

土木研究所資料

数値計算による地下水位解析

昭和63年3月

建設省土木研究所

新潟試験所

「Copyright c (1988) by P.W.R.I.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the Director General of P.W. R.I.

この報告書は、土木研究所長の承認を得て刊行したものである。したがって、本報告書の全部又は一部の転載、複製は、土木研究所長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。」

数値計算による地下水位解析

新潟試験所 所長 是 沢 一 樹
近 藤 政 司
白 石 一 夫
丸 山 清 輝
元新潟試験所 所長 吉 松 弘 行*
元新潟試験所 横 山 正 一**

要 旨

地すべり地内の地下水を高い精度で把握することは、地すべり対策工の効果判定を行う上で重要である。しかし、現地での測定は技術的、経済的にかなり困難である。そこで、水理地質的なパラメーターを介して数値計算によりシミュレーションすることができれば大変便利である。

今回は、解析に必要な水理地質定数の精度を考慮し、小容量のパソコンでも解析可能で簡易な手法である平面二次元の差分解法を試みた。

キーワード：数値解析、地下水位解析、シミュレーション、排水壁工、現地観測

* 現急傾斜地崩壊研究室長

** 現北陸地方建設局千曲川工事事務所

まえがき

地すべりの発生は、これまでの調査・研究により、地形・地質等の素因と降雨・融雪等の誘因との関連が深いことが一般的に知られている。地すべり防止および発生後の対策を行う上では後者の誘因に対する処置が重要である。すなわち降雨、融雪水等が地中に浸透し、地下水位を高めることにより、地すべり面に作用する間隙水圧を増大させ、地すべりを発生させたり、進行させたりすると考えられる。このことより、地すべり地内の地下水（特に間隙水圧としてすべり面に作用している地下水）を排除する方法が有効であると考えられる。このため、多くの地すべり地において、数多くの地下水排除工が施工されている。その主なものとしては、集水井工、横ボーリング工、暗渠工、水路工、排水トンネル工等である。前述のことより、地すべり地内の地下水位を高い精度で把握することは、地すべり対策、対策工の効果判定を行う上で重要である。しかし、実際に地下水位、間隙水圧を測ることは、技術的、経済的にかなり困難である。そこで透水係数、間隙率、不透水層の位置等の水理地質的なパラメーターを介して数値計算によりシミュレーションすることができれば大変便利である。すでに、有限要素法、境界要素法等の汎用性に富み精度の高い手法が提案されている。しかし、今回は解析に必要な水理地質定数の精度を考慮し、現場事務所の小容量のパソコンでも解析可能で簡易な手法である平面二次元の差分解法を、排水壁工が施工された地すべり地の地下水位低下範囲の予測に試みた。

この報告では、主に差分解法の数値計算方法を詳細に記述し、後に、自由水面を有する非定常浸透問題の有限要素法による解析の説明を加えてある。

昭和63年1月

目 次

概 要	1
§. 1 差分解析法	2
1. 数値計算法	2
2. 離散化	4
2. 1	$kh (\partial^2 h / \partial x^2)$ の離散化	4
2. 2	$kh (\partial^2 z / \partial x^2)$ の離散化	13
2. 3	$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$ の離散化	16
2. 4	$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ の離散化	21
3. 全体マトリックスの組立	27
4. プログラム	30
5. 計算例	30
§. 2 有限要素法	43
1. 有限要素法による非定常解析	43
1. 1	非定常浸透の支配方程式と変分原理	43
1. 2	有限要素法の定式化	48
§. 3 地すべり地における排水壁工の効果 (土木技術資料の抜粋)	58

概 要

地すべり現象の要因の主要なものとして、降雨・融雪水等の地中浸透により地下水位が上昇して、地すべり面に作用する間隙水圧を増大させることによる、土塊のせん断抵抗力の低下があげられる。したがって地すべり地においては、この要因排除のため各種の地下水排除工が施工されている。しかし、地下水排除工による地下水低下効果について定量的に把握することは、技術的・経済的にかなり困難であるため測定例が少ない。そこで透水係数、間隙率、不透水層の位置等の水理地質的なパラメータを介して、数値計算によりシミュレーションすることができれば、地すべり対策工事の計画・施工に際し有効な基礎資料とすることができる。

現在、自由水面を有する地下水流の数値計算手法としては有限要素法、境界要素法が汎用性に富み、高い精度の手法として提案されている。が、今回採用した手法は、現実のすべり斜面での地下水流動解析ができること、解析に際し小型容量のパソコンでも解析可能なことおよび解析に必要な水理地質定数の現場観測精度を考慮して、平面二次元浸透流の差分解法によることとした。以下、この資料では差分解法の数値計算方法を詳細に記述するとともにそのプログラムを掲載した。また、今回提案した平面二次元差分解法が、妥当であるかいなかを比較するために行つた有限要素法による解析の説明も記述した。最後にそれぞれの解析法を用いた現地の解析例として、地すべり斜面内の地下水位に排水壁工が及ぼす影響を定量的に把握された結果と差分解法による水面形を比較し、さらに有限要素法によって水面形の妥当性について検討した結果を示した。

§ 1. 差分解法

1. 数値計算方法

自由水面を有する地下水の流れを平面二次元的にみて、座標系を図-1のようにとると連続方程式は式(1)で与えられる。

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (hu) - \frac{\partial}{\partial y} (hv) + r \quad (1)$$

ここに h : x, y 平面に垂直に測った水深

u, v : x, y 方向の平均流速

r : 流出及び流入量

θ : 有効間隙率

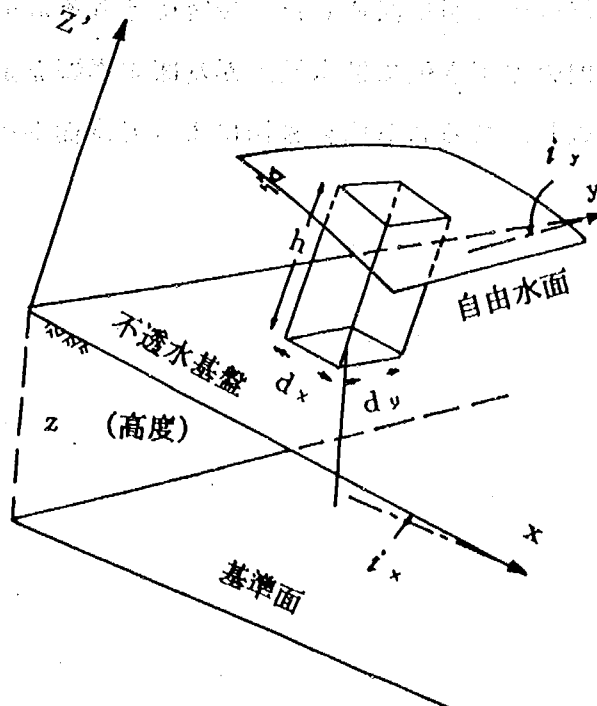


図-1 モデル模式図

連続方程式 (1) と運動方程式としての Darcy 則を用いると自由地下水の基礎方程式が得られるが、Dupuit と Forchheimer によれば、自由水面の勾配があまり大きくなく、流線の曲がりも小さい場合には、流れの平均的通過断面内で流速は一様に分布していると考えてよいことから、図-1 の座標系を用いると、静水圧分布に対してポテンシャルは

$$\phi = h \cos i_x \cdot \cos i_y + z \quad (2)$$

ここに i_x, i_y : x, y 軸すなわち不透水基盤と水平のなす角

z : 不透水基盤の標高

i_x, i_y が十分に小さい場合は

$$\phi = h + z \quad (3)$$

と見なしてさしつかえない。

したがって、自由地下水の流れに関する基礎方程式は

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kh \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ kh \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} + r \quad (4)$$

と記される。式 (4) に式 (3) を代入すると

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kh \frac{\partial (h+z)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ kh \frac{\partial (h+z)}{\partial y} \right\} + r \quad (5)$$

今一度書き改めると

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial h}{\partial t} = & kh \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + kh \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ & + k \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + kh \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + kh \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + r \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここに、 $-(\partial z / \partial x) = \sin i x$ 、 $-(\partial z / \partial y) = \sin i y$ であって式 (6) 中の右辺第 1、2 項は拡散項、第 3、4 項は輸送項に相当する。

式 (6) を離散化し数値計算を行った。式 (6) 中の z は不透水層基盤の標高であり、既知として与えられるため、未知数は h のみとなり、適当な初期境界条件を与えることにより近似解が求められる。

2. 離散化

式 (6) の離散化においては、左辺にクランク・ニコルソン法を適用し、右辺はテーラー級数展開法を利用して、第 3 項まで採用した。なお、離散化にあたっては、地下水の浸出点近傍での誤差の累積を防ぐため、差分間隔を密にとれるよう等間隔でなくても計算が実施できるように考慮した。

2. 1 $kh(\partial^2 h / \partial x^2)$ の離散化

x, y 平面の座標を図-2 のようにとるとする。

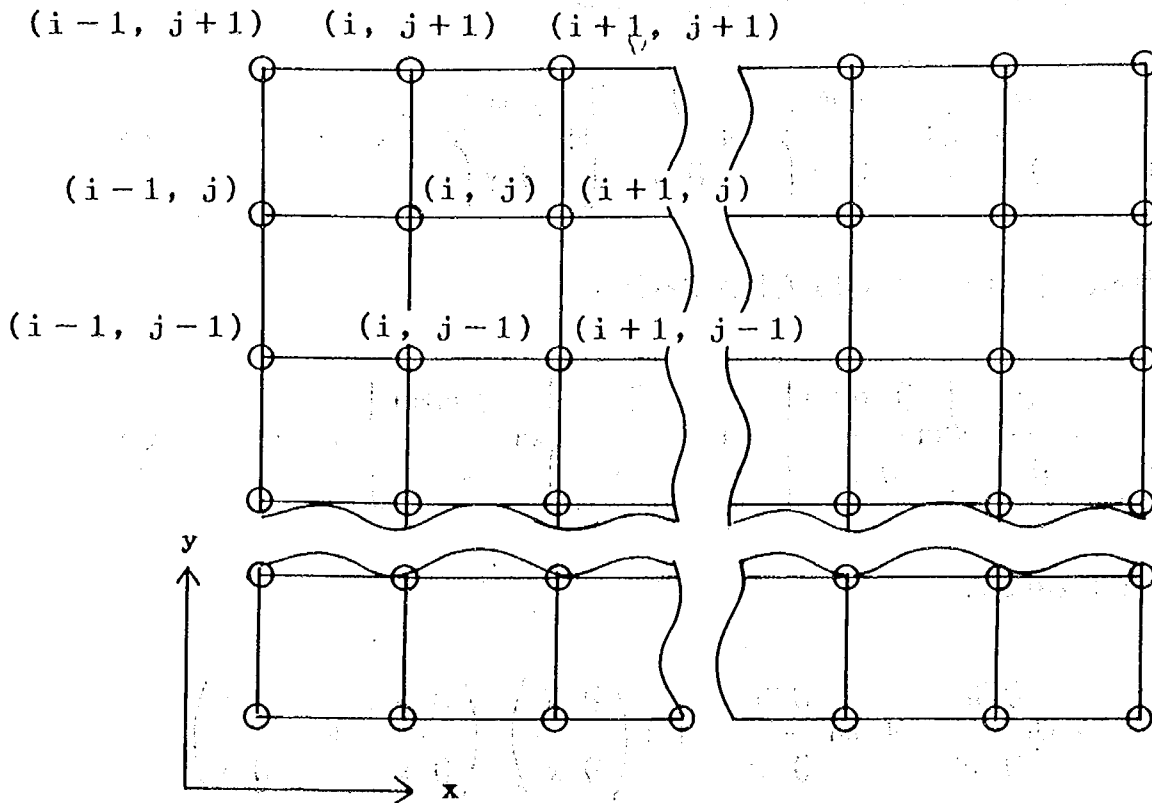


図-2 x, y の平面座標

① $kh_{i-1} (\partial^2 h / \partial x^2)_{i-1}$

(接点が i-1 の場合)

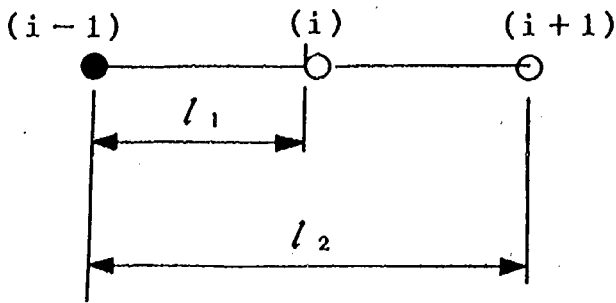


図-3

今、x 方向のみを考えるので添字 j は省略する。また l_1 、 l_2 を図-3 に示す通りとする。

$$h_i = h_{i-1} + l_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$h_{i+1} = h_{i-1} + l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

(7)

と近似できる。

第1式の両辺に l_2 を、第2式の両辺に l_1 を乗じて第1式から第2式をひくと

$$l_2 h_i = l_2 h_{i-1} + l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$- \left(l_1 h_{i+1} = l_1 h_{i-1} + l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} \right)$$

$$l_2 h_i - l_1 h_{i+1} = (l_2 - l_1) h_{i-1} + \frac{1}{2} l_1 l_2 (l_1 - l_2) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} = \frac{2}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \{ (l_1 - l_2) h_{i-1} + l_2 h_i - l_1 h_{i+1} \} \quad (8)$$

式(8)中の h は、非定常計算における計算ステップ毎の水位変化を Δh とし、 $h = h + \Delta h$ と表せば、

$$\begin{aligned}
 kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{2k(h_{i-1} + \Delta h_{i-1})}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \{ (l_1 - l_2)(h_{i-1} + \Delta h_{i-1}) \\
 &+ l_2(h_i + \Delta h_i) - l_1(h_{i+1} + \Delta h_{i+1}) \} \\
 &= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \left[h_{i-1} \{ (l_1 - l_2)\Delta h_{i-1} + l_2\Delta h_i - l_1\Delta h_{i+1} \} \right. \\
 &+ \Delta h_{i-1} \{ (l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \} \\
 &+ h_{i-1} \{ (l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \} \\
 &\left. + \Delta h_{i-1} \{ (l_1 - l_2)\Delta h_{i-1} + l_2\Delta h_i - l_1\Delta h_{i+1} \} \right]
 \end{aligned}$$

となり、 $(\Delta h)^2$ は微小量であり無視すると

$$\begin{aligned}
 kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \left[\Delta h_{i-1} \{ 2(l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \} \right. \\
 &+ \Delta h_i \cdot l_2 \cdot h_{i-1} + \Delta h_{i+1} \cdot l_1 \cdot h_{i-1} \\
 &\left. + h_{i-1} \{ (l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \} \right]
 \end{aligned}$$

マトリックス表示をすると、

$$\begin{aligned}
 kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \begin{bmatrix} 2(l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \\ h_{i-1}l_2 \\ -h_{i-1}l_1 \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
 &+ \frac{2k \cdot h_{i-1}}{l_1 l_2 (l_1 - l_2)} \{ (l_1 - l_2)h_{i-1} + l_2h_i - l_1h_{i+1} \} \quad (9)
 \end{aligned}$$

