きをなす平面OCには鉛直応力 f_c が作用している。
 f_c と同方向すなわち鉛直な平面OVに作用する力を前にのべた方法でもとめて f_v とする。

図4-2

短軸1-1と平面OCのなす角 $\angle 10c = \alpha$ とすると、幾可学的に $\angle 20i = \alpha$ となる。

長軸2-2と鉛直応力 f_c とのなす角 $\angle 20h = \beta$ とすると幾可学的に $\angle 20v = \beta$, $\angle b0c = \beta$ となる。

鉛直平面OVに作用する応力 f_v と短軸1-1とのなす角 $\angle 10d = \gamma$ とす

ると、 $Og = Oi \cos \alpha = f \cos \alpha$

$$gh = fi = Oi \sin \alpha = f \sin \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{gh}{Og} = \frac{f \sin \alpha}{f \cos \alpha} = \frac{f'}{f''} \tan \alpha \quad \text{————— (a)}$$

$$Oa = Oe \cos \beta = f' \cos \beta$$

$$ad = bc = Oe \sin \beta = f' \sin \beta$$

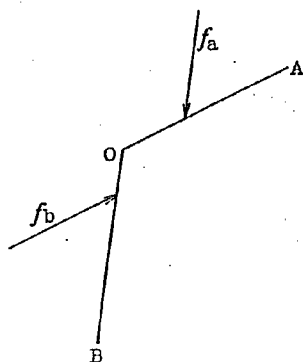
$$\tan \gamma = \frac{ad}{Oa} = \frac{f' \sin \beta}{f' \cos \beta} = \frac{f''}{f'} \tan \beta \quad \text{————— (b)}$$

(b)に(a)を代入すると

$$\tan \gamma = \frac{f'}{f''} \tan \beta = \frac{f'}{f''} \cdot \frac{f''}{f'} \tan \alpha = \tan \alpha \quad \gamma = \alpha$$

すなわち、 f_v の作用方向は平面OCの方向と一致する。

図4-3に示すように、平面OAに応力 f_a が作用している時、 f_a の作用方向に平行な平面OBに作用する応力 f_b の方向は、上で証明した通り



平面OAに平行となる。

このような応力 f_a と f_b とを共役応力とよぶ。

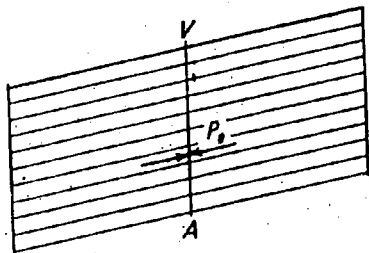
図4-3 共役応力

5 ランキン土圧

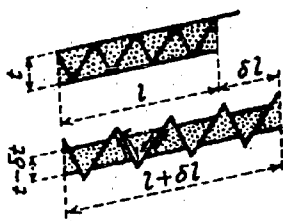
粘着力のない土塊におけるランキン状態

土の半無限体を図5-1に示す。説明上この半無限体を地表面に平行な平面で薄くわける。仮想平面AVに作用する土圧を P_0 とすると、これは静止土圧で、図4-2で説明したように地表面に平行である。

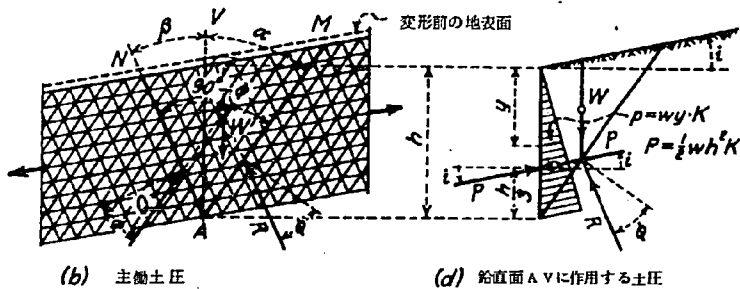
図5-1 粘着力のない土の半無限体におけるランキンの主動応力状態



(a) 静止土圧



(c) セン断による横方向の伸び



もしも(a)に図示した土塊が横方向に少しひろがったとすると、(b)に示すような無数の斜面にしたがって、土の剪断強度に等しい剪断応力が発生する。当然剪断応力は他のすべての斜面に発生するが、それらは土の剪断強度よりも小さいので、剪断面はできない。剪断面に作用する応力の傾角はもろん ϕ に等しく、この面にそっておこる剪断に抵抗するむきに傾いている。二組の剪断面又はすべり面は各々平行で無数にある。

土塊が横方向にひろがると(c)に示したように各層は少し薄くなるので土の深さ \$h\$ は少し減少する。

(b)に示すように、任意の剪断面AM, ANに囲まれた楔AMNに作用する力RとQは、面AM, ANの下から $\frac{1}{3}$ の点に作用し、その傾角は、楔の重さWをささえるむきに ϕ だけかたむいている。平衡を保つために、R, Q, Wは一点でまじわる。

上に述べた土塊の状態を、主動応力状態又は塑性平衡状態又はランキンによって研究されたので、ランキンの主動応力状態とよぶ。この時の横方向の土圧を、主動土圧とよぶ。

主動応力状態を発生させるのに必要な横方向の変位以上に土塊がひろがっても主動土圧の大きさは変化しない。

鉛直平面AVに作用する主動土圧はPで示され、後に証明されるように

$$P = \frac{1}{2} wh^2 \cos i \frac{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}} = \frac{1}{2} wK^2 K \quad (5-1)$$

となる。

又剪断面と鉛直平面とのなす角 α , β も後に証明されるように

$$\alpha = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) + \frac{1}{2} (\varepsilon - i) \quad (5-2)$$

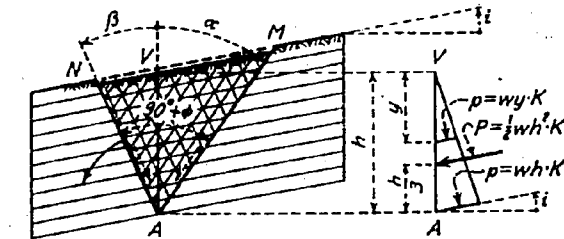
$$\beta = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) - \frac{1}{2} (\varepsilon - i) \quad (5-3)$$

となる。

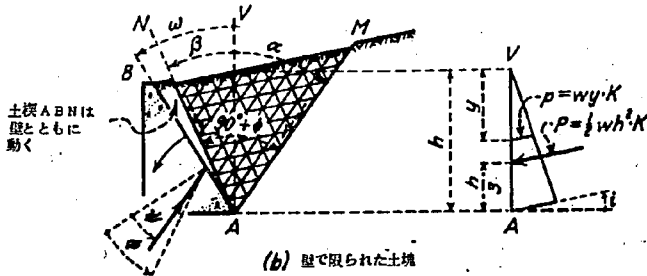
但し
$$\varepsilon = \frac{\sin i}{\sin \phi}$$

もしも図5-2 a に示すように A 点を中心にして左の部分が少し回転運動をおこせば、各層は横にひろがる。剪断による破壊面は図5-1 b と同様に A M, A N 面にそっておこる。楔 A M N 内には無数の剪断面が発生してランキンの主動応力状態になる。しかし楔の外側は、弾性応力状態のままである。変形前の地表面と A N の位置を(a)に点線で示す。

各層のひろがり量は、A N の実線と点線にはさまれる部分であられるが、これは A からの距離に正比例しているため、各層の伸び率は同じである。それ故各層は同時に主動応力状態になる。



(a) A を中心とした回転運動による土楔の伸長



(b) 壁で限られた土楔

図5-2 土楔の伸長——ランキンの主動応力状態

もしも $A N$ の左の部分が平行移動をするか、又は回転運動の中心が A より下にあるような場合は、下層の伸び率は、上層の伸び率よりも大きくなる。それ故上層が主動応力状態に達した時には、下層には過度のひろがりがおこっている。しかし、前に述べたように主動応力状態に必要な変位以上にひろがったとしても、主動応力状態や主動土圧の大きさには変化はない。 $A M$ 等のように、上りの方向に伸びていく平面を、内向き破壊面、 $A N$ のように、下りの方向に伸びていく平面を、外向き破壊面と呼ぶ。これらの平面 $A M$ 、 $A N$ が鉛直面となす角をそれぞれ、内向き破壊角 (α) 外向き破壊角 (β) と呼ぶ。

図 5-2 b に示すように、擁壁の後端 A を通る外向き破壊面が、壁背面によって妨げられなくて、この破壊面と壁背面に囲まれた土が壁背面にそってすべり落ちないならば、土楔は二つの破壊面によって囲まれ、この内部には (a) に示したランキンの主動応力状態がいきわたる。

この時には、公式 (5-1) (5-2) (5-3) 等が使用できる。

擁壁背面に作用する土圧は、鉛直面 $A V$ に作用する土圧と、壁背面と鉛直面に囲まれた部分の土の重さとの合力である。合力が壁背面となす傾角は、壁背面と土の摩擦角よりも小さい。

すなわち次の二条件が満足されれば、ランキンの主動応力状態が発生する。

1. 壁背面が、壁底から発生する外向き破壊面を妨げない。
 2. 壁背面と外向き破壊面の間の土が、壁背面にそってすべらない。
- 2 の条件は、壁背面に作用する土圧の合力の傾角 ψ が、壁背面と裏込め土との摩擦角 ϕ' よりも小さければ満足される。

$\psi = \phi'$ の場合はランキンの主動応力状態になる。

図 5-3 a に示すように、粘着力のない土の半無限体が、横方向に少し圧縮された場合には、無数の斜面にしたがって土の剪断強度に等しい剪断応力が発生する。当然剪断応力は主応力面をのぞいた他のすべての面にも発生するが、それらは土の剪断強度よりも小さいので剪断面はできない。

剪断面に作用する応力の傾角は もちろん ϕ にひとしく、この面にそってお

こる剪断に抵抗するむきに傾いている。二組の剪断面又はすべり面は各々平行で無数にある。

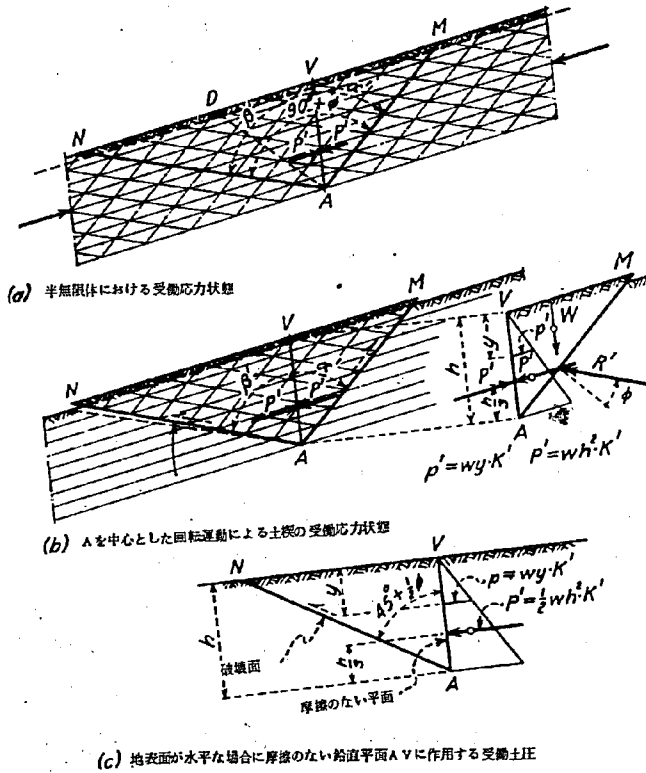


図5-3 土楔の圧縮——ランキン受働応力状態

土塊が横方向に圧縮を受けると、図5-1cに示した場合と逆になり、各層は少し厚くなり土の深さ h は増加する。

上にのべた土塊の状態を、受働応力状態又は、ランキンによって研究されたので、ランキンの受働応力状態とよぶ。この時の横方向の土圧を受働土圧とよぶ。

鉛直平面AVに作用する受働土圧は P' で示され、後に証明されるように、

$$P' = \frac{1}{2} \omega h^2 \cos i \frac{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}} = \frac{1}{2} \omega h^2 K' \quad (5-4)$$