となる。ちなみに差分間隔を等間隔 Δx にとると式 (9) は

$$\begin{aligned}
 kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{2k}{\Delta x \cdot 2\Delta x \cdot \Delta x} \begin{bmatrix} -2\Delta x h_{i-1} + 2\Delta x h_i - \Delta x h_{i+1} \\ h_{i-1} \cdot 2\Delta x \\ -h_{i-1} \cdot \Delta x \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
 &+ \frac{2k}{\Delta x \cdot 2\Delta x \cdot \Delta x} \{-\Delta x h_{i-1} + 2\Delta x h_i - \Delta x h_{i+1}\} \\
 &= \frac{k}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2h_{i-1} + 2h_i - h_{i+1} \\ 2h_{i-1} \\ -h_{i-1} \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
 &+ \frac{k}{(\Delta x)^2} \{-h_{i-1} + 2h_i - h_{i+1}\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

となる。

② $kh_i (\partial^2 h / \partial x^2)_i$

(接点が*i*の場合)

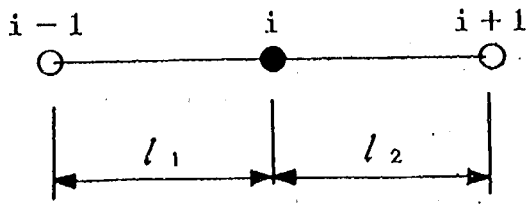


図-4

l_1, l_2 を図-4のようにとると

$$\left. \begin{aligned} h_{i-1} &= h_i - l_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i \\ h_{i+1} &= h_i + l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)の第1式に l_2 、第2式に l_1 を乗じ加えると、

$$\begin{aligned} l_2 h_{i-1} &= l_2 h_i - l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1^2 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i \\ + l_1 h_{i+1} &= l_1 h_i + l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1 l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i \end{aligned}$$

$$l_2 h_{i-1} + l_1 h_{i+1} = h_i (l_2 + l_1) + \frac{1}{2} l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i$$

①と同様に、 $h=h+\Delta h$ として整理すると

$$\begin{aligned}
 kh_i \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{2k(h_i + \Delta h_i)}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2 \Delta h_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) \Delta h_i + \ell_1 \Delta h_{i+1} \\
 &\quad + \ell_2 h_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) h_i + \ell_1 h_{i+1} \} \\
 &= \frac{2k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2 h_i \Delta h_{i-1} + (\ell_2 h_{i-1} - 2(\ell_1 + \ell_2) h_i + \ell_1 h_{i+1}) \Delta h_i \\
 &\quad + \ell_1 h_i \Delta h_{i+1} + h_i (\ell_2 h_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) h_i + \ell_1 h_{i+1}) \} \\
 &= \frac{2k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \begin{bmatrix} \ell_2 h_i \\ \ell_2 h_{i-1} - 2(\ell_1 + \ell_2) h_i + \ell_1 h_{i+1} \\ \ell_1 h_i \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
 &\quad + \frac{2k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ h_i \cdot (\ell_2 h_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) h_i + \ell_1 h_{i+1}) \}
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。ちなみに①の式(9)中の ℓ_2 を $\ell_2 = \ell_1 + \ell_2$ と置くと、

$$\begin{aligned}
 kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{2k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \begin{bmatrix} \ell_2 h_{i-1} + (\ell_1 + \ell_2) h_i - \ell_1 h_{i+1} \\ (\ell_1 + \ell_2) h_{i-1} \\ -\ell_1 h_{i-1} \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
 &\quad + \frac{2k \cdot h_{i-1}}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2 h_{i-1} + (\ell_1 + \ell_2) h_i - \ell_1 h_{i+1} \}
 \end{aligned} \tag{13}$$

となり、係数部分は同じ形となる。

$\ell_1 = \ell_2 = \Delta x$ とおくと式(12)は

$$\begin{aligned}
kh_i \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{2k}{2 \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \Delta x} \begin{bmatrix} \Delta x h_i \\ \Delta x h_{i-1} - 2\Delta x h_i + \Delta x h_{i+1} \\ \Delta x h_i \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
&+ \frac{2k}{2\Delta x \cdot \Delta x \cdot \Delta x} \{ h_i (\Delta x h_{i-1} - 2\Delta x h_i + \Delta x h_{i+1}) \} \\
&= \frac{k}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} h_i \\ h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1} \\ h_i \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}] \\
&+ \frac{k}{(\Delta x)^2} \left\{ h_i (h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}) \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

となる。

③ $kh_{i+1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$ (接点が*i+1*の場合)

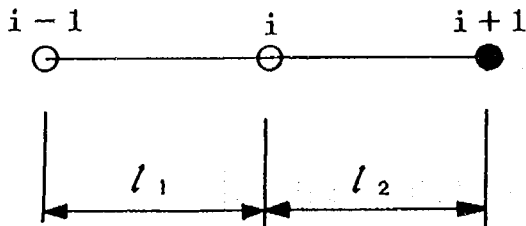


図-5

$$\left. \begin{aligned}
h_{i-1} &= h_{i+1} - (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{(l_1 + l_2)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} \\
h_i &= h_{i+1} - l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}
\end{aligned} \right\} (15)$$

式(15)の第1式に l_2 , 第2式に $(l_1 + l_2)$ をかけてひくと

$$l_2 h_{i-1} = l_2 h_{i+1} - l_2(l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{l_2(l_1 + l_2)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$-(l_1 + l_2)h_i = (l_1 + l_2)h_{i+1} - l_2(l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{l_2(l_1 + l_2)}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i = -l_1 h_{i+1} + \frac{l_1 l_2}{2} (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} = \frac{2}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i + l_1 h_{i+1} \}$$

$$k h_{i+1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} = \frac{2k(h_{i+1} + \Delta h_{i+1})}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2(h_{i-1} + \Delta h_{i-1})$$

$$- (l_1 + l_2)(h_i + \Delta h_i) + l_1(h_{i+1} + \Delta h_{i+1}) \}$$

$$= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ \Delta h_{i-1} \cdot l_2 h_{i+1} - \Delta h_i (l_1 + l_2) h_{i+1}$$

$$+ \Delta h_{i+1} (l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i + 2l_1 h_{i+1})$$

$$+ h_{i+1} (l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i + l_1 h_{i+1}) \}$$

$$= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \left[\begin{array}{l} l_2 h_{i+1} \\ -(l_1 + l_2)h_{i+1} \\ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i + 2l_1 h_{i+1} \end{array} \right] [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{2k h_{i+1}}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)h_i + 2l_1 h_{i+1} \}$$

(16)

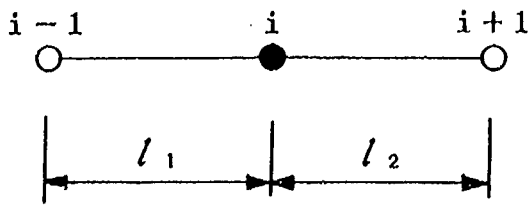
式(16)において $l_1 = l_2 = \Delta x$ とおくと

$$kh_{i+1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} = \frac{k}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} h_{i+1} \\ -2h_{i+1} \\ h_{i-1} - 2h_i + 2h_{i+1} \end{bmatrix} [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{k}{(\Delta x)^2} h_{i+1} \{h_{i-1} - 2h_i + 2h_{i+1}\} \quad (17)$$

となる。

2.2 kh ($\partial^2 z / \partial x^2$) の離散化



z は不透水基盤の標高であり、既知であるため簡単な式となる。

図-6

① $kh_{i-1}(\partial^2 z / \partial x^2)$ (接点が i-1 の場合)

$$\left. \begin{aligned} z_i &= z_{i-1} + l_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \\ z_{i+1} &= z_{i-1} + (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(18)の第1式に $(l_1 + l_2)$, 第2式に l_1 を乗じ、ひくと、

$$\begin{aligned} (l_1 + l_2)z_i &= (l_1 + l_2)z_{i-1} + l_1(l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \\ - l_1 z_{i+1} &= -l_1 z_{i-1} - l_1(l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} - \frac{1}{2} l_1(l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \end{aligned}$$

$$(l_1 + l_2)z_i - l_1 z_{i+1} = l_2 z_{i-1} - \frac{1}{2} l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} = \frac{2}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2 z_{i-1} - (l_1 + l_2)z_i + l_1 z_{i+1} \}$$

$$kh_{i-1} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} = \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} (h_{i-1} + \Delta h_{i-1}) \{ l_2 z_{i-1} - (l_1 + l_2)z_i + l_1 z_{i+1} \} \quad (19)$$

となる。

$$\textcircled{2} \quad kh_i \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

(接点がいの場合)

$$z_{i-1} = z_i - l_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

$$z_{i+1} = z_i + l_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

(20)

$$l_2 z_{i-1} = l_2 z_i - l_1 l_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

$$+ l_1 z_{i+1} = l_1 z_i + l_1 l_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

$$l_2 z_{i-1} + l_1 z_{i+1} = (l_1 + l_2) z_i + \frac{1}{2} l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i = \frac{2}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2 z_{i-1} - (l_1 + l_2) z_i + l_1 z_{i+1} \}$$

$$kh_i \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_i = \frac{2}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} (h_i + \Delta h_i) \{ l_2 z_{i-1} - (l_1 + l_2) z_i + l_1 z_{i+1} \} \quad (21)$$

$$\textcircled{3} kh_{i+1} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

(接点が*i+1*の場合)

$$z_{i-1} = z_{i+1} - (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$z_i = z_{i+1} - \ell_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

(22)

$$\ell_2 z_{i-1} = \ell_2 z_{i+1} - \ell_2 (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$-(\ell_1 + \ell_2) z_i = (\ell_1 + \ell_2) z_{i+1} - \ell_2 (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\ell_2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) z_i = -\ell_2 z_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2 (\ell_1 + \ell_2) \ell_1 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1} = \frac{2}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) z_i + \ell_1 z_{i+1} \}$$

$$kh_{i+1} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1} = \frac{2k(h_{i+1} + \Delta h_{i+1})}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2) z_i + \ell_1 z_{i+1} \} \quad (23)$$

2. 3 $k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$ の離散化

① $k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2_{i-1}$ (接点が $i-1$ の場合)

$$\left. \begin{aligned} h_i &= h_{i-1} + l_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} \\ h_{i+1} &= h_{i-1} + (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) の第1式に $(l_1 + l_2)^2$, 第2式に l_1 を乗じ、ひくと

$$(l_1 + l_2)^2 h_i = (l_1 + l_2)^2 h_{i-1} + l_1 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$- \quad l_1 h_{i+1} = l_1 h_{i-1} + l_1 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$(l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} = (2l_1 l_2 + l_2^2) h_{i-1} + l_1 (l_1 + l_2) l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1} = \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} \}$$

$$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1}^2 = k \left\{ \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \right\}^2 [(l_1 + l_2)^2 (h_i + \Delta h_i) - l_1 (h_{i+1} + \Delta h_{i+1})$$

$$- l_2 (2l_1 + l_2) (h_{i-1} + \Delta h_{i-1})]^2$$

$$= k \left\{ \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \right\}^2 [(l_1 + l_2)^2 \Delta h_i - l_1 \Delta h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) \Delta h_{i-1}$$

$$+ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1}]^2$$

$$= k \left\{ \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \right\}^2 [\{ (l_1 + l_2)^2 \Delta h_i - l_1 \Delta h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) \Delta h_{i-1} \}^2$$

$$+ 2 \{ (l_1 + l_2)^2 \Delta h_i - l_1 \Delta h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) \Delta h_{i-1} \} \cdot$$

$$\{ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} \}$$

$$+ \{ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} \}^2]$$

$$= k \left\{ \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \right\}^2 [2 \{ (l_1 + l_2)^2 \Delta h_i - l_1 \Delta h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) \Delta h_{i-1} \}$$

$$\cdot \{ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} \}$$

$$+ \{ (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} - l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} \}^2]$$

$$= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \left[\begin{array}{l} l_2 (2l_1 + l_2)^2 h_{i-1} - l_2 (2l_1 + l_2) (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 l_2 (2l_1 + l_2) h_{i+1} \\ - l_2 (2l_1 + l_2) (l_1 + l_2)^2 h_{i-1} + (l_1 + l_2)^4 h_i - l_1 (l_1 + l_2)^2 h_{i+1} \\ l_1 l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} - l_1 (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1^2 h_{i+1} \end{array} \right]$$

$$[\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{ -l_2 (2l_1 + l_2) h_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1} \}^2 \quad (25)$$

$$\textcircled{2} \quad k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^2$$

(接点が*i*の場合)

$$h_{i-1} = h_i - l_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i$$

$$h_{i+1} = h_i + l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i$$

(26)

第1式に l_2 , 第2式に l_1 を乗じてひくと

$$l_2 h_{i-1} = l_2 h_i - l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i$$

$$l_1 h_{i+1} = l_1 h_i + l_1 l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_i$$

$$l_2 h_{i-1} - l_1 h_{i+1} = h_i (l_2 - l_1) - l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ -l_2 h_{i-1} - (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1} \}$$

$$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^2 = \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{ -l_2 (h_{i-1} + \Delta h_{i-1}) - (l_1 - l_2) (h_i + \Delta h_i) + l_1 (h_{i+1} + \Delta h_{i+1}) \}^2$$

$$= \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} [\{ -l_2 \Delta h_{i-1} - (l_1 - l_2) \Delta h_i + l_1 \Delta h_{i+1} \} + \{ -l_2 h_{i-1} - (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1} \}]^2$$

$$= \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} [2 \{ -l_2 \Delta h_{i-1} - (l_1 - l_2) \Delta h_i + l_1 \Delta h_{i+1} \} \times \{ -l_2 h_{i-1} - (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1} \} + \{ -l_2 h_{i-1} - (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1} \}^2]$$

$$= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \left[\begin{array}{l} l_2 h_{i-1} + l_2 (l_1 - l_2) h_i - l_1 l_2 h_{i+1} \\ l_2 (l_1 - l_2) h_{i-1} + (l_1 - l_2)^2 h_i - l_1 (l_1 - l_2) h_{i+1} \\ - l_1 l_2 h_{i-1} - l_1 (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1} \end{array} \right]$$

$$\times [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{-l_1 h_{i-1} - (l_1 - l_2) h_i + l_1 h_{i+1}\}^2 \quad (27)$$

③ $k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1}$ (接点が*i+1*の場合)

$$\left. \begin{array}{l} h_{i-1} = h_{i+1} - (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} \\ h_i = h_{i+1} - l_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} l_2^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1} \end{array} \right\} \quad (28)$$

第1式に l_2 , 第2式に $(l_1 + l_2)^2$ を乗じてひくと、

$$l_2 h_{i-1} = l_2 h_{i+1} - l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} (l_1 + l_2)^2 l_2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$- (l_1 + l_2)^2 h_i = (l_1 l_2)^2 h_{i+1} - l_2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} l_2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 h_i = -l_1 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} + l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} \}$$

$$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1}^2 = \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} [2 \{ l_2 \Delta h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 \Delta h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) \Delta h_{i+1} \}$$

$$\times \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} \}$$

$$+ \{ l_2 \Delta h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 \Delta h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) \Delta h_{i+1} \}^2]$$

$$= \frac{2k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \left[\begin{array}{l} l_2 h_{i-1} - l_2 (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 l_2 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} \\ - l_2 (l_1 + l_2)^2 h_{i-1} + (l_1 + l_2)^4 h_i - l_1 (l_1 + 2l_2) (l_1 + l_2)^2 h_{i+1} \\ l_1 l_2 (l_1 + 2l_2) h_{i-1} - l_1 (l_1 + 2l_2) (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 (l_1 + 2l_2)^2 h_{i+1} \end{array} \right]$$

$$\times [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} \}^2$$

(29)

2. 4 $k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ の離散化

① $k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1}$

(接点が $i-1$ の場合)

$$\left. \begin{aligned} z_i &= z_{i-1} + l_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \\ z_{i+1} &= z_{i-1} + (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$(l_1 + l_2)^2 z_i = (l_1 + l_2)^2 z_{i-1} + l_1 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1^2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$- \left(l_1 + l_2 \right) l_2 z_{i+1} = l_2 (l_1 + l_2) z_{i-1} + l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{1}{2} l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1}$$

$$l_1 + l_2)^2 z_i - l_1 l_2 z_{i+1} = l_2 (2l_1 + l_2) z_{i-1} + l_1 l_2 (l_1 + l_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} = \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ -l_2 (2l_1 + l_2) z_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 z_i - l_1 l_2 z_{i+1} \}$$

3. 3 の①と式(30)より

$$\begin{aligned} k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i-1} &= \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \cdot \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \{ -l_2 (2l_1 + l_2) (h_{i-1} + \Delta h_{i-1}) \\ &\quad + (l_1 + l_2)^2 (h_i + \Delta h_i) - l_1^2 (h_{i+1} + \Delta h_{i+1}) \} \\ &\quad \times \{ -l_2 (2l_1 + l_2) z_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 z_i - l_1 l_2 z_{i+1} \} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \begin{bmatrix} -l_2(2l_1 + l_2) \{-l_2(2l_1 + l_2)z_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 z_i - l_1 z_{i+1}\} \\ (l_1 + l_2)^2 \{ \quad \quad \quad \} \\ -l_1 \{ \quad \quad \quad \} \end{bmatrix}$$

$$\times [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$+ \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{-l_2(2l_1 + l_2)h_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 h_i - l_1 h_{i+1}\}$$

$$\times \{-l_2(2l_1 + l_2)z_{i-1} + (l_1 + l_2)^2 z_i - l_1 z_{i+1}\} \quad (31)$$

$$+ \frac{k}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \{-\lambda_2 h_{i-1} - (\lambda_1 - \lambda_2) h_i + \lambda_1 h_{i+1}\}$$

$$\times \{-\lambda_2 z_{i-1} - (\lambda_1 - \lambda_2) z_i + \lambda_1 z_{i+1}\} \quad (32)$$

$$\textcircled{3} \quad k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1}$$

(接点が*i+1*の場合)

$$z_{i-1} = z_{i+1} - (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$z_i = z_{i+1} - \ell_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\ell_2^2 z_{i-1} = \ell_2^2 z_{i+1} - \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\left(\ell_1 + \ell_2 \right)^2 z_i = \left(\ell_1 + \ell_2 \right)^2 z_{i+1} - \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1}$$

$$\ell_2^2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2)^2 z_i = -\ell_1 (\ell_1 + 2\ell_2) + \ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{1}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)} \{ \ell_2^2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2)^2 z_i + \ell_1 (\ell_1 + 2\ell_2) z_{i+1} \}$$

$$k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)^2} \{ \ell_2^2 (h_{i-1} + \Delta h_{i-1}) - (\ell_1 + \ell_2)^2 (h_i + \Delta h_i) + \ell_1 (\ell_1 + 2\ell_2) h_{i+1} \}$$

$$\{ \ell_2^2 z_{i-1} - (\ell_1 + \ell_2)^2 z_i + \ell_1 (\ell_1 + 2\ell_2) z_{i+1} \}$$

$$= \frac{k}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2)^2} \left[\begin{array}{l} \ell_2^2 z_{i-1} - \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2)^2 z_i + \ell_1 \ell_2 (\ell_1 + 2\ell_2) z_{i+1} \\ - \ell_2^2 (\ell_1 + \ell_2)^2 z_{i-1} + (\ell_1 + \ell_2)^4 z_i - \ell_1 (\ell_1 + \ell_2)^2 (\ell_1 + 2\ell_2) z_{i+1} \\ \ell_1 \ell_2 (\ell_1 + 2\ell_2) z_{i-1} - \ell_1 (\ell_1 + 2\ell_2) (\ell_1 + \ell_2)^2 z_i + \ell_1^2 (\ell_1 + 2\ell_2)^2 z_{i+1} \end{array} \right]$$

$$\times [\Delta h_{i-1}, \Delta h_i, \Delta h_{i+1}]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2} \{ l_2 h_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 h_i + l_1 (l_1 + 2l_2) h_{i+1} \} \\
& \times \{ l_2 z_{i-1} - (l_1 + l_2)^2 z_i + l_1 (l_1 + 2l_2) z_{i+1} \} \quad (33)
\end{aligned}$$

ここまでで x 方向の離散化は終わりである。

y 方向についても、離散化は x 方向における方法と同様であり、添字 i を j に x を y に読み換えればよい。

3. 全体マトリックスの組立

例として図-7の場合について考える。

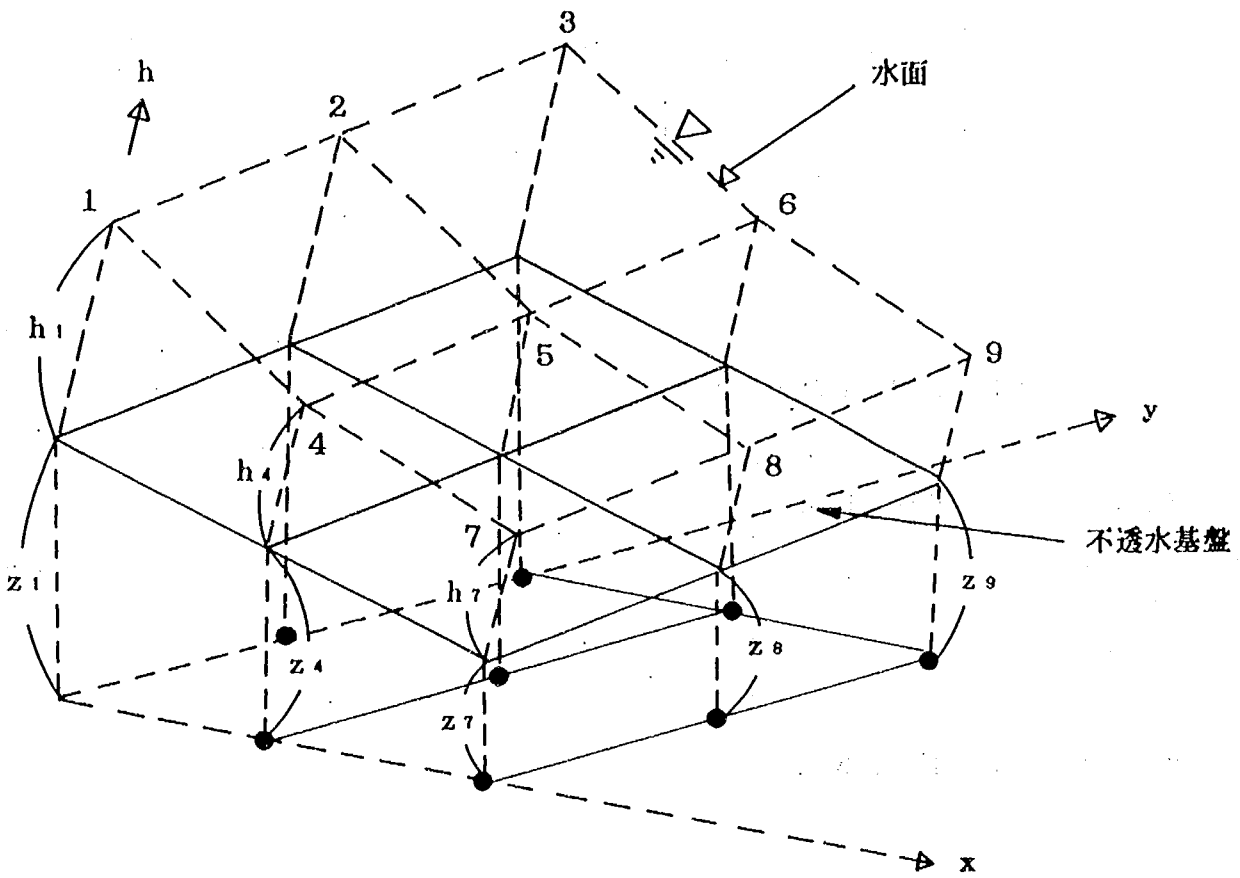


図-7 モデル例

今、式(6)の右辺を離散化したものをマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。

ここで、[K]は、図-7の例では

$$\begin{bmatrix} K_{11}, K_{12}, \dots, K_{18}, K_{19} \\ K_{21}, K_{22}, \dots, K_{28}, K_{29} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{91}, K_{92}, \dots, K_{98}, K_{99} \end{bmatrix} \quad (35)$$

であり、

$$K_{11} = S_{1x, l-1} + S_{1y, l-1} + S_{4x, l-1} + S_{2y, l-1} + S_{7x, l-1} + S_{8y, l-1}$$

$$K_{12} = S_{2y, l} + S_{1y, l} + S_{3y, l} + S_{2x, l-1} + S_{5x, l-1} + S_{8x, l-1}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

であり、 $S_{1 \times, i-1}$ は接点1に関する x 方向の離散化で、 $i-1$ は接点が左端にある場合である。S は各微分項の Δh に関する離散化の合計である。

また、(R) は定数項である。

また、式(6)の左辺は

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = \theta \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \theta \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (36)$$

であり

$$\Delta h(t+\Delta t) = 0.5 \cdot \Delta h(t) + 0.5 \cdot \Delta h'(t+\Delta t) \quad (37)$$

として繰り返し法にて求めた。式(37)は、一般にクランク・ニコルソンと呼ばれている方法である。

式(37)の右辺の、 $\Delta h'(t+\Delta t)$ を最初 $\Delta h'(t+\Delta t) = \Delta h(t)$ と仮定し、式(36)の値を求め式(34)の定数項からひくと

$$\left[k \right] \left[\Delta h \right] + \left[R' \right] = 0$$

となり

$$\left[\Delta h \right] = - \left[R' \right] \left[k \right]^{-1}$$

Δh が求められる。この Δh と当初仮定した $\Delta h(t+\Delta t)$ を比較して、 $\Delta h - \Delta h(t+\Delta t) \leq$

となれば Δh の近似値が求められる。一方、打ち切り誤差の範囲におさまらなければ

$\Delta h(t+\Delta t) = \Delta h$ として再度、打ち切り誤差の範囲におさまるまで計算を繰り返す。

次に、 $\Delta h(t) = \Delta h(t+\Delta t)$ 、 $h_{i,j} = h_{i,j} + \Delta h(t+\Delta t)$ として、計算ステップを進める。

4. プログラム

BASICによるプログラムを31ページから42ページに示す。
ここでは $\cos ix \cdot \cos iy = \alpha = \text{一定}$ としている。

5. 計算例

実際の計算例を、土木技術資料の1986年11月号から抜粋して最後に掲載してあるので参照されたい。

```

10 ' *****
20 ' *
30 ' *
40 ' * Program of Groundwater *
50 ' *
60 ' * M.Yokoyama *
70 ' *
80 ' *****
90 '
100 ' ----- Save "TDAPG.BAS" -----
110 '
120 '
130 '----- Input Point Data -----
140 '
150 DEFDBL D,II,S
160 READ NP,DT,TIME,ETIME,SDX,SDY : SDX=3.14159/180*SDX :SDY=3.14159/180*SDY
161 SD=COS(SDX)*COS(SDY)
170 DIM DKMT(NP,NP),DII(NP),H0I(NP),DG(NP,NP+1),DR(NP),DEI(NP),DBII(NP)
180 DIM X(NP),Y(NP),Z(NP),H0(NP),DK(NP),KIND(NP),SITA(NP)
190 '
200 LPRINT " I X(I) Y(I) Z(I) H0(I) K(I)
KIND(I) SITA(I) "
210 LPRINT
220 FOR I=1 TO NP
230 READ X(I),Y(I),Z(I),H0(I),DK(I),KIND(I),SITA(I)
240 LPRINT I,X(I),Y(I),Z(I),H0(I),DK(I),KIND(I),SITA(I)
250 NEXT I
260 '
270 '----- (I-1) KII(d2h/dx2) or KII(d2H/dy2) -----
280 '
290 DEF FNDH1P1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(2*(L1-L2)*II1+L2*II2-L1*II3)
300 DEF FNDH2P1(L1,L2,DK,II1)=(2*DK/(L1*(L1-L2)))*II1
310 DEF FNDH3P1(L1,L2,DK,II1)=(-2*DK/(L2*(L1-L2)))*II1
320 DEF FNDHCP1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(II1*((L1-L2)*II1+L2*II2-L1*II3))
330 '
340 '----- (I) KII(d2h/dx2) or KII(d2h/dy2) -----
350 '
360 DEF FNDH1P2(L1,L2,DK,II2)=(2*DK/(L1*(L1+L2)))*II2
370 DEF FNDH2P2(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1+L2)))*(L2*II1-2*(L1+L2)*II2+L1*II3)
380 DEF FNDH3P2(L1,L2,DK,II2)=(2*DK/(L2*(L1+L2)))*II2

```

```

390 DEF FNDIICP2(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1+L2)))*(II2*(L2*II1-(L1+L2)*II2+L1*II3))
400 '
410 '------(1+1) KII(d2x/dx2) or KII(d2h/dy2) -----
420 '
430 DEF FNDIIP3(L1,L2,DK,II3)=(-2*DK/(L2*(L1-L2)))*II3
440 DEF FNDIIP3(L1,L2,DK,II3)=(2*DK/(L1*(L1-L2)))*II3
450 DEF FNDIIP3(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(-L1*II1+L2*II2+2*(L1-L2)*II3)
460 DEF FNDIICP3(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(II3*(-L1*II1+L2*II2+(L1-L2)*II3))
470 '
480 '------(1-1) KII(d2z/dx2) or KII(d2z/dy2) -----
490 '
500 DEF FNDZIP1(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*((L1-L2)*Z1+L2*Z2-L1*Z3)
510 DEF FNDZCP1(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3,II1)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(II1*((L1-L2)*Z1+L2*Z2-L1*Z3))
520 '
530 '------(1) KII(d2z/dx2) or KII(d2z/dy2) -----
540 '
550 DEF FNDZP2(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(2*DK/(L1*L2*(L1+L2)))*(L2*Z1-(L1+L2)*Z2+L1*Z3)
560 DEF FNDZCP2(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3,II2)=(2*DK/(L1*L2*(L1+L2)))*(II2*(L2*Z1-(L1+L2)*Z2+L1*Z3))
570 '
580 '------(1+1) KII(d2z/dx2) or KII(d2z/dy2) -----
590 '
600 DEF FNDZP3(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(-L1*Z1+L2*Z2+(L1-L2)*Z3)
610 DEF FNDZCP3(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3,II3)=(2*DK/(L1*L2*(L1-L2)))*(II3*(-L1*Z1+L2*Z2+(L1-L2)*Z3))
620 '
630 '------(1-1) K(dh/dx)^2 or K(dh/dy)^2 -----
640 '
650 DEF FNDDIIP1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*((L1^2-L2^2)^2*II1+(L1^2-L2^2)*L2^2*II2-(L1^2-L2^2)*L1^2*II3)
660 DEF FNDDIIP1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(L2^2*(L1^2-L2^2)*II1+L2^4*II2-L1^2*L2^2*II3)
670 DEF FNDDIIP1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-L1^2*(L1^2-L2^2)*II1-L1^2*L2^2*II2+L1^4*II3)
680 DEF FNDDIICP1(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*((-L1^2-L2^2)*II1-L2^2*II2+L1^2*II3)^2)
690 '
700 '------(1) K(dh/dx)^2 or K(dh/dy)^2 -----
710 '
720 DEF FNDDIIP2(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(L2^4*II1+L2^2*(L1^2-L2^2)*II2-L1^2*L2^2*II3)
730 DEF FNDDIIP2(L1,L2,DK,II1,II2,II3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(L2^2*(L1^2-L2^2)*II1+(L1^2-