となる。

又、剪断面と鉛直平面とのなす角 α' 、 β' も後に証明されるように

$$\alpha' = \frac{1}{2} (90^\circ + \phi) - \frac{1}{2} (\varepsilon + i) \quad (5-5)$$

$$\beta' = \frac{1}{2} (90^\circ + \phi) + \frac{1}{2} (\varepsilon + i) \quad (5-6)$$

となる。但し $\varepsilon = \frac{\sin i}{\sin \phi}$

図5-3 aの任意平面ADに作用する受働土圧は、鉛直面AVに作用する受働土圧と△ADVの自重の合力である。

公式5-1と公式5-4からもわかるように、地表面の傾斜角 i と土の内部摩擦角 ϕ とが等しい場合には、主働土圧と受働土圧は等しくなる。

もしも図5-3 bに示すように、A点を中心として左の部分が少し回転運動をおこせば、各層は圧縮される。剪断による破壊面は図5-3 aと同様にAM、AN面にそっておこる。楔AMN内には無数の剪断面が発生してランキンの受働応力状態になる。変形前の地表面とANの位置を点線で示す。各層の圧縮量はANの実線と点線にはさまれる部分であらわされるが、これはAからの距離に正比例しているので、各層の縮み率は同じである。それ故各層は同時に受働応力状態となる。

もしもANの左の部分が、回転運動とともに平行移動したような場合には、下層の縮み率は上層の縮み率よりも大きくなる。それ故上層が受働応力状態に達したときには、下層には過度の縮みがおこっている。しかし、受働応力状態や受働土圧の大きさには変化はない。

AM等のように、上りの方向に伸びていく平面を、内向き破壊面、ANのように下りの方向に伸びていく平面を外向き破壊面とよぶ。

これらの平面AM、ANが鉛直面となす角をそれぞれ、内向き破壊角 (α)、外向き破壊角 (β) とよぶ。

図5-3 bの右に示すように、鉛直面AVに作用する主動土圧 P' は地表面に平行で合力は下から $\frac{1}{3}$ の点に作用し、破壊面に作用する力 R は傾角が ϕ で、土楔AMVが平衡するためには、土楔の自重 W と P' 、 R は一点で交わらなければならない。

図5-3 cで示すように、地表面が水平で、壁面AVが鉛直で摩擦が無い場合には、土圧 P' は壁面に垂直すなわち地表面に平行なので、ランキン状態と一致する。壁面の摩擦を無視するのは安全側である。

ランキンの土圧公式の誘導

A 主動土圧

ある応力の大きさと傾角

図5-4 aに示すように地表面から y の深さにある点Oにおける主動応力状態を求めるために応力円を描く。

図4-1に示したように、地表面に平行な面に作用する応力は、大きさが $f = \omega y \cos i$ で、傾角が $+i$ である。

もしも土塊が、横方向にひろがって主動応力状態になれば、図5-1に示したような、斜め方向の二組の破壊面にそって、土の剪断強度に等しい剪断応力が生ずる。図5-4 bに、地表面下 y の所における、二つの破壊面と地表面に平行な平面によって囲まれた基本三角形を示す。土塊が横方向にひろがれば、基本三角形は下方にすべり出そうとするので、これに抵抗する応力が(b)に示すように破壊面に作用する。それ故破壊面OMに作用する応力の傾角は正で、ONに作用する応力の傾角は負である。

以上を要約すれば、

1. 地表面に平行な平面OIに作用する応力は $f = \omega y \cos i$ で、その傾角は $+i$ である。
2. 破壊面OMに作用する応力は正の傾角をもち、破壊線図にしたがって土を破壊させるのに十分な強度をもつ。
3. 破壊面ONに作用する応力は負の傾角をもち、破壊線図にしたがって

土を破壊させるのに十分な強度をもつ。

応力円

上に述べた条件を満足する図5-4dに示される応力円は、次のようにして作図する。

1. 基準線OXの上側に、正の剪断に相当する破壊線図XOFを引く。
同様にして下側に、負の剪断に相当する破壊線図XOF'を引く。
2. $\angle XOE$ が傾角 $+i$ に等しくなるようにOEを引く。
 $\angle XOE'$ が傾角 $-i$ に等しくなるようにOE'を引く。
3. f の傾角は $+i$ であるから、OE上に $OI = f = w y \cos i$ となるようにIをとる。 f を表わすのに使った尺度が、以下にのべるすべての応力の尺度となる。
4. OX上に中心を持ち、Iを通り、OFにM点で接する最小の円を描く。
この円の中心をO₀とする。(b)における破壊面OMに作用する応力は(a)においてはOMに等しく、その傾角は当然 $+\phi$ である。この平面に作用する剪断応力は(a)に示すように $+M_m$ で、破壊線図XOFで示されるように、土の剪断強度に等しい。
5. 幾何学的に円はNでOF'に接する。(b)における破壊面ONに作用する応力は(a)においてはONに等しく、その傾角は当然 $-\phi$ である。
この平面に作用する剪断応力は(a)に示すように $-N_n$ で、破壊線図XOF'で示されるように土の剪断強度に等しい。
6. 円周上の点Iは、(b)に示した地表面に平行な平面OIに作用する応力によって決まるので、図2-3において説明したように、極O_Pの位置は、Iを通り平面OIに平行な線と円周との交点にある。
今の場合OEは地表面に平行なので、極O_Pは(a)に図示した位置にある。
7. 点Mは内向き破壊面に作用する応力を決める点であるので、O_PとMを結ぶ線は、(b)における内向き破壊面の真の方向を与える。この平面と鉛直線との間の角は内向き破壊角 α である。同様にして、O_PとN

を結ぶ線は、(b)における外向き破壊面の真の方向を与える。この平面と鉛直線との間の角は、外向き破壊角 β である。

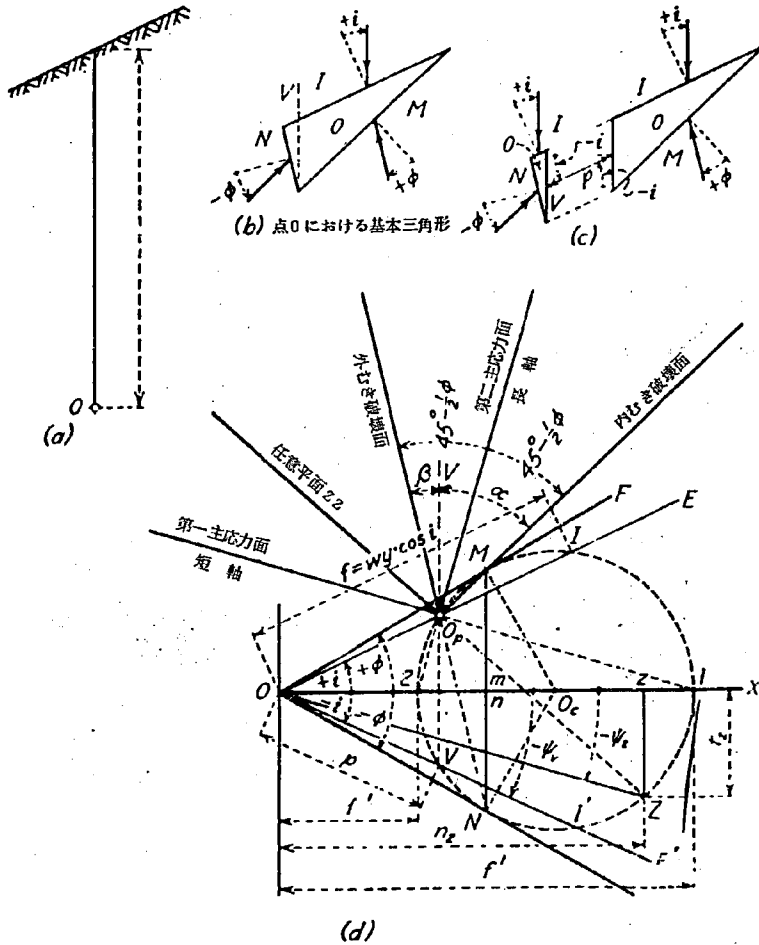


図5-4 主働応力状態の応力円

8. O_P を通る鉛直線と円周との交点を V とする。 O_V は鉛直平面に作用する主働応力 P を示す。(b)における基本三角形を(c)に示すように鉛直面で二つの基本三角形に分ける。両方の鉛直面に示した応力 P は傾角が i で、図4-2に示したように、地表面に平行である。
9. 任意平面 O_Z に作用する応力の大きさとその傾角をもとめるために、(a)に示すように O_P を通り、 O_Z に平行線を引き、円周との交点を Z とする。応力は $f_z = O_Z$ 、傾角は $\psi_z = -\angle XOZ$ 、その法線成分は、
 $n_z = O_Z$ 接面成分は $t_z = -Z Z$ であらわされる。
10. 第一、第二主応力の大きさは(a)に示す通り $f = O_1$ 、 $f = O_2$ であらわされる。第一主応力面すなわち応力楕円の短軸の方向は $O_P 1$ で、第二主応力面すなわち応力楕円の長軸の方向は $O_P 2$ であらわされる。 $O_P 2$ を正確に描くことは、度々困難なことがあるが、 $O_P 1$ に垂直に描けば、正確に描ける。
11. (a)において示す通り第二主応力の作用する面を決定する半径 $O_c 2$ は破壊面の位置を決定する半径 $O_c M$ と $O_c N$ の中間にあるので、第二主応力面は、破壊面のなす角を二等分する。然るに $O_c 2$ は、楕円の長軸でもあるので、この軸は、破壊面のなす角を二等分する。

証明 図5-4 d において

$$\angle R_o O_p P_r = \angle 2 O_p N = \frac{1}{2} \angle 2 O_c N = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) = 45^\circ - \frac{1}{2} \phi$$

$$\angle R_o O_p R_i = \angle M I N = \frac{1}{2} \angle M O_c N = \angle 2 O_c N = 90^\circ - \phi$$

$$\therefore \angle R_i O_p P_r = \angle P_o O_p R_i - \angle R_o O_p P_r = (90^\circ - \phi) - (45^\circ - \frac{\phi}{2}) = 45^\circ - \frac{\phi}{2}$$

$$\therefore \angle R_o O_p P_r = \angle R_i O_p P_r = 45^\circ - \frac{\phi}{2}$$

圧力の変化と破壊面の形

図5-4 d において、 w 、 ϕ 、 i が一定であるならば、応力円の大きさは f のみによりきまる。 f は y の一次函数であるから、応力円の大きさは y に比例する。図5-5に深さ y_a 、 y_b における応力円を描く。

前に述べたように、 $f_a = w y_a \cos i$ 、 $f_b = w y_b \cos i$ である。

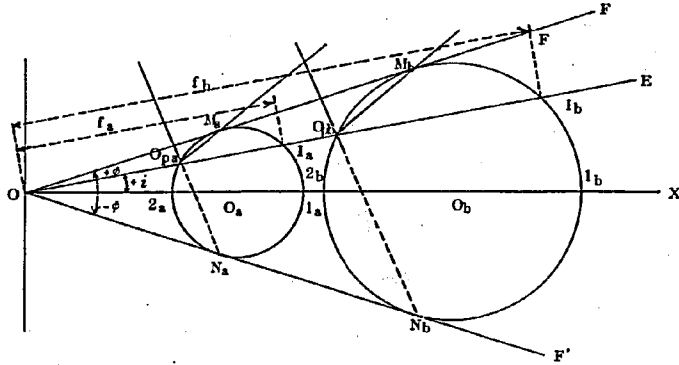


図5-5 各深さにおける応力円と破壊面

各深さにおける破壊面はそれぞれ、 $O_p a M_a$ 、 $O_p a N_a$ 、 $O_p b M_b$ 、 $O_p b N_b$ とて表わされる。幾何学的に容易に $O_p a M_a \parallel O_p b M_b$ 、 $O_p a N_a \parallel O_p b N_b$ が証明される。すなわち、深さが変化しても、破壊面の傾きは一定である。言い換えれば、粘着力のない土に発生する破壊面は、一直線であることが証明される。