```

$$L2^2)^2 \# H2 - L1^2 \# (L1^2 - L2^2) \# H3)$$

740 DEF FNDDH3P2(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(-L1^2*L2^2*H1-L1^2*(L1^2-L2^2)*H2+L1^4*H3)

750 DEF FNDDHCP2(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*((-L2^2*H1-(L1^2-L2^2)*H2+L1^2*H3)^2)

760 '

770 '------(1+1) K(dh/dx)^2 or K(dh/dy)^2 -----

780 '

790 DEF FNDDH1P3(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(L1^4*H1-L1^2*L2^2*H2-L1^2*(L1^2-L2^2)*H3)

800 DEF FNDDH2P3(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-L1^2*L2^2*H1+L2^4*H2+L2^2*(L1^2-L2^2)*H3)

810 DEF FNDDH3P3(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(2*DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-L1^2*(L1^2-L2^2)*H1+L2^2*(L1^2-L2^2)*H2+(L1^2-L2^2)^2*H3)

820 DEF FNDDHCP3(L1,L2,DK,H1,H2,H3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*((-L1^2*H1+L2^2*H2+(L1^2-L2^2)*H3)^2)

830 '

840 '------(1-1) K(dh/dx*dz/dx) or K(dh/dy*dz/dy)-----

850 '

860 DEF FNDH1Z1P1(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-(L1^2-L2^2)*(-Z1*(L1^2-L2^2)-L2^2*Z2+L1^2*Z3))

870 DEF FNDH2Z1P1(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-L2^2*(-Z1*(L1^2-L2^2)-L2^2*Z2+L1^2*Z3))

880 DEF FNDH3Z1P1(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(L1^2*(-Z1*(L1^2-L2^2)-L2^2*Z2+L1^2*Z3))

890 DEF FNDH2ZCP1(L1,L2,DK,H1,H2,H3,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-(L1^2-L2^2)*H1-L2^2*H2+L1^2*H3)*(-Z1*(L1^2-L2^2)-L2^2*Z2+L1^2*Z3)

900 '

910 '------(1) K(dh/dx*dz/dx) or K(dh/dy*dz/dy)-----

920 '

930 DEF FNDH1Z1P2(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(-L2^2*(-Z1*L2^2-(L1^2-L2^2)*Z2+L1^2*Z3))

940 DEF FNDH2Z1P2(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(-(L1^2-L2^2)*(-Z1*L2^2-(L1^2-L2^2)*Z2+L1^2*Z3))

950 DEF FNDH3Z1P2(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(L1^2*(-Z1*L2^2-(L1^2-L2^2)*Z2+L1^2*Z3))

960 DEF FNDH2ZCP2(L1,L2,DK,H1,H2,H3,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1+L2)^2))*(-L2^2*H1-(L1^2-L2^2)*H2+L1^2*H3)*(-Z1*L2^2-(L1^2-L2^2)*Z2+L1^2*Z3)

970 '

980 '------(1+1) K(dh/dx*dz/dx) or K(dh/dy*dz/dy)-----

```

990 '
1000 DEF FNDIIZ1P3(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(L1^2*(Z1*L1^2-L2^2*Z2-(L1^2
-L2^2)*Z3))
1010 DEF FNDIIZ2P3(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(L2^2*(-Z1*L1^2+L2^2*Z2+(L1^
2-L2^2)*Z3))
1020 DEF FNDIIZ3P3(L1,L2,DK,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*((L1^2-L2^2)*(-Z1*L1^2+L2^2*
Z2+(L1^2-L2^2)*Z3))
1030 DEF FNDIIZCP3(L1,L2,DK,H1,H2,H3,Z1,Z2,Z3)=(DK/(L1^2*L2^2*(L1-L2)^2))*(-L1^2*H1+L2^2*H2+(
L1^2-L2^2)*H3)*(-Z1*L1^2+L2^2*Z2+(L1^2-L2^2)*Z3)
1040 '
1050 '-----
1060 '
1061 TIME=0!
1070 FOR I=1 TO NP
1080 DII(I)=0# :DEI(I)=0# : DBII(I)=0# : NEXT I
1090 FOR I=1 TO NP
1100 FOR J=1 TO NP
1110 DKMT(I,J)=0#
1120 HOI(I)=0#
1130 NEXT J,I
1140 '-----
1150 '*****      Create Matrix      *****
1160 '-----
1170 RESTORE 20101
1180 LPRINT : LPRINT "TIME = ";TIME
1190 '
1200 FOR I=1 TO NP
1210 IF KIND(I)=1 THEN GOSUB 2010 ELSE GOTO 1230
1220 GOTO 1380
1230 IF KIND(I)=2 THEN GOSUB 2070 ELSE GOTO 1250
1240 GOTO 1380
1250 IF KIND(I)=3 THEN GOSUB 2130 ELSE GOTO 1270
1260 GOTO 1380
1270 IF KIND(I)=4 THEN GOSUB 2190 ELSE GOTO 1290
1280 GOTO 1380
1290 IF KIND(I)=5 THEN GOSUB 2250 ELSE GOTO 1310
1300 GOTO 1380
1310 IF KIND(I)=6 THEN GOSUB 2310 ELSE GOTO 1330
1320 GOTO 1380
1330 IF KIND(I)=7 THEN GOSUB 2370 ELSE GOTO 1350

```

```

1340 GOTO 1380
1350 IF KIND(1)=8 THEN GOSUB 2430 ELSE GOTO 1370
1360 GOTO 1380
1370 IF KIND(1)=9 THEN GOSUB 2490 ELSE GOTO 1380
1380 NEXT I : LPRINT : LPRINT
1390 FOR I=1 TO NP
1400 FOR J=1 TO NP
1410 PRINT USING "###.###";DKMT(I,J),
1420 NEXT J
1430 PRINT " H0(";I;")=";H0I(I)
1440 NEXT I
1480 '
1490 '
1500 '----- Inverse Matrix by GAUSS JORDAN Method -----
1510 '
1520 '----- FIX POINT -----
1530 READ NK
1540 IF NK=0 THEN GOTO 1650
1550 FOR I=1 TO NK : READ NPK
1560 FOR J=1 TO NP
1570 DKMT(NPK,J)=0!
1580 DKMT(J,NPK)=0!
1590 NEXT J
1600 H0I(NPK)=0!
1610 DKMT(NPK,NPK)=1!
1620 NEXT I
1630 IF TIME=0! THEN GOTO 1870
1640 '
1650 '----- ITERATION -----
1660 '
1670 NKA1=0!
1680 '
1690 FOR I=1 TO NP
1700 IF TIME=DT THEN DBII(I)=DEI(I)
1710 DR(I)=H0I(I)+(.5*DBII(I)/DT+DII(I)*.5/DT)
1711 'DR(I)=H0I(I)+(-DBII(I)/DT+DII(I)*2!/DT)
1720 DEI(I)=DII(I)
1730 NEXT I
1740 PRINT "ITERATION=";NKA1
1750 GOSUB 3070

```



```

1760 DMAX=0#
1770 FOR I=1 TO NP
1780 DZAN=ABS((DII(1)-DEI(1))/HIO(1))
1790 IF DZAN>=DMAX THEN DMAX=DZAN
1800 NEXT I
1810 IF DMAX<=.001 THEN GOTO 1850
1820 NKA1=NKA1+1
1830 GOTO 1680
1840 '
1850 '
1860 '----- Next HIO(1) and DBII(1) -----
1870 '
1880 'DII=0#
1890 FOR I=1 TO NP
1895 ' IF TIME<=DT THEN GOTO 1920
1900 ' DHR=ABS(DII(1)/HIO(1))
1910 ' IF DHR=>DII THEN DII=DHR
1920 DBII(1)=DII(1) : HIO(1)=HIO(1)+DII(1)
1930 LPRINT USING " DII(##)= ####.####" ;1,DBII(1),1,HIO(1)
1940 NEXT I
1945 ' IF TIME<=DT THEN GOTO 1970
1950 ' IF DII<=.001 THEN GOTO 1990
1960 IF TIME >=ETIME THEN 1990
1970 TIME=TIME+DT
1980 GOTO 1090
1990 END
2000 '
2010 '***** KIND(1)=1 *****
2020 READ N1,N2,N3,N4
2030 LX1=X(N1)-X(1) : LX2=X(N2)-X(1) : X1=N1 : X2=N2 : GOSUB 2550
2040 LY1=Y(1)-Y(N3) : LY2=Y(1)-Y(N4) : Y1=N3 : Y2=N4 : GOSUB 2720
2050 RETURN
2060 END
2070 '***** KIND(1)=2 *****
2080 READ N1,N2,N3,N4
2090 LZ1=X(1)-X(N1) : LZ2=X(N2)-X(1) : Z1=N1 : Z2=N2 : GOSUB 2890
2100 LY1=Y(1)-Y(N3) : LY2=Y(1)-Y(N4) : Y1=N3 : Y2=N4 : GOSUB 2720
2110 RETURN
2120 END
2130 '***** KIND(1)=3 *****

```

```

2140 READ N1,N2,N3,N4
2150 LY1=X(1)-X(N2) : LY2=X(1)-X(N1) : Y1=N2 : Y2=N1 : GOSUB 2720
2160 LY1=Y(1)-Y(N3) : LY2=Y(1)-Y(N4) : Y1=N3 : Y2=N4 : GOSUB 2720
2170 RETURN
2180 END
2190 '*****
      KIND(1)=4 *****
2200 READ N1,N2,N3,N4
2210 LY1=X(1)-X(N2) : LY2=X(1)-X(N1) : Y1=N2 : Y2=N1 : GOSUB 2720
2220 LZ1=Y(1)-Y(N4) : LZ2=Y(N3)-Y(1) : Z1=N4 : Z2=N3 : GOSUB 2890
2230 RETURN
2240 END
2250 '*****
      KIND(1)=5 *****
2260 READ N1,N2,N3,N4
2270 LY1=X(1)-X(N2) : LY2=X(1)-X(N1) : Y1=N2 : Y2=N1 : GOSUB 2720
2280 LX1=Y(N4)-Y(1) : LX2=Y(N3)-Y(1) : X1=N4 : X2=N3 : GOSUB 2550
2290 RETURN
2300 END
2310 '*****
      KIND(1)=6 *****
2320 READ N1,N2,N3,N4
2330 LZ1=X(1)-X(N1) : LZ2=X(N2)-X(1) : Z1=N1 : Z2=N2 : GOSUB 2890
2340 LX1=Y(N4)-Y(1) : LX2=Y(N3)-Y(1) : X1=N4 : X2=N3 : GOSUB 2550
2350 RETURN
2360 END
2370 '*****
      KIND(1)=7 *****
2380 READ N1,N2,N3,N4
2390 LX1=X(N1)-X(1) : LX2=X(N2)-X(1) : X1=N1 : X2=N2 : GOSUB 2550
2400 LX1=Y(N4)-Y(1) : LX2=Y(N3)-Y(1) : X1=N4 : X2=N3 : GOSUB 2550
2410 RETURN
2420 END
2430 '*****
      KIND(1)=8 *****
2440 READ N1,N2,N3,N4
2450 LX1=X(N1)-X(1) : LX2=X(N2)-X(1) : X1=N1 : X2=N2 : GOSUB 2550
2460 LZ1=Y(1)-Y(N4) : LZ2=Y(N3)-Y(1) : Z1=N4 : Z2=N3 : GOSUB 2890
2470 RETURN
2480 END
2490 '*****
      KIND(1)=9 *****
2500 READ N1,N2,N3,N4
2510 LZ1=X(1)-X(N1) : LZ2=X(N2)-X(1) : Z1=N1 : Z2=N2 : GOSUB 2890
2520 LZ1=Y(1)-Y(N4) : LZ2=Y(N3)-Y(1) : Z1=N4 : Z2=N3 : GOSUB 2890
2530 RETURN

```

2540 END

2550 '***** -1- *****

2560 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH1P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2570 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDZ1P1(LX1,LX2,DK(I),Z(I),Z(X1),Z(X2))/SITA(I)

2580 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH1P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2590 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH2P1(LX1,LX2,DK(I),Z(I),Z(X1),Z(X2))/SITA(I)

2600 DKMT(I,X1)=DKMT(I,X1)+FNDH2P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I))/SITA(I)*SD

2610 DKMT(I,X1)=DKMT(I,X1)+FNDH2P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2620 DKMT(I,X1)=DKMT(I,X1)+FNDH2P1(LX1,LX2,DK(I),Z(I),Z(X1),Z(X2))/SITA(I)

2630 DKMT(I,X2)=DKMT(I,X2)+FNDH3P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I))/SITA(I)*SD

2640 DKMT(I,X2)=DKMT(I,X2)+FNDH3P1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2650 DKMT(I,X2)=DKMT(I,X2)+FNDH3P1(LX1,LX2,DK(I),Z(I),Z(X1),Z(X2))/SITA(I)

2660 HOI(I)=HOI(I)-FNDHCP1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2670 HOI(I)=HOI(I)-FNDZCP1(LX1,LX2,DK(I),Z(I),Z(X1),Z(X2),HO(I))/SITA(I)

2680 HOI(I)=HOI(I)-FNDHCP1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2))/SITA(I)*SD

2690 HOI(I)=HOI(I)-FNDH2CP1(LX1,LX2,DK(I),HO(I),HO(X1),HO(X2),Z(I),Z(X1),Z(X2))/SITA(I)

2700 RETURN

2710 END

2720 '***** -3- *****

2730 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH3P3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2740 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDZ3P3(LY1,LY2,DK(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I))/SITA(I)

2750 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH3P3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2760 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH3P3(LY1,LY2,DK(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I))/SITA(I)

2770 DKMT(I,Y1)=DKMT(I,Y1)+FNDH2P3(LY1,LY2,DK(I),HO(I))/SITA(I)*SD

2780 DKMT(I,Y1)=DKMT(I,Y1)+FNDH2P3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2790 DKMT(I,Y1)=DKMT(I,Y1)+FNDH2P3(LY1,LY2,DK(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I))/SITA(I)

2800 DKMT(I,Y2)=DKMT(I,Y2)+FNDH1P3(LY1,LY2,DK(I),HO(I))/SITA(I)*SD

2810 DKMT(I,Y2)=DKMT(I,Y2)+FNDH1P3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2820 DKMT(I,Y2)=DKMT(I,Y2)+FNDH1P3(LY1,LY2,DK(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I))/SITA(I)