応力楕円

図5-4に示すような、ある点における応力円が描けたならば、その点における応力楕円が図5-6に示すように容易に描ける。図5-4 dに示した応力状態で、応力楕円を描くには、次の様にする。

1. 図5-4 dにおいて、 O_p と2を結ぶ。これは長軸の方向を示す。
 O_p と1を結ぶ。これは短軸の方向を示す。
2. 図5-6に示すように、地表面を描く。地表面から深さ y の所に点 O をとる。 y をとる場合に、 1 cm が $Z\text{ cm}$ をあらわす縮尺を使つたとすると、応力の縮尺は 1 cm が $w \cdot Z \frac{g}{\text{cm}^3}$ をあらわすことになる。それ故、深さ y に相当する応力は、 $w y$ である。
3. 図5-6に示すように、点 O を通り、すでにもとめた長軸、短軸に平行に、2-2、1-1を引く。

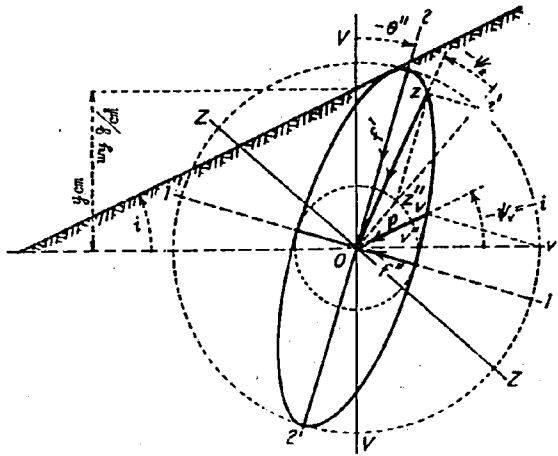


図5-6 主働応力状態における応力楕円

4. 図5-4 d で得た f' を長軸上に $f' = 0.1$, f'' を短軸上に $f'' = 0.2$ となるように, 1, 2 をとる。
5. O を中心として半径 f' , f'' の同心円を描く。すなわち楕円の大円と小円となる。
6. O を通る鉛直平面に作用する応力 P は, ランキン公式によって与えられる応力であるが, O を通る水平線を引き, 大円との交点を v' , 小円との交点を v'' として v' を通って短軸に平行線を引き, v'' を通って長軸に平行線を引き, その交点を V とすれば, OV であらわされる。これは地表面に平行であることがわかる。これを図5-4 d でもとめた P と照合すればよい。図5-4 d の P の方向は真の方向を示していないが, 鉛直面に立てた法線, すなわち水平面からの傾角が $-\psi$ であることを示している。 $\psi = i$ であるから, これは, すなわち水平面から反時計まわりの方向に $-i$ しかたむいている。
- 7 図5-6 において点O を通る任意平面 ZZ' に作用する応力をもとめるために, その平面に垂線を立て, 大円と小円との交点 Z' , Z'' をもとめ

る。Z'を通って短軸に平行線を引き、Z''を通って長軸に平行線を引く。それらの交点Zは応力楕円上の点である。OZは、任意平面ZZ'に作用する応力の大きさと方向を与える。この応力の傾角は図に示すように $-\psi_z$ である。応力楕円からもとめた f_z の大きさと傾角を、応力円からもとめたものと照合すればよい。

応力楕円は、Oを通る任意平面に対応する点Zの軌跡である。応力楕円は地表面に接することがわかる。

ランキン公式の誘導

主働応力状態にある粘着力のない土の、地表面下 y にある点にOに作用する主働土圧をもとめるランキン公式は、図5-4の応力円から容易にもとめられる。この応力円を適当に修正して図5-7に示す。

但し、 $Oca \perp OI'$ である。

$P = OV$ であるから

$$\frac{P}{OI'} = \frac{OV}{OI'} = \frac{Oa - aV}{Oa + aI'}$$

$$\text{すなわち } P = OI' \frac{Oa - aV}{Oa + aI'} \quad (a)$$

幾何学的に $OI' = OI = wy \cos i$

$$OcI' = OcM = A \sin \phi$$

$$Oca = A \sin i$$

$$aV = aI' = \sqrt{(OcI')^2 - (Oca)^2} = \sqrt{A^2 \sin^2 \phi - A^2 \sin^2 i}$$

$$= A \sqrt{(1 - \cos^2 \phi) - (1 - \cos^2 i)} = A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}$$

$$Oa = A \cos i$$

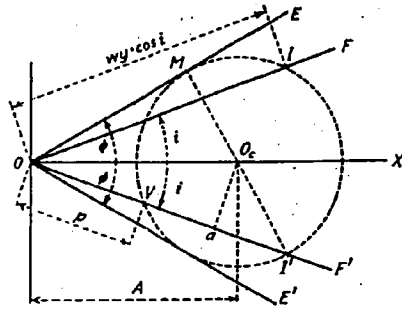


図5-7 ランキン公式誘導のための応力円

(a)に、これらの値を代入すると、

$$P = wy \cos i \frac{A \cos i - A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{A \cos i + A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

$$= wy \cos i \frac{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

これは、鉛直面上の地表面から y の深さの点に作用する地表面に平行な応力の大きさを示す式である。

破壊角の誘導

主働応力状態にある粘着力のない土塊にあらわれる破壊角は、図5-4に適切な修正を加えた図5-8によって容易にもとめることができる。

応力円の性質によって円周上の点 M , N , V は、それぞれ内向き破壊面、外向き破壊面、鉛直面を決定する。中心角 $\angle VOcM$ は、内向き破壊角の二倍に等しい。中心角 $\angle VOcN$ は、外向き破壊角の二倍に等しい。

証明 図5-4において

$$\text{内向き破壊角 } \alpha = \angle VOcRi = \angle VIM = \frac{1}{2} \angle VOcM$$

$$\text{外向き破壊角 } \beta = \angle VOcRo = \angle VOPN = \frac{1}{2} \angle VOcN$$

それ故、内向き破壊角 α の大きさは、図5-8において

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle VO_c M = \frac{1}{2} (90^\circ - \angle MO_c Y + \angle VO_c 2) \quad \text{--- (b)}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \angle VO_c N = \frac{1}{2} (90^\circ - \angle NO_c Y' - \angle VO_c 2) \quad \text{--- (c)}$$

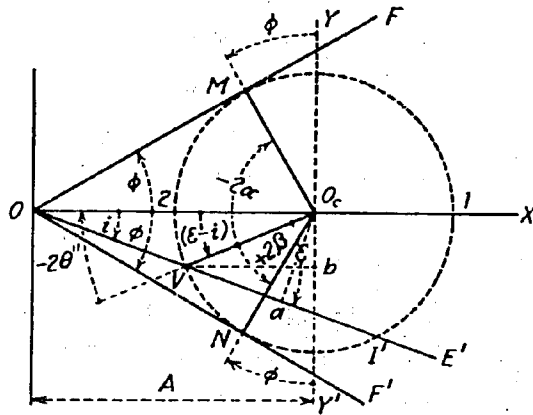


図5-8 破壊角誘導のための応力円

幾何学的に $\angle MO_c Y = \angle NO_c Y' = \phi$ ----- (d)

水平線 Vb を引くと、

$$\angle VO_c 2 = \angle O_c V b = \angle O_c V I' - \angle b V I' \quad \text{--- (e)}$$

然るに $\angle b V I' = \angle X O b = i$ ----- (f)

$\angle O_c V I' = \epsilon$ とおくと、

$$\sin \epsilon = \frac{a O_c}{O_c V} = \frac{A \sin i}{A \sin \phi} = \frac{\sin i}{\sin \phi} \quad \text{(5-7)}$$

(e)(f) より

$$\angle VO_c 2 = \epsilon - i \quad \text{--- (g)}$$

(b)(d)(g) より

$$\alpha = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) + \frac{1}{2} (\epsilon - i)$$

(c)(d)(g) より

$$\beta = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) - \frac{1}{2} (\epsilon - i)$$

上の二式より

$$\alpha + \beta = 90^\circ - \phi \quad \text{となる。}$$

主応力面と主軸の方向

図5-8において、半径 $O_c V$ は、鉛垂平面に作用する応力を決定し、半径 $O_c 2$ は 第二主応力面に作用する応力を決定するので、鉛直面と第二主応力面、すなわち応力楕円の長軸となす角 θ'' は

$$\theta'' = \frac{1}{2} \angle V O_c 2 \text{ であらわされる。}$$

(g)を代入すると、

$$\theta'' = \frac{1}{2} (\epsilon - i) \text{ ----- (5-8)}$$

第一主応力面は、第二種応力面と直交するので、式(5-8)より計算できる。図5-8において、長軸の方向を決定する半径 $O_c 2$ は鉛直面をあらわす半径 $O_c V$ から時計まわりの方向にある。それ故 θ'' は負で、長軸は鉛直面より時計まわりの方向に傾いている。図5-4、図5-6を参照すれば、これが上りの方向に傾いていることがわかる。

B 受働土圧

ある応力の大きさと傾角

図5-9aに示すような、地表面から y の深さにある点 O における、受働応力状態をもとめるために、応力円を描く。

主動応力状態の場合と同じように、地表面に平行な面に作用する応力は、大きさが $f = w y \cos i$ で傾角が $+i$ である。又鉛直面に作用する応力は、地表面に平行である。

もしも土塊が、横方向に圧縮力をうけて受働応力状態になれば、図5-9bに示したような、斜め方向の二組の破壊面にそって土の剪断強度に等しい剪断応力が生じる。図5-9bに地表面下 y の所における、二つの破壊面と、地表面に平行な平面によって囲まれた基本三角形を示す。土塊が横方向の圧縮をうければ、基本三角形は上方にすべり出そうとするので、これに抵抗する応力が(b)に示すように作用する。それ故、破壊面 OM に作用する応力の傾角は正で、 ON に作用する応力の傾角は負である。これらの符

号は、主働応力状態と比べれば、全く逆である。

(b)に示した基本三角形を、説明しやすくするために、(c)に示すように、鉛直面で二つにわけて、上に述べた関係を図示する。

応力円を描く条件を要約すれば次のようになる。

1. 地表面に平行な平面 $O I$ に作用する力は $f = w y \cos i$ で、その傾角は $+i$ である。
2. 破壊面 $O M$ に作用する応力は負の傾角 $-\phi$ を持ち、破壊線図にしたがって土を破壊させるに十分な強度を持つ。
3. 破壊面 $O N$ に作用する応力は正の傾角 $+\phi$ をもち、破壊線図にしたがって土を破壊させるに十分な強度をもつ。
4. 鉛直面に作用する応力は、地表面に平行すなわち、傾角が $-i$ である。

応力円

上に述べた条件を満足する図 5-9 d に示す応力円は、次のようにして作図する。

1. 基準線 $O X$ の上側に、正の剪断に相当する破壊線図 $X O F$ を引く。
同様にして下側に、負の剪断に相当する破壊線図 $X O F'$ を引く。
2. $\angle X O E$ が、傾角 $+i$ に等しくなるように $O E$ を引く。
 $\angle X O E'$ が、傾角 $-i$ に等しくなるように $O E'$ を引く。
3. f の傾角は $+i$ であるから、 $O E$ 上に $O I = f = w y \cos i$ となるように I をとる。 f をあらわすのに使った尺度が、以下に述べるすべての応力の尺度となる。
4. $O X$ 上に中心をもち、 I を通り、 $O F'$ に M 点で接する最大の円を描く。
この円の中心を O_c とする。(c)における破壊面 $O M$ に作用する応力は (d)においては $O M$ に等しく、その傾角は当然 $-\phi$ である。この平面上の剪断応力は $-M m$ で、破壊線図 $X O F'$ で示されるように土の剪断強度に等しい。
5. 幾何学的に、円は N で $O F$ に接する。(c)における破壊面 $O N$ に作用する応力は、(d)においては $O N$ に等しく、その傾角は当然 $+\phi$ である。

この平面上の剪断応力は(a)に示すように $+Nn$ で、破壊線 XOF で示されるように土の剪断強度に等しい。

6. (c)に示した OI 平面上に作用する応力 $f = wy \cos i$ によって決定された点 I を通り、平面 OI に平行線を引き、円周との交点をもとめればこれが極となるから、(d)において示すように、 OI の延長線と、応力円との交点が極 Op となる。