2830 HOI(I)=HOI(I)-FNDHCP3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2840 HOI(I)=HOI(I)-FNDZCP3(LY1,LY2,DK(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I),HO(I))/SITA(I)

2850 HOI(I)=HOI(I)-FNDHCP3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I))/SITA(I)*SD

2860 HOI(I)=HOI(I)-FNDH2CP3(LY1,LY2,DK(I),HO(Y2),HO(Y1),HO(I),Z(Y2),Z(Y1),Z(I))/SITA(I)

2870 RETURN

2880 END

2890 '***** -2- *****

2900 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH2P2(LZ1,LZ2,DK(I),HO(Z1),HO(I),HO(Z2))/SITA(I)*SD

2910 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDZ2P2(LZ1,LZ2,DK(I),Z(Z1),Z(I),Z(Z2))/SITA(I)

2920 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH2P2(LZ1,LZ2,DK(I),HO(Z1),HO(I),HO(Z2))/SITA(I)*SD

2930 DKMT(I,I) =DKMT(I,I) +FNDH2P2(LZ1,LZ2,DK(I),Z(Z1),Z(I),Z(Z2))/SITA(I)

```

2940 DKMT(I,Z1)=DKMT(I,Z1)+FNDH1P2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(I))/SITA(I)*SD
2950 DKMT(I,Z1)=DKMT(I,Z1)+FNDH1P2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(Z1),H0(I),H0(Z2))/SITA(I)*SD
2960 DKMT(I,Z1)=DKMT(I,Z1)+FNDH1P2(LZ1,LZ2,DK(I),Z(Z1),Z(I),Z(Z2))/SITA(I)
2970 DKMT(I,Z2)=DKMT(I,Z2)+FNDH3P2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(I))/SITA(I)*SD
2980 DKMT(I,Z2)=DKMT(I,Z2)+FNDH3P2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(Z1),H0(I),H0(Z2))/SITA(I)*SD
2990 DKMT(I,Z2)=DKMT(I,Z2)+FNDH3P2(LZ1,LZ2,DK(I),Z(Z1),Z(I),Z(Z2))/SITA(I)
3000 H0(I)=H0(I)-FNDHCP2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(Z1),H0(I),H0(Z2))/SITA(I)*SD
3010 H0(I)=H0(I)-FNDZCP2(LZ1,LZ2,DK(I),Z(Z1),Z(I),Z(Z2),H0(I))/SITA(I)
3020 H0(I)=H0(I)-FNDHCP2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(Z1),H0(I),H0(Z2))/SITA(I)*SD
3030 H0(I)=H0(I)-FNDHZCP2(LZ1,LZ2,DK(I),H0(Z1),H0(I),H0(Z2),Z(Z1),Z(I),Z(Z2))/SITA(I)
3040 RETURN
3050 END
3060 '
3070 '----- SUB Inverse Matrix by GAUSS JORDAN -----
3080 '
3090 FOR I=1 TO NP
3100 FOR J=1 TO NP
3110 DG(I,J)=DKMT(I,J)
3120 NEXT J
3130 NEXT I
3140 FOR I=1 TO NP
3150 DG(I,NP+1)=DR(I)
3160 NEXT I
3170 D5=ABS(.1^5)
3180 FOR K=1 TO NP
3190 S9=ABS(DG(K,K))
3200 I9=K
3210 K1=K+1
3220 IF K1>NP GOTO 3280
3230 FOR I=K1 TO NP
3240 IF ABS(DG(I,K))<= S9 GOTO 3270
3250 S9=ABS(DG(I,K))
3260 I9=I
3270 NEXT I
3280 IF S9>=D5 GOTO 3310
3290 PRINT "ILL CONDITION"
3300 GOTO 3540
3310 IF I9=K GOTO 3370
3320 FOR J=1 TO NP+1
3330 RR=DG(K,J)

```

```

3340 DG(K,J)=DG(I9,J)
3350 DG(I9,J)=RR
3360 NEXT J
3370 W=DG(K,K)
3380 FOR J=K1 TO NP+1
3390 DG(K,J)=DG(K,J)/W
3400 NEXT J
3410 FOR I=1 TO NP
3420 IF I=K GOTO 3470
3430 W=DG(I,K)
3440 FOR J=K1 TO NP+1
3450 DG(I,J)=DG(I,J)-W*DG(K,J)
3460 NEXT J
3470 NEXT I
3480 NEXT K
3490 FOR I=1 TO NP
3500 DII(I)=DG(I,NP+1)
3510 PRINT "DII(";I;")=";DII(I)
3520 NEXT I
3530 GOTO 3550
3540 STOP
3550 RETURN
3560 END
20000 DATA 36, 3, 0.60, 18.5, 0
20001 DATA 0.0, 2.0, 0.0, 0.7, .432, 1, 0.035
20002 DATA 1.0, 2.0, 0.32, 4.8, .432, 2, 0.035
20003 DATA 2.0, 2.0, 0.63, 4.7, .432, 2, 0.035
20004 DATA 4.0, 2.0, 1.27, 4.5, .432, 2, 0.035
20005 DATA 6.0, 2.0, 1.90, 4.3, .432, 2, 0.035
20006 DATA 8.0, 2.0, 2.54, 4.1, .432, 2, 0.035
20007 DATA 12.0, 2.0, 3.81, 3.9, .432, 2, 0.035
20008 DATA 16.0, 2.0, 5.08, 3.5, .432, 2, 0.035
20009 DATA 20.0, 2.0, 6.35, 3.3, .432, 2, 0.035
20010 DATA 24.0, 2.0, 7.62, 2.9, .432, 2, 0.035
20011 DATA 28.0, 2.0, 8.88, 2.5, .432, 2, 0.035
20012 DATA 32.2, 2.0, 10.22, 2.2, .432, 3, 0.035
20021 DATA 0.0, 1.0, 0.0, 0.7, .432, 8, 0.035
20022 DATA 1.0, 1.0, 0.32, 4.8, .432, 9, 0.035
20023 DATA 2.0, 1.0, 0.63, 4.7, .432, 9, 0.035
20024 DATA 4.0, 1.0, 1.27, 4.5, .432, 9, 0.035

```

20025 DATA 6.0, 1.0, 1.90, 4.3, .432, 9, 0.035
20026 DATA 8.0, 1.0, 2.54, 4.1, .432, 9, 0.035
20027 DATA 12.0, 1.0, 3.81, 3.9, .432, 9, 0.035
20028 DATA 16.0, 1.0, 5.08, 3.5, .432, 9, 0.035
20029 DATA 20.0, 1.0, 6.35, 3.3, .432, 9, 0.035
20030 DATA 24.0, 1.0, 7.62, 2.9, .432, 9, 0.035
20031 DATA 28.0, 1.0, 8.88, 2.5, .432, 9, 0.035
20032 DATA 32.2, 1.0, 10.22, 2.2, .432, 4, 0.035
20041 DATA 0.0, 0.0, 0.0, 0.7, .432, 7, 0.035
20042 DATA 1.0, 0.0, 0.32, 4.8, .432, 6, 0.035
20043 DATA 2.0, 0.0, 0.63, 4.7, .432, 6, 0.035
20044 DATA 4.0, 0.0, 1.27, 4.5, .432, 6, 0.035
20045 DATA 6.0, 0.0, 1.90, 4.3, .432, 6, 0.035
20046 DATA 8.0, 0.0, 2.54, 4.1, .432, 6, 0.035
20047 DATA 12.0, 0.0, 3.81, 3.9, .432, 6, 0.035
20048 DATA 16.0, 0.0, 5.08, 3.5, .432, 6, 0.035
20049 DATA 20.0, 0.0, 6.35, 3.3, .432, 6, 0.035
20050 DATA 24.0, 0.0, 7.62, 2.9, .432, 6, 0.035
20051 DATA 28.0, 0.0, 8.88, 2.5, .432, 6, 0.035
20052 DATA 32.2, 0.0, 10.22, 2.2, .432, 5, 0.035
20101 DATA 2,3,13,25
20102 DATA 1,3,14,26
20103 DATA 2,4,15,27
20104 DATA 3,5,16,28
20105 DATA 4,6,17,29
20106 DATA 5,7,18,30
20107 DATA 6,8,19,31
20108 DATA 7,9,20,32
20109 DATA 8,10,21,33
20110 DATA 9,11,22,34
20111 DATA 10,12,23,35
20112 DATA 10,11,24,36
20113 DATA 14,15,1,25
20114 DATA 13,15,2,26
20115 DATA 14,16,3,27
20116 DATA 15,17,4,28
20117 DATA 16,18,5,29
20118 DATA 17,19,6,30
20119 DATA 18,20,7,31
20120 DATA 19,21,8,32

20121 DATA 20,22,8,33
20122 DATA 21,23,10,34
20123 DATA 22,24,11,35
20124 DATA 22,23,12,36
20125 DATA 26,27,1,13
20126 DATA 25,27,2,14
20127 DATA 26,28,3,15
20128 DATA 27,29,4,16
20129 DATA 28,30,5,17
20130 DATA 29,31,6,18
20131 DATA 30,32,7,19
20132 DATA 31,33,8,20
20133 DATA 32,34,9,21
20134 DATA 33,35,10,22
20135 DATA 34,36,11,23
20136 DATA 34,35,12,24
20137 DATA 6
20138 DATA 1,13,25,12,24,36

§ 2. 有限要素法

1. 有限要素法による非定常解析

自由水面を有する非定常浸透問題の有限要素法による解析を説明する。非定常浸透流の解析手法は、時間項が入る以外は、基本的には定常流の解析手法と同じである。

1. 1 非定常浸透の支配方程式と変分原理

非定常浸透の運動方程式は、Darcy の式が用いられ、

$$V_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1a)$$

$$V_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1b)$$

質量保存則による連続の式は

$$-\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

と表される。ここで S_s は比貯留係数である。

(1) 式と (2) 式より、非定常浸透の支配方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

(3) 式は図 2. 1 に示す堤体内 R の浸透流が満足すべき支配方程式であり、これを解くには初雨期条件および境界条件が必要である。

図 2. 1 に示す問題に対しては次の条件が考えられる。

初期条件

$$h(x, z, 0) = h_0(x, z) \quad (4)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad (5)$$

境界条件

(1) 水位が一定な面上 (A 1 上) において

$$h(x, z, t) = H(x, z) \quad (6)$$

(2) 流量が一定な面上 (A 2 上) において

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z = -V(x, y, t) \quad (7)$$

(3) 自由水面 (F) の上においては、水頭 h がその点の鉛直方向の座標 Z と等しいことより

$$h(x, z, \xi, t) = \xi(x, z, t) \quad (8)$$

(4) 自由水面低下による流入量と降雨の浸透量 (I) との連続の式より

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z = (I - S_z \frac{\partial \xi}{\partial t}) n_z \quad (9)$$

ここで I は鉛直方向の流入量の大きさであり、 S_z は有効間隙率である。

(5) 浸出面 (S 上) においては自由水面と同様に次のように考えられる。

$$h(x, t) = z \quad (10)$$

(3) 式の解を (4) ~ (10) の条件より求めるのに、変分原理を用いるが、非定常問題もある瞬間を考えると定常問題と同様に考えられる。従って、境界条件 (6) ~ (10) を満足する (3) 式の解を求めることは、次に示す汎関数 $\Omega(h)$ の値を最小にするような h を求める問題と等価である。

$$\begin{aligned}
\Omega(h, \xi) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& + S_s h \frac{\partial h}{\partial t} \left. \right\} dR - \int_{\Lambda_1} (h-H) \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x \right. \\
& + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \left. \right) dA + \int_S (h-z) \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x \right. \\
& + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \left. \right) dA + \int_{\Lambda_2} v h dA - \int_F (h-\xi) \\
& \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \right) dA - \int_F \xi (1 - \\
& S_z \frac{\partial \xi}{\partial t}) n_z dA
\end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式を直接汎関数として用いることは、(11) 式中に h 、 ξ の 2 つの変数があるため困難である。したがって、定常浸透問題と同様の手法をとる。

第 1 段階

$h = \xi = z$ と仮定すると、(11) 式の最小化は自由水面、固定水頭面、および浸出面で満たされ、(11) 式は次に示すように簡単になる。

$$\begin{aligned}
\Omega(h) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& + S_s h \frac{\partial h}{\partial t} \left. \right\} dR + \int_{\Lambda_2} v h dA \\
& - \int_F h \left(1 - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z dA
\end{aligned} \tag{12}$$

(12) 式を最小にする h を求めることにより、 h_s を用いて浸出面での流速 V_s が求まる。

第 2 段階

自由水面上における流量 (V_F) を 0 とし、第 1 段階で求めた V_s と V_F の条件を用いて、(11) 式を次のような汎関数に書き変える。

$$\begin{aligned}
\Omega(h) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& \left. + S_s h \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dR + \int_s h V_s dA + \int_{A_2} v h dA \\
& - \int_P h \left(I - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z dA \quad (13)
\end{aligned}$$

(13) 式を最小にする h を再び求める。しかし、定常問題と同様に、 h は境界条件 (6)、(7)、(9) 式を満足するが、(8)、(10) 式を満足していない。したがって、(8)(10) 式を満足するまで上記の 2 段階の手順を各時間段階ごとに繰返し計算を行い、

$$E = \max \left| \frac{h_m^{j+1} - h_m^j}{h_m^{j+1} - h_m^j} \right| < \varepsilon \quad (14)$$

と誤差が許容範囲内に納まるまで計算する。

しかし、ここでは自由水面を有する非定常浸透問題を取り扱うことが主たる目的であるため、次に示す手法をとる。

非定常問題に対して、連続の式として (2) 式を用いることが一般的な方法であるが、自由水面を有する問題においては、水頭変化による滯水層の圧縮により産出される流量は、自由水面降下により産出される流量に比較して非常に小さいと考えられる。したがって自由水面を有する問題に対しては、連続の式として近似的に次式を用いる。

$$-\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (2)'$$

(2) 式と (1) 式より、支配方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)'$$

となる。したがって、(11)式に対応する汎関数は、

$$\begin{aligned}
 \Omega(h, \xi) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\} dR \\
 & - \int_{A_1} (h-H) \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \right) dA \\
 & + \int_S (h-z) \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \right) dA \\
 & + \int_{A_2} V h dA - \int_F (h-\xi) \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \right) dA \\
 & - \int_F \xi \left(I - S_z \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) n_z dA
 \end{aligned} \tag{11}'$$

となる。

(11)' 式を最小にする h を求めるため、先に示した2段階の過程をとる。

第1段階

$h = \xi = z$ と仮定することより、汎関数は

$$\begin{aligned}
 \Omega(h) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\} dR \\
 & + \int_{A_2} V h dA - \int_F h \left(I - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z dA
 \end{aligned} \tag{12}'$$

と表される。

第2段階

$$\begin{aligned}
 \Omega(h) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\} dR \\
 & + \int_S h V_s dA + \int_{A_2} V h dA \\
 & - \int_F h \left(I - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z dA
 \end{aligned} \tag{13}'$$

1. 2 有限要素法の定式化

有限要素法をもちいて (12) ' 式の最小化を行う手法として、レイリーリッツの方法を用いる。
すなわち、

$$h = N_1 h_1 + N_2 h_2 + N_3 h_3 \quad (15)$$

として、(12) 式的全領域に対する汎関数が各要素における汎関数の総和で表されるものとする、

$$\Omega(h) = \sum_{\theta} \Omega^{\theta}(h) \quad (16)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Omega^{\theta}(h) = & \int_R \left\{ \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\} dR \\ & + \int_{A_2} v h \, dA - \int_F h \left(1 - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z \, dA \end{aligned} \quad (17)$$