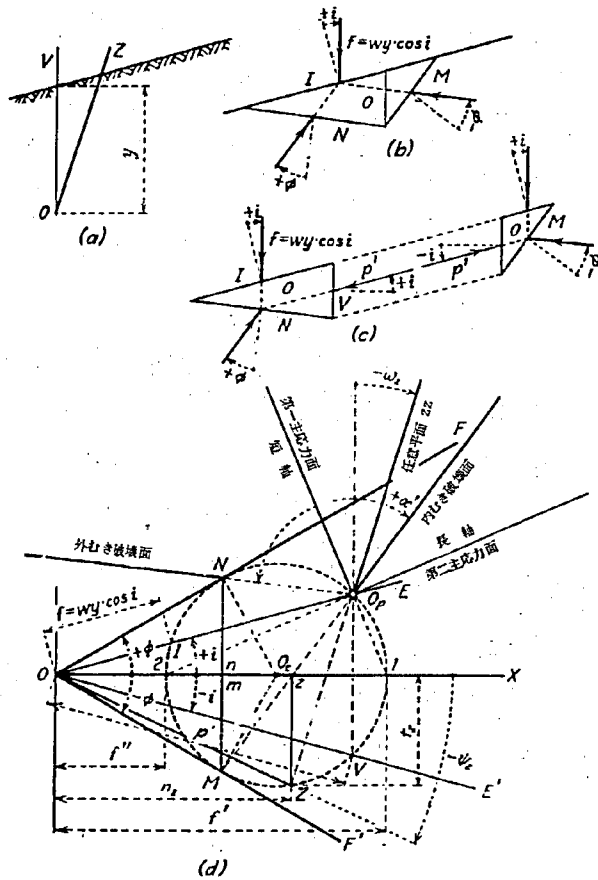


図5-9 受働応力状態の応力円

7 点Mは、内向き破壊面に作用する応力を決定する点であるので、 O_p とMを結ぶ線は(c)における内向き破壊面の真の方向を与える。この平面と鉛直線との間の角は、内向き破壊角 α' である。

同様にして、 O_p とNを結ぶ線は、(c)における外向き破壊面の真の方向を与える。この平面と鉛直線との間の角は、外向き破壊角 β' である。

8. O_p を通る鉛直線と円周との交点をVとする。(c)に示した鉛直平面に作用する受働圧力は $P' = OV$ であらわされる。この平面に作用する応力 P' は、両方の三角形に示されている。傾角は $-i$ であるので、地表面と平行となる。

9. (a)に示した任意平面 OZ に作用する応力の大きさと傾角をもとめようとすれば、(d)において O_p を通り OZ に平行線を引き応力円との交点Zをもとめる。応力は $f_Z = OZ$ 、傾角は $\psi_Z = -XOZ$ 、その法線成分は $n_Z = OZ$ 、接面成分は $t_Z = ZZ$ であらわされる。

10. 第一主応力と第二主応力の大きさは、(d)において、 $f' = 0.1$ 、 $f'' = 0.2$ で示される。第一主応力面又は応力楕円の短軸は $O_p 1$ であらわされ、第二主応力面又は応力楕円の長軸は $O_p 2$ であらわされる。

圧力の変化と破壊面の形

w 、 ϕ 、 i が一定であるならば、図5-9dの応力円は f の大きさによってのみ決まる。 f は y の一次函数であるから、応力円の大きさは y に正比例する。種々の y の値に対する応力円はすべて相似の位置にあるため、破壊角はすべて一定である。それ故図5-3に示したように、破壊面は直線となる。

応力楕円

図5-9に示すように、ある点における応力円が描けたならば、その点における応力楕円が図5-10に示すように容易に描ける。図5-9dに示した応力状態で応力楕円を描くには、極の位置と、主応力の大きさと主応力面の方向が得られれば、次のようにする。

1. 地表面を描き、地表面から y だけ下った所に点Oをとる。 1 cm が $Z \text{ cm}$

をあらわす縮尺を使ったとすると、応力の縮尺は、 1 cm が wz/c_m をあらわすことになるので、深さ y に相当する応力は wy である。

2. O を通り、応力円よりもとめた長軸、短軸に平行に2-2, 1-1を引く。
3. 長軸2-2上に、応力円よりもとめた最大主応力 $f' = 0.1$ をとる。
短軸1-1上に、最小主応力 $f'' = 0.2$ をとる。
4. O を中心として、半径をそれぞれ f' , f'' とする大円、小円を描く。

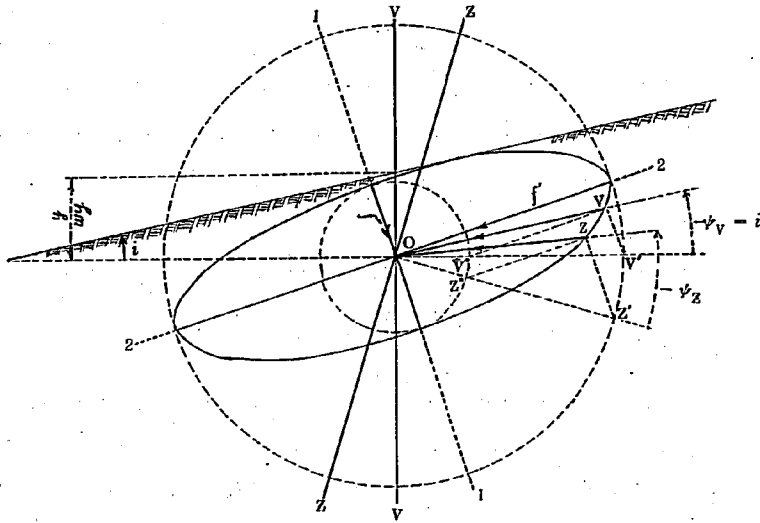


図5-10 受働応力状態における応力楕円

5. O を通る鉛直平面に作用する応力 P' はランキン公式によって与えられる応力であるが、 O を通る水平線を引き、大円との交点を v' 、小円との交点を v'' として、 v' を通過して短軸に平行線を引き、 v'' を通過して長軸に平行線を引き、その交点を v とすれば、 Ov であらわされる。これは地表面に平行であることがわかる。これを図5-9dでもとめた P' と照合すれば良い。図5-9dの P' の方向は真の方向を示していないが、

傾角が $\psi = -i$ であることを示している。これは P の作用する鉛直平面の法線すなわち、水平線から反時計まわりの方向に傾いているので、負である。それ故、地表面に平行に作用していることになる。

6. 点 O を通る任意平面 ZZ に作用する応力をもとめようとすれば、点 O においてその平面に垂線を立て、大円と小円との交点 σ' 、 σ'' をもとめる。 σ' を O を Z を Z' として短軸に平行線を引き、 σ'' を O を Z'' として長軸に平行線を引く。それらの交点 σ は応力楕円上の点である。 $O\sigma$ は任意平面 ZZ に作用する応力の大きさと方向を与える。この応力の傾角は図に示すように $-\psi\sigma$ である。これは垂線から反時計まわりに計られるので負である。応力楕円は、 O を通る任意平面に対応する点 σ の軌跡であり、これは地表面に接する。

ランキン公式の誘導

受働応力状態にある粘着力のない土の、地表面下 y にある点 O に作用する受働土圧をもとめるランキン公式は、図5-9の応力円から容易にもとめられる。この応力円を適当に修正して図5-11に示す。

$O_c = A$ とあらわすと

応力円の半径 $O_cN = O_cV = A \sin \phi$

OI に垂線 Oca をたてると

$$Oca = A \sin i$$

直角三角形 VaO_c において

$$(aV)^2 = (O_cV)^2 - (O_c a)^2 \text{ すなわち } aV = \sqrt{(O_cV)^2 - (O_c a)^2}$$

上の関係を代入すると

$$\begin{aligned} aV &= \sqrt{A^2 \sin^2 \phi - A^2 \sin^2 i} \\ &= A \sqrt{(1 - \cos^2 \phi) - (1 - \cos^2 i)} \\ &= A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi} \end{aligned}$$

図より

$$\frac{OV}{OI} = \frac{Oa + aV}{Oa - aV} \quad (h)$$

然るに

$$OV = P', \quad OI' = OI = f = wy \cos i, \quad aI' = aV \quad \text{であるから}$$

(2)は

$$\frac{P'}{wy \cos i} = \frac{A \cos i + A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{A \cos i - A \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

となる。

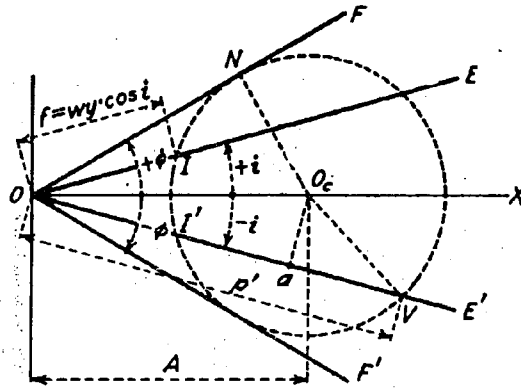


図5-11 ランキン公式誘導のための応力円

それ故、鉛直面上の、地表面から y の深さの点に作用する地表面に平行な受働応力の大きさは、

$$P' = wy \cos i \frac{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

で表わされる。

高さ h の鉛直面に作用する受働土圧の合力は、上式を 0 から h まで積分して、次式であらわされる。

$$P' = \frac{1}{2} wh^2 \cos i \frac{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

これは、鉛直面の下から $\frac{1}{3}$ の点に、地表面に平行に作用する。

破壊角の誘導

受働応力状態にある土塊にあらわれる破壊角をもとめる公式は、図5-9に適切な修正を加えた図5-12によって容易にもとめることができる。

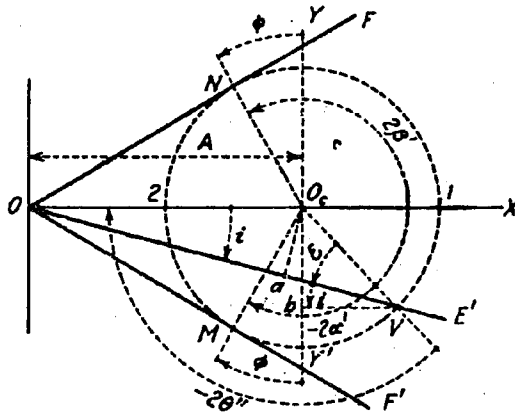


図5-12 破壊角誘導のための応力円

応力円の性質により、図5-12に示した半径 O_cM は、内向き破壊面の方
向をきめる。鉛直面をきめる半径 O_cV と半径 O_cM のなす角の半分が内向
き破壊角 α' を表わすから、

$$\alpha' = \frac{1}{2} \angle VO_cM \quad (1)$$

同様にして外向き破壊角 β' は

$$\beta' = \frac{1}{2} \angle VO_cN \quad (2)$$

(1)より

$$2\alpha' = \angle VO_cM = \angle Y'O_cX + \angle Y'O_cM - \angle VO_cX$$

然るに $\angle Y'O_cX = 90^\circ$ $\angle Y'O_cM = \phi$ であるから

$$2\alpha' = (90^\circ + \phi) - \angle VO_cX \quad (3)$$

$V \perp O_cX$ に平行線 Vb を引くと、

$$\angle VO_cX = \angle O_cVb = \angle O_cVO + \angle OVb$$

$\angle O_cVO = \epsilon$ とする。 $\angle OVb = \angle O_cOE' = i$ であるから

$$\angle VO_cX = \epsilon + i \quad (4)$$

然るに

$$\sin \varepsilon = \frac{Oca}{OcV} = \frac{Oca}{OcM} = \frac{A \sin i}{A \sin \phi} = \frac{\sin i}{\sin \phi}$$

(k)(1)より

$$2\alpha' = (9\theta' + \phi) - (\varepsilon + i)$$

$$\alpha' = \frac{1}{2}(9\theta' + \phi) - \frac{1}{2}(\varepsilon + i) \quad \text{--- (m)}$$

同様にして β' ももとめられる。

$$2\beta' = \angle VOcN = \angle YOcX + \angle YOcN + \angle VOcX$$

然るに

$$\angle YOcX = 9\theta' \quad \angle YOcN = \phi \quad \angle VOcX = \varepsilon + i \text{ であるから}$$

$$2\beta' = (9\theta' + \phi) + (\varepsilon + i)$$

$$\beta' = \frac{1}{2}(9\theta' + \phi) + \frac{1}{2}(\varepsilon + i) \quad \text{--- (n)}$$

主応力面と主軸の方向

図 5-12 において、半径 OcV は鉛直平面に作用する応力を決定し、半径 $Oc2$ は第二主応力面に作用する応力を決定するので、鉛直面と第二主応力面、すなわち応力楕円の長軸とのなす角 θ'' は、

$$\theta'' = \frac{1}{2} \angle VOc2 = \frac{1}{2}(18\theta' - \angle VOcX)$$

(k)を代入すると

$$\theta'' = \frac{1}{2} [18\theta' - (\varepsilon + i)] = 9\theta' - \frac{1}{2}(\varepsilon + i) \quad (5-9)$$

図 5-12 において、長軸の方向を決定する半径 $Oc2$ は鉛直平面を決定する半径 OcV から時計まわりの方向にあるので、 θ'' は負で、長軸は鉛直面から時計まわりの方向に傾いている。図 5-9、図 5-10 を参照すればこれが上りの方向に傾いていることがわかる。

第二主応力を決定する半径 $Oc2$ は、破壊面をそれぞれ決定する半径 OcM 、 OcN のなす角を二等分しているので、第二主応力面は破壊面のなす角を二等分する。

粘着力のある土塊におけるランキン状態

図5-13 a に、粘着力を持つ土の半無限体を示す。土塊が横方向に少しひろがったとすると、引張応力が土塊の中に発生する。土の粘着力は小さいので、(b)に示すように引張応力が0になる h_0 の深さまでクラックが鉛直に発生する。地表面が平面の場合は後に証明するのように、クラックゾーンの鉛直に計った深さ h_0 は次のようになる。

$$h_0 = \frac{2c}{W} \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}\phi \right) \quad (5-10)$$

但し c : 粘着力

h_0 の値は、地表面の勾配が変化しても一定である。

土塊が横方向に少しひろがれば、クラックゾーンより下の土にも剪断応力が発生する。(b)に示した二対の無数の破壊線にそって起こる剪断応力が、土の剪断強度に等しくなれば、すべり破壊がおこる。これらの面を、すべり面とよび、すべり面と紙面との交線を剪断線とよぶ。一対のすべり面の任意の交点における接線は(b)に示すように $(90^\circ - \phi)$ の角度をなす。

地表面からの深さが増加すれば、すべり面の接続の方向は、同じ内部摩擦角を持ち、粘着力のない土の同じ深さにおいておこるすべり面の方向に近づく。すなわち、深くなればなるほど、粘着力の影響は重要でなくなる。

粘着力のない土の場合と同じように、土塊が横方向にひろがれば、鉛直方向の厚さが減少し、地表面が少し低くなる。このように土が変形した状態を、塑性平衡状態又は主働応力状態という。この場合の横方向の土圧を主働土圧という。ランキンは粘着力のある土を考えなかったが、粘着力のない土の応力状態に対応して、このような状態をランキンの主働応力状態とよぶ。

(b)に示す鉛直面AVに作用する応力は図4-2で説明したように、地表面に平行となる。クラックゾーンの境界において鉛直面に作用する応力は0である。境界より下の鉛直面AVに作用する応力は点Vからの距離には正比例、すなわち直線的な増加はせず(b)に示したような増加率となる。

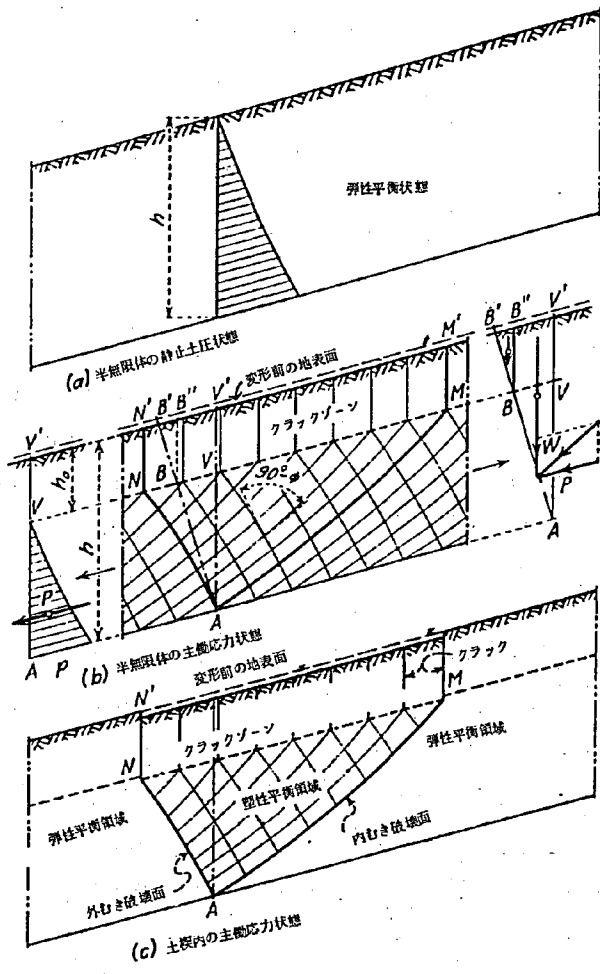


図 5-13 主働応力状態にある粘着力のある土

直線的増加とのずれは少ないが、地表面の傾きとその土の粘着力が増加すれば、ずれは多くなる。一般的にずれは無視しうるほどなので、全主働圧力 P は、(b) に示す点 A における圧力を p とすれば、 $P = \frac{1}{2} p (h - h_0)$ として表わされる。合力の作用点は A 点から $\frac{1}{3} (h - h_0)$ だけ上った点とする。さらに正確に全圧力をもとめようとすれば、 AV にそった数点で応力を計算すればよい。地表面からの深さが増加すれば、鉛直面に作用する応力に及ぼす粘着力の影響は小さくなる。この応力は、同じ内部摩擦角を持ち粘着力のない土による応力に近づく。(b) に示す任意の傾斜面 AB' に作用する合力は、鉛直面に作用する力 P と鉛直面と傾斜面にかこまれた三角形 $AB'V$ の重量 W の合力に等しい。しかし、この面に作用する応力の傾角は変化する。 B 点における応力は鉛直である。傾斜面 AB' の一部 BB' に作用する合力は、 B を通る鉛直クラックに沿う圧力が 0 であるので、 BB' の上にある土楔 $BB'B''$ のみの重量に等しい。

地表面が水平の場合には、すべり面は図 5-14a に示すように平面となり、鉛直面とすべり面とのなす破壊角は後に証明されるように次式となる。

$$\alpha = \beta = \left(45^\circ - \frac{1}{2}\phi\right) \quad (5-11)$$

クラックゾーン以下の応力分布は、直線的増加となり、この時地表面下 y の深さにおける主働土圧は後に証明されるように次式となる。

$$P = w (y - h_0) K \quad (5-12)$$

但し
$$K = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2}\phi\right)$$

$\phi = 0$ の場合は、(5-10)、(5-12) より次式となる。

$$P = w y - 2c \quad (5-12a)$$

高さ h の鉛直面に作用する全主働圧力は次式となる。

$$P = \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 K \quad (5-13)$$

$\phi = 0$ の場合は全主働圧力は次式となる。

$$P = \frac{1}{2} w \left(h - \frac{2c}{w}\right)^2 \quad (5-13a)$$

底面から全圧力の作用点までの距離は次式で示される。

$$\bar{y} = \frac{1}{3} (h - h_0) \quad (5-14)$$

図5-13c, 図5-14bに示すようにA点より上にある土を, A点を中心として左右に離れるように回転移動させるか, 又はA点を通る地表面に平行な平面にそって左右に離れるように平行移動させると, 土塊は横方向にひろがり, 土楔A M M' N' Nを形成するよりに, 鉛直のクラックやA点を起点とする一対のすべり面にそり破壊が発生する。この土楔の境界は図5-13b, 図5-14aに示したすべり面や, クラックに正確に一致する。

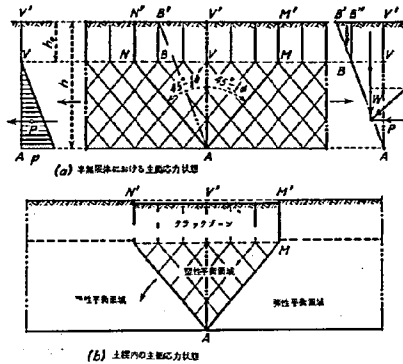


図5-14 水平な地表面をもつ粘着力のある土の主働応力状態

図5-13c, 図5-14bに示したように, 土楔は横方向にひろがるので, 少し沈下する。A M M'の右側, A N N'の左側は弾性平衡状態なので, クラックやすべり面は発生しないが, 土楔内は, 図5-13b, 図5-14aに示すような塑性平行状態となる。弾性平衡領域と塑性平衡領域の境界をなすA M, A Nにそっておこる変位は塑性平衡領域内のすべり面にそっておこる変位よりも大きいので境界をなすA M, A Nを特に破壊面とよぶ。

AMのように上りの方向にのびる破壊面を内向き破壊面，ANのように下りの方向にのびる破壊面を外向き破壊面とよぶ。

ランキンの主働応力状態は一对の破壊面で囲まれた土楔内で発生するから，擁壁にかかる土圧を計算する場合，次の条件を満足しなければ，ランキン公式は適用できない。

1. 壁背面が，壁底から発生する外向き破壊面を妨げない。
2. 壁背面と外向き破壊面との間の土が，壁背面にそってすべらない。

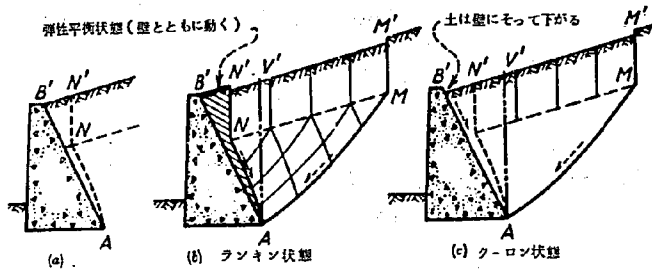


図5-15 擁壁の裏込めの応力状態

図5-15 a, bはランキン状態が満足されるので，擁壁にかかる主働土圧はランキン公式より計算した鉛直面AVに作用する土圧と，壁背面とAVによって囲まれた土楔の重量との合力としてもとめられる。

(c)はランキン状態は満足されないが，あまり大きな誤差をふくまずに，ランキン公式でもとめられる。壁背面の剪断抵抗力が裏込めの剪断強度と等しい場合は，ランキン状態が満足される。これはすべり面以外の任意の平面に作用する剪断応力は，破壊面にそっておこる剪断応力よりも小さいからである。他方壁背面の剪断抵抗力が，裏込めの剪断抵抗力の $\frac{2}{3}$ 等のように小さな場合，又は粘着力が無視されるような場合は，壁背面にそってすべりが発生する。

図5-16 aに示すように粘着力のある土の半無限体が，横方向に少し圧

縮をうけると、土中にその土の剪断強度に等しい剪断応力が発生し、多くのすべり面ができる。剪断応力は主応力面以外のすべての面に発生するが図に示したすべり面に作用する剪断応力が最大でその土の剪断強度に等しく、他の面に作用する剪断応力は小さい。地表面は図に示すように少しうきあがる。この時土は、塑性平衡状態又は受働応力状態になっていて、ランキンの受働応力状態と呼ぶ。圧縮をうけるので、クラックは発生しない。