であり、(15) 式を (17) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Omega^{\theta}(h) = & \int_{R^{\theta}} \left[\frac{1}{2} k_x \frac{\partial N_n}{\partial x} h_n - \frac{\partial N_m}{\partial x} h_m \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} k_z \frac{\partial N_n}{\partial z} h_n - \frac{\partial N_m}{\partial z} h_m \right] dR \\ & + \int_{A_2^{\theta}} v N_n h_n \, dA \\ & - \int_{F^{\theta}} N_n h_n \left(1 - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z \, dA \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $\frac{\partial h}{\partial t}$ は考えている時間において一定である。また、

$$\begin{aligned} \delta \Omega^e (h_n) = & \int_{R^e} \left[k_x \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} h_n + k_z \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} h_n \right] dR \\ & + \int_{\Lambda^e} v N_n dA \\ & - \int_{F^e} N_n \left(1 - S_z \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_z dA = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

したがって、全領域に対しては、

$$\begin{aligned} A_{nm} \cdot h_n - Q_n - C_n + \sum_e \int_{F^e} N_n S_z \frac{\partial h}{\partial t} n_z dA = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

($n, m = 1, 2, \dots, N$)

ここに、

$$A_{nm} = \sum_e \int_{R^e} \left[k_x \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + k_z \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \right] dR$$

$$Q_n = - \sum_e \int_{\Lambda^e} v N_n dA$$

$$C_n = \sum_e \int_{F^e} N_n I n_z dA = \frac{1}{2} \sum_e I \Delta x^e$$

Δt 時間に対する自由水面の移動については図2. 2に示すように m は $A-A$ 線上を移動する。

したがって、自由水面上において

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta h^e}{\Delta x^e} \quad (21)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_m = \left(\frac{dx}{dh} \frac{dh}{dt} \right)_m = \cot \beta_m \left(\frac{dh}{dt} \right)_m \quad (22)$$

水頭の時間変化は

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (23)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & N_m \left(\frac{dh}{dt} \right)_m - \frac{\partial N_m}{\partial x} h_m N_p \left(\frac{dx}{dt} \right)_p \\ & - \frac{\partial N_m}{\partial z} h_m N_p \left(\frac{dz}{dt} \right)_p \end{aligned} \quad (24)$$

と表わすことができ、(24)式に(21)、(22)式を代入すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = N_m \left(\frac{dh}{dt} \right)_m \left(1 - \frac{\Delta h^e}{\Delta x^e} \cot \beta_m \right) \quad (25)$$

(25)式を(20)式に代入すると

$$\begin{aligned} A_{nm} h_n - Q_n - C_n + \sum_{F^e} \int_{F^e} N_n S_z \left[N_m \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_m \left(1 - \frac{\Delta h^e}{\Delta x^e} \right) \right. \\ \left. \times \cot \beta_m \right] n_z] dA = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \int_{F^e} N_n N_m n_z dA &= \frac{a}{3} \Delta x^e & n=m \\ \int_{F^e} N_n N_m n_z dA &= \frac{a}{6} \Delta x^e & n \neq m \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(注B参照)

より、(26)式は次式となる。

$$A_{nm} h_m - Q_n - C_n + D_{nm} \left(\frac{dh}{dt} \right)_m = 0 \quad (28)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} D_{nm} &= \sum_e \frac{a}{3} S_z (\Delta x^e - \Delta h^e - \Delta h^e \cot \beta_m) & n=m \\ D_{nm} &= \sum_e \frac{a}{6} S_z (\Delta x^e - \Delta h^e \cot \beta_m) & n \neq m \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

また、 A_{nm} 、 Q_n は、定常問題の A_{nm} 、 Q_n と同じ式で表される。

非定常問題は、定常問題と異なって時間項を取り扱わなければならない。従って、非定常問題に含まれる時間微分値を取り扱う手法として、適当な漸化式を用いることによって解くことができる。すなわち、漸化式により逐次計算法で全時間にわたる解が得られる。

ここでは、差分法を直接用いて解を求める。差分法に漸化式として普通3種類の手法が用いられ、

(1) 前進差分法、(2) 後退差分法、(3) 中央差分法などがあるが、ここでは、収束のよい中央差分法を用いることにする。

(28) 式の中央差分法による漸化式は、

$$\begin{aligned} & \{ A_{nm}^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} (D_{nm}^k + D_{nm}^{k+1}) \} h_m^{k+1} \\ & = Q_n^k + Q_n^{k+1} + C_n^k + C_n^{k+1} - \{ A_{nm}^k - \frac{1}{\Delta t} (D_{nm}^k + D_{nm}^{k+1}) \} h_m^k \end{aligned} \quad (30)$$

ここに、

$$\Delta t = t^{k+1} - t^k$$

(30) 式を各時間 step について計算することにより、全時間にわたる解が得られる。

以上、平面問題に対して定常浸透問題と同様に取り扱い、これに時間項を加味することにより非定常問題として有限要素化を行った。

注 A : 自由水面上の連続の式の誘導

自由水面上を動く浸透流の平均流速を V_i とする。
面積 dA を時刻 $t + dt$ までの間に移動する流量は、

$$S_z dA dL = S_z \frac{\partial \xi}{\partial t} n_z dA dt \quad (A1)$$

時間 dt に流入する流量は

$$(v_x n_x + v_z n_z + I n_z) dA dt \quad (A2)$$

となる。したがって自由水面上の連続の式は

$$v_x n_x + v_z n_z + I n_z = S_z \frac{\partial \xi}{\partial t} n_z \quad (A3)$$

と表される。

注 B $\int N_n N_m dA$ の計算

形状関数 N_n は次のように表される。

$$N_n = \frac{1}{2\Delta} (a_n + b_n x + c_n z) \quad (B1)$$

$N_n(k)$ を $N_n(x, z)$ に対して Δ 1、2、3 の k 番目の頂点とすると

$$N_n(k) = \frac{1}{2\Delta} (a_n + b_n x + c_n z) \quad (B2)$$

各頂点について計算を行うと

$$\left. \begin{aligned} N(1) &= \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x_1 + c_1 z_1) = 1 \\ N(2) &= \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x_2 + c_1 z_2) = 0 \\ N(3) &= \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x_3 + c_1 z_3) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (B3)$$

したがって、一般に

$$N_n(k) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases} \quad (B4)$$

図 2、3 を用いて N_1, N_2, N_3 を要素に関する座標で表示すると、

$$N_3(s, h) = \frac{h}{H} \quad (B5)$$

$$N_2(s, h) = \frac{1}{A} \left(s - \frac{A_1}{H} h \right) \quad (B6)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} N_2 N_3 d\Delta &= \int_0^H \int_{(A_1/H)h}^{A-(A_2/H)h} \frac{1}{A} \left(s - \frac{A_1}{H} h \right) \frac{h}{H} ds dh \\ &= \frac{1}{AH} \int_0^H \left[h \frac{A^2}{2} + h^2 \left(-\frac{AA_2}{H} - \frac{AA_1}{H} \right) + h^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{A_2^2}{H^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{H^2} + \frac{A_1 A_2}{H^2} \right) \right] dh = \frac{AH}{24} = \frac{\Delta}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} N_3 N_3 d\Delta &= \int_0^H \int_{(A_1/H)h}^{A-(A_2/H)h} \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} ds dh \\ &= \frac{1}{H^2} \int_0^H h^2 \left(A - \frac{A_2}{H} h - \frac{A_1}{H} h \right) dh = \frac{AH}{12} = \frac{\Delta}{6} \end{aligned}$$

したがって、一般に

$$\int_{\Delta} N_n N_m d\Delta = \begin{cases} \frac{\Delta}{12} & n \neq m \\ \frac{\Delta}{6} & n = m \end{cases} \quad (B7)$$