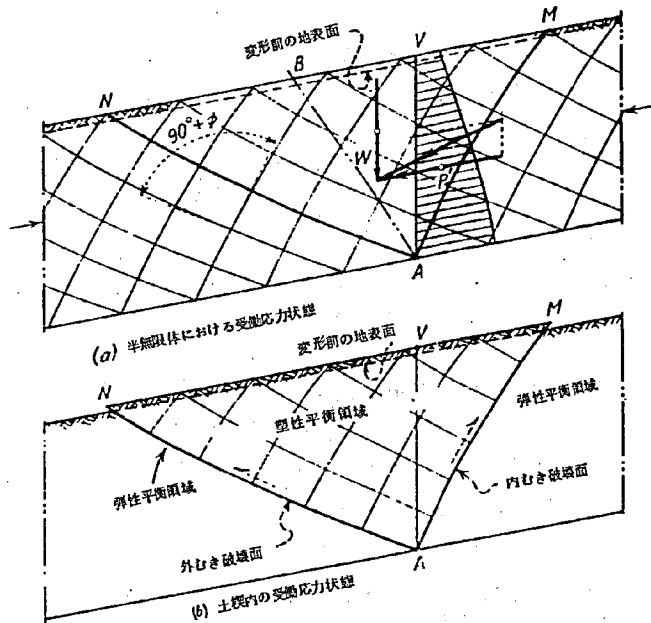


図5-16 粘着力のある土の受働応力状態——ランキン状態

鉛直面に作用する応力ならびにその合力はすべて地表面に平行で、その大きさは図5-16 aに示す陰影をつけた分布となる。土圧分布は主働の場合は凹形であったが、受働の場合は凸形である。地表面が水平でない時以外は土圧をもとめる適当な公式はないが、応力円を利用すれば容易にもとめることができる。一對のすべり面の任意の交点における接線は(a)に示す

すよりに $(90^\circ + \phi)$ である。

図 5-17 a に示すよりに地表面が水平な場合には、すべり面は平面となり、鉛直面とすべり面のなす角は、後で証明するが、次のようになる。

$$\alpha' = \beta' = (45^\circ + \frac{1}{2}\phi) \quad (5-15)$$

地表面下 y の点で鉛直面に作用する受働土圧は次式であらわされる。

$$p' = wyK + 2c\sqrt{K'} \quad (5-16)$$

$$K' = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2 (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$$

$\phi = 0$ の場合には $K' = 1$ となるので

$$p' = wy + 2c \quad (5-16a)$$

高さ h の鉛直面に作用する全受働土圧は次式であらわされる。

$$P' = \frac{1}{2}wh^2K' + 2ch\sqrt{K'} \quad (5-17)$$

$\phi = 0$ の場合には

$$P' = \frac{1}{2}wh^2 + 2ch \quad (5-17a)$$

図 5-16 b, 図 5-17 b に示すよりに, A 点より上にある土を, A 点を中心として左右を近づけるよりに回転移動させるか, 又は A 点を通る地表面に平行な平面にそって左右が近づくよりに平行移動させると, 土塊は横方向から圧縮をうけて AM, AN 破壊面にそって剪断破壊がおこる。

AM, AN の位置は図 5-16 a, 図 5-17 a のすべり面と同じである。土塊は矢印の方向にそってせりあがる。土塊の内側には(a)に示したような無数のすべり面が発生して塑性平衡状態になるが, 外側は弾性平衡状態のままである。(b)に示す土楔の中の応力状態は(a)に示す半無限体の中の応力状態と同じであり, 受働土圧分布も同じである。

図 5-16 a, 図 5-17 a に示す任意の傾きをなす平面 AB に作用する全土圧は, 鉛直面 AV に作用する全受働土圧 P' と土楔 ABV の重量との合力としてもとめられる。

ランキン状態を満足するには, 主働土圧の部分で述べた二条件を満たさなければならない。

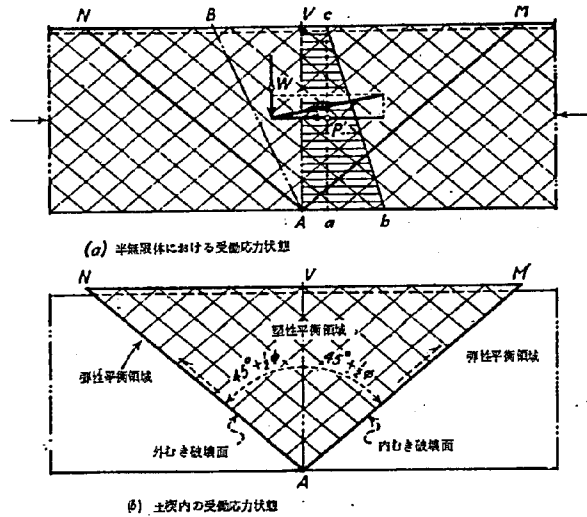


図 5-17 水平な地表面をもつ粘着力のある土の受応力状態

ランキン土圧公式の誘導

A 主動土圧

図 5-18 に示すように、粘着力のある土の地表面から y の深さにある点 O における主動応力状態をもとめるために応力円を描く。この方法は図 5-1 に示した粘着力のない土の場合とほとんど同じである。ただ破壊線図が $O'F'$, $O''F''$ に変化するだけである。

応力円

図 5-1 に示した方法で応力円を描くと図 5-18 のようになる。(c) より次の値が得られる。

1. 深さ y の点における鉛直面に作用する主動土圧は次式であらわされ、傾角が $-i$ なので、地表面に平行である。

$$p = 0V$$

2. 深さ y の点における内向き破壊角

$$\alpha = \angle V'OpM$$

3. 深さ y の点における内向き破壊角

$$\beta = \angle V'OpN'$$

4. 一对の破壊面の交点における接線のなす角 $\angle MOpN'$ は、弧 $M2N$ にわたって中心角 $\angle MOcN$ の半分に等しいために

$$\angle MOpN' = \frac{1}{2} \angle MOcN = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\phi) = (90^\circ - \phi)$$

5. 深さ y における内向き破壊面に作用する応力の傾角は、

$$\psi_M = + \angle MOX$$

6. 深さ y における外向き破壊面に作用する応力の傾角は、

$$\psi_N = - \angle NOX$$

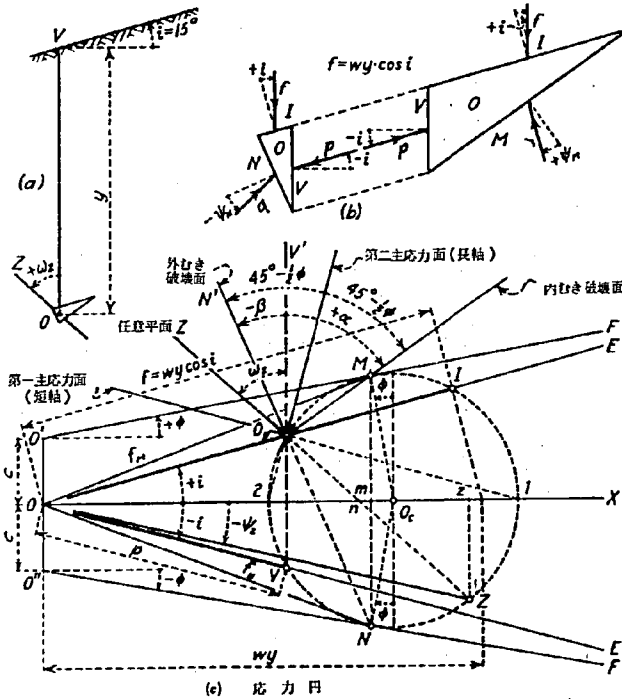


図 5-18 粘着力のある土の主働応力状態を表わす応力円

7 第一主応力は

$$f' = 0.1$$

8 第二主応力は

$$f'' = 0.2$$

9 第一主応力面すなわち短軸の方向は $O_p 1$ に平行である。

10 第二主応力面すなわち長軸の方向は $O_p 2$ に平行で、 $O_p 1$ に垂直である。

11 鉛直面と $+wz$ の角をなす任意平面 OZ に作用する主働土圧は

$$f_Z = 0Z$$

12 f_Z の傾角は

$$\psi_Z = -\angle XOZ$$

クラックの発生限界

クラックゾーンの下方向限界線上では土に作用する横方向の応力は 0 となる。

この限界線の深さは応力円を使って図 5-19 のようにして求められる。

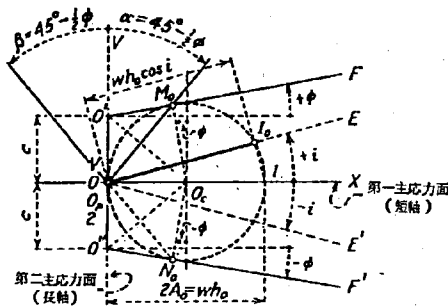


図5-19 主働応力状態にある粘着力のある土のクラックゾーンの深さ

この限界線より上では土に引張応力が作用し、下では圧縮応力が作用する。破壊線 $O_0 F$ と $O_0 F'$ を描く。傾角が $\pm i$ の直線 $O E$ と $O E'$ をとる。

$O X$ 上に中心を持ち $O F$ 、 $O F'$ と各々 M_0 、 N_0 で接し、 O を通る円を描く。この応力円は O 点を通るので鉛垂平面に作用する主働圧力は 0 であることを表わしている。主働圧力が 0 である点を通り地表面に平行な平面に

作用する応力は、 $\sigma_{Io} = f = w h_o \cos i$ であらわされる。

この f は応力円から求められたものであるから、これより h_o の値が逆算できる。これがクラックゾーンの下方向限までの深さである。

この h_o は図 5-19 の応力円から幾何学的にもとめられる。

$$\angle MoOcV = 90^\circ - \phi$$

$$\angle O'OcMo = \angle O'OcO = \frac{1}{2} (90^\circ - \phi) = 45^\circ - \frac{1}{2}\phi$$

$$\text{又 } Ao \tan (45^\circ - \frac{1}{2}\phi) = c$$

$$Ao = \frac{c}{\tan (45^\circ - \frac{1}{2}\phi)} = c \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$$

然るに

$$2Ao \cos i = \sigma_{Io} = w h_o \cos i \quad \text{であるから}$$

$$h_o = \frac{2c}{w} \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$$

図 5-19 よりクラックゾーンの下方向限における破壊角は

$$\alpha = \beta = 45^\circ - \frac{1}{2}\phi$$

この点における第一主応力面、すなわち短軸は水平で、第二主応力面、すなわち長軸は鉛直である。

深さによる土圧の変化と破壊面の形

図 5-18 c に示すように、地表面からの深さが増せば、地表面に平行な面に作用する鉛直応力は $f = w y \cos i$ で表わされるので、 y に比例する。しかし、破壊線 $O'F$ 、 $O''F'$ は y には比例しない。それ故、各深さ y に相当する応力円は y に比例はしない。鉛直面に作用する主動土圧 $p = \sigma_V$ も深さには比例しなくなる。同様にして、破壊角も一定ではなく、破壊面も平面ではなくなる。

図 5-20 に鉛直面に作用する土圧の分布と破壊面とを示す。作図法は次に述べる。

1. 破壊線 $O'F$ 、 $O''F'$ と傾角が $\pm i$ に等しい直線 OE 、 $O'E'$ を引く。
2. Ox 上に中心 O_o を持ち、 $O'F$ 、 $O''F'$ に Mo 、 No で接して O を通る円

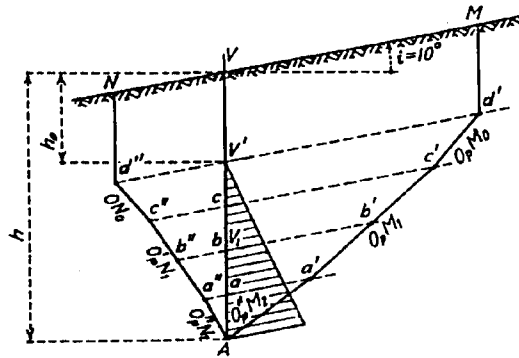
を描く。この応力円においては、極 O_p は O に一致する。

主動土圧は O で、 $O I_0 = w h_0 \cos i$ よりクラックゾーンの深さ h_0 が計算できる。内向き破壊角の接線の方向は $M_0 O_p$ で、外向き破壊角の接線の方向は $N_0 O_p$ である。

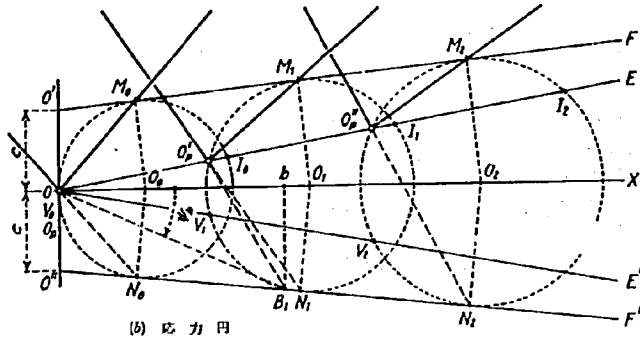
3. 深さ h_0 と h の中間の点における応力円を描きその中心を O_1 とする。破壊線図との接点を M_1, N_1 とする。この深さにおける主動土圧は $V_1 O$ で、極は O_p で内向き破壊面のこの点における接線の方向は $M_1 O_p$ 、外向き破壊面のこの点における接線の方向は $N_1 O_p$ で各々あらわされる。
4. 深さ h の点における応力円を描きその中心を O_2 、破壊線図との接点を M_2, N_2 とする。この深さにおける主動土圧は $V_2 O$ で、極は O_p で、内向き破壊面のこの点における接線の方向は $M_2 O_p$ 、外向き破壊面のこの点における接線の方向は $N_2 O_p$ で各々あらわされる。

(a) に示すように、地表面より深さ h の点を A 、深さ h_0 の点を V とし、 $A V$ を四等分して a, b, c とする。 a, b, c, V を通り、地表面に平行線を引く。

応力円 O_2 でもとめられた内向き破壊面、外向き破壊面にそれぞれ平行に A より直線を引き、 a を通る地表面に平行な線との交点をもとめ、 a', a'' とする。 a', a'' より、応力円 O_1 でもとめた内向き破壊面、外向き破壊面にそれぞれ平行線を引き、 b, c を通る地表面に平行な線との交点を、各々 b', c', b'', c'' とする。 c', c'' より、応力円 O_0 でもとめた内向き破壊面、外向き破壊面に平行線を引き、 V を通る地表面に平行な線との交点を d', d'' とする。実際の内向き破壊面は折線 $A a' b' c' d'$ に点 A, b', d' で接する曲面である。同様に実際の外向き破壊面は折線 $A a'' b'' c'' d''$ に点 A, b'', d'' で接する曲面である。鉛直面 $A V$ に作用する土圧分布をもとめるためには、(b) に示した応力円より、点 V, b, A における主動土圧、 $O, O V_1, O V_2$ をもとめ、これをなめらかに結べばよい。主動土圧は地表面に平行に作用する。陰影をつけた部分が土圧分布図で、少し凹形になっている。



(a) 応力分布と破壊面



(b) 応力円

図 5-20 鉛直面に作用する主動土圧の分布と破壊面

傾斜面に作用する土圧分布形

今までに述べたように図 5-21 に示す傾斜面に作用する土圧は、鉛直面 AV に作用する土圧と、鉛直面と傾斜面にかこまれた土楔 ABV の重量との合力である。 AV に作用する土圧は地表面に平行であり、土楔の重量は鉛直に作用するので、傾斜面に作用する土圧の合力の傾角は容易にもとめられる。しかし、傾斜面に作用する応力の傾角は図 5-21 に示すように深さにより変化する。クラックゾーンの領域内でこの傾斜面に作用する応力は、鉛直で大きさはこの面より上の部分の土の重量に等しい。それ故この部分に作用する応力の傾角は $90^\circ - \omega$ に等しい。クラックゾー

ンの下限界より深くなればなるほど、その地点に作用する応力の傾角は、(b)に示すように小さくなる。法線方向の応力は(c)に示すように変化する。接面応力は(d)に示すように小さくなる。(b)、(c)、(d)に示すように各応力の分布は、クラックゾーンの内部では直線変化となる。これ以深の部分では各応力の分布は直線変化により少しずれるが、その差は非常に小さい。これらの応力の大きさは図5-20bの応力円からもとめられる。

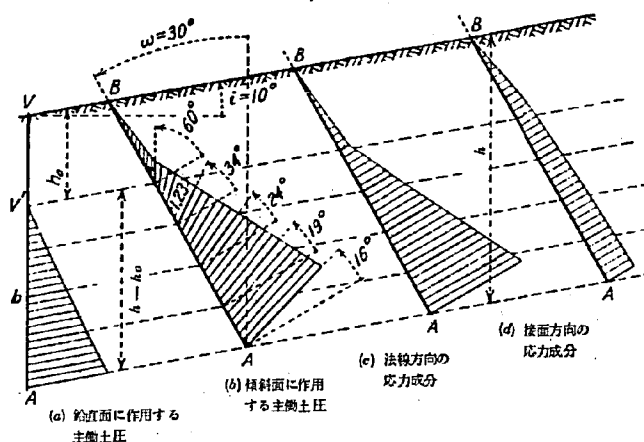


図5-21 傾斜面に作用する主動土圧の分布と破壊面

例えば、図5-21に示す深さ*b*において傾斜面ABに作用する応力をもとめるためには、図5-20の応力円O1の極Opから傾斜面ABに平行線を引き、応力円との交点B1をもとめる。傾斜面ABに作用する応力はOB1、その傾角は∠O1OB1である。B1からOXに垂線を下してその足を*b*とすると法線方向成分はOb、接面方向成分はB1bで表わされる。

地表面の傾きがその土の内部摩擦角より大きな場合

図5-22に示すように、地表面がその土の内部摩擦角より大きな場合には、破壊線O'Fと、地表面に平行な面に作用する応力の方向を示すOEが交わる点*a*ができる。この点*a*を越えた所では応力円は描けない。この点*a*に示す応力状態が表われる深さを*y_c*とすれば、 $O_a = w y_c \cos i$ で示

され、この深さ y_c を越える状態は起こりえない。すなわちこの土塊は高さ y_c 以上には堆積できない。

図 5-22 より幾何学的に次の様にして y_c をもとめることができる。

$$wy_c \cos^2 i \tan i = c + wy_c \cos^2 i \tan \phi$$

$$\text{すなわち } wy_c \cos^2 i (\tan i - \tan \phi) = c$$

故に

$$y_c = \frac{c}{w} \frac{1}{(\tan i - \tan \phi) \cos^2 i} \quad (5-18)$$

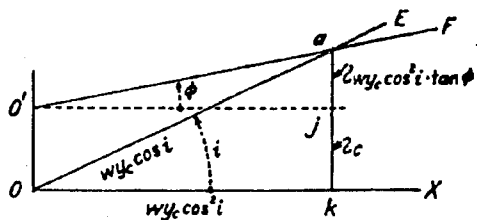


図 5-22 最大堆積深さ

地表面が水平な場合の破壊角

地表面が水平な場合には、応力円は図 5-23 の様になる。

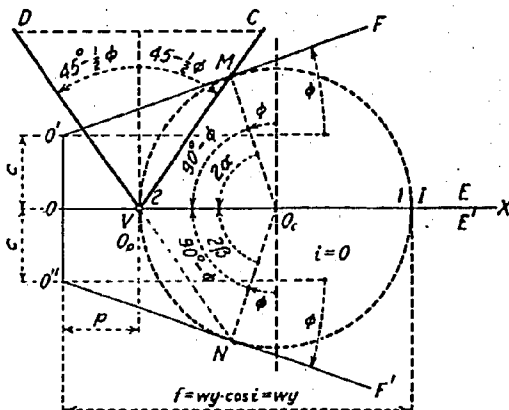


図 5-23 地表面が水平な場合の主働土圧と破壊角

図より明らかに 主働土圧 $p = OV$

破壊角 $\alpha = \beta = (45^\circ - \frac{1}{2}\phi)$ となる。

破壊角 α, β は深さに無関係に一定であるから、破壊面は鉛直面と $45^\circ - \frac{1}{2}\phi$ の角をなす平面となる。

地表面が水平な場合の主働土圧

破壊角 α は $45^\circ - \frac{1}{2}\phi$ となるので図 5-24 に示すように簡単に主働土圧の公式をもとめることができる。

図 5-24 a に示す土楔 ABC'' の重量は

$$W = W' + W''$$

然るに

$$W' = \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 \tan \alpha \quad \text{----- (a)}$$

$$W'' = w h_0 (h - h_0) \tan \alpha \quad \text{----- (b)}$$

公式 (5-10) を (b) に代入すれば

$$\begin{aligned} W'' &= w \frac{2c}{w} \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\phi) (h - h_0) \tan (45^\circ - \frac{1}{2}\phi) \\ &= 2c (h - h_0) \quad \text{----- (c)} \end{aligned}$$

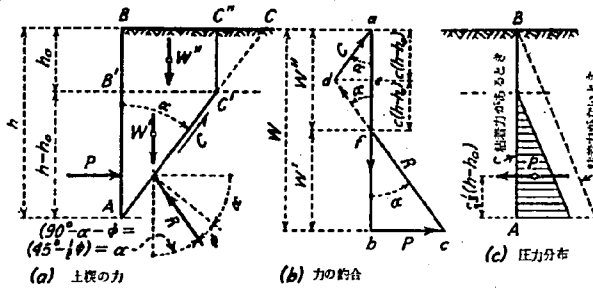


図 5-24 地表面が水平な場合の主働土圧

図 5-24 a より破壊面 AC'' に作用する粘着力は

$$C = c (AC'') = c \frac{h - h_0}{\cos \alpha}$$

図 5-24 b に

$$ae = C \cos \alpha = c \frac{h - h_0}{\cos \alpha} \cos \alpha = c (h - h_0)$$

同様にして $e f = a e$

故に $a f = 2 a e = 2 c (h - h_0) = W'$ ————— [式(c)による]

故に $f b = W'$ とならなければならない。

図5-24bと式(a)より

$$\begin{aligned} P &= f b \tan \alpha = W' \tan \alpha = \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 \tan^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 \tan^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \phi) \\ &= \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 K \text{ ————— (5-13)} \end{aligned}$$

すなわち、粘着力のある土の主働土圧の大きさは、粘着力のない土の主働土圧と比較して、 h_0 の高さだけ土圧が減少することを示している。

深さ y における主働応力は、 P の変化率に等しいので式(5-13)の h に y を代入して、 y で微分すれば良い。

$$p = \frac{\partial P}{\partial y} = w (y - h_0) K \text{ ————— (5-12)}$$

$\phi = 0$ の場合は、 $h_0 = \frac{2c}{w}$ $K = 1$ になるので

$$p = w y + 2c \text{ ————— (5-12a)}$$

この場合の土圧分布を図5-24cに示す。

地表面上に一樣な荷重強度 v の上載荷重がある場合は

$$P = \frac{1}{2} w (h - h_0)^2 K + v h K \text{ ————— (5-19)}$$

$$p = w (y - h_0) K + v K \text{ ————— (5-20)}$$

応力楕円

粘着力のある土における応力楕円の作図は、図5-6に示した粘着力のない土における応力楕円の作図と同様にしてできる。図5-13に示した応力円を利用して作図した応力楕円を図5-25に示す。

応力円の適用

擁壁に作用する粘着力のある土の主働土圧をもとめるために応力円を使用する場合は次の条件を満たさなければならない。

1. 壁背面によって破壊面がさまたげられてはならない。
2. 壁背面にそってすべりが起こってはならない。

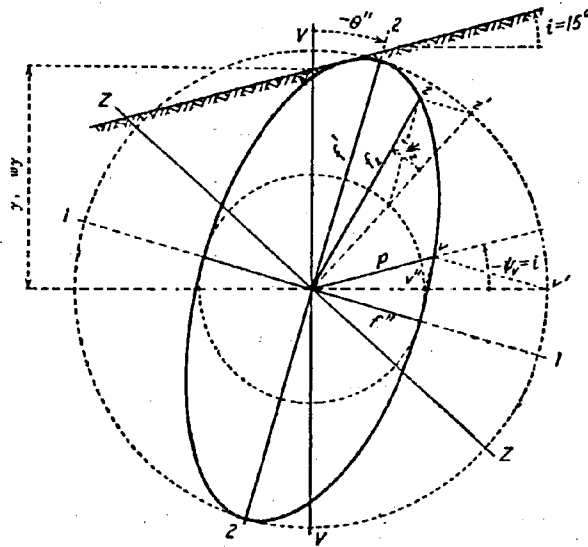


図 5-25 粘着力のある土における応力楕円

この条件は、図 5-26 b に示した控え擁壁、L型擁壁の場合には完全に満たされるので、擁壁後趾により破壊線が少しさまたげられるのを無視すれば、応力円を使用して主動土圧をもとめることができる。(c)に示した擁壁の場合は外向き破壊面が一部壁背面によってさまたげられ、黒く塗られた部分の圧力が影響を受けるが、根本的な誤差を含まずに応力円で主動土圧をもとめることができる。(a)の場合は、外向き破壊面が壁背面によって完全にさまたげられているので、応力円は計算には使用できない。