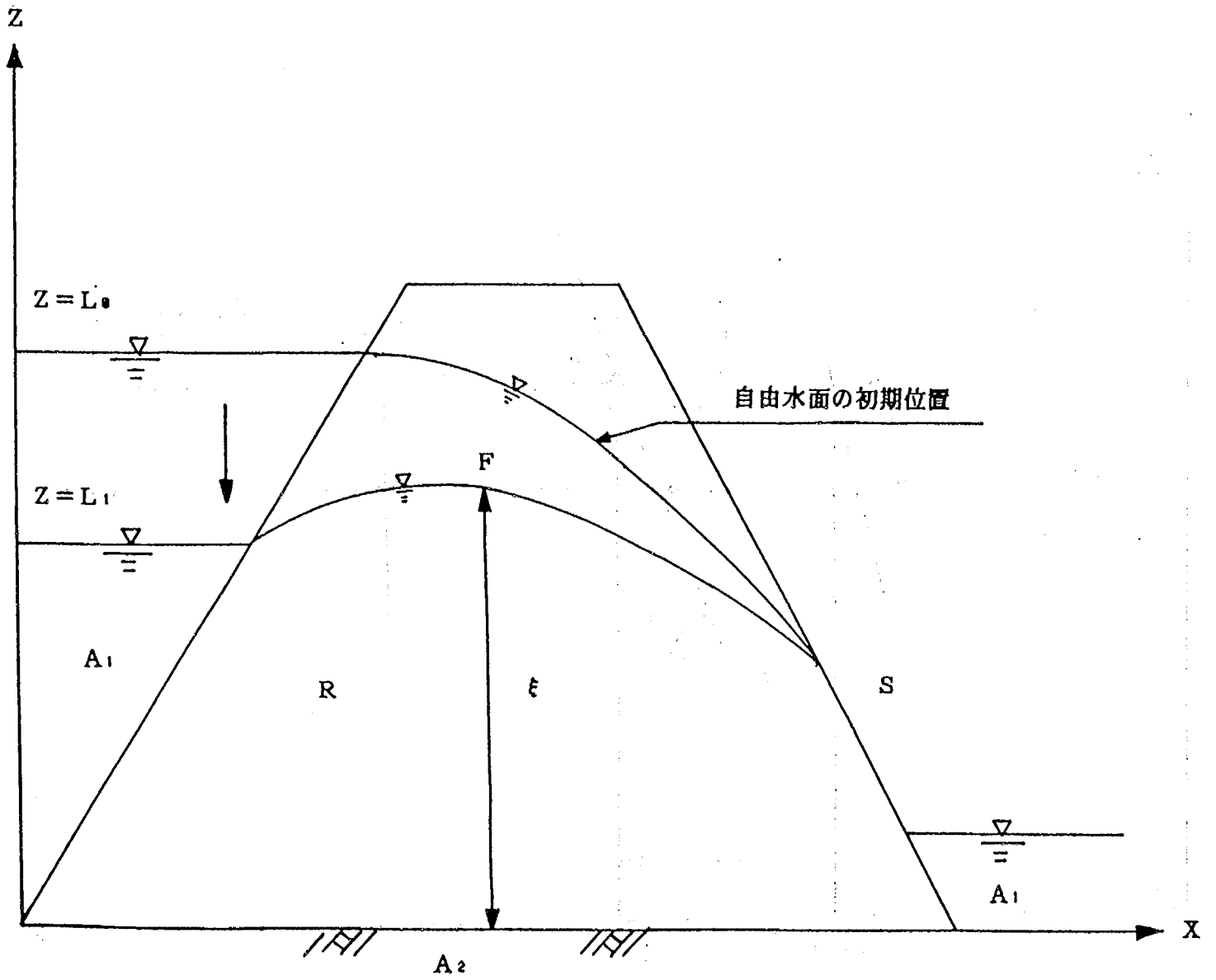


図-8 自由水面を有する堤体内非定常浸透流

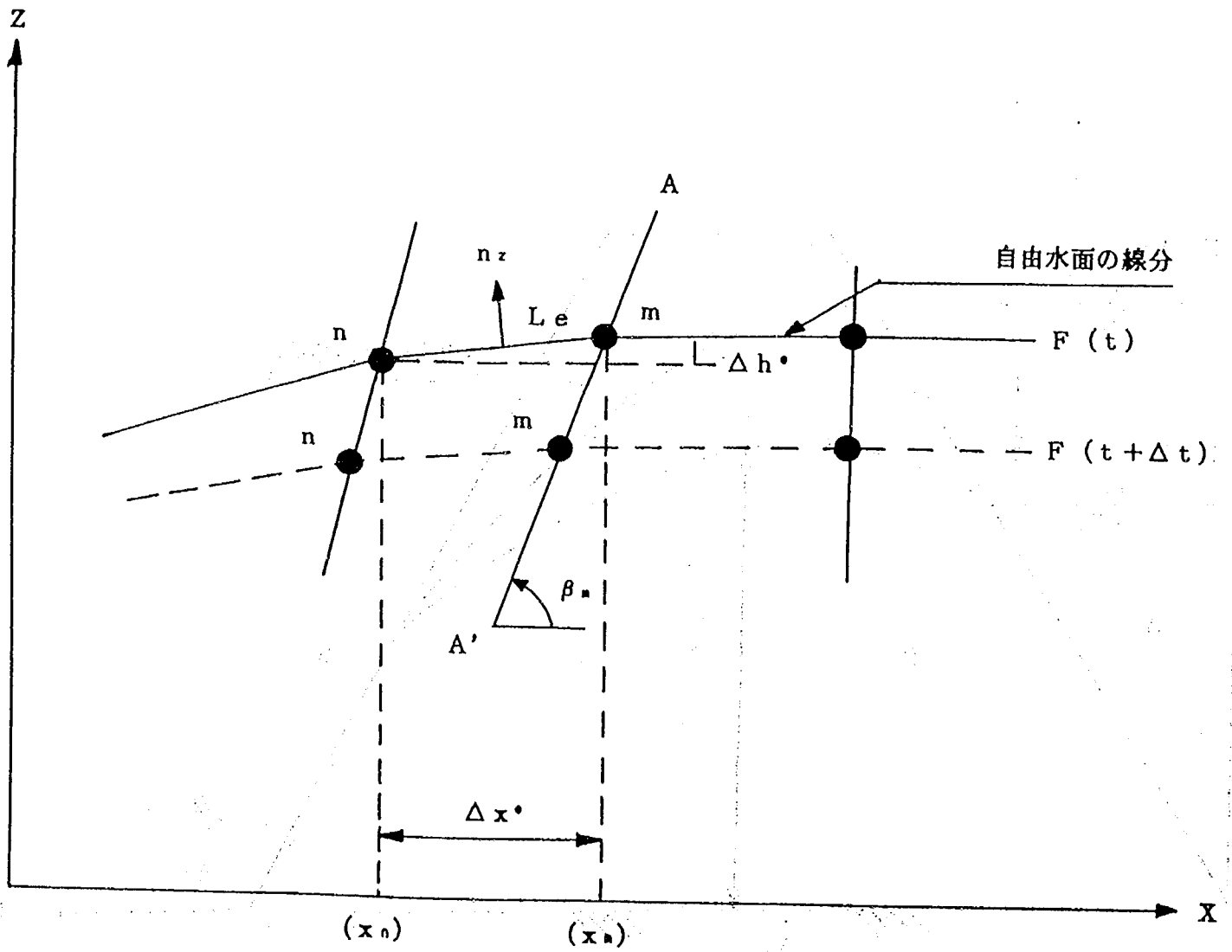


図-9 自由水面の移動法

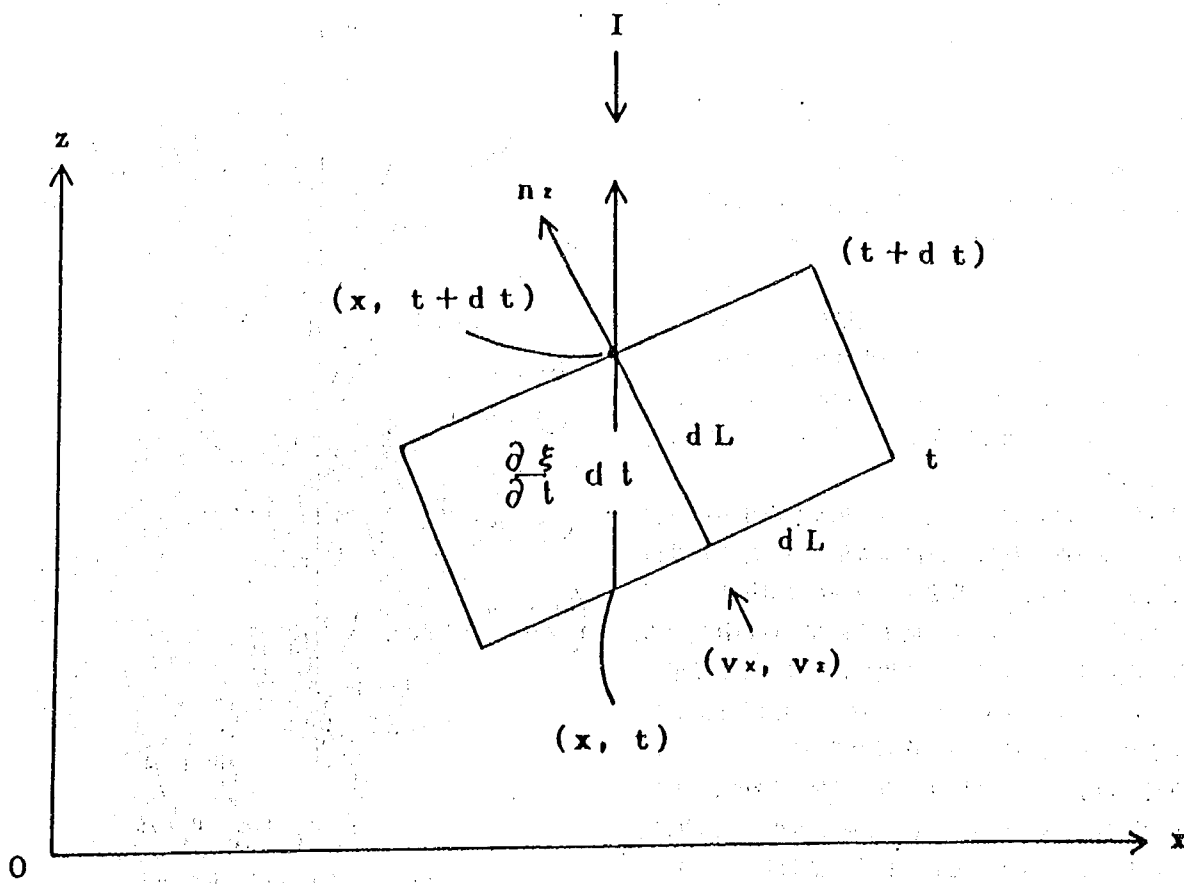


図-10 動く自由水面上の微小要素

§. 3 地すべり地における排水壁工の効果

吉松 弘行* 近藤 政司** 白石 一夫***
丸山 清輝*** 横山 正一****

はじめに

地すべり現象は多くの要因が複雑に作用して発生することが知られている。これらの要因の主要なものとして降雨、融雪水等の地中浸透により地下水水位が上昇して間隙水圧を増大させることによる土塊のせん断抵抗力の低下が挙げられる。したがって地すべり地においては、この要因排除のため各種の地下水排除工が施工される。その主要な工法としては、集水井工、横ボーリング工、排水壁工、暗渠工等が施工されている。

今回の検討の対象としたのは排水壁工である。ここでいう排水壁工とは暗渠工の大規模なもので、通称排水壁工という名称で呼ばれているものである。

排水壁工は一般に地下水の流れ方向に対して直角に施工され、集水した地下水を水路等により地すべり地外へ排水するもので、排水壁工上流域においては地下水の集排水により地下水水位を低下させる効果が、下流域においては上流からの地下水の供給を減少させる効果がある。しかし、その効果について定量的に把握されているものは少ない。そこで今回は排水壁工の効果について定量的な検討を試みた。

検討対象区域は新潟県上越地方に広く分布する第三紀層地帯の中頸城郡板倉町の猿供養寺地すべり地と新井市の寸分道地すべり地で、当地すべり地には対策工として排水壁工が施工されており、地下水視測も行われている。

これら両地すべり地について現地における視測結果、数値計算によるシミュレーションおよび斜面安定計算により排水壁工の効果について検討を進めた。

猿供養寺地すべり地は地すべり幅約50~100m、延長約1.5km、移動層厚4~15mの規模の地すべり地であり、風化泥岩の上面をすべり面として緩慢な活動をなしていたが、現在は安定化してきている。ちなみに当地すべり地中腹部は新潟試験所の地すべりモデル試験地となっている。

寸分道地すべり地は地すべり幅約70m、延長約170m、移動層厚4~6mの規模の地すべり地であり、近年では

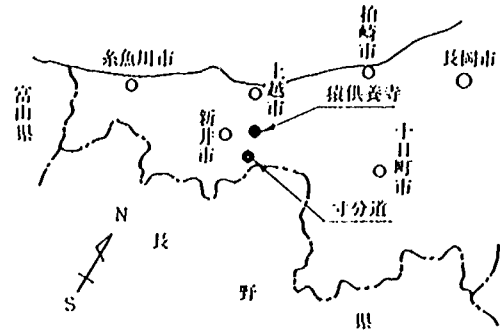


図-1 位置図

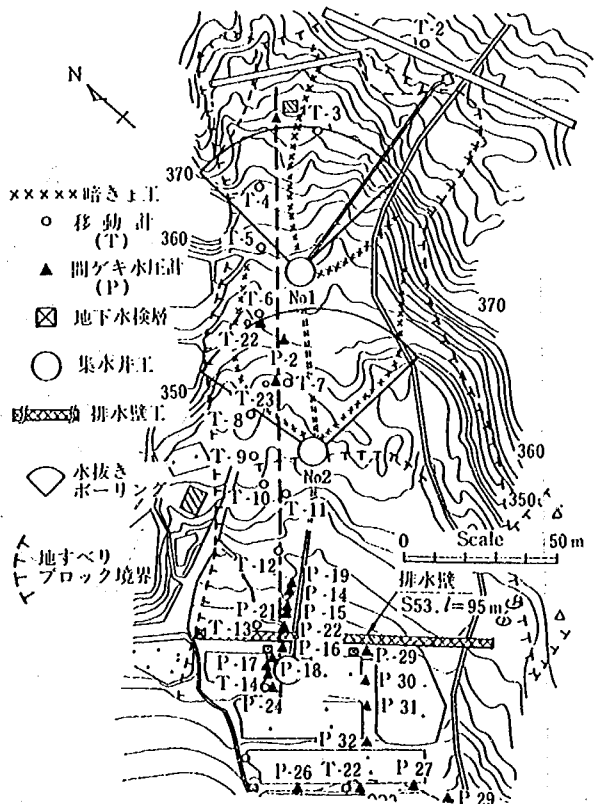


図-2 猿供養寺地すべり平面図

昭和51年、53年、56年、58年に災害が発生している。現在は降雨時、融雪期に緩慢な活動がみられるものの沈降化しつつある地すべり地である。両地すべり地の位置を図-1に示す。また検討を行った調査ブロックの平面図を図-2、3に示す。

1 排水壁工施工による斜面移動量の変化

今回検討対象とした地すべり地においては排水壁工の施工以前より斜面の移動量を視測しており、排水壁工の

* 建設省土木研究所新潟試験所長
** " " 新潟試験所主任研究員
*** " " 新潟試験所研究員
**** " " 新潟試験所

Hiroyuki YOSHIMATSU, Masashi KONDO, Kazuo SHIRAIISHI, Kiyoteru MARUYAMA and Masakazu YOKOYAMA: Effects of Drainage Works in Landslide Area

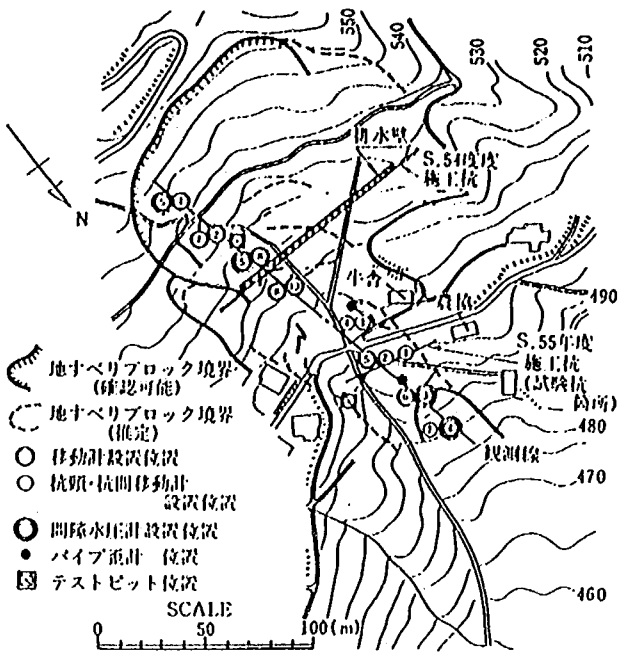


図-3 寸分道地すべり調査ブロック平面図

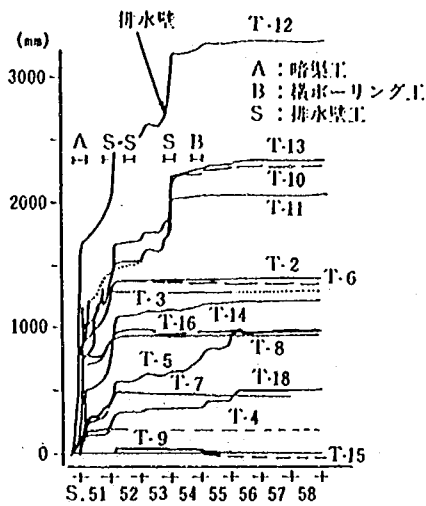


図-4 猿供養寺地すべり累積移動量

施工前後での移動量の変化をみる事ができる。

排水壁工が昭和53年12月～昭和54年2月にかけて施工された猿供養寺地すべり地の累積移動量を図-4に示すが、図-4をみると、移動計 T-10, 11, 12, 13の移動量の累積勾配は施工前より施工後のほうがゆるくなっている。例えば T-12についてみると施工前の昭和52年4月～昭和53年9月の移動量は平均 8mm/月であったのに対し、施工後の昭和54年2月～昭和55年2月の間の移動量は平均 3.5mm/月であり、排水壁工施工前の半分以下となっている。

なお、排水壁工施工時に顕著な移動が見られるが、これは施工のためのオープンカットによる影響である。

寸分道地すべり地においても猿供養寺地すべり地と同様に斜面の移動量観測を実施しているが、排水壁工の施工前後の移動量はいずれも小さいため、猿供養寺地すべり

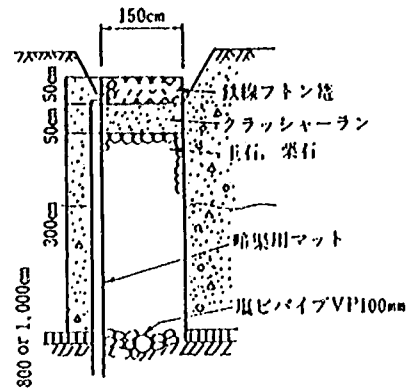


図-5 排水壁工構造図

り地のような傾向は見い出せない。なお、寸分道地すべり地における排水壁工は昭和58年9月～11月にかけて施工されている。排水壁工の構造を図-5に示す。

2 間隙水圧変動から見た排水壁工の影響

猿供養寺・寸分道地すべり地では間隙水圧の観測を行っている。この観測結果より、排水壁工施工による間隙水圧への影響についてみた。なお、両地すべり地とも移動層厚が4～5mで、浅層地下水が存在することより自由地下水流であると判断でき、間隙水圧はほぼ静水圧に等しいと考えられることより、間隙水圧 0.1 kg/cm² を地下水位 1.0m に換算できる。

2.1 猿供養寺地すべり

猿供養寺地すべり地では、排水壁工施工前の間隙水圧のデータがないため、昭和58年8月中旬から9月上旬までの期間における降雨直後の地下水水位変化に着目した。当期間においては、8月18日から23日に131.5mmの降雨があり、その後の9月11日までの19日間には降雨がなく、この期間の間隙水圧は図-6に示すような観測値を示した。P-22（排水壁工上流約4m）の間隙水圧は降雨終了後約1週間でほぼ定常状態に落ち着き、その低下量は約 0.1 kg/cm² である。P-21（排水壁工上流約9m）はP-22よりも間隙水圧の低下量が小さく、排水壁工による排水の影響が弱いものと思われる。P-14（排水壁工上流約20m）は間隙水圧がほとんど低下せず、排水壁工の影響はほとんどないものと思われる。このことより排水壁工の排水影響範囲は約20m（上流側）までであると推定できる。つまり、8月18日から23日のような降雨があった後、地下水は排水壁工により排水され、地下水水位が約一週間で低下し、斜面の安全率が高まると考えられる。排水壁工の影響のほとんどないと思われるP-14でのこの場合の間隙水圧低下量は約 0.02 kg/cm² であり、排水壁工が施工されていない場合の水位低下量はこの程度であろうと推定される。

2.2 寸分道地すべり

寸分道地すべり地での間隙水圧の観測は平均週一回の

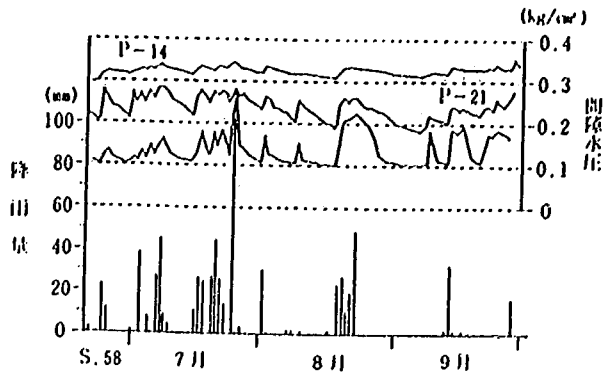


図-6 降雨と間隙水圧 (猿供養寺)

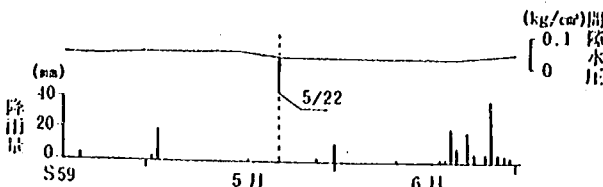
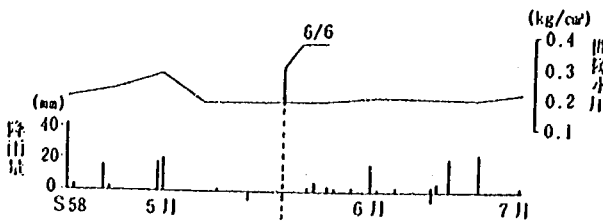


図 7 降雨と間隙水圧 (寸分道)

手視測で実施されているため猿供養寺地すべり地のようなきめ細かいデータは得られていないが、排水壁工の施工以前より視測が実施されているため、排水壁工の施工前と施工後の間隙水圧の変化を比較することができる。そこで排水壁工施工前と施工後で降雨条件に違いの少ない日を抽出した。施工前は昭和58年6月6日、施工後は昭和59年5月22日である。この両日前後の降雨と間隙水圧測定結果を図-7に示すが両日以前20日間には1mmの降雨しかなく、地下水位もほぼ定常状態にあると判断できる。従ってこの両日の地下水位の差が定常状態における排水壁工の地下水位低下効果と考えることができる。その水位低下量はU-5(排水壁工の上流約7m)で約1.5mである。また、排水壁工による水位低下範囲は、降雨等による間隙水圧の変動の少ないU-7(排水壁工の上流約32m)までと考えられる。

3 排水壁工による地下水位低下範囲の予測

3.1 計算方法

地すべり斜面内の地下水位に排水壁工が及ぼす影響を定量的に把握し、その範囲を明らかにすることができれば、地すべり対策工事の計画、施工に際し有効な基礎資料になる。そこで排水壁工による地下水位低下範囲を定量的に検討すべく数値計算を実施し、視測データとの比較を行った。

自由水面を有する地下水流の数値計算手法としては、有限要素法^{1),2)}、境界要素法³⁾が汎用性に富み、精度も高い手法として提案されている。今回採用した手法は大容量計算機の使用やプログラム化のため複雑な離散化が必要な有限要素法によらず、現実のすべり斜面での地下水流動解析ができること、解析に際し現場事務所の小型容量のパソコンでも解析可能なことおよび解析に必要な水理地質定数の現場視測精度を考慮して平面二次元差分解法によることとした。

自由水面を有する地下水の流れを平面二次元的に見て座標系を図-8のようにとると連続方程式は式(1)で与えられる⁴⁾。

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(hu) - \frac{\partial}{\partial y}(hv) + r \quad \dots\dots\dots(1)$$

- ここに、 h : x, y 平面に垂直に測った水深
- u, v : x, y 方向の平均流速
- r : 流出および流入量
- θ : 有効間隙率

また、連続方程式(1)と運動方程式としてのダルシー則を用いると自由地下水流の基礎方程式が得られるが、デュブイとフォルハイマーによれば、自由水面の勾配があまり大きくなく、流線の曲がりも小さい場合には、流れの平均的な通過断面内で流速は一様分布と考えてよいことより、静水圧に対してポテンシャルは次式で与えられる⁴⁾。

$$\phi = h \cos i_x \cdot \cos i_y + z \quad \dots\dots\dots(2)$$

- ここに、 ϕ : ポテンシャル
- i_x, i_y : 不透水基盤が水平となす角
- z : 不透水基盤の標高

いま、 i_x, i_y が十分小さい場合には $\phi = h + z$ とみなしてさしつかえなく、今回の解析地すべり地での不透水基盤は地下水検層の結果⁶⁾からすべり面と同位置であると仮定し、一定勾配とした。したがって式(2)のポテン

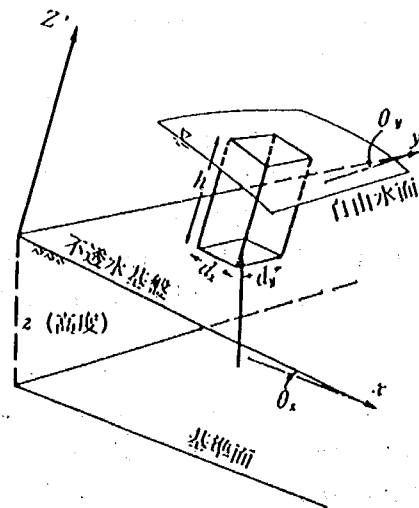


図-8 モデル模式図

シャルは $\alpha = \cos i_x \cdot \cos i_y$ とすると、次式で与えられる。

$$\phi = \alpha h + z \dots\dots\dots (3)$$

したがって、自由地下水流の基礎方程式は、

$$\begin{aligned} 0 \frac{\partial h}{\partial t} = & kh \left(\alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \\ & + kh \left(\alpha \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ & + k\alpha \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ & + k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + r \dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 k ：透水係数

式(4)の離散化においては左辺にクラクニコルソソ法を適用し、右辺はテイラー級数展開法を利用し、第3項まで採用し、差分近似を行った。なお、離散化にあたっては、地下水の浸出点近傍においては誤差の累積を防ぐため、差分間隔を密にとれるよう等間隔でなくても計算が実施できるよう配慮した。すなわち、ある任意点の水深 h_{j-1} 、 h_{j+1} は h_j の水深値を用いて水面が比較的なめらかであるとすれば、級数展開の第3項まで採用して次式で近似できる。

$$h_{j-1} = h_j - l_1 \frac{\partial h_j}{\partial x} + \frac{1}{2} l_1^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$h_{j+1} = h_j + l_2 \frac{\partial h_j}{\partial x} + \frac{1}{2} l_2^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 l_1 、 l_2 はそれぞれ h_{i-1} と h_i 、 h_{i+1} と h_i 間の間隔であり、 l_1 と l_2 は等間隔でなくともよい。

したがって、式(5)と(6)より h_i 点の $\partial h_j / \partial x$ と $\partial^2 h_i / \partial x^2$ が求められ、式(4)の離散化が可能である。

3.2 計算条件および結果

前章2において着目した期間の地下水位について平面二次元モデルによる解析を実施した。猿供養寺地すべりについては昭和58年8月18日～23日の131.5mmの降雨直後の地下水位上昇時を計算初期水位として無降雨時の地下水位低下時の水面形をシミュレーションし、排水壁工の排水効果について検討した。寸分道地すべりについては、無降雨時で地下水流が定常状態と判断できる排水壁工施工前と施工後の地下水位を施工前水位を初期水位として施工後水位のシミュレーションを実施した。以下にその計算条件と結果を述べる。

3.2.1 猿供養寺地すべり

図-9に数値計算結果および観測結果を示す。

計算条件としては、初期水位を昭和58年8月23日(131.5mmの降雨直後)とし、透水係数は $1.0 \times 10^{-3} \text{cm/sec}$ 、有効間隙率は0.1とした。透水係数は室内透水試験の結果を用い、有効間隙率は間隙水圧と降雨の関係から求めたものである。また境界条件は上流側P-14地点を固定水位とし、排水壁工内の水深を1.0mと推定した。なお、差分間隔は1～4m、計算単位は日単位とした。

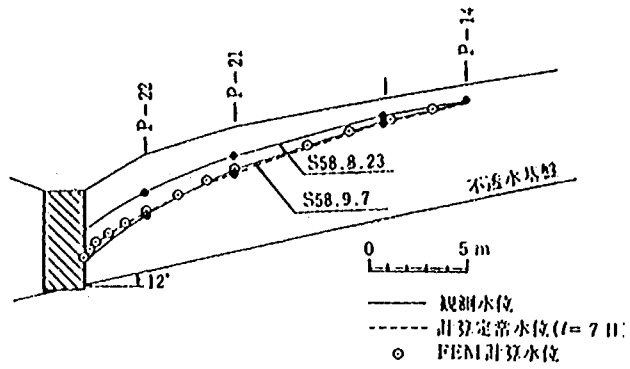


図-9 猿供養寺地すべり観測及び計算地下水位

計算結果をみると定常状態での水位は観測値と計算値がよく一致している。

図-9に示す観測水位のうち8月23日の地下水位は18日から降り始めた一連の降雨の直後のものであり、9月7日の地下水位は、8月23日以降の無降雨期間により地下水位がほぼ定常状態になったと観測値より判断された水位である。

ただし、地下水位低下の大半が8月23日以後約一週間が生じている。

また、計算ステップ(ここでは1日)ごとの水位の低下量が1cm以内になれば、ほぼ定常状態であるとする、これに要する日数は7日間であり、この結果も観測値とよく一致している。

以上より猿供養寺地すべり地においては、昭和58年8月のような降雨(131.5mm)があり、その後無降雨日が続くと排水壁工により地下水位は一週間程度ではほぼ定常状態になるまで低下し、その低下量は排水壁工の上流約3mの位置で1m程度であり、排水壁工により地下水位が低下する範囲は排水壁工の上流約20mと考えられる。

なお、計算は16ビットパソコンにより実施し、計算に要する時間は出力も含めて30分程度であった。

3.2.2 寸分道地すべり

図-10に数値計算結果及び観測結果を示す。計算条件としては、初期水位を排水壁工施工前の昭和58年6月6

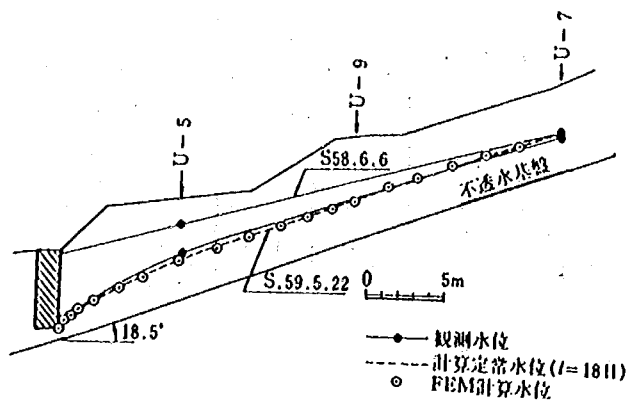


図-10 寸分道地すべり観測及び計算地下水位

日の水位とし、透水係数は 5×10^{-4} cm/sec, 有効間隙率は猿供養寺地すべり地と同様の方法で求め、0.035 とした。透水係数は現地における簡易揚水試験結果より求め、有効間隙率は降雨と間隙水圧の変化により求めたものである。境界条件は、上流側U-7 地点(排水壁工上流約32 m)の地下水位を固定水位とし、排水壁工内の水深を0 mとした。また、計算単位は3日とした。

以上の条件により施工後の昭和59年5月22日の水位をシミュレーションした。

結果をみると定常状態での水位は観測値と計算値がよく一致している。また、計算ステップ(3日)毎の水位の低下量が3 cm 以内になればほぼ定常状態とすると定常状態になるまで要する日数は18日間であった。この結果は観測結果と比べるといくぶん長すぎるため、パラメータの設定等に問題が残るものと思われる。

以上より、寸分道地すべり地においては排水壁工の施工により、降雨の影響のほとんどない状態で地下水位は排水壁工の上流約7mで約1.5m程度低下している。また、排水壁工による地下水位の低下範囲は上流側約30mと考えられる。

なお、今回提案した平面二次元差分解法が妥当であるか比較するために有限要素法⁶⁾によって得られた定常状態の水面形の結果を図-9, 10に◎で示した。解析結果は排水壁工の地下水の浸出点以外は非常によい一致を見ており、今回提案する平面二次元差分解法によって排水壁工による地下水低下範囲が評価できるものと思われる。

4 斜面安定計算

前章 3. の計算水位を用いて斜面安定計算を行った結果を表-1に示す。計算方法は簡便法と Morgenstern and Price 法⁷⁾の2通りの方法により行った。すべり面の位置等はこれまでの調査^{5), 8)}で推定されているものとした。

また、今回の安定計算は、排水壁工以外の対策工については考慮しておらず、今回求めた安全率は相対的なも

のであり、実際の斜面の安全率は表-1の値に他の対策工による安全率の向上分を加算したものとなっている。

計算結果では猿供養寺地すべり地、寸分道地すべり地とも排水壁工による地下水位低下により安全率が約0.05高くなっている。

5 おわりに

猿供養寺、寸分道地すべり地に施工された排水壁工の観測、解析を通して得られた点を要約すると以下のとおりである。

① 排水壁工の影響範囲は、猿供養寺地すべり地で約20m、寸分道地すべり地で約30mである。これら範囲での地下水位低下量は今回提案する地下水解析手法で適当な境界条件、水理地質定数を与えることによって容易に推定できる。

② 今回検討したケースでは、排水壁工施工により斜面の安全率は0.05程度高くなっており、この影響が移動観測結果に表れているものと思われる。

しかしながら、まだ降雨の影響、排水流量との関係は明らかでないことや、斜面の不均一性についても考慮しておらず、これら諸事項について今後調査を実施する必要がある。

参考文献

- 1) Verruijt: Theory of Groundwater Flow, Pub. The macmillan press p. 145.
- 2) 山上拓男: 有限要素法による非定常浸透流解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第263号, 1977年7月, p. 85~95.
- 3) James. A. Liggett: Location of Free Surface in Porous Media Jour of ASCE Vol. 103 HY 4 p. 353~365.
- 4) 今木博健, 板倉忠典, 高木不折共著: 水理学の基礎, 技報堂, p. 162.
- 5) 山内 修, 白石一夫: 粘質土すべり地におけるくい工の挙動, 土木技術資料, Vol. 26, No. 9, 1984.
- 6) 有限要素法による浸透流解析(手法とプログラム): 京都大学工学部土木工学教室, 路盤基礎工学研究室編, p. 260, 1977.
- 7) 建設省土木研究所砂防部地すべり研究室: Morgenstern and Price 法による地すべり斜面の安定解析法, 土木研究所資料, 第1510号.
- 8) 新潟試験所: 猿供養寺地すべり調査報告書, 土木研究所資料, 第1770号.

表-1 安定計算結果

*****		猿 供 養 寺		寸 分 道	
		8月23日	9月7日	施工前	施工後
γ_t		1.80t/m ³		2.10t/m ³	
c		0 t/m ²		0 t/m ²	
ϕ		18°		21.5°	
F's	Morgenstern and Price法	1.08	1.13	0.91	0.96
	簡便法	0.95	1.00	0.88	0.93

数値計算による地下水位解析

ISSN 0386-5878
土木研究所資料 第2619号
昭和63年3月(1988)

新潟試験所 所長 樹司 大輝行*
一政 清弘正**
是近 白丸吉横
元新潟試験所 所長 沢藤 石山松山
元新潟試験所 吉横 山 正**

要旨 地すべり地内の地下水を高い精度で把握することは、地すべり対策工の効果判定を行う上で重要である。しかし、現地での測定は技術的、経済的にかなり困難である。そこで、水理地質的なパラメーターを介して数値計算によりシミュレーションすることができれば大変便利である。
今回は、解析に必要な水理地質定数の精度を考慮し、小容量のパソコンでも解析可能で簡易な手法である平面二次元の差分解法を試みた。

キーワード：数値解析、地下水位解析、シミュレーション、排水壁工、現地観測

* 現急傾斜地崩壊研究室長
** 現北陸地方建設局千曲川工事事務所

郵便はがき

9 4 4 - □ □

四十円切手を
はって下さい。

新潟県新井市錦町

二丁目六番八号

建設省土木研究所

新潟試験所 御中

No. 07

土木研究資料第 2619号 部

上記のとおり受領しました。

所属(住所)

氏名 印