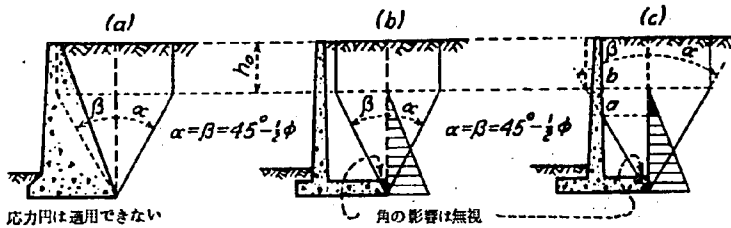


図 5-26 地表面が水平な場合の壁背面と破壊面の関係

B 受働土圧

粘着力のある土の中の受働応力状態をもとめるために図 5-27 に示す応力円を描く。これは粘着力のない土の場合とほとんど同じである。ただ破壊線図が $O'F$, $O''F'$ に変化するだけである。

応力円

粘着力のない場合に述べた方法にしたがって作図すると図 5-27 の応力円ができる。この図から次の様な結果が得られる。

1. 深さ y の点における鉛直面に作用する受働土圧は次式であらわされ、傾角が $-i$ なので地表面に平行である。

$$p' = 0 \quad V$$

2. 深さ y の点における内向き破壊角は

$$\alpha' = \sqrt{0} p M'$$

3. 深さ y の点における外向き破壊角は

$$\beta' = \sqrt{0} p N$$

4. 一对の破壊面の交点における接線のなす角 $\angle M'O_p N$ は弧 NIM にたてた中心角 $\angle M O_c N$ の半分に等しいために

$$\angle M'O_p N = \frac{1}{2} \angle M O_c N = \frac{1}{2} (180^\circ + 2\phi) = 90^\circ + \phi$$

5. 深さ y の点における内向き破壊面に作用する応力の傾角は

$$\psi_M = -\angle M O X$$

6. 深さ y の点における外向き破壊面に作用する応力の傾角は

$$\psi_N = +\angle N O X$$

7 第一主応力は

$$f' = 0.1$$

8 第二主応力は

$$f'' = 0.2$$

9 第一主応力面すなわち短軸の方向は $O_p 1$ に平行である。

10 第二主応力面すなわち長軸の方向は $O_p 2$ に平行である。

11 鉛直面と $+\omega Z$ の角をなす任意平面 $O Z$ に作用する受働土圧は

$$f_Z = 0. Z$$

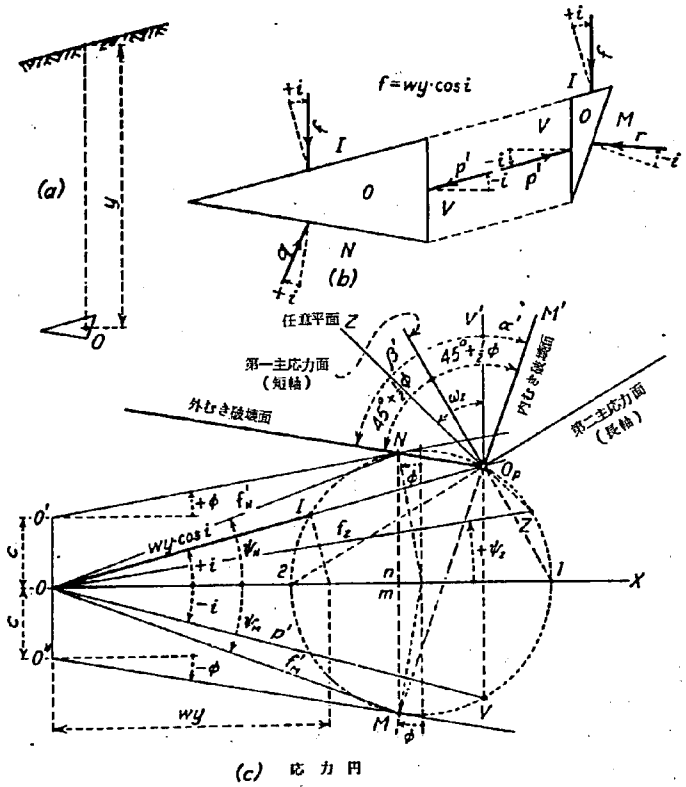


図 5-27 粘着力のある土の受働応力状態を表わす応力円

12 f_E の傾角は

$$\psi_E = +\angle XOZ$$

深さによる土圧の変化と破壊面の形

図5-27に示すように、地表面からの深さが増せば、地表面に平行な面に作用する鉛直応力は $f = w y \cos i$ で表わされるので、 y に比例する。しかし、破壊線 $0'E$ 、 $0''E'$ は y に比例しない。それ故、各深さ y に相当する応力円は y に比例しない。鉛直面に作用する受働土圧 $p = 0V$ も深さ y に比例しなくなる。同様にして、破壊角も一定ではなく、破壊面も平面ではなくなる。

図5-28に鉛直面に作用する受働土圧の分布と破壊面とを示す。作図法は図5-20の場合と同じである。

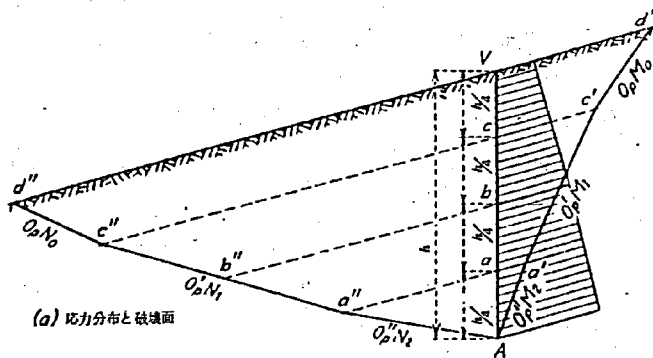
主働土圧の場合と異なり土圧分布は凸形で地表面附近でも0にはならない。内向き破壊面は、主働応力状態の場合とは逆に上向きに凸であり、外向き破壊面も主働応力状態の場合とは逆に下向きに凸である。

地表面が水平な場合の破壊角

地表面が水平な場合には、応力円は図5-29のようになる。

図より深さ y にかかわらず、破壊角 α' 、 β' は一定で次式となる。

$$\alpha' = \beta' = 45^\circ + \frac{1}{2}\phi$$



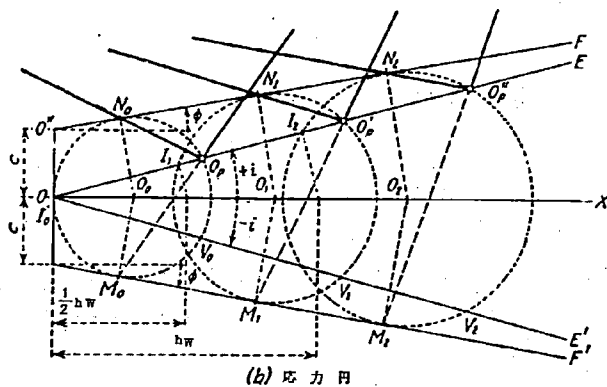


図5-28 鉛直面に作用する受働土圧の分布と破壊面

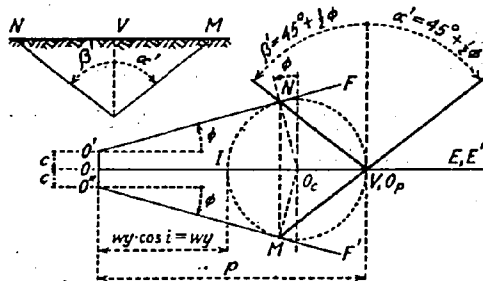


図5-29 地表面が水平な場合の主働土圧と破壊角

地表面が水平な場合の主働土圧

地表面が水平な場合には、鉛直面に作用する受働土圧をもとめるランキンの公式は非常に簡単になる。この場合破壊角は $\alpha' = 45^\circ + \frac{1}{2}\phi$ となるので、全受働土圧は図5-30に示した力の釣合からもとめることができる。

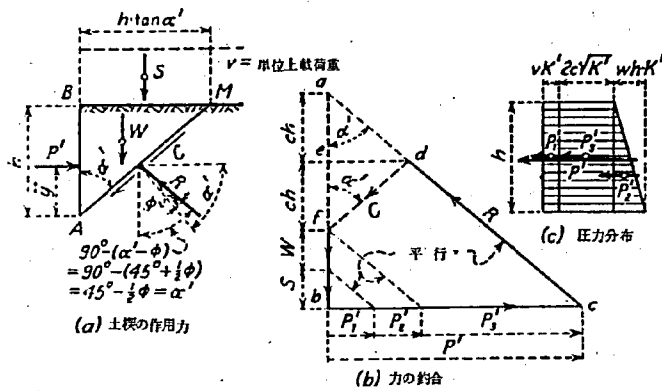


図5-30 地表面が水平な場合の受働土圧

土楔 ABM に作用する力の釣合は (b) において $f b c d$ で示される。

$f b$ と $c d$ の交点を A とし、 $e d$ は水平に引くものとする。

土楔 ABM の重量は (a) より

$$W = \frac{1}{2} w h^2 \tan \alpha' \quad \text{----- (d)}$$

A M に沿う粘着力は (a) より

$$c = c (A M) = c \times \frac{h}{\cos \alpha'} \quad \text{----- (e)}$$

上載荷重は

$$S = v h \tan \alpha'$$

図 (b) において、式 (e) を応用すれば

$$e f = c \cos \alpha' = c \times \frac{h}{\cos \alpha'} \cos \alpha' = c h$$

幾何学的に $e f = a e$ であるので

$$a f = 2 e f = 2 c h$$

図 (b) において

$$\begin{aligned} P' &= (W + S + 2 c h) \tan \alpha' \\ &= \left(\frac{1}{2} w h^2 \tan \alpha' + v h \tan \alpha' + 2 c h \right) \tan \alpha' \\ &= \left(\frac{1}{2} w h^2 + v h \right) \tan^2 \alpha' + 2 c h \tan \alpha' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2} w h^2 + v h \right) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) + 2 c h \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} w h + v \right) h K' + 2 c h \sqrt{K'} \quad \text{-----} \quad (5-21)
 \end{aligned}$$

但し、

$$K' = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

深さ y における受働応力は、 P' の変化率に等しいので式 (5-19) の h に y を代入して y で微分すればよい。

$$p = \frac{\delta P'}{\delta y} = (w y + v) K' + 2 c \sqrt{K'} \quad \text{-----} \quad (5-22)$$

$\phi = 0$ の場合は $K' = 0$ になるので

$$p = (w y + v) + 2 c \quad \text{-----} \quad (5-23)$$

応力楕円

粘着力のある土の受働応力状態を表わす応力楕円は、粘着力のない土の場合と同様にして図 5-27 に示す応力円を利用すれば、図 5-31 に示す応力楕円が容易に作図できる。

応力円の適用

応力円を利用して土圧を求める場合は、主働土圧の場合に述べた二条件が満たされなければならない。しかしながらそのような状態はほとんど望み得ない。しかし擁壁後趾に立てた鉛直面に作用する応力が、地表面に平行な場合には、応力円より求めた土圧公式 (5-21) (5-22) 等が使用できる。この状態になるためには、擁壁後趾に立てた鉛直面に作用する粘着力を 0 と見なさなければならない。このような仮定は安全側であり合理的な仮定である。